#### МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС

#### "ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ" НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

#### ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

#### КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА **№2**

З КУРСУ "ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ"

**ТЕМА: «Відновлення функціональних залежностей по дискретно заданим вибіркам»**

#### Виконали: студенти 4-го курсу

#### Лупа А., КА-31

#### Чепига Ю., КА-33

#### Нестеренко В., КА-34

#### Мельник Ю., КА-31

#### Прийняла: Панкратова Н.Д.

#### Київ 2016

Зміст

[1.Постановка задачі 3](#_Toc434269764)

[2.Теоретичні відомості 3](#_Toc434269765)

[2.1 Третій рівень ієрархії 4](#_Toc434269766)

[2.2Другий рівень ієрархії 5](#_Toc434269767)

[2.3Перший рівень ієрархії 6](#_Toc434269768)

[2.4.Перерахунок коефіцієнтів отриманих многочленів через зворотні формули нормування 6](#_Toc434269769)

[2.5Похибка оцінювання 7](#_Toc434269770)

[3.Розв’язання задачі 7](#_Toc434269771)

[3.1.Нормалізація вхідних даних 7](#_Toc434269772)

[3.2.Нормалізація значень цільових функцій 7](#_Toc434269773)

[3.3.Метод спряжених напрямків 8](#_Toc434269774)

[3.4.Підбір степенів поліномів 10](#_Toc434269775)

[4.Приклад роботи програми 10](#_Toc434269776)

[Робота алгоритму на власній вибірці 17](#_Toc434269777)

[Висновок 18](#_Toc434269778)

[Список використаної літератури 19](#_Toc434269779)

[Додаток А. Результати роботи програми 20](#_Toc434269780)

[Додаток В. Код програми 39](#_Toc434269781)

# 1.Постановка задачі

#### Відомо, що 4 цільові функції 𝑌1, 𝑌2 залежать від трьох змінних , ,

#### Безпосередньо вигляд функцій невідомий, але задані значення змінних і відповідні значення цільових функцій на вибірці q0 ∈ [1; 50]

#### Цільові функції враховують невизначеності цілей 𝑥1, взаємодії 𝑥2 і ситуаційну

#### невизначеність 𝑥3.

#### Необхідно для кожної цільової функції 𝑌𝑖 визначити вигляд апроксимуючої Ф𝑖.

# 2.Теоретичні відомості

#### Апроксимуючі функції будуються у вигляді ієрархічної багаторівневої системи моделей.

#### На першому рівні визначається залежність функцій наближення (апроксимуючих) від змінних загалом:

*i* (*x*1, *x*2 , *x*3 )  *ci*1*i*1 (*x*1 )  *ci*2*i*2 (*x*2 )  *ci*3*i*3 (*x*3 )

#### На другому визначається залежність функцій наближення від кожної зі змінних зокрема. Для цього для кожного з доданків фунцій наближення обирається клас узагальнених поліномів:

#### На третьому ієрархічному рівні визначаються структура і компоненти функцій , , .

#### Функції формуються у вигляді поліномів, аналогічно до другого рівня:

*i* = 1÷4

#### Отже, структура побудови апроксимуючих функцій виглядає наступним чином: 1,2 ,3  *i*1,*i*2 ,*i*3  *i*

Розглянемо кожний з рівнів ієрархії окремо.

\*Попередньо потрібно зазначити, що вихідні значення цільових функцій і змінних були для зручності пронормовані.

## 2.1 Третій рівень ієрархії

На даному етапі потрібно визначити вигляд поліномів . Для цього потрібно обрати їх степінь . Cкладність цього завдання полягає у наступному. Зі збільшення степеню підвищується точність апроксимації цільових функцій функціями наближення. Але одночано збільшується й обсяг обчислень. Задача оптимізації зі знаходження степенів поліномів *p j*1 , *p j* 2 , *p j* 3 вирішується емпіричним шляхом.

На наступному кроці на основі чебишевської задачі наближення бузпосередьо формуємо поліноми :

1. Знаходимо два вектори . Вони знаходяться із системи лінійних рівнянь

*A*  *bi*  0

Можна вирішувати систему двома шляхами, але у даній роботі лінійна система вирішується у тому вигляді у якому вона записана.

Загальна структура векторів **

Матриця А.

Структура першого рядка

𝑎

обраний вигляд поліному степеня а.

1. Формування матриці *b*1 ,*b*2

Формувати матрицю можна двома шляхами, але у даній роботі вона формується наступним чином:

 визначається середнім арифметичним значенням

#### ,

#### Отже, визначаємо вигляд поліномів

*i* = 1÷4

,, - Зміщені поліноми Чебишева

#### і переходимо до другого рівня ієрархії.

## 2.2Другий рівень ієрархії

#### Аналогічно до третього рівня ієрархії на основі чебишевської задачі наближенняю

Безбосередньо для визначення функцій 1*i*,2*i*,3*i* потрібно визначити вигляд матриці

Матриця знаходиться для кожної з функцій окремо і на основі наступних міркувань:

При реалізації потрібно розв’язувати лінійні рівняння.

## 2.3Перший рівень ієрархії

На заключному етапі формування системи моделей визначаємо множину апроксимуючих функцій 

Де  

#### Для цього потрібно на основі чебишевської задачі наближення відшукати матрицю

## 2.4.Перерахунок коефіцієнтів отриманих многочленів через зворотні формули нормування

Поліном степені Р від нормованого значення:

## 2.5Похибка оцінювання

#### Величина похибки оцінювання цільових функцій визначалася наступним чином:

# 3.Розв’язання задачі

## 3.1.Нормалізація вхідних даних

## 3.2. Нормалізація значень цільових функцій

## Метод градієнтного спуску для розв’язку НСЛР

#### Задана СЛР:

#### Ax=b

#### Нехай 𝐴 – симетрична, додатно визначена квадратна матриця. Потрібно мінімізувати квадратичну форму

#### Маючи наближення на 𝑖 − тому кроці 𝑥𝑖 вибирають напрямок 𝑣𝑖 та знаходять число 𝛼𝑖 таким чином, щоб новий вектор

#### був мінімумом функції Q(𝑥) на лінії 𝑥𝑖 + 𝛼𝑖𝑣𝑖 , 𝛼 𝜖 ℝ .

#### Метод градієнтного спуску заснований на напрямку 𝑣𝑖, який отриманий із градієнту функції Q(𝑥) в точці 𝑥𝑖. Варто зазначити, що похибка на 𝑖 − й ітерації обчислюється як r𝑖 = b − 𝐴𝑥𝑖, а сама ітераційна формула має вигляд:

#### де r𝑖 являє собою напрямок 𝑣𝑖, а коефіцієнт 𝛼𝑖 вибирається із умови мінімізації

#### Q(𝑥) вздовж антиградієнта.

#### За визначенням, цей метод мінімізує �(𝑥𝑖) на кожному кроці. Умова зупинки алгоритму: ‖r𝑖‖ < ℇ .

#### Оскільки необхідною умовою цього методу є симетричність та додатна визначеність матриці 𝐴, то для розв’язання отриманої НСЛР зробимо наступне.

