二维可压缩磁流体模拟（用 MATLAB 语言复原工作）

陈宗华(Zong-hua Chen, 814484233@qq.com, 15307756701)
玉林师范学院（东校区）物理与电信工程学院
广西玉林市教育东路 1303 号，537000

2019-08

摘 要

本工作是围绕谢华生博士的著作《计算等离子体物理导论》[1]第 5 章 5.42 节撕裂模及磁重联的内容展开讨论的。此书是等离子体物理数值计算与模拟的入门教程，通过具体的算例来帮助初学者理解相关的物理概念和物理图像，既有新意又有实用性，对于初学入门者来说，是一本不可多得的书。书中的算例均提供了相关的代码，基本上是以 MATLAB 语言为主，有些算例并没有完全用 MATLAB 语言编写，例如撕裂模及磁重联的那一节[2]的算例提供的是 Fortran 代码，对于多种代码语言不能一一精通的初学者来说这是一个挑战。此外，作者提供的参考著作(傅竹风，1995《空间等离子体数值模拟》)[3]网上缺货，电子版在全国磁约束核聚变专业群也未能求得。为此，我按照书籍提供的线索及其提供的 Fortran 代码注释说明，用 MATLAB 语言对撕裂模及磁重联这一节的内容进行复原工作。

1 二维可压缩磁流体方程

平板模型，所有的变量都在(x,z)平面，各变量 y 方向是均匀的$\partial / \partial y = 0$。

1.1 原始方程

原始方程没有霍尔项，η, γ, ν 为常数。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{u}\cdot\nabla\rho - \rho\nabla\cdot\mathbf{u},\\
&\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{u}\cdot\nabla p - \gamma p\nabla\cdot\mathbf{u},\\
&\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nabla p - \frac{1}{\mu_0}\nabla\frac{B^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{B} + \nu\nabla^2\mathbf{u},\\
&\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times\left(\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) - \nabla\times\left[\eta\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中，使用条件

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
&\mathbf{J} = \nabla\times\mathbf{B},\\
&\mathbf{E} = -\mathbf{u}\times\mathbf{B} + \eta\mathbf{J}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

考虑到$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$，我们使用$A_y$ 来表示$\mathbf{B}$，例如

$$
\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \nabla\times\left(0, A_y, 0\right) = \left(-\partial A_y / \partial z, 0, \partial A_y / \partial x\right) \tag{3}
$$

把上述方程写成显示的二维方程组（已经归一化）

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}=-u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}-u_z\frac{\partial \rho}{\partial z}-\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial p}{\partial t}=-u_x\frac{\partial p}{\partial x}-u_z\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma p\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial u_x}{\partial t}=-u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}-u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{B^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+B_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\nu_m\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t}=-u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}-u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{B^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\left(B_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+B_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\nu_m\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial A_y}{\partial t}=-u_x\frac{\partial A_y}{\partial x}-u_z\frac{\partial A_y}{\partial z}+\eta_m\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

1.2 归一化

对于方程组(4)，归一化的密度，压强，长度，速度和时间的归一化分别是 ρ_0, p_0, L_0, B_0，$u_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$，$\tau_A = L_0/u_A$。

参数估计

$$\nu_m \to \frac{\nu}{u_A L_0 \rho_0}, \eta_m \to \frac{\eta}{u_A L_0}, \tag{5}$$

