

# 第四章：连续时间傅里叶变换

## 详细复习总结

根据上传课件整理

2026 年 1 月 11 日

### 目录

<b>1 第一部分：傅里叶变换的理论核心</b>	<b>2</b>
1.1 1. 从周期到非周期：概念引入 . . . . .	2
1.2 2. 核心定义（必考公式） . . . . .	2
1.3 3. 收敛条件（Dirichlet 条件） . . . . .	2
<b>2 第二部分：常见傅里叶变换对归纳</b>	<b>3</b>
<b>3 第三部分：傅里叶变换的关键性质与方法</b>	<b>3</b>
3.1 1. 线性性质 . . . . .	3
3.2 2. 时移与频移（对称性） . . . . .	3
3.3 3. 对称性（对偶性）——解题大杀器 . . . . .	4
3.4 4. 尺度变换 . . . . .	4
3.5 5. 卷积性质——系统分析核心 . . . . .	4
3.6 6. 微分与积分性质 . . . . .	4
3.7 7. 帕塞瓦尔定理（能量守恒） . . . . .	4
<b>4 第四部分：详细例题解析</b>	<b>4</b>
<b>5 第五部分：LTI 系统的频域分析法</b>	<b>6</b>

# 1 第一部分：傅里叶变换的理论核心

## 1.1 1. 从周期到非周期：概念引入

- **思路**：对于周期为  $T$  的信号，其频谱是离散的（傅里叶级数）。当周期  $T \rightarrow \infty$  时，周期信号就变成了非周期信号。
- **频谱变化**：随着  $T$  增大，基波频率  $\omega_0 = 2\pi/T \rightarrow 0$ ，谱线之间的间隔变小，最终离散的频谱变成了连续的频谱。傅里叶级数的系数  $Ta_k$  的包络演变成了傅里叶变换  $X(j\omega)$ 。

## 1.2 2. 核心定义（必考公式）

这两个公式描述了时域信号  $x(t)$  与频域信号  $X(j\omega)$  之间的一一对应关系。

- **正变换（分析方程）**：将信号分解为复指数分量。

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

**物理意义**： $X(j\omega)$  代表了信号在频率  $\omega$  处的频谱密度（幅度密度和相位密度）。

- **逆变换（综合方程）**：利用复指数分量合成原信号。

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

**物理意义**： $x(t)$  是不同频率复指数信号  $e^{j\omega t}$  的加权叠加。

## 1.3 3. 收敛条件（Dirichlet 条件）

并不是所有信号都能进行傅里叶变换，需满足：

1. 绝对可积： $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ 。
2. 在任意有限区间内，只有有限个极值点。
3. 在任意有限区间内，只有有限个第一类间断点。

**补充**：对于能量无限但平均功率有限的信号（如周期信号、阶跃信号），通过引入**冲激函数**  $\delta(\omega)$ ，也能定义其傅里叶变换。

## 2 第二部分：常见傅里叶变换对归纳

熟记这些变换对是解题的基础。

信号名称	时域信号 $x(t)$	频域信号 $X(j\omega)$	说明
单位冲激	$\delta(t)$	1	全频带白噪声谱
直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$	能量集中在 0 频
单边指数	$e^{-at}u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	系统分析极重要
双边指数	$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	实偶函数
矩形脉冲	$g_\tau(t)$ (门宽 $\tau$ )	$\tau\text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$	对应抽样函数
符号函数	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	奇对称虚函数
单位阶跃	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	含直流和交流分量
频域冲激	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	频谱搬移基础
余弦信号	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	两根谱线
正弦信号	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	纯虚数

## 3 第三部分：傅里叶变换的关键性质与方法

### 3.1 1. 线性性质

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

### 3.2 2. 时移与频移（对称性）

- **时移**:  $x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$   
幅度谱不变，只产生线性相位滞后。
- **频移（调制）**:  $e^{j\omega_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$   
通信系统的基础，将基带信号搬移到射频。

### 3.3 3. 对称性（对偶性）——解题大杀器

如果  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ ，那么：

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-j\omega)$$

**应用：**矩形脉冲的变换是 Sa 函数，那么 Sa 函数形状的时域信号，其频谱就是矩形形状（理想低通滤波器）。

### 3.4 4. 尺度变换

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X(j\frac{\omega}{a})$$

**结论：**时域压缩（快放），频域展宽（带宽增加）；时域展宽（慢放），频域压缩。**时宽与带宽成反比。**

### 3.5 5. 卷积性质——系统分析核心

- **时域卷积：**  $y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$   
LTI 系统的输出频谱 = 输入频谱 × 频率响应。
- **频域卷积（乘积性质）：**  $x(t)p(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)]$   
主要用于分析调制解调和采样过程。

### 3.6 6. 微分与积分性质

- **时域微分：**  $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(j\omega)$
- **频域微分：**  $-jtx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
- **时域积分：**  $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

### 3.7 7. 帕塞瓦尔定理（能量守恒）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

## 4 第四部分：详细例题解析

### 例题 1：基础定义法（单边指数信号）

**题目：**求  $x(t) = e^{-at}u(t)$  ( $a > 0$ ) 的傅里叶变换。

**解析：**直接套用定义公式：

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

**结论：**这是最基本的变换，也是分析 RC 电路的基础。

## 例题 2：性质法（求冲激响应）

**题目：**描述某 LTI 系统的微分方程为  $y'(t) + 2y(t) = x(t)$ ，求系统的频率响应  $H(j\omega)$  和冲激响应  $h(t)$ 。

**解析：**

1. 两边取傅里叶变换，利用微分性质：

$$j\omega Y(j\omega) + 2Y(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow (j\omega + 2)Y(j\omega) = X(j\omega)$$

2. 求频率响应： $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{2+j\omega}$

3. 求冲激响应  $h(t)$ ：对  $H(j\omega)$  做逆变换，对应  $a = 2$  的单边指数。

$$h(t) = e^{-2t} u(t)$$

## 例题 3：对偶性应用（Sa 函数的变换）

**题目：**求信号  $x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$  的傅里叶变换。

**解析：**

1. 已知门宽为  $2W$  的矩形脉冲  $g(t) \leftrightarrow \frac{2\sin(\omega W)}{\omega}$ 。
2. 利用对偶性  $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-j\omega)$ ，可知若频域是矩形  $X(j\omega)$ （在  $|\omega| < W$  为 1），则时域为  $x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$ 。

**结果：**该信号的频谱是一个理想低通滤波器形状（矩形）：

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

### 例题 4：调制性质应用

题目：已知  $x(t)$  的频谱为  $X(j\omega)$ ，求  $y(t) = x(t) \cos(100t)$  的频谱。

解析：

1. 欧拉公式： $\cos(100t) = \frac{1}{2}(e^{j100t} + e^{-j100t})$ 。

2. 频移性质： $x(t)e^{j100t} \leftrightarrow X(j(\omega - 100))$ 。

结果： $Y(j\omega) = \frac{1}{2}X(j(\omega - 100)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + 100))$ 。

相当于频谱一分为二，左右各搬移 100，幅度减半。

## 5 第五部分：LTI 系统的频域分析法

1. 方法：

- 将时域的微分方程转化为频域的代数方程。
- 系统函数形式： $H(j\omega) = \frac{\sum b_k(j\omega)^k}{\sum a_k(j\omega)^k}$

2. 优点：

- 避免了求解微分方程特解和齐次解的繁琐。
- 物理意义清晰：直接看出系统对不同频率分量的增益（模）和相移（相角）。