#### Нехай дане рівняння 𝐴𝑥 = b. Помножимо ліву та праву частину на 𝐴𝑇, розв’язок рівняння при цьому не зміниться, але при цьому отримаємо додатно визначену квадратну симетричну матрицю .

#### Далі до нового рівняння 𝐴𝑇 𝐴𝑥 = 𝐴𝑇b застосуємо процедуру (1) та знайдемо шуканий розв’язок НСЛР.

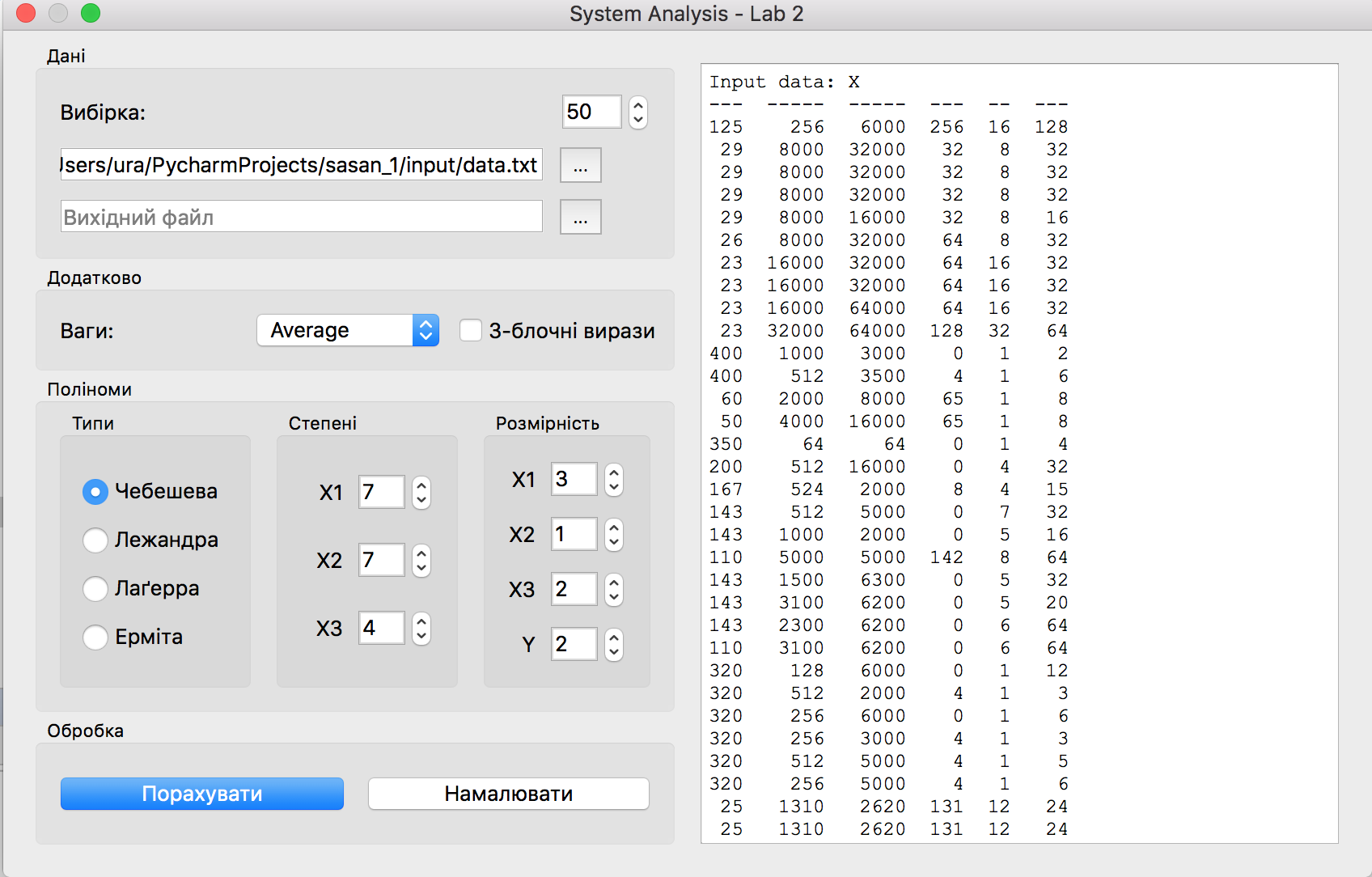
#### На основі наведених вище кроків розв’язуємо НСЛР 𝐴𝜆 = , попередньо привівши ці рівняння до необхідного вигляду, та знаходимо 𝜆 .

## 

## 3.4.Підбір степенів поліномів

#### Підбір степенів відбувається виходячи з мінімізації максимального відхилення (критерійЧебишева). Такий перебір реалізований в файлі choose\_p.py. Перебір відбувається по степеням многочленів: для всіх многочленів від 1 до 15. В нашому випадку найкращим вибором степенів поліномів буде (7, 5, 2)

# 4.Приклад роботи програми



#### Рис. 1

Для запуску необхідно обрати два файли, один у форматі txt, а інший у форматі Excel – із вхідними даними ***Input data file,*** а також зі значеннями цільових функцій ***Output values file***.

***data.xlsx*** – файл з параметрами запуску, із усіми проміжними розрахунками (матрицями b, 𝑨, ||a||**,** ||c|| і т.д.) – всі вони наведені у Додатку А;

**Графіки у ненормованому вигляді*:***

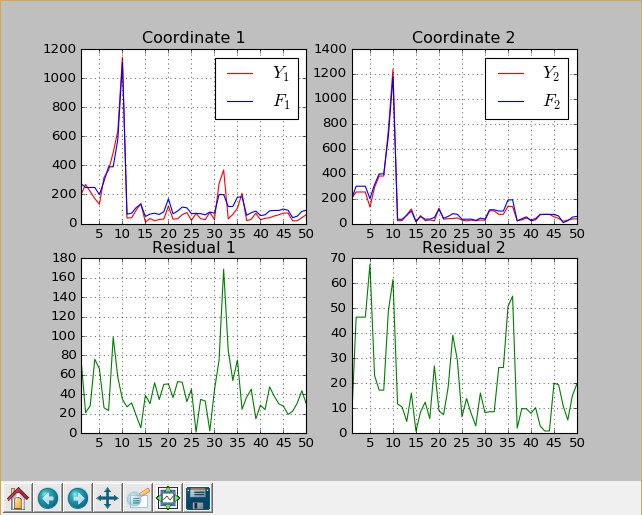


Figure 1

**Вирази:**

(Psi11)[1]=0.039387\*T0(x11) + -0.015518\*T1(x11) + 0.027916\*T2(x11) + 0.046468\*T3(x11) + 0.013732\*T4(x11) + -0.018834\*T5(x11) + -0.027241\*T6(x11) + -0.015005\*T7(x11)

(Psi12)[1]=0.039387\*T0(x12) + 0.060119\*T1(x12) + -0.003663\*T2(x12) + 0.056296\*T3(x12) + 0.051085\*T4(x12) + 0.031927\*T5(x12) + 0.041161\*T6(x12) + 0.033019\*T7(x12)