磁 Lundquist 数 $S = 1/\eta_m$。

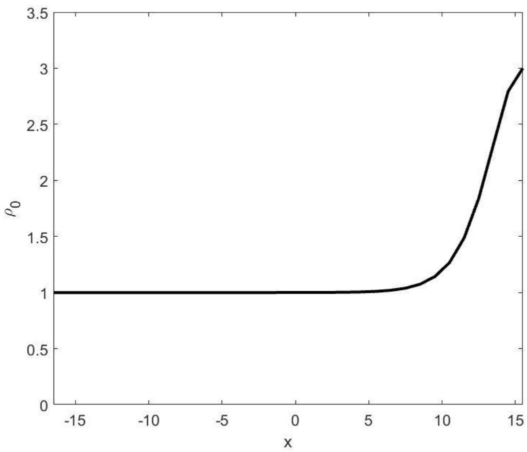
1.3 离散化

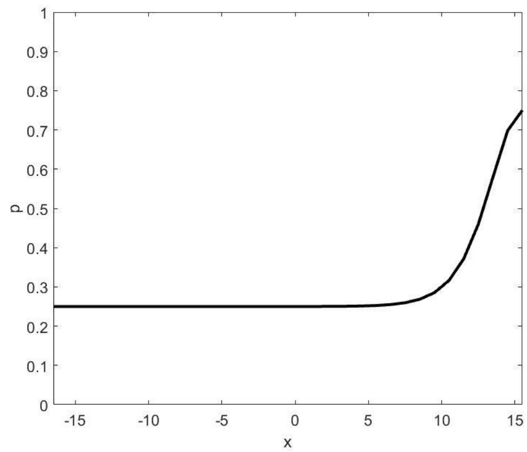
对于方程组(4)右手边的空间微分，采用中心差分格式如下

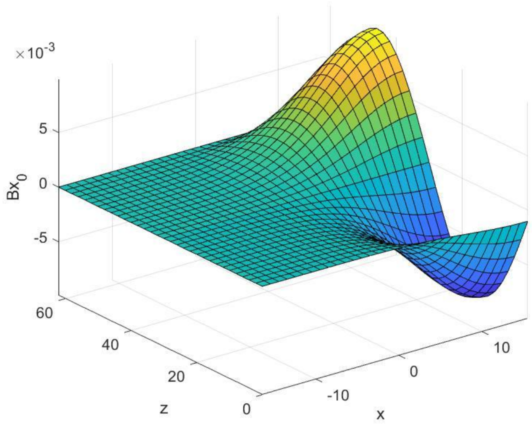
$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} \to \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x},\\
&\frac{\partial f}{\partial z} \to \frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\Delta z},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \to \frac{f_{i+1}+f_{i-1}-2f_i}{\Delta x^2},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \to \frac{f_{j+1}+f_{j-1}-2f_j}{\Delta z^2}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

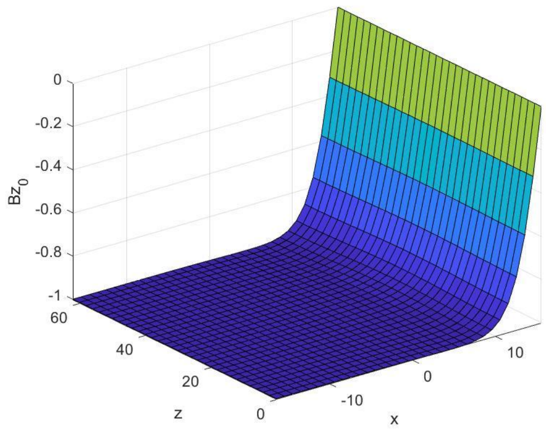
对于方程组的左边的时间偏微分，采用的是四阶龙格库塔法格式求解。

1.4 初始条件









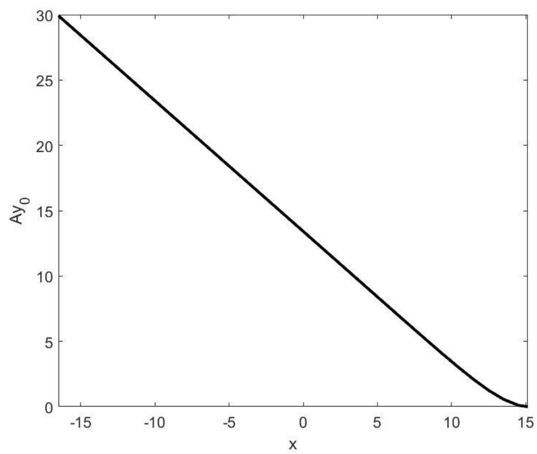


图 1 初始参数空间分布

1.5 边界条件

在 z 方向上采用的是周期性边界条件，在 x 方向上用的是混合边界条件。在 x 轴的下边界采用条件为

$$\begin{aligned} u_x\left(x_d,:\right)&=0, \\ A_y\left(x_d,:\right)&=0, \end{aligned} \tag{7}$$

