本人鄂西南吴彦祖，尝学 LaTeX，然纸上得来终觉浅，适逢信息光学此公式繁杂之课业，练手之作，还望诸位海涵。

目录

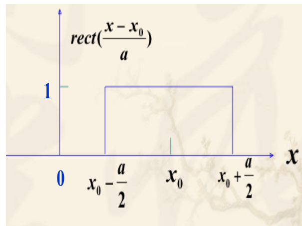

图 1: $rect(\frac{x-x_0}{a})$ 图像

1 数学基础

信息光学又称傅里叶光学，顾名思义，当然会用到不少傅里叶变换或者相关的数学方法，工欲善其事必先利其器，所以我们首先来回顾一下课程中的数学基础。

1.1 光学中常用的初等函数

1.1.1 矩形函数

定义： $rect(\frac{x-x_0}{a})=1$，定义域为 $\left|\frac{x-x_0}{a}\right|\leq\frac{a}{2}$, 即以 x_0 为中心, 长为 a, 高为 1 的一个矩形

二维矩形函数： $rect(\frac{x}{a},\frac{y}{b})$ 以原点为中心的 $a\times b$ 矩形范围内，函数值为 1，其他地方为 0。

光学上的应用： 表示不透明屏上的矩形孔、**狭缝的透过率（这一点对后面很重要！）**

作用： 它与其他函数相乘，可限制函数自变量的取值范围，起到截取函数的作用

1.1.2 $sinc$ 函数

定义： $sinc(\frac{x}{a})=\frac{\sin\pi(x-x_0)/a}{\pi(x-x_0)/a}$

图像自己想象 Orz

特点： 函数在 $x = x_0$ 处有最大值 1, 零点为：$x - x_0 = \pm na(n = 1, 2) \cdots$

二维 $sinc$ 函数 $sinc(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) = sinc(\frac{x}{a})sinc(\frac{x}{b})$

作用： 描述矩阵或单缝的夫琅禾费衍射图样, 还有一个重要特性是**与矩形函数互为傅里叶变换**

tips： 在数学计算的过程中可以去掉 π (π 起到的是归一化作用)

1.1.3 阶跃函数

定义： $step(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

作用： 描述直边的透过率；起到开关的作用

1.1.4 符号函数

定义： $sgn(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

作用： 符号函数与某函数相乘，可以使得该函数在某点极性发生翻转 (改变正负号)

1.1.5 三角函数

定义： $tri(\frac{x}{a}) = \begin{cases} 0, & |\frac{x}{a}| \geq 1 \\ 1 - |\frac{x}{a}|, & |\frac{x}{a}| < 1 \end{cases}$ 即以 0 为中点，底为 $2a$，高为 1 的等腰三角形

作用： 表示光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数

1.1.6 圆域函数

定义： $circ(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2+y^2} \leq a \\ 0, & otherwise \end{cases}$

极坐标形式 $circ(r) = \begin{cases} 1, & r \leq a \\ 0, & otherwise \end{cases}$

作用： 表述圆孔的透过率

1.1.7 高斯函数

定义： $Gaus(\frac{x}{a}) = e^{-\pi x^2}$

特点： 当 $x = 0$ 时，函数在原点处有最大值 1，高斯图形中曲线下面积为 a

二维高斯函数 $Gaus(r) = e^{-\pi(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}$，极坐标下 $Gaus(r) = e^{-\pi r^2}$

1.1.8 *delta* 函数

δ 函数在以往的课程中已经有广泛的学习，此处不表，但有几条特殊性质如下：

$$\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^2\pi(x^2+y^2)}$$

$$\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} n^2 rect(nx) rect(ny)$$

$$\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} n^2 sinc(nx) sinx(ny)$$

$\delta^2(x) = \frac{L}{2\pi}\delta(x)$, 此性质可由卷积定理推出。

1.1.9 梳状函数

定义：

$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

n 为整数

光学上的应用 单位光通量间隔为 1 的点光源线阵的亮度, 此外, 间隔为 x_0 的等间距脉冲序列表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nx_0)=\frac{1}{x_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\frac{x}{x_0}-n)=\frac{1}{x_0}comb(\frac{x}{x_0})$$

对普通函数作等间距抽样

二维脉冲序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\delta(y-nb)=\frac{1}{ab}comb(\frac{x}{a})comb(\frac{y}{b})$$

1.2 傅里叶变换和卷积

1.2.1 傅里叶变换

$$F(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-j2\pi(\xi x+\eta y)}dxdy$$

