微积分五讲

作者：龚昇

《星光居士严肃脸》及参考文献持续更新网址
https://github.com/xingguangjushi/xgjsysl

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分五讲

龚　昇 著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书从现代数学的观点以及矛盾的观点来重新审视与认识微积分.用通俗的语言讲述了微积分从哪里来、微积分的三个发展阶段、微积分严格化后走向哪里、微积分的主要矛盾,尤其用外微分形式的观点来说清楚高维空间上微积分的主要矛盾,用矛盾的观点来梳理微积分中的定理与公式等,使读者从高一个层次上来认识微积分.

本书适合理工科专业的大学生、研究生、教师以及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分五讲/龚昇著.—北京:科学出版社,2004
(中国科学技术大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-013439-7

Ⅰ.微… Ⅱ.龚… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 049651 号

责任编辑:杨 波 李鹏奇/责任校对:李奕萱
责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005 年 1 月第二次印刷 印张:6 1/4
印数:3 001—8 000 字数:77 000

定价:14.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　言

2002 年 3、4 月之间，根据陈省身教授的嘱咐，我在天津作了微积分的系统讲演，共 16 学时．2003 年 4 月，我在丘成桐教授创办的浙江大学数学科学研究中心工作期间，又作了微积分的系统讲演，共 10 学时．这两次系统讲演，听众是大学生和一些大学教师，这本小书就是根据这两次系统讲演的讲稿及录像整理而成的．

本书着重阐明数学思想，因此，不求句句话都十分严格，而求通俗易懂．这本小书也实际上阐述了我对微积分这门学科及大学微积分这门课程的看法，其中有一些看法也许是新的，这当然是我个人的浅见，未必正确，说出来供正在学习或已经学过微积分的大学生及教微积分的教师们参考．

我要感谢陈省身教授，他对我的多次有关数学，尤其是微积分的谈话，使我深受教育，得益匪浅．例如：他十分深刻地指出了，多变量微积分与单变量微积分的根本差别在于前者有外微分形式．

我也要感谢南开大学刘徽数学研究中心及浙江大学数学科学研究中心，尤其是南开大学的葛墨林教授、天津大学的熊洪允教授、浙江大学的许洪伟教授、尹永成教授，他们为我作这两次系统讲演及写作这本小书给予了极大的关心、帮助与支持．中国科学技术大学的程艺教授、叶向东教授、章璞教授等对此书也给予了极大的关心、帮助与支持，尤其是余红兵教授仔细阅读了书稿并提出了十分宝贵的意见，这些都使我感激不尽．科学出版社杨波、李鹏奇先生为本书的出版作了很大的努力，我深表感激．我还要感谢沈可美小姐为精心打印本书所付出的辛勤劳动．

龚　㴍
2003 年 5 月于杭州灵峰山庄

目　　录

第一讲　回顾中学数学

1.1　百年前的讲演

20 世纪已经过去了，这是一个伟大的世纪．在这个世纪，数学得到了前所未有的迅猛发展．在这个世纪即将来临时，1900 年 8 月 5 日，德国数学家希尔伯特（David Hilbert 1862～1943）在巴黎第二次国际数学家大会上作了题为“数学问题”的著名讲演[1]．这是一个载入史册的重要讲演．他在讲演的前言和结束语中，对数学的意义、源泉、发展过程及研究方法等，发表了许多精辟的见解，而整个讲演的主体，则是他根据 19 世纪数学研究的成果和发展趋势而提出的 23 个数学问题．这些问题涉及现代数学的大部分重要领域．100 多年来，这些问题一直激发着数学家们浓厚的研究兴趣．到现在为止，这些问题近一半已经解决或基本解决，但还有些问题虽已取得重大进展，而未最后解决，如：Riemann 猜想，Goldbach 猜想等．

对 Hilbert 在 1900 年提出的 23 个问题，现在回过头来看，有不少评论，但是很多人认为：这些问题，对推动 20 世纪数学的发展起了很大的作用，当然也有评论说其不足之处，例如这 23 个问题中未能包括拓扑、微分几何等在 20 世纪成为前沿学科领域中的数学问题；除数学物理外很少涉及应用数学等等．当然更不会想到 20 世纪电脑的大发展及其对数学的重大影响．20 世纪数学的发展实际上是远远超出了 Hilbert 问题预示的范围．

Hilbert 是 19 世纪和 20 世纪数学交界线上高耸着的三位伟大数学家之一．另外两位是：庞加莱（Henri Poincaré，1854～1912）及克莱因（Felix Klein，1849～1925）．他们的数学思想及对数学的贡献，既反射出 19 世纪数学的光辉，也照耀着 20 世纪数学前进的道路．Hilbert 在 1900 年作此讲演时，年仅 38 岁，但已经是当时举世公认的

德高望重的三位领袖数学家之一．

Hilbert 是在上一个世纪，新旧世纪交替之际作的讲演，现在又一个新的世纪开始了，再来看看他的讲演，其中一些话，现在仍然适用．例如在讲演一开始，他说：“我们当中有谁不想揭开未来的帷幕，看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？”他还接着说：“历史教导我们，科学的发展具有连续性．我们知道，每个时代都有自己的问题，这些问题后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题．因为一个伟大时代的结束，不仅促使我们追溯过去，而且把我们的思想引向那未知的将来．”

20 世纪无疑是一个数学的伟大时代．21 世纪的数学将会更加辉煌．“每个时代都有它自己的问题”．20 世纪来临时，Hilbert 提出了他认为是那个世纪的 23 个问题，这些问题对 20 世纪的数学发展起了很大的推动作用，但 20 世纪数学的成就却远远超出他所提出的问题．那么，21 世纪的问题又是什么呢？在这个新、旧世纪之交，也有不少杰出的数学家提出了他们认为是 21 世纪的数学问题，但往往是“仁者见仁，智者见智”．到现在为止，所有提出的这些问题，还没有一些像 Hilbert 当时提出的 23 个问题那样为大家所普遍接受．

对 Hilbert 的 23 个问题，不在这里介绍了，有兴趣的读者可参阅李文林的著作[2]．但百年前，Hilbert 讲演中对数学的一些见解都是非常深刻的．百年过去了，重读他的讲演，依然得到很多启示．当然不可能在此对他的讲演中各个部分都来阐述自己的体会，只想讲一点自己对他说的一段话的粗浅认识．

从 17 世纪 60 年代微积分发明以来，数学得到了极大的发展，分支愈来愈多．开始时一些大数学家对各个分支都懂，并做出了很多重大贡献，但后来数学的分支愈分愈细，全面懂得各个分支的数学家愈来愈少．到 19 世纪末，Hilbert 做讲演时，已经是这种情况．于是在讲演中，他说了这样一段话：“然而，我们不禁要问，随着数学知识的