(Psi13)[1]=0.039387\*T0(x13) + 0.079537\*T1(x13) + 0.021579\*T2(x13) + 0.067943\*T3(x13) + 0.084254\*T4(x13) + 0.040780\*T5(x13) + 0.006092\*T6(x13) + -0.001602\*T7(x13)

(Psi21)[1]=0.039387\*T0(x21) + -0.006570\*T1(x21) + 0.006849\*T2(x21) + 0.081071\*T3(x21) + 0.062109\*T4(x21) + -0.061037\*T5(x21) + -0.057031\*T6(x21) + 0.003362\*T7(x21)

(Psi31)[1]=0.039387\*T0(x31) + 0.076501\*T1(x31) + -0.005829\*T2(x31) + -0.003897\*T3(x31) + 0.016998\*T4(x31)

(Psi32)[1]=0.039387\*T0(x32) + 0.037332\*T1(x32) + 0.001206\*T2(x32) + -0.020865\*T3(x32) + -0.016240\*T4(x32)

(Psi11)[2]=0.039387\*T0(x11) + -0.015518\*T1(x11) + 0.027916\*T2(x11) + 0.046468\*T3(x11) + 0.013732\*T4(x11) + -0.018834\*T5(x11) + -0.027241\*T6(x11) + -0.015005\*T7(x11)

(Psi12)[2]=0.039387\*T0(x12) + 0.060119\*T1(x12) + -0.003663\*T2(x12) + 0.056296\*T3(x12) + 0.051085\*T4(x12) + 0.031927\*T5(x12) + 0.041161\*T6(x12) + 0.033019\*T7(x12)

(Psi13)[2]=0.039387\*T0(x13) + 0.079537\*T1(x13) + 0.021579\*T2(x13) + 0.067943\*T3(x13) + 0.084254\*T4(x13) + 0.040780\*T5(x13) + 0.006092\*T6(x13) + -0.001602\*T7(x13)

(Psi21)[2]=0.039387\*T0(x21) + -0.006570\*T1(x21) + 0.006849\*T2(x21) + 0.081071\*T3(x21) + 0.062109\*T4(x21) + -0.061037\*T5(x21) + -0.057031\*T6(x21) + 0.003362\*T7(x21)

(Psi31)[2]=0.039387\*T0(x31) + 0.076501\*T1(x31) + -0.005829\*T2(x31) + -0.003897\*T3(x31) + 0.016998\*T4(x31)

(Psi32)[2]=0.039387\*T0(x32) + 0.037332\*T1(x32) + 0.001206\*T2(x32) + -0.020865\*T3(x32) + -0.016240\*T4(x32)

(Phi1)[1]=0.081149\*T0(x11) + -0.031971\*T1(x11) + 0.057514\*T2(x11) + 0.095737\*T3(x11) + 0.028293\*T4(x11) + -0.038802\*T5(x11) + -0.056125\*T6(x11) + -0.030915\*T7(x11) + 0.065557\*T0(x12) + 0.100063\*T1(x12) + -0.006097\*T2(x12) + 0.093702\*T3(x12) + 0.085028\*T4(x12) + 0.053140\*T5(x12) + 0.068510\*T6(x12) + 0.054958\*T7(x12) + 0.036923\*T0(x13) + 0.074562\*T1(x13) + 0.020229\*T2(x13) + 0.063693\*T3(x13) + 0.078984\*T4(x13) + 0.038229\*T5(x13) + 0.005711\*T6(x13) + -0.001502\*T7(x13)

(Phi2)[1]=0.106944\*T0(x21) + -0.017839\*T1(x21) + 0.018595\*T2(x21) + 0.220123\*T3(x21) + 0.168637\*T4(x21) + -0.165728\*T5(x21) + -0.154852\*T6(x21) + 0.009130\*T7(x21)

(Phi3)[1]=0.146739\*T0(x31) + 0.285011\*T1(x31) + -0.021715\*T2(x31) + -0.014518\*T3(x31) + 0.063328\*T4(x31) + 0.359583\*T0(x32) + 0.340822\*T1(x32) + 0.011011\*T2(x32) + -0.190488\*T3(x32) + -0.148264\*T4(x32)

(Phi1)[2]=0.065355\*T0(x11) + -0.025749\*T1(x11) + 0.046321\*T2(x11) + 0.077104\*T3(x11) + 0.022786\*T4(x11) + -0.031251\*T5(x11) + -0.045201\*T6(x11) + -0.024898\*T7(x11) + 0.053830\*T0(x12) + 0.082164\*T1(x12) + -0.005007\*T2(x12) + 0.076940\*T3(x12) + 0.069818\*T4(x12) + 0.043634\*T5(x12) + 0.056255\*T6(x12) + 0.045127\*T7(x12) + 0.047511\*T0(x13) + 0.095942\*T1(x13) + 0.026030\*T2(x13) + 0.081957\*T3(x13) + 0.101633\*T4(x13) + 0.049192\*T5(x13) + 0.007349\*T6(x13) + -0.001932\*T7(x13)

(Phi2)[2]=0.084026\*T0(x21) + -0.014016\*T1(x21) + 0.014610\*T2(x21) + 0.172951\*T3(x21) + 0.132499\*T4(x21) + -0.130213\*T5(x21) + -0.121667\*T6(x21) + 0.007173\*T7(x21)

(Phi3)[2]=0.137357\*T0(x31) + 0.266788\*T1(x31) + -0.020327\*T2(x31) + -0.013590\*T3(x31) + 0.059279\*T4(x31) + 0.305635\*T0(x32) + 0.289689\*T1(x32) + 0.009359\*T2(x32) + -0.161909\*T3(x32) + -0.126020\*T4(x32)

(F1)=0.059367\*T0(x11) + -0.023390\*T1(x11) + 0.042076\*T2(x11) + 0.070039\*T3(x11) + 0.020698\*T4(x11) + -0.028387\*T5(x11) + -0.041060\*T6(x11) + -0.022617\*T7(x11) + 0.047960\*T0(x12) + 0.073204\*T1(x12) + -0.004461\*T2(x12) + 0.068550\*T3(x12) + 0.062205\*T4(x12) + 0.038876\*T5(x12) + 0.050121\*T6(x12) + 0.040207\*T7(x12) + 0.027012\*T0(x13) + 0.054548\*T1(x13) + 0.014799\*T2(x13) + 0.046597\*T3(x13) + 0.057783\*T4(x13) + 0.027968\*T5(x13) + 0.004178\*T6(x13) + -0.001099\*T7(x13) + 0.022694\*T0(x21) + -0.003786\*T1(x21) + 0.003946\*T2(x21) + 0.046711\*T3(x21) + 0.035785\*T4(x21) + -0.035168\*T5(x21) + -0.032860\*T6(x21) + 0.001937\*T7(x21) + 0.042303\*T0(x31) + 0.082164\*T1(x31) + -0.006260\*T2(x31) + -0.004185\*T3(x31) + 0.018256\*T4(x31) + 0.103662\*T0(x32) + 0.098254\*T1(x32) + 0.003174\*T2(x32) + -0.054915\*T3(x32) + -0.042742\*T4(x32)