振幅谱 $|F(\xi,\eta)|$

相位谱 $\phi(\xi,\eta)$

功率谱 $|F(\xi,\eta)|^2$

傅里叶逆变换

$$F(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{j2\pi(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta=F^{-1}F\{\xi,\eta\}$$

例题 1 求函数 $f(x,y)=1$ 的傅里叶变换
解:
1 可以变为

$$f(x,y)=\lim_{a\to\infty}rect(\frac{x}{a})rect(\frac{y}{a})$$

而 $F\{rect(x)\}=asinc(\xi a),F\{rect(y)\}=asinc(\eta a)$ 所以

$$F\{f(x,y)\}=\lim_{a\to\infty}a^2sinc(a\xi)sinc(a\eta)=\delta(\xi,\eta)$$

例题 2　求梳妆函数 $comb(\frac{x}{a})$ 的傅里叶变换

解:

$$comb(\frac{x}{a}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\frac{x}{a} - n) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)$$

作傅里叶展开有

$$comb(\frac{x}{a}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{x}{a}}$$

$c_0, c_1, c_2 \cdots c_n$ 都等于 1。(这是因为 δ 函数的作用) 所以,

$$comb(\frac{x}{a}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{x}{a}}$$

所以, 傅里叶变换

$$F\{comb(\frac{x}{a})\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(\xi - \frac{n}{a})x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \frac{n}{a}) = acomb(a\xi)$$

1.2.2　傅里叶变换性质

线性性质

$$F\{af(x,y) + bg(x,y)\} = aF(\xi,\eta) + bG(\xi,\eta)$$

两个函数的线性组合的傅里叶变换等于各函数傅里叶变换的相应组合

迭次傅里叶变换　对二元函数作两次傅里叶变换, 可以得到倒立像

坐标缩放性

$$F\{f(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|} F(\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b})$$

位移定理　空域位移带来频域相移; 空域相移带来频域位移

$$F\{f(x - x_0, y - y_0)\} = e^{-j2\pi(\xi x_0 + \eta y_0)} F(\xi,\eta)$$

$$F\{e^{j2\pi(\xi_0 x + \eta_0 y)} f(x,y)\} = F(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$$

1.3 卷积

卷积定义

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta = f(x,y)*h(x,y)$$

卷积可以看作一个函数经过系统变换成另一个函数，其中 $f(x,y)$ 可以看作输入函数 (光学中可以看作入射光波)，$h(x,y)$ 可以看作系统 (光学中可以认为是光学透镜组)
以往的课程中已经学习过卷积，可以把运算过程简略为：折叠、位移、相乘、积分

卷积的效应 展宽效应和平滑效应

运算性质

分配律

结合律

交换律

平移不变性 $f(x-x_1)*h(x-x_2)=g(x-x_1-x_2)$

δ 函数卷积

$$f(x,y)*\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x-x_0,y-y_0)$$

此方程的意义：δ 函数可以看作单缝

1.3.1 卷积定理

即卷积的傅里叶变换等于傅里叶变换相乘; 相乘的傅里叶变换等于傅里叶变换的卷积

$$F\{f(x,y)*g(x,y)\}=F(\xi,\eta)G(\xi,\eta)$$

$$F\{f(x,y)g(x,y)\}=F(\xi,\eta)*G(\xi,\eta)$$

1.4 傅里叶—贝塞尔变换

极坐标傅里叶变换 球坐标原函数为 $g(r,\theta)$，频谱函数为 $G(\rho,\varphi)$

$$G(\rho,\varphi)=\int_0 \infty rg(r)\{\int_0 2\pi e^{-j2\pi\rho rcos(\theta-\varphi)}d\theta\}dr$$

贝塞尔函数关系式：$\int_0^{2\pi} e^{-jacos(\theta-\varphi)}d\theta = 2\pi J_0(a)$ $g(r,\theta)$ 具有圆域对称性，可以写作 $g(r)$

傅里叶-贝塞尔变换与逆变换

$$G(\rho)=2\pi\int_0^{2\pi} rg(r)J_0(2\pi\rho r)dr$$

$$g(r)=2\pi\int_0^{2\pi} rG(\rho)J_0(2\pi\rho r)d\rho$$

光学应用 研究圆孔衍射

1.5 例题

1. 求 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\pi x^2}dx$

答案：$\frac{1}{2\pi}$

2. 求矩形函数的傅里叶变换

答案：

$$F\{rect(\frac{x}{a})\}=asinc(\eta a),F\{rect(\frac{y}{a})\}=asinc(\xi a),F\{rect(\frac{x}{a},\frac{y}{a})\}=a^2sinc(\xi a)sinc(\eta a)$$