不断扩展，单个的研究者想要了解这些知识的所有部门岂不是变得不可能了吗？为了回答这个问题，我想指出：**数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着，这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论并把陈旧的、复杂的东西抛到一边．数学科学发展的这种特点是根深蒂固的**．因此，对于个别的数学工作者来说，只要掌握了这些有力的工具和简单的方法，他就有可能在数学的各个分支中比其他科学更容易地找到前进的道路”．100 多年过去了，数学发展得更为广阔与深入，分支愈来愈多，现在数学已有 60 个二级学科，400 多个三级学科，更是不得了，所以，Hilbert 的上述这段话现在显得更为重要．不仅如此，Hilbert 的这段话实际上讲的是数学发展的历史过程，十分深刻地揭示了数学发展是一个推陈出新、吐故纳新的过程，是一些新的有力的工具和更简单的方法的发现与一些陈旧的、复杂的东西被抛弃的过程，是“**高级**”的数学替代“**低级**”的数学的过程，而“**数学科学发展的这种特点是根深蒂固的**”．事实上，在数学的历史中，一些新的有力的工具和更简单的方法的发现，往往标志着一个或多个数学分支的产生，是一些老的分支的衰落甚至结束．

回顾一下我们从小开始学习数学的过程，就是在重复这个数学发展的过程．一些数学虽然后来被更有力的工具和更简单的方法所产生的新的数学所替代了，即“**低级**”的被“**高级**”的所替代了，但在人们一生学习数学的过程中，却不能只学习“**高级**”的，而完全不学习“**低级**”的，完全省略掉学习“**低级**”的过程．这是因为人们随着年龄的不断增长，学习与他的年龄与智力发育相当的数学才是最佳选择，学习数学是一个循序渐进的过程，没有“**低级**”的数学打好基础，很难理解与学习好“**高级**”的数学．

以下我们从 Hilbert 讲演中的这一段精辟的论述的角度来认识我们的中小学的数学课程，也只是从数学发展的历史的角度来讨论问题，这与教育的角度来考虑问题，虽有联系，但是不一样的．

1.2　算术与代数

人类有数的概念，与人类开始用火一样古老，大约在 30 万年前就有了，但是有文学记载的数字到公元前 3400 年左右才出现，至于数字的四则运算则更晚．在我国，《九章算术》是古代数学最重要的著作，是从先秦到西汉中叶的众多学者不断修改、补充而成一部数学著作，成书年代至迟在公元一世纪．这是一本问题集形式的书，全书共 246 个题，分成九章，包含十分丰富的内容，在这本书中有分数的四则运算法则、比例算法、盈不足术、解三元线性代数方程组、正负数、开方以及一些计算几何图形的面积与体积等．在西方，也或迟或早地出现了这些内容，而这些内容包括了我们从小学一直到中学所学习**“算术”**课程的全部内容．也就是说，人类经过了几千年才逐渐弄明白的**“算术”**的内容，现在每个人的童年时代花几年就全部学会了．

对于**“算术”**来讲，**“真正的进展”**是由于**“更有力的工具和更简单的方法的发现”**，这个工具与方法是**“数字符号化”**，从而产生了另一门数学**“代数”**，即现在中学中的**“代数”**课程的内容．在我国，这已是宋元时代（约 13 世纪五六十年代），当时的著作中，有**“天元术”**和**“四元术”**，也就是让未知数记作**“天”**元，后来将两个、三个及四个未知数记作**“天”**、**“地”**、**“人”**、**“物”**等四元，也就是相当于现在用 x，y，z，w 来表达 4 个未知数．有了这些**“元”**，也就可以解一些代数方程与联立代数方程组了．在西方，彻底完成数学符号化是在 16 世纪．现在中学中学习的“代数”课程的内容，包括有一元二次方程的解，多元（一般为二元、三元至多四元）联立方程的解等．当然，在“数学符号化”之前，一元二次方程的解，多元联立方程的解已经出现，例如我国古代已有一些解一般数字系数的代数方程的“算法程序”，但这些都是用文字表达的，直到“数字符号化”之后，才出现了现在中学代数内容的形式．

由**“数字符号化”**而产生的中学**“代数”**的内容，的的确确是**“数学中真正的进展”**．**“代数”**的确是**“更有力的工具和更简单的方

法”．**“算术”**顾名思义，可以理解为**“计算的技术与方法”**，课程名称取为**“算术”**也许是从我国古代的《九章算术》而来．而**“代数”**可以理解为**“以符号替代数字”**，即**“数字符号化”**．人类从**“算术”**走向**“代数”**经历了千年，但在中学的课程中，却只花短短的几年就可以全部学会这些内容．

在这里，我要重复说一遍，尽管中学的**“代数”**比小学的**“算术”**来的**“高级”**，是**“更有力的工具和更简单的方法”**，但并不意味着小学的**“算术”**就可以不必学了．这是因为：(1)**“算术”**中的一些内容不能完全被**“代数”**所替代，如四则运算等；(2)即使是能被替代的内容，适当地学习一些，有利于对“代数”内容的认识与理解；(3)从教育学的角度考虑，这里有循序渐进的问题，有学生不同年龄段的接受能力的问题等等．

作为中学**“代数”**中的一个重要内容是解多元一次方程组．在中学**“代数”**的教材中，一般着重讲二元或三元一次联立方程组，所用的方法是消元法，但是，如果变元为四个或更多时，就得另想办法来建立起多元一次联立方程组的理论．经过很多年的努力，向量空间即线性空间、线性变换即矩阵的概念产生了，这不但给出了多元一次联立代数方程组的一般理论，而且由此建立起一门新的学科**“线性代数”**．这是又一次**“数学中真正的进展”**．由于**“更有力的工具和更简单的方法”**，即**向量空间即线性空间**，**线性变换即矩阵**的概念与方法的建立，不仅对多元一次联立代数方程组的理解更为清楚，更为深刻，且由于有了统一处理的方法，可以把个别地处理方程组的方法**“抛到一边”**．当然**“线性代数”**的产生还有些其他的因素，但解多元一次联立代数方程组是**“线性代数”**最重要，最生动的模型，而**“线性代数”**的产生的确再次印证了 Hilbert 所说的那段话．

在中学“代数”中另一重要内容是解一元二次方程．在古代，例如《九章算术》中已有解一般一元二次方程的算法，后来有很多的发展，直到花拉子米（M．al-Khowārizmi，约 783～850）给出了相当于一般形式的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的一般的求根公式为