(F2)=0.055250\*T0(x11) + -0.021768\*T1(x11) + 0.039159\*T2(x11) + 0.065183\*T3(x11) + 0.019263\*T4(x11) + -0.026419\*T5(x11) + -0.038213\*T6(x11) + -0.021048\*T7(x11) + 0.045507\*T0(x12) + 0.069460\*T1(x12) + -0.004232\*T2(x12) + 0.065044\*T3(x12) + 0.059023\*T4(x12) + 0.036887\*T5(x12) + 0.047557\*T6(x12) + 0.038150\*T7(x12) + 0.040165\*T0(x13) + 0.081108\*T1(x13) + 0.022005\*T2(x13) + 0.069285\*T3(x13) + 0.085919\*T4(x13) + 0.041586\*T5(x13) + 0.006213\*T6(x13) + -0.001634\*T7(x13) + 0.006018\*T0(x21) + -0.001004\*T1(x21) + 0.001046\*T2(x21) + 0.012386\*T3(x21) + 0.009489\*T4(x21) + -0.009326\*T5(x21) + -0.008714\*T6(x21) + 0.000514\*T7(x21) + 0.033542\*T0(x31) + 0.065149\*T1(x31) + -0.004964\*T2(x31) + -0.003319\*T3(x31) + 0.014476\*T4(x31) + 0.074635\*T0(x32) + 0.070741\*T1(x32) + 0.002285\*T2(x32) + -0.039537\*T3(x32) + -0.030774\*T4(x32)

(F1) transformed:

-0.46452209834927727(x11)^6 + 12.61402765789898(x11)^5 - 100.47012876281954(x11)^4 + 363.1142519503143(x11)^3 - 653.899667748823(x11)^2 + 564.3723248623832(x11) - 185.2749944333116 +

1.7008075868186827(x12)^6 - 29.866342853718322(x12)^5 + 228.44155135203204(x12)^4 - 776.1182168496198(x12)^3 + 1297.0674433944168(x12)^2 - 1050.155755127544(x12) + 329.3721871912693 +

-0.029731998820006655(x13)^6 + 1.1723957297415901(x13)^5 - 7.288780801246499(x13)^4 + 30.0104627628376(x13)^3 - 54.66670325727443(x13)^2 + 40.05890110304757(x13) - 9.00051623310528 +

0.453906905009053(x21)^6 - 13.057862147089836(x21)^5 + 88.94228665457771(x21)^4 - 229.60852880954786(x21)^3 + 260.2639163668488(x21)^2 - 122.84527692335686(x21) + 15.870947191282283 +

-0.4451320752870005(x31)^3 + 3.071847155013319(x31)^2 - 4.807583360096267(x31) + 2.3368266303817458 +

0.5504036544612207(x32)^3 - 4.177477129319146(x32)^2 + 9.184773659788183(x32) - 5.471021883379484 +

0.0131284945825

(F2) transformed:

-0.43231208850867286(x11)^6 + 11.739369689129788(x11)^5 - 93.50351975188738(x11)^4 + 337.9358725575023(x11)^3 - 608.55819786439(x11)^2 + 525.2386900962852(x11) - 172.42800735751547 +

1.6138047746910393(x12)^6 - 28.33856520480615(x12)^5 + 216.75589241655894(x12)^4 - 736.4168021024573(x12)^3 + 1230.717483546456(x12)^2 - 996.4362723499395(x12) + 312.5235402635625 +

-0.04420895684269985(x13)^6 + 1.743252868146723(x13)^5 - 10.837797950583058(x13)^4 + 44.62300907327437(x13)^3 - 81.28474441507416(x13)^2 + 59.56418338207834(x13) - 13.383003144868352 +

0.1203636631254403(x21)^6 - 3.462586938569291(x21)^5 + 23.58505524009249(x21)^4 - 60.8858849851803(x21)^3 + 69.01485306257314(x21)^2 - 32.57519849331096(x21) + 4.208539945377241 +

-0.3529468334388934(x31)^3 + 2.4356787262997917(x31)^2 - 3.811950244981696(x31) + 1.8528782922622222 +

0.3962797475968576(x32)^3 - 3.0077009281828317(x32)^2 + 6.612855416445221(x32) - 3.939027572708929 +

-0.0167822426843

(F1) transformed denormed:

-0.0027425998510273043(x11)^6 + 6.932861362612174e-08(x11)^5 - 7.101282442282957e-13(x11)^4 +

2.027251857338545e-06(x12)^6 - 3.407687313151608e-14(x12)^5 +

-8.905185445169607e-09(x13)^6 +

0.007854163059696443(x21)^6 - 3.4476666885427837e-06(x21)^5 + 3.583286665299963e-10(x21)^4 - 1.4115015128394249e-14(x21)^3 +

-0.7772060636223944(x31)^3 + 0.004361149558120057(x31)^2 - 6.528119440472447e-06(x31) + 3.1070339381262564e-09 +

0.043444085645796666(x32)^3 - 1.916473547230089e-05(x32)^2 + 2.5288991094095417e-09(x32) - 9.167517313138346e-14 +

116.572452002

(F2) transformed denormed:

-0.0027527505053133844(x11)^6 + 6.958520621245489e-08(x11)^5 - 7.127565045278225e-13(x11)^4 +

2.074516632157594e-06(x12)^6 - 3.4871365305375984e-14(x12)^5 +

-1.4280470972565578e-08(x13)^6 +

0.0022461663818727647(x21)^6 - 9.859781306866191e-07(x21)^5 + 1.0247632985252549e-10(x21)^4 - 4.036671026568932e-15(x21)^3 +

-0.6646147612009362(x31)^3 + 0.0037293640744673335(x31)^2 - 5.582412111916739e-06(x31) + 2.6569280857209796e-09 +

0.03373375081853558(x32)^3 - 1.4881160492056496e-05(x32)^2 + 1.9636562982950466e-09(x32) - 7.11845444711163e-14 +

109.45612699

# Робота алгоритму на власній вибірці

Для роботи була вибрана вибірка за посиланням <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Combined+Cycle+Power+Plant>

Назва вибірки: Combined Cycle Power Plant Data Set

Вибірка складається з 9568 елементів, зібраних з Електростанції з Комбінованим Циклом за більше, ніж 6 років (2006-2011), в той час як електростанція працювала на максимальній потужності. Характеристики складаються з погодинних середніх вимірів Температури (T), тиску зовнішнього середовища (AP), відносної вологості (RH) та тяги вихлопу (V). За цими параметрами пропонується визначити погодинний вихід чистої енергії з електростанції.

Електростанція з парогазовою турбіною складається з газових турбін, парових турбін, та генераторів пару з залишків тепла. На такій електростанції енергія виробляється на газових та парових турбінах, які об’єднані в один цикл. Вакуум обчислюється у паровій турбіні, інші три характеристики оточення впливають на роботу газової турбіни.