而 ρ, p, u_z 在 x 轴的下边界采用的是自由边界条件。在 x 轴的上边界采用条件为

$$\begin{aligned} u_x(x_u,:)&=0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial x}&=0, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x}&=0. \end{aligned} \tag{8}$$

2 MATLAB 求解代码结构

变量 U(ni,nj,5)存放了 5 个二维变量，分别代表 ρ, p, u_x, u_z, A_y。本工作是基于 MATLAB 语言重新对著作[2, 4]提供的 Fortran 代码进行改写，结合 MATLAB 的矩阵运算优势，把原来单点循环赋值运算，全部改写成矩阵赋值运算，使代码得到了很大程度上的简化。为擅于 MATLAB 语言而不会用 Fortran 的初学者提供参考。另外，在 Fortran 代码的子程序“Subroutine right(xo,xi)”中，求解 $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ 的右边 pt 项本来是对 x 进行求微分，但实际上输入的字母有误，具体是子程序中“-rdz*(pt(i+1,j)-pt(i-1,j)))”正确应该是乘以 rdx。由于 rdx 和 rdz 是个比较相接近的常数，没有对整体的趋势产生显著影响。

3 复原模拟结果

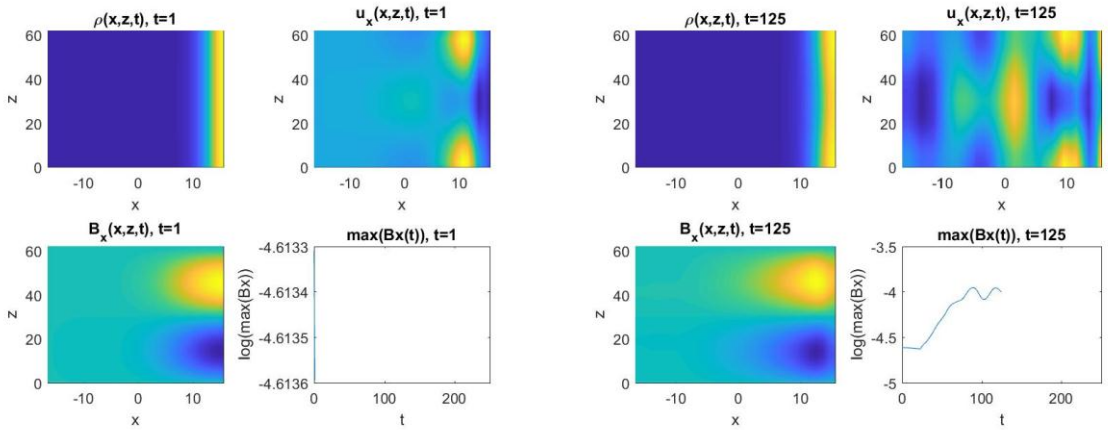


图 2 场随时间演化 t=1s 及 125s。

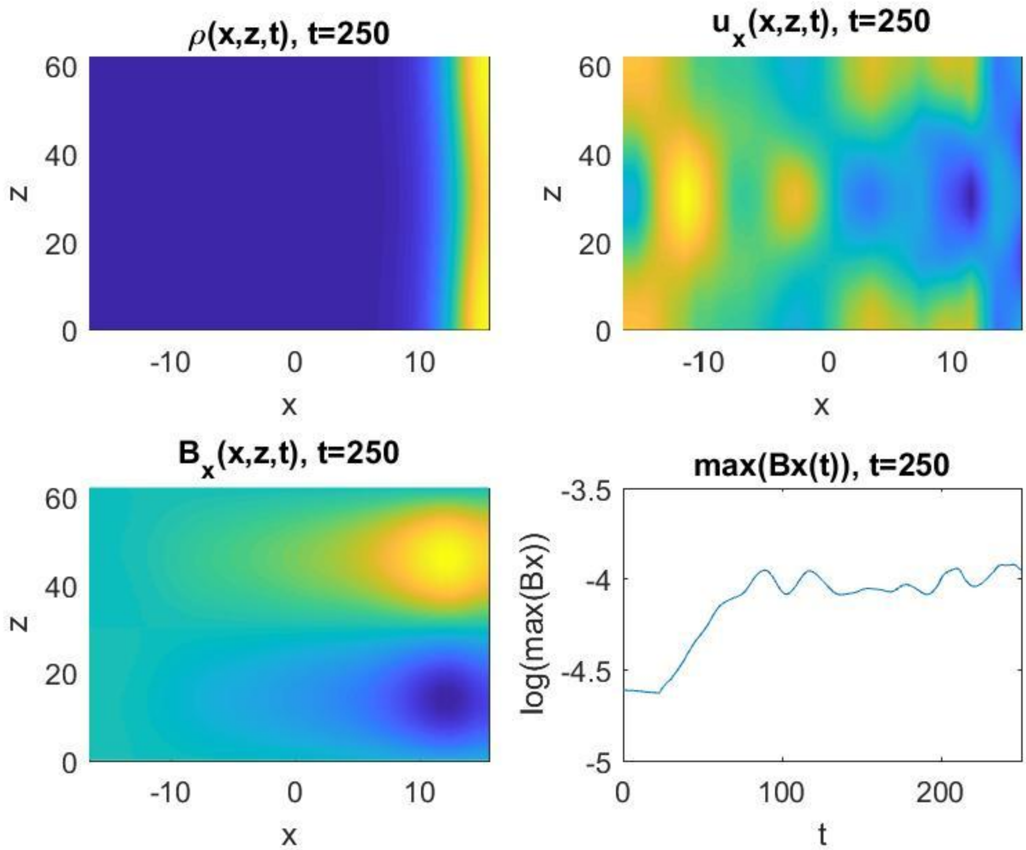


图 3 场随时间演化 t=250s.

图 2-3 为一组典型的非线性模拟结果，其中我们可以看到初始扰动调整后，开始进入一段指数增长的线性阶段，然后达到非线性饱和，饱和后基本稳态演化。

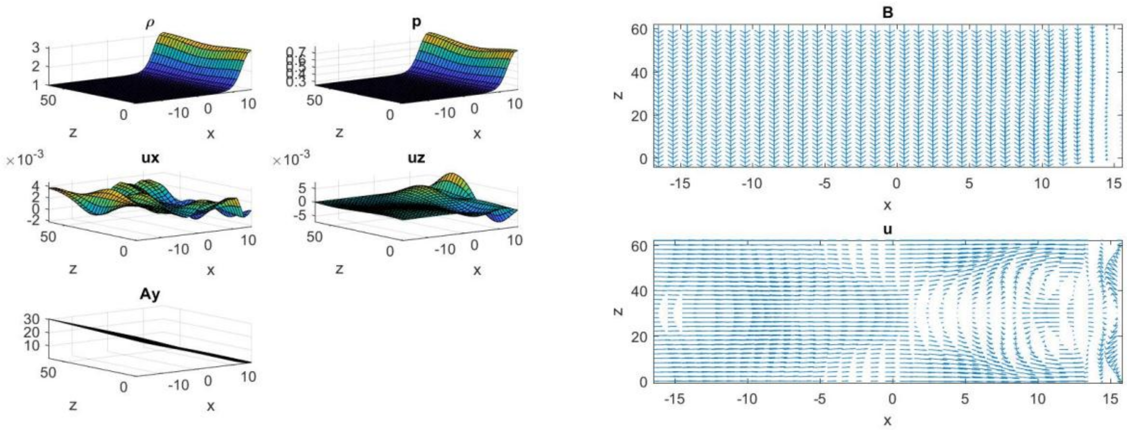


图 4 场随时间演化 t=250s.