$x=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$(但他不取负根和零根). 1545 年由卡尔丹（G. Cardano，1501～1576）公布了塔塔利亚（N. Fontana，1499?～1557）发现的解一元三次方程的解. 而一元四次方程的解由费拉里（L. Ferrari，1522～1556）所解决. 于是当时大批的数学家致力于更高次方程的求根式解，即企图只对方程的系数作加、减、乘、除和正整数次方根等运算来表达方程的解. 经过了两个世纪的努力，大批数学家都失败了，直到 1770 年，拉格朗日（J. L. Lagrange，1736～1813）看到了五次及高次方程不可能做到这点. 又过了半个世纪，1824 年阿贝尔（N. H. Abel，1802～1829）解决了这个问题，即对于一般的五次和五次以上的方程求根式解是不可能的. 但什么样的代数方程能根式可解，这个问题被伽罗瓦（E. Galois，1811～1832）所解决. 他证明了：方程根式可解当且仅当它的 Galois 群可解，当然在这里不解释什么是 Galois 群，什么叫可解. Abel 与 Galois 不仅解决了 300 年来无法解决的著名难题，更重要的是：为了解决这个问题，他们建立起了“**域**”与“**群**”的概念. 这就意味着现代代数理论的产生. 这是又一次“**数学中真正的进展**”. 它是由于“**更有力的工具和更简单的方法**”，即“域”与“群”的发现而造成的. 有了“**域**”，尤其是“**群**”以及后来发展起来的现代代数理论，可以更清楚，更深刻地理解以往高次代数方程求根式解的问题，而的确可以把以往那些“**陈旧的，复杂的东西抛到一边**”. 从此翻开了数学崭新的一页.

以“群”、“环”、“域”为基本内容与出发点的现代代数理论，在大学的课程中的“**近世代数**”就是介绍这些内容的，这已成为现代数学中的基本内容与语言之一，它们在历史上及现代数学中都有不可估量的作用. 例如：1872 年由 Klein 提出的著名 Erlangen program，即认为各种几何学所研究的实际上就是在各种变换群下的不变量这个数学思想，是企图将以往看来关系不大的各种几何学用统一的观点来认识与研究，不仅对几何学的发展，而且对整个数学的发展起了巨大的作用. 又例如：讨论了几千年的尺规作图问题，由于域论的出现而彻底

解决．所谓尺规作图问题，就是用无刻度直尺和圆规作出平面或立体图形，最为著名的如古希腊三大几何作图问题．(1) 三等分角，即分任意角为三等分．(2) 倍立方体，即作一个立方体，使其体积等于已知立方体的两倍．(3) 化圆为方，即作一个与给定的圆面积相等的正方形．这些问题的提出是公元前 5 世纪以来逐渐形成的，也不知有多少人为之努力过而徒劳无功，而这些问题的彻底解决不过是域论中一个基本而简单的结论的推论．

近世代数的来源与发展当然还有其他的因素，但 Abel，Galois 的贡献无疑是奠基性的．线性代数与近世代数之间有着深刻的联系．例如：线性代数所讨论的一个线性变换作用在一个向量空间上成为近世代数中“**模**”的最基本的一个模型．

可以将本节所讨论的内容简略画一个图形如下（图 1.1）：

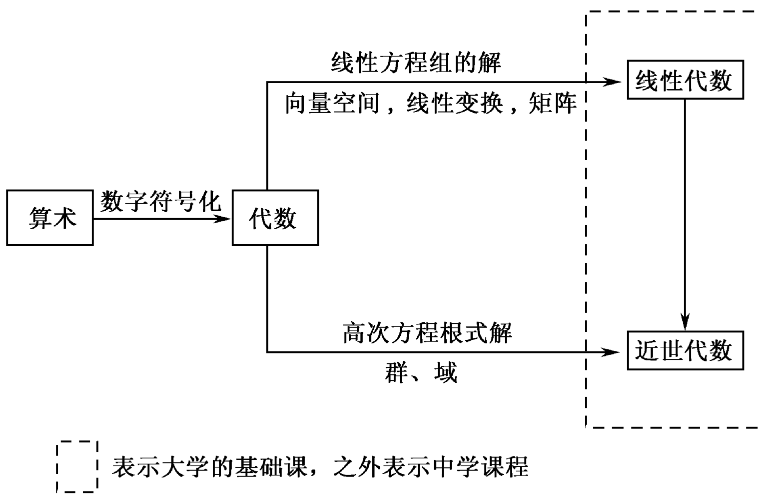

图 1.1

1.3 几何与三角

人类在很早的时候，就有各种计算面积与体积的公式或经验公式，也得到了不少几何的定理．例如：著名的毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580～前 500）定理等．但在古代作为几何的代表作，则是欧几

里得（Euclid）的《原本》（Elements）. Euclid 生平不详，只知他在公元前 300 年左右活跃于亚历山大城 .《原本》共 13 卷[3]，包括 5 条公理，5 条公设，119 个定义和 465 条命题，构成了历史上第一个数学公理体系，可以说其影响一直延续至今，现在中学中学习的 **“平面几何”** 与 **“立体几何”** 的内容，在《原本》中都已有了 .《原本》不但包括了 **“平面几何”** 与 **“立体几何”** 的内容，而且还涉及到其他一些数学内容，如数论的一些内容等 . 所以《原本》不完全是一部纯几何的著作，这是一部历史上印数最多的著作之一（仅次于圣经），一部历史上应用时间长达 2000 年的书，而且其影响之大，如数学公理化的思想，不仅影响几千年来数学的发展，还影响到许多其他学科 .

总之，现在我们中学里学习的 **“平面几何”** 与 **“立体几何”** 的基本内容，是 2300 年前已有的内容 . 从《原本》问世以来，几何领域一直是它的一统天下，这种现象持续了 1000 多年 . **“真正的进展”** 是笛卡儿（R. Descartes，1596～1650）与费马（P. de Fermat，1601～1665）建立起来的 **“解析几何”** 的产生，其基本思想是在平面上引进 **“坐标”**，使得平面上的点与实数对（x，y）之间建立起一一对应，于是几何问题可以用代数形式来表达，而几何问题的求解就归化为代数问题的求解 . 一旦代数问题得解，就可以得到几何问题的解 . Descartes 甚至还提出过一个大胆的计划，即

任何问题→数学问题→代数问题→方程求解

也就是说，任何问题都可以归化为数学问题，而任何数学问题都可以归化为代数问题，而任何代数问题都可以归化为方程求解问题 . 一旦方程得解，则代数问题、数学问题从而原来的问题就得解，对一些问题来说，这也许是对的，可行的，例如：对一些几何问题，这往往是很有效的，但一般来说这是难于实现的 .

解析几何的产生可以理解为变量数学的开始，为微积分的诞生创造了条件 . 由于引进了坐标，几何问题归结为代数问题，于是可以用一些代数的工具与方法来处理，从而使几何问题得解 . 这种思想与方法，使整个数学面目为之一新，这的确是 **“数学中一步真正的进展”**.