Таким чином, маємо наступні атрибути:

Температура (T)

Тиск в оточенні (AP)

Відносна вологість (RH)

Тиск вихлопів (V)

**Вихід:** Вихід чистої енергії (EP)

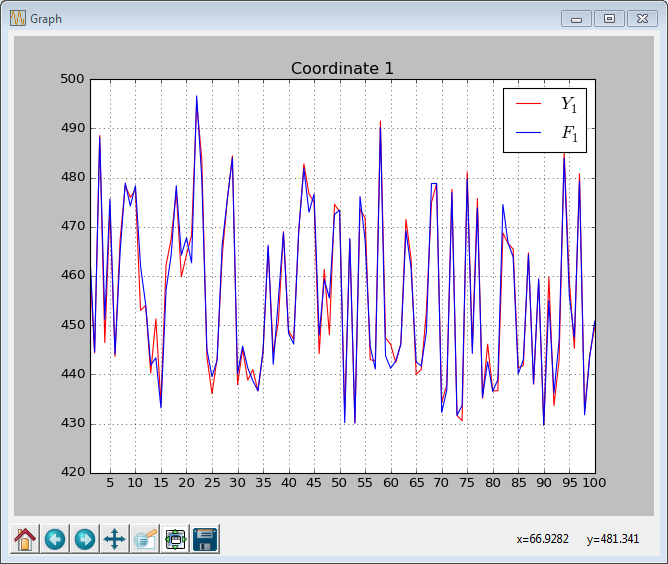
Для демонстрації роботи розробленого алгоритму його було застосовано для прогнозування на підмножині цієї вибірки. Вектор вхідних даних розбили наступним чином:

***X1(внутрішні показники, що можна контролювати):***Тиск вихлопів (V)

***X2(зовнішні показники, що можна контролювати):*** *Температура (T), Відносна вологість (RH)*

***X3(зовнішні показники, що не можна контролювати):***Тиск в оточенні (AP)

Для визначення оптимальних ступенів многочленів запустили підбір на зміщених мгогочленах Чебишева ступені до 15. Отримали (14,14,14). Це означає, що можливо, більші ступені будуть краще апроксимувати результат, але навіть таких многочленів достатньо.



# Висновок

В даній роботі була розв’язана задача пошуку функціональних залежностей у вигляді многочленів. Врахована як можливість виконання обчислень при заданих параметрах, зокрема ступенях поліномів р1,р2, р3 Чебишева, Лежандра, Лагерра і Ерміта. Для вирішення несумісної ссистем рівнянь використовувався метод спряжених напрямків, мінімізуючий квадрат норми нев’язки.

Алгоритм був випробуваний на власній вибірці. Результати роботи алгоритму вийшли досить хорошими, що підтверджує застосовність методу і працездатність програми.

Знайдена функціональна залежність дозволяє обчислити значення функції усередині інтервалу області значень змінних даної вибірки, а також дає можливість прогнозування значень на виході за межами цієї області. Таким чином, в результаті рішення задачі стала можлива досить точна інтерполяція і екстраполяція вихідних даних, що має досить важливе значення на практиці.

# Список використаної літератури

1. Wolfe Р. A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions. - Mathematical Programming Study 3, 1975. – р. 145-173.
2. А.П. Яковлева, І.Я. Спекторський. Методичний посібник до лабораторних робіт з курсу «Методи оптимізації». – К.: НТУУ «КПІ» ННК «ІПСА» , 2000. – 65 с.
3. Страницы про полиномы Чебышева, Лежандра, Лагера, Эрмита. - [Интернет ресурс]: Wikipedia

# Додаток А. Результати роботи програми

#### Вихідні дискретні значення параметрів X:



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 42 | 50 | 2000 | 16000 | 8 | 3 | 5 |
| 43 | 50 | 2000 | 16000 | 8 | 3 | 6 |
| 44 | 50 | 2000 | 16000 | 8 | 3 | 6 |
| 45 | 133 | 1000 | 12000 | 9 | 3 | 12 |
| 46 | 133 | 1000 | 8000 | 9 | 3 | 12 |
| 47 | 810 | 512 | 512 | 8 | 1 | 1 |
| 48 | 810 | 1000 | 5000 | 0 | 1 | 1 |
| 49 | 320 | 512 | 8000 | 4 | 1 | 5 |
| 50 | 200 | 512 | 8000 | 8 | 1 | 8 |

#### Вхідіні значення цільових функцій для кожного значення з вибірки Y:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Input data: Y | | |
| **q0** | **Y1** | **Y2** |
| 1 | 198 | 199 |
| 2 | 269 | 253 |
| 3 | 220 | 253 |
| 4 | 172 | 253 |
| 5 | 132 | 132 |
| 6 | 318 | 290 |
| 7 | 367 | 381 |
| 8 | 489 | 381 |
| 9 | 636 | 749 |
| 10 | 1144 | 1238 |
| 11 | 38 | 23 |
| 12 | 40 | 24 |
| 13 | 92 | 70 |
| 14 | 138 | 117 |
| 15 | 10 | 15 |
| 16 | 35 | 64 |
| 17 | 19 | 23 |
| 18 | 28 | 29 |
| 19 | 31 | 22 |
| 20 | 120 | 124 |
| 21 | 30 | 35 |
| 22 | 33 | 39 |
| 23 | 61 | 40 |
| 24 | 76 | 45 |
| 25 | 23 | 28 |
| 26 | 69 | 21 |
| 27 | 33 | 28 |
| 28 | 27 | 22 |
| 29 | 77 | 28 |
| 30 | 27 | 27 |
| 31 | 274 | 102 |
| 32 | 368 | 102 |
| 33 | 32 | 74 |
| 34 | 63 | 74 |
| 35 | 106 | 138 |
| 36 | 208 | 136 |
| 37 | 20 | 23 |
| 38 | 29 | 29 |
| 39 | 71 | 44 |
| 40 | 26 | 30 |
| 41 | 36 | 41 |
| 42 | 40 | 74 |
| 43 | 52 | 74 |
| 44 | 60 | 74 |
| 45 | 72 | 54 |
| 46 | 72 | 41 |
| 47 | 18 | 18 |
| 48 | 20 | 28 |
| 49 | 40 | 36 |
| 50 | 62 | 38 |