参考文献

[1] 谢华生．计算等离子体物理导论[M]．北京：科学出版社，2018．

[2] 谢华生．撕裂模及磁重联[M]//谢华生．计算等离子体物理导论．北京：科学出版社，2018：107-111．

[3] 傅竹风，胡友秋．空间等离子体数值模拟[M]．安徽科学技术出版社，1995．

[4] 谢华生．Hua-sheng XIE*（谢华生）[EB/OL]．[2019-08-27]．http://hsxie.me/．

附录：MATLAB 程序

MHD2D_main

二维可压缩磁流体模拟（用 MATLAB 语言复原工作） 陈宗华(Zong-hua Chen, 8144842330@qq.com,15307756701) 玉林师范学院（东校区）物理与电信工程学院 广西玉林市教育东路 1303 号，537000 2019-08

```
close;clear;clc;
global dx dz gamma nu eta dt Bx Bz
nx=33;
nz=32;
nt=5000;
dt=0.05;  % 要满足 dt < min(dx,dz)/[sqrt(1.0+0.5*gamma*beta)*va]
dx=1.0; dz=2.0;
xl=dx*nx/2; zl=dz*(nz-1);
xx=-xl:dx:xl-dx;
zz=0:dz:zl;
[x,z]=meshgrid(xx,zz);
x=x';z=z';
gamma=1.66667;              %
eta=0.01;
nu=0.05;
beta=0.5;                                   % beta in x=Lx
rho0=1.0;              % rho0 -- mass density rho0 in x=Lx
B0=1.0;                                          % b0 -- B0
bl=3.0;                    % bl -- width of current sheet
va=sqrt(B0*B0/rho0);% Alfven velocity
p0=0.5*beta*B0*B0; % p0 -- pressure p0 in x=Lx
t0=0.5*beta*va*va; % t0 -- temperature T0 in x=Lx
cfl=1.5;  % Courant-Friedrichs-Lewy condition parameter
U=zeros(nx,nz,5);
 %% 初始场分布
s=((1:nx)-nx)*dx/bl;
b=B0*tanh(s);
p=p0+0.5*(B0.^2-b.^2);
rho=p/t0;
Ay=B0.*bl.*log(cosh(s));
U(:,:,1)=repmat(rho',1,nz);
U(:,:,2)=repmat(p',1,nz);
U(:,:,5)=repmat(Ay',1,nz);
 %% 初始场扰动
nw=1;% nw -- number of initial perturbation
abd=10; % abd -- perturbation width in x
am=[0.01,zeros(1,9)];% am -- prtb amplitude
s=((2:nx)-nx)*dx/abd;
for m=1:nw
    sii=exp(-s.*s).*am(m)*B0;
    sij=sin((2*m*((1:nz)-0.5*nz)/(nz-1)+0.5)*pi)*dz*(nz-1)/(2.0*m*pi);
end
U(:,:,5)=U(:,:,5)+[zeros(1,nz);sii'*sij];
t=0;
rho0=U(:,:,1);p0=U(:,:,2);ux0=U(:,:,3);uz0=U(:,:,4);Ay0=U(:,:,5);[Bx0,Bz0]=calcBxz(t,U);
for it=1:nt
    t=t+dt;
    [Bx,Bz]=calcBxz(t,U);
    Bxm(it)=max(max(Bx));
    U=RK4(t,U);
    if mod(it,20)==0
        figure(2)
        subplot(3,2,1);surf(x,z,U(:,:,1)); xlabel('x');ylabel('z');title('\rho');axis tight
        subplot(3,2,2);surf(x,z,U(:,:,2)); xlabel('x');ylabel('z');title('p');axis tight
```

```
            subplot(3,2,3);surf(x,z,U(:,:,3)); xlabel('x');ylabel('z');title('ux');axis tight
            subplot(3,2,4);surf(x,z,U(:,:,4)); xlabel('x');ylabel('z');title('uz');axis tight