引进坐标，建立起点与数对之间的一一对应，的确是“**更有力的工具与更简单的方法**”，而“**这些工具与方法**”的确可以更深刻理解已有的理论．如直线就是一次方程，圆锥曲线就是二次方程等，而也的确可以“**把陈旧的，复杂的东西**”，如一些平面几何中难题的复杂的解题技巧等“**抛到一边**”．

现在中学生学习的“**解析几何**”课程的内容，基本上是17世纪由Descartes与Fermat建立起来的内容，也就是300多年前的内容，其中除了讨论直线、平面、圆、球以外，还有圆锥曲线．人类对圆锥曲线的讨论，甚至可以追溯到阿波罗尼奥斯（Apollonius，约公元前262～前190）．但人们真正完全认识清楚圆锥曲线也许是在解析几何产生后，弄清了圆锥曲线就是二次曲线之后．由于引入了坐标，人们不仅能讨论直线与平面——一次曲线与曲面，圆、球、圆锥曲线与曲面——二次曲线与曲面，还能讨论更为高次的曲线及其他曲面．不仅如此，由于几何问题归化为代数问题，可以通过计算机来证明与制造各种几何定理，这就是“**机器证明**”，我国的吴文俊院士对此作出了巨大贡献．

既然“**解析几何**”是“**数学中一步真正的进展**”，“**解析几何**”比起“**平面几何**”与“**立体几何**”都来得“**高级**”，那么“**平面几何**”与“**立体几何**”是不是就不要学习了，直接学习“**解析几何**”就可以了．从教育学的观点，这显然是不对的，我们所说的“**把陈旧的，复杂的东西抛到一边**”是指“**解析几何**”产生之后，那种用原来的方法来创造与发明几何定理的时代已经过去了．

在中学中必须学习“**平面几何**”与“**立体几何**”，至少有以下几点理由：(1)可以认识人们生活的三维Euclid空间中一些最基本的几何关系与性质，即几何直觉；(2)不学习“**平面几何**”与“**立体几何**”，无法学习“**解析几何**”与“**微积分**”；(3)“**平面几何**”与“**立体几何**”是训练学生严格逻辑思维的最好方法之一，这种训练比上一门“**形式逻辑**”课更为有效，且这种训练对学生终生有用．当然中学中“**平面几何**”与“**立体几何**”应上多少内容是一个值得探讨的问题，完全取

消是绝对错误的，做过多的几何难题也似乎是不必要的．

对古典几何的另一个“**真正的进展**”是“**非欧几何**”的产生，这是数学史上的划时代贡献，是19世纪最重要的数学事件之一，它打破了Euclid几何的一统天下，给人们很多启示，数学从此翻开了全新的一页．

前面说到Euclid的《原本》有五条公设与五条公理，五条公设是：(1)从任意一点到任意一点可作一直线；(2)一条直线可不断延长；(3)以任意中心和直径可以画圆；(4)凡直角都彼此相等；(5)**若一直线落在两直线上所构成的同旁内角和小于两直角，那么把两直线无限延长，它们将在同旁内角和小于两直角的一侧相交**．人们对前四条感到简洁、明了、无可厚非，而对第五公设，感到它不像一条公设，而更像一条定理，即这是可以从其他公设、公理及定理中推导出来的．第五公设（也叫平行公设）有很多等价的叙述，最常用的为：“**过已知直线外一点，能且只能作一条直线与已知直线平行**”．

2000多年来，不知有多少数学家致力于用其他的公设、公理及定理来证明第五公设，甚至有人花去了整个一生，但统统归于失败．直到19世纪，高斯(C.F.Gauss，1777～1855)、波约(J.Bolyai，1802～1860)、罗巴切夫斯基(N.U.Lobatchevsky，1792～1856)创立了“非欧几何学”，才结束了这件公案．

他们三人是各自独立地几乎是同时地创立了“**非欧几何学**”．其主要思想是：一反过去人们企图从其他公设、公理及定理来证明第五公设的做法．认为：第五公设不可能从其他的公设、公理及定理中推出来，从而发展起第五公设不成立的新的几何学．Gauss称之为“**非欧几里得几何学**”，简称“**非欧几何学**”．如同一切新生事物所要经历的那样，“**非欧几何学**”从发现到普遍接受，经历了曲折的道路，要为大家所普遍接受，需要确实地建立起“**非欧几何**”本身的无矛盾性和现实意义．

1854年黎曼（B.Riemann，1826～1866）在“非欧几何”的思想基础上将Euler，Gauss等数学家的工作发扬光大，建立了更为广泛的

几何学，即“**Riemann 几何**”．他在空间上引入了 **Riemann 度量**．对于曲率为常数的空间，称为常曲率空间．在这种空间中，当常曲率为零时，这就是 Euclid 空间，即过直线外一点，能且只能有一条平行线；当常曲率为正常数时，则过“**直线**”外一点没有“**平行线**”；当常曲率为负数时，则过“**直线**”外一点，可以作多于一条的“**平行线**”．

由“非欧几何”思想为基础而建立起来的“**Riemann 几何**”，开创了几何学甚至整个数学的新纪元，其发展更是一日千里．众所周知，爱因斯坦（A．Einstein，1879～1955）相对论正是以“**Riemann 几何**”作为其数学工具的．

经历了 2000 年的思索与努力，“**非欧几何**”的产生的确是“**数学中一步真正的进展**”，打破了 Euclid 几何的一统天下，把已有的理论，Euclid 几何学，从更高、更深的角度去理解它．这种几何学不过是众多几何学中的一种，从某种意义上讲，这是最为简单的一种，可以有很多种几何学来描写与刻画空间形式，Euclid 几何学是其中之一，且是最为简单的一种．由于“**非欧几何**”的产生，把那些用陈旧的思想，企图用其他公设、公理及定理来证明第五公设的一切做法“**抛到一边**”．

现在的大学数学基础课“**微分几何**”就是以微积分为工具初步介绍这些内容的．

在中学数学课程中，还有一门课程叫“**三角**”．这门课程与几何密切相关，主要是讨论 6 个三角函数 $\sin x$，$\cos x$，…等的相应关系与计算．人们对三角学的研究可以追溯到公元 1、2 世纪，当时为了研究天文学的需要，已经为三角学奠定了基础，例如已经有了类似于正弦及正弦表等．经过了几百年的努力，到 9、10 世纪，三角函数的研究已系统化，到 13 世纪，球面三角也已基本完成．因此，现在中学学习的“**三角学**”，其内容基本上在 1000 年前就形成了．

对“**三角学**”从更高、更深的角度来认识，是由于复数的引入．人们对复数的思考由来已久，例如对方程 $x^2+1=0$ 的根思考，但人们认真地将虚数 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$ 引入数学已是 16 世纪的事了．之后，欧拉

（L. Euler，1707～1783）建立了著名的 **Euler** 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，使得三角学中不少问题，都可归化为复数来讨论．于是使得三角学中一大批问题得以轻松地解决．

