Lecture8

zhike chen

November 2021

1 笔记

1.1 线性二次型最优控制

系统状态方程:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

其中 $A(t) : [t_0, t_f] \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $B(t) : [t_0, t_f] \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 都是关于时间可微的矩阵值函数, 控制目标机具有固定的终端时刻 t_f、自由的终端状态 x_f, 目标是最小化二次型性能指标:

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

运行代价和终端代价都是状态变量和控制变量的二次函数, 其中 R(t) 与 Q(t) 均为实对称矩阵。引入协态变量 $p(t) : [t_0, t_f] \to \mathbf{R}^n$, 构建 Hamilton 函数:

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] + p^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)]$$

利用极值条件得到:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R(t)u(t) + B^T(t)p(t)$$

即:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t)$$

利用协态方程和状态方程得到:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t)x(t) - A^T(t)p(t)$$

以矩阵的形式可以写成:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

利用横截条件:

$$[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f),t_f)-p(t_f)]\delta x_f+[H(x(t_f),u(t_f),p(t_f),t_f)+\frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f),t_f)]\delta t_f=0$$

可以得到:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f),t_f)-p(t_f)=0$$
$$Hx(t_f)-p(t_f)=0$$

带入协态方程和状态方程得到的方程组可以得到:

$$p(t)=K(t)x(t)$$
$$0=\dot{K}(t)+Q(t)-K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)+K(t)A(t)+A^T(t)K(t)$$
$$K(t_f)=H$$

第二项为 Riccati 方程

1.2 线性定常系统时间最短控制

系统状态方程:

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=u(t)$$

容许控制:

$$|u(t)|\le 1$$

终端时刻自由，状态固定:

$$x_1(t_f)=0$$
$$x_2(t_f)=0$$

最小化到点时间:

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f}dt=t_f-t_0$$

利用 Hamilton 函数:

$$H(x(t),u(t),p(t),t)=1+p_1(t)x_2(t)+p_2(t)u(t)$$

极值条件:

$$H(x(t), u^*(t), p(t), t) < H(x(t), u(t), p(t), t)$$

$$u(t) = -sign(p_2(t))$$

协态方程与状态方程:

$$\dot{p}_1(t) = 0$$

$$\dot{p}_2(t) = -p_1(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

进一步求解可得

$$p_1(t) = c_1$$

$$p_2(t) = -c_1 t + c_2$$

$u(t)$ 需要分类讨论