            subplot(3,2,5);surf(x,z,U(:,:,5)); xlabel('x');ylabel('z');title('Ay');axis tight
            figure(3)
            subplot(2,1,1);quiver(x,z,Bx,Bz,2); xlabel('x');ylabel('z');title('B');axis tight
            subplot(2,1,2);quiver(x,z,U(:,:,3),U(:,:,4),2); xlabel('x');ylabel('z');title('u');axis tight
            figure(4)
            subplot(2,2,1);pcolor(x,z,U(:,:,1)); shading('interp');
            xlabel('x');ylabel('z');title(['\rho(x,z,t), t=',num2str(t)])
            subplot(2,2,2);pcolor(x,z,U(:,:,3)); shading('interp');
            xlabel('x');ylabel('z');title(['u_x(x,z,t), t=',num2str(t)])
            subplot(2,2,3);pcolor(x,z,Bx); shading('interp');
            xlabel('x');ylabel('z');title(['B_x(x,z,t), t=',num2str(t)])
            subplot(2,2,4);
            plot([1:it]*dt,log(Bxm));xlabel('t');ylabel('max(Bx(t))');title(['max(Bx(t)), t=',num2str(t)])
            xlabel('t');ylabel('log(max(Bx))');title(['max(Bx(t)), t=',num2str(t)])
            xlim([0,nt*dt])
            drawnow
        end
    end
    function Uo=RK4(t,Ui)
     % U(:,:,i),其中 i= 1 2 3 4 5 --> rho p ux uz ay
    global dt
     k1=rightEq(t,Ui);
     U1=Ui+0.5*dt*k1;
     k2=rightEq(t,U1);
     U2=Ui+0.5*dt*k2;
     k3=rightEq(t,U2);
     U3=Ui+dt*k3;
     k4=rightEq(t,U3);
     Uo=Ui+dt*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    end
    function k=rightEq(t,U)
     % U(:,:,i),其中 i= 1 2 3 4 5 --> rho p ux uz ay
    global gamma nu eta dx dz Bx Bz
     rho=U(:,:,1);
     p=U(:,:,2);
     ux=U(:,:,3);
     uz=U(:,:,4);
     Ay=U(:,:,5);
     pt=p+0.5*(Bx.^2+Bz.^2);% pt=p+b^2/2
     [nx,nz,~]=size(U);
     ic=1:nx;
     jc=1:nz;
     ip=ic+1;ip(nx)=1;
     im=ic-1;im(1)=nx;
     jp=jc+1;jp(nz)=1;
     jm=jc-1;jm(1)=nz;
     k(:,:,1)=-ux.*(rho(ip,:)-rho(im,:))/(2*dx) ...
         -uz.*(rho(:,jp)-rho(:,jm))/(2*dz) ...
         -rho.*((ux(ip,:)-ux(im,:))/(2*dx) ...
         +(uz(:,jp)-uz(:,jm))/(2*dz));
     k(:,:,2)=-ux.*(p(ip,:)-p(im,:))/(2*dx) ...
         -uz.*(p(:,jp)-p(:,jm))/(2*dz) ...
         -gamma.*p.*((ux(ip,:)-ux(im,:))/(2*dx) ...
         +(uz(:,jp)-uz(:,jm))/(2*dz));
     k(:,:,3)=-ux.*(ux(ip,:)-ux(im,:))/(2*dx) ...
