最优化与最优控制 1

zhike chen

September 2021

1 笔记

1.1 局部极小值与导数

局部极小值定义：如果存在一个 $\epsilon > 0$，使的所有满足 $|x - x^*| < \epsilon$ 的 x 都有 $f(x^*) \leq f(x)$ 我们就把点 x^* 对应的函数值 $f(x^*)$ 称为一个函数 f 的局部最小值。

证明局部极小值点的导数为 0：

由定义可证：

$$\lim_{\epsilon->0} \frac{f(x^* + \epsilon) - f(x^*)}{\epsilon} \geq 0 \tag{1}$$

$$\lim_{\epsilon->0} \frac{f(x^* + \epsilon) - f(x^*)}{\epsilon} \leq 0 \tag{2}$$

因此

$$f'(x^*) = 0$$

1.2 欧拉-拉格朗日方程

最简变分问题的欧拉-拉格朗日方程：状态变量 $x(t) : [t_0, t_f] \to \mathbf{R}^n$ 连续可微，在给定初始时刻 t_0 状态为 $x(t_0) = x_0$，在给定终端时刻 t_f 状态为 $x(t_f) = x_f$。函数 g 取值于 $\mathbf{R}$，二阶连续可微，则，状态变量 x 最小化性能指标

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

的必要条件是对于任意时刻 $t \in [t_0, t_f]$，

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)] = 0$$

1.3 最速下降问题

小球由 A 点沿一曲线移动至 B 点，在不考虑摩擦力的情况下求所需移动时间最短的曲线表达式（二维）

设曲线为 $y = f(x)$

由能量守恒可知 $\frac{1}{2}mv^2 = mgH$ 即 $v = \sqrt{2gH}$

对曲线微元进行分析：$\frac{dl}{v} = \sqrt{1+y'}/\sqrt{2gy}dx$

通过积分得到总时间为 $T(y) = \int_{Xa}^{Xb} L[y, y']dx$

类似局部极小值引入扰动 $\varepsilon\eta(x)$ 得到:

$$
\begin{aligned}
T[y+\varepsilon\eta(x)] &= \int_{Xa}^{Xb} L[y+\varepsilon\eta(x), y'+\varepsilon\eta'(x)]dx \\
&= \int_{Xa}^{Xb} L[y, y'] + \frac{\partial L}{\partial y}|_{y,y'}\varepsilon\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}\varepsilon\eta'(x)\ dx
\end{aligned} \tag{3}
$$

根据极值点条件可得:

$$
\frac{T[y+\varepsilon\eta(x)] - T[y]}{\varepsilon} = \int_{Xa}^{Xb} \frac{\partial L}{\partial y}|_{y,y'}\varepsilon\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}\varepsilon\eta'(x)\ dx = 0 \tag{4}
$$

1.4 作业一

利用拉格朗日方程解决最速下降问题

目标函数:

$$
T(y) = \int_{Xa}^{Xb} \sqrt{1+y'}/\sqrt{2gy}dx \tag{5}
$$

带入拉格朗日方程:

$$
\frac{\partial L[y,y']}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L[y,y']}{\partial y'} = 0 \tag{6}
$$

$$
-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}y} - \frac{y'}{\sqrt{2(1+(y')^2)gy}} = 0 \tag{7}
$$

$$
2yy' = 1 + y' \tag{8}
$$

令 $y = k(1-\cos\theta)$ 可得:

$$
\sqrt{\frac{k(1-\cos\theta}{2k - k(1-\cos\theta)}}k\sin\theta d\theta = dx \tag{9}
$$

$$
x = k(\theta - \sin\theta) \tag{10}
$$

$$
y = k(1-\cos\theta) \tag{11}
$$

1.5 作业二

利用变分法求得非均匀介质光路，假设介质在 x 方向上均匀分布，在 y 方向上非均匀

$$\begin{aligned} T &= \frac{\int_A^B n(s)\ ds}{c} \qquad (12) \\ &= \frac{\int_A^B n(y)\sqrt{1+(y')^2}\ dx}{c} \qquad (13) \end{aligned}$$

带入拉格朗日方程得到轨迹约束

$$\frac{\partial n(y)}{\partial y}\sqrt{1+(y')^2} = 0 \tag{14}$$

1.6 作业三

递推最小二乘法推导

最小二乘法

$$\hat{\theta}_k = (X_k^T X_k)^{-1} X_k^T Y_k \tag{15}$$

递推

$$\begin{aligned} X_k^T X_k &= X_{k-1}^T X_{k-1} + x_k^T * x_k \qquad (16) \\ X_k^T Y_k &= X_{k-1}^T Y_{k-1} + x_k y_k \qquad (17) \\ \hat{\theta_k} &= (X_k^T X_k)^{-1} X_k^T Y_k \qquad (18) \\ &= X_k^T X_k (X_{k-1} Y_{k-1} + x_k y_k) \qquad (19) \\ &= X_k^T X_k ((X_{k-1}^T X_{k-1})^{-1} \theta\hat{}_{k-1} + x_k y_k) \qquad (20) \\ &= \theta\hat{}_{k-1} - X_k^T X_k x_k x_k^T \theta\hat{}_{k-1} + X_k^T X_k x_k y_k \qquad (21) \\ &= \theta\hat{}_{k-1} + X_k^T X_k x_k (y_k - x_k^T \theta\hat{}_{k-1} \qquad (22) \\ &= \theta\hat{}_{k-1} + K_k \sigma_k \qquad (23) \end{aligned}$$