复数及 Euler 公式的引入，是**“数学中一步真正的进展”**，这成为**“更有力的工具和更简单的方法”**来处理三角学以及其他一些学科的问题，而有了复数与 Euler 公式，使得人们对三角学的已有理论的理解更为深刻，而可以把一些原始的、复杂的处理三角学的方法与工具**“抛到一边”**．

我还要重复一遍，尽管复数与 Euler 公式比三角学来得“高级”，但并不意味着中学课程可以不要学习三角学．因为 Euler 公式的建立需要更高深的数学，这是超出中学数学范畴的，而且三角学是一门非常实用的数学分支，在很多其他学科中都会用到．

可以将本节所讨论的内容简略画一个图形（如图 1.2）．

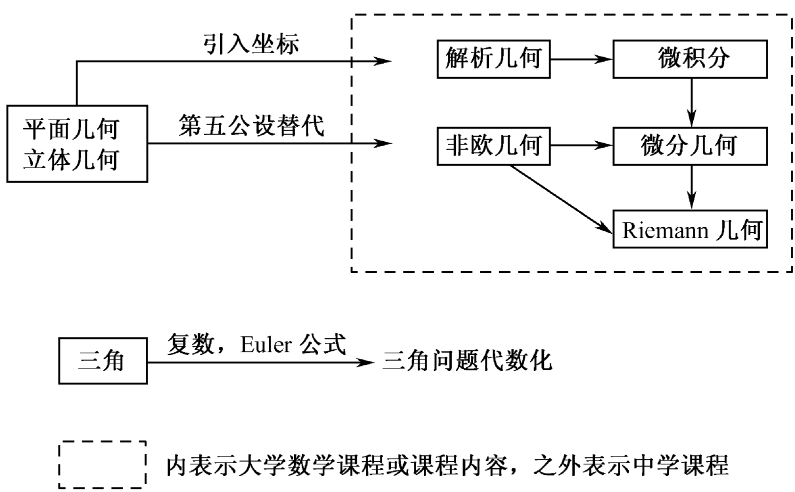

图 1.2

在这一节与上一节中，我们从 Hilbert 的那个著名讲演中的那段精辟论述出发，回顾了中、小学的数学课程，以及与后续的大学数学课程之间的关系，但必须说明两点：（1）一门学科的产生往往是有多方面的因素，我在这里往往只说了一个因素，而这个因素在我看来也许

是主要因素之一．如果要各种因素都说到，对每一门学科都可以说很多话来讨论它的来源，但这不是在这本小书中所能做到的，而且反而冲淡了主题；（2）一门学科对其他学科的影响也是多方面的，例如：中学的“代数”课程，从方程式的角度，导致了“**线性代数**”及“**近世代数**”的产生，但从排列组合的角度，导致了“**组合数学**”的产生．又例如：“**非欧几何**”的产生不仅导致“**Riemann 几何**”的诞生，也引发了“**几何基础**”的深入讨论等．

1.4 三点启示

从上面的论述中，我们能得到些什么启示呢？

你们也许已经发现，导致“**数学中一步真正的进展**”的“**更有力的工具与更简单的方法**”往往是一些看来是十分简单明了的想法．如从算术走向代数，关键的一步是“**数学符号化**”，同样由“**平面几何**”、“**立体几何**”走向“**解析几何**”，关键的一步是“**引入坐标**”，亦即将平面的点与数对一一对应，正是由于这样看似简单的一步，引发了“**数学中真正的进展**”．而“**数学符号化**”、“**引入坐标**”都是花了千年的时间才产生的，仔细想想，“**数字符号化**”比算术中的一道难题可能更易理解，“**数字符号化**”之后，解算术难题则轻而易举．记得我在小学学算术时，感到很难．例如鸡兔同笼问题．在一个笼子中关有鸡与兔，已知有多少个头，多少个脚，问有多少只鸡、多少只兔？当时我实在感到很纳闷，一是鸡与兔为何要关在一个笼子里？二是既能数的清有多少个头、多少只脚，为何数不清有多少只鸡，多少只兔？老师教我解鸡兔同笼问题的方法，更使我感到难懂，现已完全记不得了，等到学了初中代数，才明白这不过是解二元一次联立方程组的问题，而解此方程组十分容易，不论是鸡兔同笼或鸭狗同室，都可用此法来解，心中豁然开朗．初中代数当然比小学算术来的“**高级**”，但“**高级**”的却比“**低级**”的容易，且“**高级**”的替代了“**低级**”的．同样，“**引入坐标**”，比平面几何中的一道难题的解可能更易理解，“**引入坐标**”之后解几何题则比较容易了．一些几何的定理与习题，往往不易理解与

解答，如辅助线应该添在哪里？应该先证哪些线、角或三角形相等或全同？一些习题解起来甚至十分困难，如著名的九点圆定理等．但有了解析几何之后，将一些几何问题代数化，使相当一部分平面几何及立体几何的问题变得容易，而我们学习解析几何往往感到比学平面几何及立体几何来得容易．当然“**解析几何**”比“**平面几何**”及“**立体几何**”来得“**高级**”，但“**高级**”的却比“**低级**”的容易，而且是“**高级**”的可以替代“**低级**”的．再例如，人们知道了 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 之后，发现中学里学习的一大批三角公式与定理不过是这么简单公式的推论，而 Euler 公式十分简单，极易记住，倒是一些三角公式往往不易记住，而现在学习的三角课程中，它们的推导与证明往往很复杂，当然 Euler 公式比“三角”来得“**高级**”，但“**高级**”的却比“**低级**”的来得容易．

人们从小学一直到大学，读过的书叠在一起不知有多高，如果不是逐步用“**高级**”的来替代“**低级**”的，逐步忘掉一些被替代掉的旧知识，人们怎能记得住那么多！人们从上小学以来，年年学数学，这实际上就是一个以“**高级**”替代“**低级**”的过程，否则靠死记硬背，最后将会忘掉一切．

上述这些例子说明：一些“**高级**”的数学往往十分简单明了，更有概括性，极易记住，而相对而言一些较为“低级”的数学往往复杂，不易记住，所以我们第一个启示是：**“高级”的数学未必难，“低级”的数学未必容易**．这是“**高**”、“**低**”与“**难**”、“**易**”之间的辩证关系．但是从上述这些论述中，更令人深思的是第二个启示：**重要的是要有创新思想**．“**数字符号化**”、“**引入坐标**”、“**向量空间**”即“**线性空间**”，“**线性变换**”即“**矩阵**”，“**第五公设的替代**”、“**群、域**”等想法的产生，这些看似简单的想法，却是了不起的创新思想．正是由于有了这种创新思想，才会有“**数学中一步真正的进展**”．否则即使是解决“**算术**”难题的能人，是做“**平面几何**”难题的高手，而无这种创新思想，那么难题做的再多，也不可能引发“**数学中一步真正的进展**”．当然，这种创新思想来之不易，往往经过几百年，以至上千年的积累才能形