         -uz.*(ux(:,jp)-ux(:,jm))/(2*dz) ...
         -1./rho.*(pt(ip,:)-pt(im,:))/(2*dz) ... % 原程序有错误(pt(ipx,:)-pt(imx,:))/(2*dz)中应该是除以 dx 的
         +1./rho.*(Bx.*(Bx(ip,:)-Bx(im,:))/(2*dx)+Bz.*(Bx(:,jp)-Bx(:,jm))/(2*dz)) ...
         +nu./rho.*((ux(ip,:)+ux(im,:)-2*ux(ic,:))/(dx*dx)+(ux(:,jp)+ux(:,jm)-2*ux(:,jc))/(dz*dz));
     k(:,:,4)=-ux.*(uz(ip,:)-uz(im,:))/(2*dx) ...
```

```
        -uz.*(uz(:,jp)-uz(:,jm))/(2*dz) ...
        -1./rho.*(pt(:,jp)-pt(:,jm))/(2*dz) ...
        +1./rho.*(Bx.*(Bz(ip,:)-Bz(im,:))/(2*dx)+Bz.*(Bz(:,jp)-Bz(:,jm))/(2*dz)) ...
        +nu./rho.*((uz(ip,:)+uz(im,:)-2*uz(ic,:))/(dx*dx)+(uz(:,jp)+uz(:,jm)-2*uz(:,jc))/(dz*dz));
    k(:,:,5)=-ux.*(Ay(ip,:)-Ay(im,:))/(2*dx) ...
        -uz.*(Ay(:,jp)-Ay(:,jm))/(2*dz) ...
        +eta.*((Ay(ip,:)+Ay(im,:)-2*Ay(ic,:))/(dx*dx)+(Ay(:,jp)+Ay(:,jm)-2*Ay(:,jc))/(dz*dz));
     % x 的下边界, i=1
    k(1,:,1)=k(2,:,1);
    k(1,:,2)=k(2,:,2);
    k(1,:,3)=0;
    k(1,:,4)=k(2,:,4);
    k(1,:,5)=0;
     % x 的上边界, i=end
    k(end,:,1)=0 ...
        -uz(end,:).*(rho(end,jp)-rho(end,jm))/(2*dz) ...
        -rho(end,:).*((ux(end,:)-ux(end-1,:))/(1*dx) ...
        +(uz(end,jp)-uz(end,jm))/(2*dz));
    k(end,:,2)=0 ...
        -uz(end,:).*(p(end,jp)-p(end,jm))/(1*dz) ...
        -gamma.*p(end,:).*((ux(end,:)-ux(end-1,:))/(1*dx) ...
        +(uz(end,jp)-uz(end,jm))/(2*dz));
    k(end,:,3)=0;
    k(end,:,4)=0 ...
        -uz(end,:).*(uz(end,jp)-uz(end,jm))/(2*dz) ...
        -1./rho(end,:).*(pt(end,jp)-pt(end,jm))/(2*dz) ...
        +1./rho(end,:).*(Bx(end,:).*(Bz(end,:)-Bz(end-1,:))/(1*dx)+0) ...
        +nu./rho(end,:).*((2*uz(end-1,:)-2*uz(end,:))/(dx*dx)+(uz(end,jp)+uz(end,jm)-
2*uz(end,jc))/(dz*dz));
    k(end,:,5)=0 ...
        -uz(end,:).*(Ay(end,jp)-Ay(end,jm))/(2*dz) ...
        +eta.*((2*Ay(end-1,:)-2*Ay(end,:))/(dx*dx)+(Ay(end,jp)+Ay(end,jm)-2*Ay(end,jc))/(dz*dz));
    end

    function [Bx,Bz]=calcBxz(t,U)
    global dx dz
     [nx,nz,~]=size(U);
     ic=1:nx;
     jc=1:nz;
     ip=ic+1;ip(nx)=1;
     im=ic-1;im(1)=nx;
     jp=jc+1;jp(nz)=1;
     jm=jc-1;jm(1)=nz;
     Bx=-(U(:,jp,5)-U(:,jm,5))/(2*dz);
     Bz= (U(ip,:,5)-U(im,:,5))/(2*dx);
     Bx(end,:)=-(U(end,jp,5)-U(end,jm,5))/(2*dz);
     Bz(end,:)=0;
    end
```