3. 求 $f(x,y)=1$ 的傅里叶变换

答案：$F\{f(x,y)=1\}=\delta(\xi,\eta)$

4. 求梳状函数 $comb(\frac{x}{a})$ 的傅里叶变换

答案：$acomb(a\xi)$

5. 求高斯函数的傅里叶变换

答案：$F\{Gaus(x)Gaus(y)\}=Gaus(\xi)Gaus\eta$

6. 求余弦函数的傅里叶变换

答案：

$$F\{cos(2\pi\xi_0 x)\}=\frac{1}{2}\delta(\xi-\xi_0)+\frac{1}{2}\delta(\xi+\xi_0)$$

$$F\{cos(2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y))\}=\frac{1}{2}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)+\frac{1}{2}\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)$$

7. 求三角形函数的傅里叶变换

答案：利用卷积定理 $tir(x) = rect(x) * rect(x)$

$$F\{tri(x)\} = F\{rect(x) * rect(x)\}$$

$$= F\{rect(x)\}F\{rect(x)\}$$

$$= sinc(\xi)sinc(\xi)$$

$$= sinc^2(\xi)$$

8. 求圆域函数的傅里叶变换

答案：$circ(r) = 1, 0 < r < 1$ 利用傅里叶-贝塞尔变换

$$F\{circ(r)\} = 2\pi\int_0^1 rcirc(r)J_0(2\pi\rho\ r)dr = 2\pi\int_0^1 rJ_0(2\pi\rho\ r)dr$$

令 $r' = 2\pi\rho r$

利用恒等式 $\int_0^x \xi J_0(\xi)d\xi = xJ_1(x)$ 有

$$2\pi\int_0^1 rJ_{p0}(2\pi\rho r)dr = 2\pi\times\int_0^{2\pi\rho}\frac{r'}{(2\pi\rho)^2}J_0(r')dr' = \frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi\rho} r'J_0r'dr' = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$$

9. 掌握卷积的图解法

10. 求两个矩形函数的卷积

x 答案：$rect(x) * rect(x) = tri(x)$, 即两个矩形函数的卷积是三角形函数

11. 掌握 δ 函数和另一个函数卷积

2 线性系统

2.1 系统与线性系统

系统 关于系统和线性系统的定义之类在往日课程中已有概念，此处不表。

输入的函数即输入信号分布：$f(x,y)$(可以看作输入光强分布)

系统响应即输出信号分布：$g(x,y) = L\{f(x,y)\}$(可以看作输出光强分布)

线性系统具有叠加性质，我们可以把任意一个光学信号 $f(x,y)$ 分解成无数个 δ 函数的线性叠加

所以输入信号

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)d\alpha d\beta\delta(x-\alpha, y-\beta)$$

其中 $f(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$ 是权重系数

与输入信号的线性叠加性对应，输出信号也具有线性叠加性质。

一个单位脉冲 $\delta(x-\alpha,y-\beta)$ 经过系统后的输出信号为 $L\{\delta(x-\alpha,y-\beta)\}]$ 即脉冲响应或点扩撒函数。(物理意义：可以看作一个点光源通过透镜后成的像)

所以输出信号自然可以被分解成无数个脉冲响应的叠加，令脉冲响应 $h(x,y;\alpha,\beta)=L\{\delta(x-\alpha,y-\beta)\}$，有

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x,y;\alpha,\beta)d\alpha d\beta$$

这个式子称为叠加积分，描述了线性系统输入和输出的变换。

只要知道系统对位于输入平面上所有可能的点上的脉冲的响应，就可以通过叠加积分而完全确定系统的输出。另外，如果系统的输入和输出之间满足叠加积所描述的关系，就可以认为这是一个线性系统。(结合量子力学叠加态和本征态之间的关系加以理解)

2.2 线性不变系统

时不变系统 若输入脉冲延迟时间 τ，其响应仅仅有时间延迟 τ, 而函数形式不变，则称为时不变系统。

$$L\{\delta(t-\tau)=h(t-\tau)\}$$

特点：变换关系是确定的。(例子：固定电阻，电感，电感组成的电路)

空间不变系统 如输入脉冲空间位置变化，其响应发生同样的位置变化

若 $L\{f(x,y)\}=g(x,y)$ 则有

$$L\{f(x-\alpha,y-\beta)\}=g(x-\alpha,y-\beta)$$

线性不变系统积分叠加式

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(a-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta=f(x,y)*h(x,y)$$