#### Нормовані значення вхідних даних Xnorm**:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X normalised: | | | | | |
| 0,1296061 | 0,00601202 | 0,09284284 | 1 | 0,48387097 | 1 |
| 0,00762389 | 0,24849699 | 0,4994995 | 0,125 | 0,22580645 | 0,24409449 |
| 0,00762389 | 0,24849699 | 0,4994995 | 0,125 | 0,22580645 | 0,24409449 |
| 0,00762389 | 0,24849699 | 0,4994995 | 0,125 | 0,22580645 | 0,24409449 |
| 0,00762389 | 0,24849699 | 0,24924925 | 0,125 | 0,22580645 | 0,11811024 |
| 0,00381194 | 0,24849699 | 0,4994995 | 0,25 | 0,22580645 | 0,24409449 |
| 0 | 0,498998 | 0,4994995 | 0,25 | 0,48387097 | 0,24409449 |
| 0 | 0,498998 | 0,4994995 | 0,25 | 0,48387097 | 0,24409449 |
| 0 | 0,498998 | 1 | 0,25 | 0,48387097 | 0,24409449 |
| 0 | 1 | 1 | 0,5 | 1 | 0,49606299 |
| 0,47903431 | 0,02930862 | 0,04592092 | 0 | 0 | 0,00787402 |
| 0,47903431 | 0,01402806 | 0,05374124 | 0,015625 | 0 | 0,03937008 |
| 0,04701398 | 0,06062124 | 0,12412412 | 0,25390625 | 0 | 0,05511811 |
| 0,0343075 | 0,12324649 | 0,24924925 | 0,25390625 | 0 | 0,05511811 |
| 0,41550191 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,02362205 |
| 0,2249047 | 0,01402806 | 0,24924925 | 0 | 0,09677419 | 0,24409449 |
| 0,18297332 | 0,01440381 | 0,03028028 | 0,03125 | 0,09677419 | 0,11023622 |
| 0,15247776 | 0,01402806 | 0,0772022 | 0 | 0,19354839 | 0,24409449 |
| 0,15247776 | 0,02930862 | 0,03028028 | 0 | 0,12903226 | 0,11811024 |
| 0,11054638 | 0,15455912 | 0,0772022 | 0,5546875 | 0,22580645 | 0,49606299 |
| 0,15247776 | 0,04496493 | 0,09753504 | 0 | 0,12903226 | 0,24409449 |
| 0,15247776 | 0,09506513 | 0,09597097 | 0 | 0,12903226 | 0,1496063 |
| 0,15247776 | 0,07001503 | 0,09597097 | 0 | 0,16129032 | 0,49606299 |
| 0,11054638 | 0,09506513 | 0,09597097 | 0 | 0,16129032 | 0,49606299 |
| 0,37738247 | 0,00200401 | 0,09284284 | 0 | 0 | 0,08661417 |
| 0,37738247 | 0,01402806 | 0,03028028 | 0,015625 | 0 | 0,01574803 |
| 0,37738247 | 0,00601202 | 0,09284284 | 0 | 0 | 0,03937008 |
| 0,37738247 | 0,00601202 | 0,04592092 | 0,015625 | 0 | 0,01574803 |
| 0,37738247 | 0,01402806 | 0,0772022 | 0,015625 | 0 | 0,03149606 |
| 0,37738247 | 0,00601202 | 0,0772022 | 0,015625 | 0 | 0,03937008 |
| 0,0025413 | 0,03901553 | 0,03997748 | 0,51171875 | 0,35483871 | 0,18110236 |
| 0,0025413 | 0,03901553 | 0,03997748 | 0,51171875 | 0,35483871 | 0,18110236 |
| 0,0343075 | 0,08003507 | 0,16291291 | 0,1171875 | 0,35483871 | 0,18110236 |
| 0,0343075 | 0,08003507 | 0,16291291 | 0,1171875 | 0,35483871 | 0,18110236 |
| 0,04193139 | 0,16207415 | 0,32698323 | 0,1171875 | 0,35483871 | 0,18110236 |
| 0,05209657 | 0,16207415 | 0,32698323 | 0,1171875 | 0,35483871 | 0,18110236 |
| 0,0343075 | 0,0136523 | 0,03028028 | 0,03125 | 0 | 0,02362205 |
| 0,0343075 | 0,02930862 | 0,06156156 | 0,03125 | 0 | 0,03149606 |
| 0,0343075 | 0,06062124 | 0,12412412 | 0,03125 | 0 | 0,03149606 |
| 0,0343075 | 0,02930862 | 0,06156156 | 0,03125 | 0,06451613 | 0,03149606 |
| 0,0343075 | 0,02930862 | 0,12412412 | 0,03125 | 0,06451613 | 0,03149606 |
| 0,0343075 | 0,06062124 | 0,24924925 | 0,03125 | 0,06451613 | 0,03149606 |
| 0,0343075 | 0,06062124 | 0,24924925 | 0,03125 | 0,06451613 | 0,03937008 |
| 0,0343075 | 0,06062124 | 0,24924925 | 0,03125 | 0,06451613 | 0,03937008 |
| 0,13977128 | 0,02930862 | 0,18668669 | 0,03515625 | 0,06451613 | 0,08661417 |
| 0,13977128 | 0,02930862 | 0,12412412 | 0,03515625 | 0,06451613 | 0,08661417 |
| 1 | 0,01402806 | 0,00700701 | 0,03125 | 0 | 0 |
| 1 | 0,02930862 | 0,0772022 | 0 | 0 | 0 |
| 0,37738247 | 0,01402806 | 0,12412412 | 0,015625 | 0 | 0,03149606 |
| 0,2249047 | 0,01402806 | 0,12412412 | 0,03125 | 0 | 0,05511811 |

#### Нормовані значення цільових функцій Ynorm**:**

|  |  |
| --- | --- |
| Y normaliяed: | |
| 0,16578483 | 0,15044971 |
| 0,22839506 | 0,19460343 |
| 0,18518519 | 0,19460343 |
| 0,14285714 | 0,19460343 |
| 0,10758377 | 0,09566639 |
| 0,27160494 | 0,22485691 |
| 0,31481481 | 0,2992641 |
| 0,42239859 | 0,2992641 |
| 0,55202822 | 0,60016353 |
| 1 | 1 |
| 0,02469136 | 0,00654129 |
| 0,02645503 | 0,00735895 |
| 0,07231041 | 0,04497138 |
| 0,11287478 | 0,08340147 |
| 0 | 0 |
| 0,02204586 | 0,04006541 |
| 0,00793651 | 0,00654129 |
| 0,01587302 | 0,01144726 |
| 0,01851852 | 0,00572363 |
| 0,09700176 | 0,0891251 |
| 0,01763668 | 0,01635323 |
| 0,02028219 | 0,01962388 |
| 0,04497354 | 0,02044154 |
| 0,05820106 | 0,02452984 |
| 0,01146384 | 0,0106296 |
| 0,05202822 | 0,00490597 |
| 0,02028219 | 0,0106296 |
| 0,01499118 | 0,00572363 |
| 0,05908289 | 0,0106296 |
| 0,01499118 | 0,00981194 |
| 0,23280423 | 0,07113655 |
| 0,31569665 | 0,07113655 |
| 0,01940035 | 0,04824203 |
| 0,04673721 | 0,04824203 |
| 0,08465608 | 0,10057236 |
| 0,17460317 | 0,09893704 |
| 0,00881834 | 0,00654129 |
| 0,01675485 | 0,01144726 |
| 0,05379189 | 0,02371218 |
| 0,01410935 | 0,01226492 |
| 0,02292769 | 0,0212592 |
| 0,02645503 | 0,04824203 |
| 0,03703704 | 0,04824203 |
| 0,04409171 | 0,04824203 |
| 0,05467372 | 0,0318888 |
| 0,05467372 | 0,0212592 |
| 0,00705467 | 0,00245298 |
| 0,00881834 | 0,0106296 |
| 0,02645503 | 0,01717089 |
| 0,04585538 | 0,01880621 |