成，经过了长期的积累，走向成熟，就会有数学大师总结与提升前人的成果，而提出这种划时代的创新思想，这就是数学的历史．当然，一个划时代的创新思想的形成，往往是无数个各种水平的创新思想的积累所形成的．

当然，我这样说，并不是否定做一些算术、代数、几何与三角的难题．从培养学生学习数学的能力来看，让学生花太多时间来做太多的数学难题当然不必要，但适当地让学生做一些数学难题还是合适的，是对学习有好处的，且对培养创新思想也是有好处的，因为创新思想不是一天能培养出来的，是要日积月累，从量变到质变的过程．看看历史上那些大数学家，哪一位没有做过难题？从教学的角度，问题是在适量．至于中、小学老师，为了提高教学质量，对一些难题进行研究、分析与探讨，那是理所当然的事；从因材施教，提高同学们学习数学的兴趣与能力的角度，来举办一些数学活动，如“数学竞赛”等有意义的活动更是必要的了．从数学发展的历史角度与数学教育的角度来考虑问题，终究是不一样的．

在上述的论述中，除了上述两点启示外，还可以有以下第三点启示．

数学的历史也像一部战争史，往往是“**一将功成万骨枯**”！想想从“Euclid”的《原本》诞生之后，几千年来，不知有多少数学家前赴后继地企图用其他公设、公理及定理来证明第五公设，这些人都失败了，都默默无闻，数学史上不会记载他们的名字，实际上，他们都牺牲了．但正是由于千千万万个无名数学家的牺牲，导致了 Gauss，Bolyai，Lobatchevsky 从另外的角度来处理这个问题，他们成功了，他们成了英雄．同样自从二次、三次以及四次一元代数方程式得到根式解后，几百年来，也不知有多少数学家前赴后继地企图找到五次及更高次一元代数方程的根式解，但他们都失败了，他们的牺牲，导致了 Lagrange，Abel 与 Galois 从新的角度来考察这个问题，名垂数学史．但他们的成功也是在几百年来许多默默无闻的数学家失败的基础上获得的，这也可以说是“一将功成万骨枯”！至于几千年来，那些企图用无刻度的直

尺与圆规来解前面提到的古希腊三大作图难题的无数数学家们，他们更是全军覆没，全都牺牲了，这样的例子还可以举出很多．从这些数学的历史，启示我们，**我们应该如何来选择数学问题，如何来思考与处理数学问题，才能避免尽量少的牺牲，以获得成功．**

参考文献

[1] Hilbert D. Gottinger Nachrichten, 1900, 253～297, 以及 The Bulletin of American Mathematical Society. 8, 1902, 437～445, 478～479

[2] 李文林．数学史概论（第二版）．北京：高等教育出版社，2002

[3] Euclid. The thirteen books of the Elements, Trans from text of Heiberg with introduction and commentary by T. L. Heath, 3rds, Cambridge, 1908

第二讲　微积分的三个组成部分

2.1　微积分的主要矛盾

恩格斯在《反杜林论》中提出：**“纯数学是以现实世界的空间形式和数量关系，也就是说，以非常现实的材料为对象的，这种材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界”**（《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出版社，1995 年版，第 377 页）．他明确地指出了数学科学所研究的对象．尽管人们对“空间”及“数量”的概念及认识较之上一世纪已有了极大的扩充与深化，但恩格斯对数学科学所研究的对象的提法依然是正确的，仍为不少人所接受．但是数学科学有十分众多的学科，随着时间的推移，新的数学学科不断地产生，要说清楚数学科学中各个学科所研究的对象是什么，恐怕不是一件容易的事情，即使就其中的一门学科来讨论其研究的对象是什么，对大多数学科来说，也会众说纷纭，很难取得共识．但是，对微积分这门学科来说，它所研究的对象是什么，是早已解决了的，大概不会引起任何争议．毛泽东在《矛盾论》中论述矛盾的特殊性时指出：**“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性．因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一科学的对象”**．（《毛泽东选集》第 1 卷，人民出版社，1991 年版，第 309 页）．因此，要说清楚某一门数学学科所研究的对象，等于要说清楚这门学科的主要矛盾是什么，而微积分这门学科是研究哪一种矛盾的，这在马列主义的一些经典著作中早已解决了的，不妨十分简单地回顾一下历史．

微积分是由牛顿（Isaac Newton，1642～1727）及莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）所建立的．Newton 对微积分主要创作年代是在 1665 年至 1667 年之间，而发表其成果于 1687 年，1704

年及 1736 年，Leibniz 对微积分主要创作年代是在 1673 年至 1676 年之间，而发表其成果于 1684 年及 1686 年．也就是说，微积分建立于 17 世纪 60 年代至 70 年代．马克思与恩格斯的时代是微积分已经建立了近 200 年，并且在天文、力学、物理等多个方面获得了巨大成功，使整个自然科学发生了根本变化的时代，也是由微积分发展的第一阶段走向发展的第二阶段——微积分的严格化的时代（参阅本书第四讲）．正因为如此，马克思、恩格斯都对微积分给予了极大的关注与深入的研究．理解了当时的历史背景，可以有助于理解他们的一些经典著作中对微积分的种种论述，也许可以这样说，除了微积分，恐怕很难再举出一门数学学科能如此地受到马克思、恩格斯的如此多的关注与研究．以下举一些他们对微积分的论述．

从下面的两封信中，可以看出马克思是多么热衷于研究微积分．

1863 年 7 月 6 日马克思给恩格斯的信中说到："有空时我研究微积分，顺便说说，我有许多关于这方面的书籍，如果您愿意研究，我准备寄给您一本"（《马克思恩格斯全集》第 30 卷，人民出版社，1975 年版，第 357 页）．1865 年 5 月 20 日马克思给恩格斯的信中说到："在工作之余——当然不能老是写作——我就搞搞微分学 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，我没有耐心再去读别的东西，任何其他读物总是把我赶回写字台来"（《马克思恩格斯全集》第 31 卷，人民出版社，1972 年版，第 124 页）．从下面另一封马克思给恩格斯的信中可以看出，马克思对如何来完善微积分的理论给予了关注与研究．1882 年 11 月 22 日马克思给恩格斯的信中说到："我未尝不可用同样的态度去对待所谓微分方法本身的全部发展——这种方法始于牛顿和莱布尼茨的神秘方法，继之以达兰贝尔和欧拉的唯理论的方法，终于拉格朗日的严格的代数方法（但始终是从牛顿-莱布尼茨的原始的基本原理出发的），——我未尝不可以用这样的话去对待分析的这一整个发展过程，说它在利用几何方法于微分学方面，也就是使之几何形象化方面，实际上并未引起任何实质性的改变"（《马克思恩格斯全集》第 35 卷，人民出版社，1971 年版，第 110 页）．在恩格斯撰写的《资本论》第二卷序言中，说到马克思在"1870