其中 $h(x,y)$ 是原点单位脉冲响应 (一个脉冲通过系统后变成的函数)，表征线性空不变系统的性质

系统的作用可以用一个脉冲函数表征

线性不变系统的传递函数 输入和输出关系在空域的表示

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$

输入和输出关系在频域的表示，由卷积定理得到

$$G(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) * H(\xi,\eta)$$

其中输入频谱 $G(\xi,\eta)$ 输出频谱 $F(\xi,\eta)$ 系统的传递函数或频率响应 $H(\xi,\eta)$

传递函数意义：决定输入频谱中各种频率成分通过系统时将会发生什么样的变化, 所以又叫它频率响应。

线性平移不变系统两种研究方法 1. 空域通过输入函数与脉冲响应函数的卷积求得输出函数

$$g(x,y) = f(x,y) * g(x,y)$$

2. 在频域求得输入函数与脉冲响应的频谱函数，对频谱函数的积作逆傅里叶变换求得输入函数

$$G(\xi,\eta) = F(\xi,\eta)H(\xi,\eta)$$

对公式中的 G 作傅里叶反变换得到 $g(x,y)$

表面上后一种方法比较复杂，但是实际上利用傅里叶变换的性质和表格，常常会比前者更方便。

传递函数的物理意义 在我们分解输入函数时候，如前文所说：输入函数可以分解成无数个 δ 函数的线性叠加。物理意义——不同位置的点光源叠加

那么变换成频域就是把输入函数分解成无数个复指数函数的线性叠加。物理意义——不同频率的平面波叠加

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta) e^{j2\pi(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta$$

其中 $F(\xi,\eta)d\xi d\eta$ 是基元函数的权重因子

系统的输出 $g(x,y) = L\{f(x,y)\}$

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta) e^{j2\pi(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta$$

$$g(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta) L\{e^{j2\pi(\xi x+\eta y)}\} d\xi d\eta$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta) H(\xi,\eta) e^{j2\pi(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta()$$

其中 F 是输入的频域函数，L 指的是系统对单个特定频率函数 (由输入函数分解得到) 的变换，H 是指单个特定频率的函数 (由输入函数分解得到) 经过线性系统后的输出函数。

本征函数 如果 $L\{f(x,y)\}] = af(x,y)$ 成立，且 a 为复数 (称为本征值)，则称 $f(x,y)$ 是算符 L 的本征函数 (和量子力学类似，只不过本征值是复数)

由此我们可以看出，复指数函数显然是线性不变系统的本征函数。(进去是复指数函数线性叠加 (权重因子为 F)，出来的术后有也是响应频率的线性叠加 (权重因子为 FH 相乘)

$$L\{e^j 2\pi(\xi x+\eta y)\} = H(\xi,\eta) e^{j2\pi(\xi x+\eta y)}$$

该式子的意义：L 对一个特定频率的输入波变换，得到这个波的随频率的输出分布 (见) 和这个波本身 (波的频率)

非相干系统 对于非相干处理系统，系统对于光强是线性的，这种系统可以把实数值输入变换成一个实值输出。

余弦函数是这类系统的本征函数。

$$L\{cos 2\pi(\xi x+\eta y)\} = A(\xi,\eta) cos[2\pi(\xi x+\eta y) - \varphi(\xi,\eta)]$$

该式子表示，对实值脉冲响应的线性不变系统，余弦输入讲产生同频率的余弦输出，但会产生衰减和位移。这种变化的大小分别决定于传递函数的模和辐角。

2.3 二维广场分析

满足以下条件时，可以应用标量衍射理论

1. 衍射孔径比波长大得多
2. 观察点离衍射孔径足够远

2.3.1 单色光波场

理想单色光 不存在

窄带光 仅仅包含以某频率为中心很窄的频率范围，即窄带光。

单色光波场复振幅表示 单色光场中一点 P 在 t 时刻光振动表示为

$$u(P,t) = a(P)cos[2\pi\mu t - \Phi(P)]$$

式子中 μ 是光波时间频率，a(P) 和 $\varphi(P)$ 分别是 P 点光振动的振幅和初相位

根据欧拉公式有

$$u(P,t) = Re\{a(P)e^{\varphi(P)}e^{-j2\pi\mu t}\}$$

定义复振幅

$$U(P) = a(P)e^{j\varphi(P)}$$

包含 P 点光振动的振幅 a(P) 和初相位 $\varphi(P)$

对于单色光波，频率 μ 恒定，相位因子 $e^{-j2\pi\mu t}$ 与光场中各点位置无关。所以光场中光振动的空间分布完全由复振幅 U(P) 决定

光强：

$$I = U(P)U^*(P) = |U(P)|^2$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}cos[\varphi_2(P) - \varphi_1(P)]$$