#### Матриця ***b***

|  |  |
| --- | --- |
| matrix B: | |
| 0,15811727 | 0,15811727 |
| 0,21149925 | 0,21149925 |
| 0,18989431 | 0,18989431 |
| 0,16873029 | 0,16873029 |
| 0,10162508 | 0,10162508 |
| 0,24823092 | 0,24823092 |
| 0,30703946 | 0,30703946 |
| 0,36083135 | 0,36083135 |
| 0,57609588 | 0,57609588 |
| 1 | 1 |
| 0,01561632 | 0,01561632 |
| 0,01690699 | 0,01690699 |
| 0,05864089 | 0,05864089 |
| 0,09813813 | 0,09813813 |
| 0 | 0 |
| 0,03105563 | 0,03105563 |
| 0,0072389 | 0,0072389 |
| 0,01366014 | 0,01366014 |
| 0,01212107 | 0,01212107 |
| 0,09306343 | 0,09306343 |
| 0,01699496 | 0,01699496 |
| 0,01995303 | 0,01995303 |
| 0,03270754 | 0,03270754 |
| 0,04136545 | 0,04136545 |
| 0,01104672 | 0,01104672 |
| 0,02846709 | 0,02846709 |
| 0,01545589 | 0,01545589 |
| 0,01035741 | 0,01035741 |
| 0,03485625 | 0,03485625 |
| 0,01240156 | 0,01240156 |
| 0,15197039 | 0,15197039 |
| 0,1934166 | 0,1934166 |
| 0,03382119 | 0,03382119 |
| 0,04748962 | 0,04748962 |
| 0,09261422 | 0,09261422 |
| 0,13677011 | 0,13677011 |
| 0,00767982 | 0,00767982 |
| 0,01410106 | 0,01410106 |
| 0,03875204 | 0,03875204 |
| 0,01318713 | 0,01318713 |
| 0,02209344 | 0,02209344 |
| 0,03734853 | 0,03734853 |
| 0,04263953 | 0,04263953 |
| 0,04616687 | 0,04616687 |
| 0,04328126 | 0,04328126 |
| 0,03796646 | 0,03796646 |
| 0,00475383 | 0,00475383 |
| 0,00972397 | 0,00972397 |
| 0,02181296 | 0,02181296 |
| 0,0323308 | 0,0323308 |

#### Матриця 𝑨 (перші декілька стовпців):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| matrix A: |  |  |  |  |  |  |
|  | 1 | -0,7407878 | 0,09753313 | 0,59628509 | -0,98097458 | 0,85710291 |
|  | 1 | -0,98475222 | 0,93947388 | -0,86554577 | 0,76522236 | -0,64156307 |
|  | 1 | -0,98475222 | 0,93947388 | -0,86554577 | 0,76522236 | -0,64156307 |
|  | 1 | -0,98475222 | 0,93947388 | -0,86554577 | 0,76522236 | -0,64156307 |
|  | 1 | -0,98475222 | 0,93947388 | -0,86554577 | 0,76522236 | -0,64156307 |
|  | 1 | -0,99237611 | 0,96962069 | -0,93208072 | 0,88032858 | -0,81515339 |
|  | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
|  | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
|  | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
|  | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
|  | 1 | -0,04193139 | -0,99648352 | 0,12549925 | 0,9859588 | -0,20818449 |
|  | 1 | -0,04193139 | -0,99648352 | 0,12549925 | 0,9859588 | -0,20818449 |
|  | 1 | -0,90597205 | 0,6415707 | -0,25651818 | -0,17677409 | 0,57682295 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,16899619 | -0,94288058 | 0,48768263 | 0,77804756 | -0,75065678 |
|  | 1 | -0,5501906 | -0,39458061 | 0,98437968 | -0,68861228 | -0,22664368 |
|  | 1 | -0,63405337 | -0,19595266 | 0,88254225 | -0,92320511 | 0,28818037 |
|  | 1 | -0,69504447 | -0,03382636 | 0,74206612 | -0,99771155 | 0,64484168 |
|  | 1 | -0,69504447 | -0,03382636 | 0,74206612 | -0,99771155 | 0,64484168 |
|  | 1 | -0,77890724 | 0,21339299 | 0,44648056 | -0,90892687 | 0,96945888 |
|  | 1 | -0,69504447 | -0,03382636 | 0,74206612 | -0,99771155 | 0,64484168 |
|  | 1 | -0,69504447 | -0,03382636 | 0,74206612 | -0,99771155 | 0,64484168 |
|  | 1 | -0,69504447 | -0,03382636 | 0,74206612 | -0,99771155 | 0,64484168 |
|  | 1 | -0,77890724 | 0,21339299 | 0,44648056 | -0,90892687 | 0,96945888 |
|  | 1 | -0,24523507 | -0,87971952 | 0,67671123 | 0,54781287 | -0,94539708 |
|  | 1 | -0,24523507 | -0,87971952 | 0,67671123 | 0,54781287 | -0,94539708 |
|  | 1 | -0,24523507 | -0,87971952 | 0,67671123 | 0,54781287 | -0,94539708 |
|  | 1 | -0,24523507 | -0,87971952 | 0,67671123 | 0,54781287 | -0,94539708 |
|  | 1 | -0,24523507 | -0,87971952 | 0,67671123 | 0,54781287 | -0,94539708 |
|  | 1 | -0,24523507 | -0,87971952 | 0,67671123 | 0,54781287 | -0,94539708 |
|  | 1 | -0,99491741 | 0,9797213 | -0,95456614 | 0,91970764 | -0,87550014 |
|  | 1 | -0,99491741 | 0,9797213 | -0,95456614 | 0,91970764 | -0,87550014 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,91613723 | 0,67861485 | -0,32727142 | -0,07896378 | 0,47195473 |
|  | 1 | -0,89580686 | 0,60493987 | -0,1880117 | -0,26809552 | 0,66833531 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,93138501 | 0,73495606 | -0,4376691 | 0,08032082 | 0,28804989 |
|  | 1 | -0,72045743 | 0,03811783 | 0,66553289 | -0,99709406 | 0,77119477 |
|  | 1 | -0,72045743 | 0,03811783 | 0,66553289 | -0,99709406 | 0,77119477 |
|  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | 1 | -0,24523507 | -0,87971952 | 0,67671123 | 0,54781287 | -0,94539708 |
|  | 1 | -0,5501906 | -0,39458061 | 0,98437968 | -0,68861228 | -0,22664368 |