年以后又有一个间歇时间，这主要是由马克思的病情造成的，他照例利用这类时间进行各种研究，……最后还有自然科学，如地质学和生理学，特别是独立的数学研究，成了这个时期的许多札记本的内容”（《马克思恩格斯全集》第 24 卷，人民出版社，1972 年版，第 7～8 页）．现在我们能见到马克思在数学上的研究，除了散见在他的各种著作中之外，比较集中的是他的《数学手稿》（人民出版社，1975 年版），其中绝大部分的内容是论述微积分的．而当时的历史背景是：由于微积分的理论有不完善之处以至维护与批评微积分的两种对立的势力进行着激烈的斗争，以至马克思的相当一部分关于微积分的论述都是在为维护与完善微积分作努力．马克思本人十分重视他的数学研究，主要是对微积分的研究．1883 年 6 月 24 日恩格斯在致劳拉•拉法格的信中说到马克思委托后人处理他的文稿，“并关心出版那些应该出版的东西，特别是第二卷和一些数学著作”（《马克思恩格斯全集》第 36 卷，人民出版社，1975 年版，第 42 页）．这里，第二卷指的是后来编成的《资本论》第二卷与第三卷，而马克思却将他的数学著作与之放到一起，认为是应该出版的东西，可见，他是多么重视他的数学著作．

恩格斯高度评价马克思的数学研究，尤其是微积分研究的成就．1881 年，马克思曾将他的部分有关微积分的数学手稿誊清后寄给恩格斯，恩格斯仔细阅读了这份手稿，于 1881 年 8 月 18 日写信给马克思，说到：“昨天我终于鼓起勇气，没用参考书便研究了您的数学手稿，我高兴地看到，我用不着其他书籍，为此，我向您祝贺”（《马克思恩格斯全集》第 35 卷，人民出版社，1971 年版，第 21 页）．在《反杜林论》中，恩格斯说：“马克思是精通数学的”（《马克思恩格斯选集》第三卷，人民出版社，1995 年版，第 349 页）．恩格斯在《在马克思墓前的讲话》中还说到：“但是马克思在他所研究的每一个领域，甚至数学领域，都有独到的发现，这样的领域是很多的，而且其中任何一个领域他都不是浅尝辄止”（《马克思恩格斯选集》第三卷，人民出版社，1995 年版，第 776～777 页）．恩格斯本人在他的著作中，大量论述了数学，尤其是微积分，特别在他的《反杜林论》以及《自然辩证

法》这两部著作中，更是深刻地、系统地论述了微积分．恩格斯在《反杜林论》第二版的序言中写到："目前我只好满足于本书所作的概述，等将来有机会再把所获得的成果汇集发表，或许同马克思所遗留下来的极其重要的数学手稿一起发表"（《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出版社，1995 年版，第 351 页）．后来由于种种原因并未实现．关于恩格斯对微积分的大量论述，在这里只是摘引其中的两段．在《反杜林论》中，恩格斯说到：**"因为辩证法突破了形式逻辑的狭隘界限，所以它包含着更广的世界观的萌芽，在数学中也存在着同样的关系．初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样，而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用"**（《马克思恩格斯选集》第三卷，人民出版社，1995 年版，第 477 页）．在这里恩格斯十分明确地指出：微积分本质上不外是辩证法在数学方面的运用．在《自然辩证法》中，恩格斯说：**"数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻变成了必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的"**（《马克思恩格斯全集》第 20 卷，人民出版社，1971 年版，第 602 页）．这段话实际上阐述了微积分产生的历史过程．

到了列宁时代，微积分已经完成了它的发展的第二阶段，即严格化的阶段．微积分的理论日臻完善，已普遍为大家所接受．列宁本人，他也有不少关于数学的论述．他在 1915 年写的《谈谈辩证法问题》一文中，在论及自然科学中的矛盾时，十分明确地指出：**"在数学中加号和减号，微分和积分；在力学中，作用与反作用；在物理中，正电和负电；在化学中，原子的化合和分解；在社会科学中，阶级斗争"**（《列宁选集》第 2 卷，人民出版社，1995 年版，第 556 页）．这段话，毛泽东在《矛盾论》中论及矛盾的普遍性时，全文加以引用（《毛泽东选集》第 1 卷，人民出版社，1991 年版，第 306 页）．在这里列宁十分明确地指出了：微积分这门学科是研究微分和积分这对矛盾的学

问，也就是说：**微积分这门学科中，主要矛盾是微分和积分的矛盾**.

2.2　一元微积分的三个组成部分

马克思、恩格斯以及列宁有关微积分的一些论述，是我们认识与研究微积分的指导思想，有了这个认识之后，就决定了**微积分这门学科的内容是由三部分组成，即微分、积分、指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理这三个部分所组成**. 微分的部分与积分的部分都易于理解，而对于第三部分，指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理，也许要多说几句，先从一元微积分说起.

微分与积分的思想古已有之，例如：阿基米德（Archimedes，公元前 287～公元前 212）于公元前就已经知道如何求抛物线、弓形的面积、螺线的切线等. 刘徽于公元 3 世纪在他的割圆术中，就是用无穷小分割来求面积的，等等. 由于长期的积累，在 Newton 与 Leibniz 之前，已经有了大量的微积分的先驱性的工作，这为微积分的产生作了准备. 例如：人们已经知道如何求曲线 $y=x^n$（其中 n 为正整数）的切线及它所覆盖的曲边梯形的面积等.（有关于微积分产生前的历史将在第四讲中谈到.）但是所有这些还不能说建立了微积分，直到 Newton 与 Leibniz 证明了如下的微积分基本定理，才标志着微积分的诞生. 因此，这个基本定理也叫 Newton-Leibniz 公式.

微积分基本定理(微分形式)　**设函数 $f(t)$在区间$[a,b]$上连续，x是$[a,b]$中的一个内点，令**

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a<x<b)$$

则 $\Phi(x)$在$[a,b]$上可微，并且

$$\Phi'(x)=f(x) \quad (a<x<b)$$

即

$$\mathrm{d}\Phi(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

换句话说，若 $f(x)$的积分是 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$的微分就是 $f(x)\mathrm{d}x$，即 $f(x)$的积分的微分就是 $f(x)$自己乘上 $\mathrm{d}x$，也就是反映整体性质的积分

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是由反映局部性质的微分

$$\mathrm{d}\Phi(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

所决定.

微积分基本定理(积分形式)　设 $\Phi(x)$是在$[a,b]$上可微,且

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}$$

等于连续函数 $f(x)$,那么成立着

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)-\Phi(a)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

换句话说,若 $\Phi(x)$的微分是 $f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)$的积分就是 $\Phi(x)$,即 $\Phi(x)$的微商的积分就是 $\Phi(x)$自己(或相差一常数).也就是,作为反映局部性质的微分$f(x)\mathrm{d}x$,是由作为反映整体性质的积分

$$\Phi(x)-\Phi(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

所规定.