(最后一式是指两光束干涉得到的光强)

球面波复振幅 设点光源初相为 0，任一点 P 处的复振幅为发散波：

$$U(P) = \frac{a_0}{r}e^{jkr}$$

会聚波：

$$U(P) = \frac{a_0}{r}e^{-jkr}$$

a_0 是距光源单位距离处的振幅，$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是级数

2.3.2 平面复振幅

球面波复振幅

傍轴条件

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<<z^2$$

泰勒展开：

$$r\approx\frac{(x-x_0)^2}{2z}+\frac{(y-y_0)^2}{2z}+z$$

所以，一个发散球面波在 xy 平面上产生的复振幅分布：

$$U(x,y)=\frac{a_0}{r}e^{jkr}\approx\frac{a_0}{z}e^{jkz}e^{j\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}$$

含有常量相位因子 e^{jkz} 和球面波二次相位因子 $e^{j\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}$，代表距离平面 z 处有一个坐标为 (x_0,y_0) 的点光源发出的球面波经过这个平面。

平面波复振幅

此处是重点!!!

$$U(x,y)=Ae^{jk(xcos\alpha+ycos\beta)}$$

平面波线性相位因子 $e^{jk(xcos\alpha+ycos\beta)}$ 代表一个方向余弦为 $(cos\alpha,cos\beta)$ 的平面波经过该平面。

2.4 平面波的空间频率

定义

$$U(x,y)=Ae^{j2\pi(\xi x+\eta y)}$$

其中 $cos\alpha=\frac{\xi}{\lambda},cos\beta=\frac{\eta}{\lambda}$, 该式子代表一个传播方向余弦为 $(cos\alpha,cos\beta)$, 波长为 λ 的单色平面波

类似地可以定义三维空间平面波 (其中 $\zeta=\frac{cos\gamma}{\lambda}$)

$$U(x,y,z)=Ae^{j2\pi(\xi x+\eta y+\zeta z)}$$

有如下数学关系：

$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\zeta=1$$

$$\xi^2+\eta^2+\gamma^2=\frac{1}{\lambda}$$

平面波沿传播方向的空间频率：$\frac{1}{\lambda}$, 光振动时间频率 $f=\frac{c}{\lambda}$

(注意二维和三维的规律)

2.5 复振幅空间分布的频谱

超级重点 单色光场复振幅傅里叶变换分解

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}G(\xi,\eta)e^{j2\pi(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta$$

物理意义:$g(x,y)$ 看作频率不同的复指数分量的线性叠加,权重为 $G(\xi,\eta)d\xi d\eta$

而且我们已经知道 $e^{j2\pi(\xi x+\eta y)}$ 代表特定传播方向的单色平面波，所以即 $g(x,y)$ 可以看作不同方向传播的单色平面波的线性叠加

传播方向 $cos\alpha=\frac{\xi}{\lambda},cos\beta=\frac{\eta}{\lambda}$

相对振幅和常量相位取决于 $G(\xi,\eta)$(通俗理解：代表不同频率的波的量(占总体的多少))

角谱 已知

$$cos\alpha=\frac{\xi}{\lambda},cos\beta=\frac{\eta}{\lambda}$$

带入 $g(x,y)$ 进行代换有

$$G(\frac{cos\alpha}{\lambda},\frac{cos\beta}{\lambda})=\iint_{-\infty}^{\infty}g(x,y)e^{-j2\pi(\frac{cos\alpha}{\lambda}x+\frac{cos\beta}{\lambda}y)}dxdy$$

称为 x.y 平面上复振幅分布的角谱。

例题 已知一平面波的复振幅表达式为 $U(x,y,z)=Ae^{j(2x-3y+4z)}$, 试计算其波长以及沿着 x，y，z 方向的空间频率。

解：已知

$$U(x,y,z)=Ae^{j(k_xx+k_yy+k_zz)}=Ae^{j2\pi(\xi x+\eta y+\zeta z)}$$

所以:$k_x=2,k_y=-3,k_z=4$

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=29$$

$$k=\sqrt{29}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{29}}$$

$$k_x=2=2\pi\xi,k_y=-3=2\pi\eta,k_z=4=2\pi\zeta$$

综上，$\xi=\frac{1}{\pi},\eta=\frac{-3}{2\pi},\zeta=\frac{-2}{\pi}$

完结撒花!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!