这条定理所以叫做微积分基本定理,是因为这条定理明确指出:微分与积分互为逆运算,也就是指出微分与积分是对矛盾,这时也只有在这时,才算建立了微积分这门学科.所以在上一节曾引用过的恩格斯在论述微积分产生过程时的那段话.他说微积分“**是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的,但不是由他们发明的**”.他说“不是由他们发明的”是指:在 Newton 和 Leibniz 之前,微分与积分的思想早已有之;说“是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的”是指:他们建立了微积分基本定理,指出微分与积分是一对矛盾,从此微积分成了一门独立的学科,而不再像以前那样作为几何学的延伸,而求微分与积分的问题,尤其是求积分的问题,不再是一个一个问题地来处理,而有了统一的处理方法;说“大体上”是指:他们建立起来的微积分这门学科还有不完善之处,还没有建立牢固的基础,一些解说不能令人满意.这方面将在第四讲中进一步阐述.

为了进一步认识这条基本定理的重要性,不妨回顾一下大家十分

熟悉的一元微积分的微分与积分的定义

在微积分一开始，就有微分与积分的定义．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，x_0 是 $[a,b]$ 中的一内点，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

对任意的 $\Delta x\to 0$ 都存在，则称此为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数，记做

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\text{或}f'(x_0)$$

称 $f'(x_0)\mathrm{d}x$ 为 f 在 $x=x_0$ 处的微分．由此可见导数与微分是函数的局部性质，即只与 $x=x_0$ 这一点的近旁有关．

在 $[a,b]$ 中取 $n-1$ 个点 $x_1,\cdots,x_{n-1}$，且令 $a=x_0$，$b=x_n$，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\xi_i$ 为 $[x_i,x_{i-1}]$ 中任一点，作和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，若 $\lambda=\max\Delta x_i$，令 $n\to\infty$，$\lambda\to 0$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty,\lambda\to 0}S_n$ 存在，且对各种不同的取点得到的值都一样，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且记极限值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

而 S_n 称为 Riemann 和．

上述的微、积分的定义是大家十分熟悉的，现在来考虑最为简单的函数：$y=x^m$，其中 m 为正整数，区域为 $[0,1]$．现在按照上述定义来求导数及积分，对 $y=x^m$ 求导数，这就要用到二项式定理，但是人们得到二项式定理已是很后的事了．至于对 $y=x^m$ 在 $[0,1]$ 上求积分，先看 $m=2$ 的情形，这时将 $[0,1]$ 进行 n 等分，取 $\xi_i=x_{i-1}$，则

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{3}\end{aligned}$$

于是求积分的问题化为求和:$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2$ 的问题.同样,当 $m=3$ 时,求 $y=x^3$ 的积分的问题化为求和 $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3$,当然这个和还是可以计算出来的.至于当 m 取一般的正整数时,如果继续用上述的取点办法,那么对 $y=x^m$ 在[0,1]上求积分的问题就化为求和 $1^m+2^m+\cdots+(n-1)^m$ 的问题了,要求出这个和是不易之事,于是不妨想办法来改变在[0,1]中取点的办法.来讨论更一般的问题:求 $y=x^m$,m 为正整数,在$[a,b]$上的积分,这里 $0<a<b$,令 $OC=a$,$OD=b$,在 C,D 之间取点 $M_1,\cdots,M_{n-1}$,使得 $OM_1=aq$,$OM_2=aq^2$,$\cdots$,$OM_n=aq^n$,这里 $M_n=D$,且令

$$C=M_0,\quad q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

这样得到了$[a,b]$之间的一个不等距的分割,而 N_k 点为在 $y=x^m$ 上当 $x=OM_k$ 的点,N_kM_k 之长为$(aq^k)^m$,P_k 点为由 N_{k-1} 点出发与 x 轴相平行交于 N_kM_k 的点(见图 2.1).

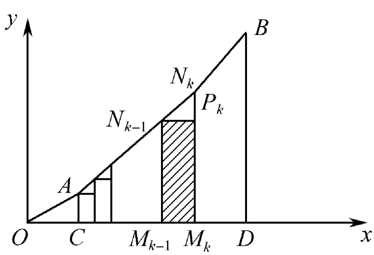

图 2.1

于是矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面积为

$$(aq^k-aq^{k-1})(aq^{k-1})^m=(q-1)(aq^{k-1})^{m+1}$$

把这些矩形的面积加起来就得到由 $y=x^m$ 在$[a,b]$上所得的曲边梯形的近似值

$$\begin{aligned}S_n&=(q-1)(aq^{1-1})^{m+1}+(q-1)(aq^{2-1})^{m+1}+\cdots+(q-1)(aq^{n-1})^{m+1}\\&=(q-1)a^{m+1}(1+q^{m+1}+\cdots+q^{(m+1)(n-1)})\\&=(q-1)a^{m+1}\frac{q^{(m+1)n}-1}{q^{m+1}-1}\end{aligned}$$

而 $q^n=\dfrac{b}{a}$,所以

$$S_n = a^{m+1}\frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{\dfrac{q^{m+1}-1}{q-1}}$$

但是这样的不等距的分点法,当分点越来越多,即越分越细时,每一小段的长都趋于零.因此,当 $n\to\infty$时,q 显然趋于 1,

$$\frac{q^{m+1}-1}{q-1}\to m+1$$

于是

$$S_n\to\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

因此

$$\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

当 m 为正整数,$0<a<b$ 时成立.

由上述的例子可以看出,如果按照原有的定义来求微分与积分,尤其是求积分,即使像 $y=x^m$,m 为正整数,这样简单的函数,一般来说,都是不容易的.在上述例子中,为了要求 $y=x^m$ 的积分,要取不等距的分点,然后来求和的极限,想到这点就很不容易,而对于别的函数,就要想出针对这个函数的办法来求积分,即使将和的极限求出来,也无法证明:如用别的取点法得到的和的极限是否是一样的.这就是在 Newton 与 Leibniz 建立微积分基本定理前的情形.有了微积分基本定理后,就不要这样做了,由于微分、积分是一对矛盾,互为逆运算,以至求函数$f(x)$的积分,只要求微分的逆运算就可以了,即只要求 $\Phi(x)$,使得 $\Phi'(x)=f(x)$,那么,$\Phi(x)$就是 $f(x)$的积分了.如上例中 $y=x^m$,只要求 $\Phi(x)$,使得 $\Phi'(x)=x^m$ 即可,这是易于得到的. 有了这基本定理就不必要对一个个的函数在区间上取分点, 然后想各种办法来求和的极限了, 这种做法都可以抛到一边了, 更不必担心取不同的分点方法, 相应的和的极限是否相同了.