#### Матриця складена із **:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| matrix Lambda: | |  |
|  | 17,0791507 | 17,0791507 |
|  | 0,21258104 | 0,21258104 |
|  | -0,14755663 | -0,14755663 |
|  | -0,26655258 | -0,26655258 |
|  | -0,21168962 | -0,21168962 |
|  | 0,02957856 | 0,02957856 |
|  | 0,09781355 | 0,09781355 |
|  | 0,09033446 | 0,09033446 |
|  | 17,0791507 | 17,0791507 |
|  | 146,834095 | 146,834095 |
|  | 32,6255737 | 32,6255737 |
|  | -61,4874696 | -61,4874696 |
|  | -85,4908808 | -85,4908808 |
|  | -55,8582727 | -55,8582727 |
|  | -20,0124135 | -20,0124135 |
|  | -3,14015513 | -3,14015513 |
|  | 17,0791507 | 17,0791507 |
|  | 23,4331719 | 23,4331719 |
|  | 4,19977426 | 4,19977426 |
|  | -11,7471581 | -11,7471581 |
|  | -15,8930008 | -15,8930008 |
|  | -10,7543669 | -10,7543669 |
|  | -4,16878863 | -4,16878863 |
|  | -0,76164182 | -0,76164182 |
|  | 17,0791507 | 17,0791507 |
|  | -4,99033182 | -4,99033182 |
|  | -2,73191108 | -2,73191108 |
|  | -0,50457221 | -0,50457221 |
|  | 0,48504589 | 0,48504589 |
|  | 0,27398869 | 0,27398869 |
|  | 17,0791507 | 17,0791507 |
|  | -21,2796402 | -21,2796402 |
|  | -12,6343703 | -12,6343703 |
|  | -4,7986296 | -4,7986296 |
|  | -0,88021253 | -0,88021253 |
|  | 17,0791507 | 17,0791507 |
|  | 4,4331472 | 4,4331472 |
|  | 2,78430803 | 2,78430803 |
|  | 1,16389649 | 1,16389649 |
|  | 0,24139628 | 0,24139628 |

#### **Матриця** **:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| matrix Psi1: |  |  |  |  |  |  |
|  | 16,9143352 | -82,136127 | 1,02960122 | 9,61137016 | 29,0370349 | 25,7018987 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,14498021 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,14498021 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,14498021 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,05137648 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,5219701 |
|  | 16,7766399 | -81,8969532 | 1,14498021 | 20,0561827 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -81,1716029 | 1,14498021 | 20,0561827 | 29,0370349 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -81,1716029 | 1,14498021 | 20,0561827 | 29,0370349 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -81,1716029 | 1,38714065 | 20,0561827 | 29,0370349 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -29,450372 | 1,38714065 | 20,2961077 | -22,513702 | 14,5290492 |
|  | 16,9003583 | -82,1082497 | 1,02418476 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5066727 |
|  | 16,9003583 | -82,1238244 | 1,02535503 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5069916 |
|  | 16,9198407 | -82,1048462 | 1,02927748 | 20,0644717 | 29,6428376 | 14,509198 |
|  | 16,8983317 | -82,0724585 | 1,05137648 | 20,0644717 | 29,6428376 | 14,509198 |
|  | 16,8979851 | -82,1467678 | 1,04713036 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5059884 |
|  | 16,9160764 | -82,1238244 | 1,05137648 | 20,0532009 | 29,6193334 | 14,515564 |
|  | 16,9066204 | -82,1233122 | 1,02362713 | 20,0594044 | 29,6193334 | 14,5204766 |
|  | 16,9078036 | -82,1238244 | 1,02868441 | 20,0532009 | 29,6310052 | 14,515564 |
|  | 16,9078036 | -82,1082497 | 1,02362713 | 20,0532009 | 29,6127281 | 14,5219701 |
|  | 16,9223844 | -81,9865394 | 1,02868441 | 19,9447201 | 29,6555209 | 14,5290492 |
|  | 16,9078036 | -82,1029433 | 1,02966642 | 20,0532009 | 29,6127281 | 14,515564 |
|  | 16,9078036 | -82,1058243 | 1,02965358 | 20,0532009 | 29,6127281 | 14,5263407 |
|  | 16,9078036 | -82,1071091 | 1,02965358 | 20,0532009 | 29,6161919 | 14,5290492 |
|  | 16,9223844 | -82,1058243 | 1,02965358 | 20,0532009 | 29,6161919 | 14,5290492 |
|  | 16,9134186 | -82,1431176 | 1,02960122 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5155122 |
|  | 16,9134186 | -82,1238244 | 1,02362713 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5060876 |
|  | 16,9134186 | -82,136127 | 1,02960122 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5069916 |
|  | 16,9134186 | -82,136127 | 1,02418476 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5060876 |
|  | 16,9134186 | -82,1238244 | 1,02868441 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,9134186 | -82,136127 | 1,02868441 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5069916 |
|  | 16,7686426 | -82,1038492 | 1,02356499 | 20,2415043 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,7686426 | -82,1038492 | 1,02356499 | 20,2415043 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,8983317 | -82,1086097 | 1,03223664 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,8983317 | -82,1086097 | 1,03223664 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,9127409 | -81,9605701 | 0,9373205 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,9252231 | -81,9605701 | 0,9373205 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,8983317 | -82,1243428 | 1,02362713 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5059884 |
|  | 16,8983317 | -82,1082497 | 1,02662706 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,02927748 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1082497 | 1,02662706 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1082497 | 1,02927748 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,05137648 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,05137648 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5069916 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,05137648 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5069916 |
|  | 16,9108831 | -82,1082497 | 1,03841502 | 20,0575021 | 29,6317991 | 14,5155122 |
|  | 16,9108831 | -82,1082497 | 1,02927748 | 20,0575021 | 29,6317991 | 14,5155122 |
|  | 16,8836595 | -82,1238244 | 1,03664533 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5078113 |
|  | 16,8836595 | -82,1082497 | 1,02868441 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5078113 |
|  | 16,9134186 | -82,1238244 | 1,02927748 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,9160764 | -82,1238244 | 1,02927748 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,509198 |

#### **Матриця** **:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| matrix Psi2: |  |  |  |  |  |  |
|  | 16,9143352 | -82,136127 | 1,02960122 | 9,61137016 | 29,0370349 | 25,7018987 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,14498021 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,14498021 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,14498021 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7989708 | -81,8969532 | 1,05137648 | 19,9707218 | 29,6555209 | 14,5219701 |
|  | 16,7766399 | -81,8969532 | 1,14498021 | 20,0561827 | 29,6555209 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -81,1716029 | 1,14498021 | 20,0561827 | 29,0370349 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -81,1716029 | 1,14498021 | 20,0561827 | 29,0370349 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -81,1716029 | 1,38714065 | 20,0561827 | 29,0370349 | 14,515564 |
|  | 16,7517765 | -29,450372 | 1,38714065 | 20,2961077 | -22,513702 | 14,5290492 |
|  | 16,9003583 | -82,1082497 | 1,02418476 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5066727 |
|  | 16,9003583 | -82,1238244 | 1,02535503 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5069916 |
|  | 16,9198407 | -82,1048462 | 1,02927748 | 20,0644717 | 29,6428376 | 14,509198 |
|  | 16,8983317 | -82,0724585 | 1,05137648 | 20,0644717 | 29,6428376 | 14,509198 |
|  | 16,8979851 | -82,1467678 | 1,04713036 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5059884 |
|  | 16,9160764 | -82,1238244 | 1,05137648 | 20,0532009 | 29,6193334 | 14,515564 |
|  | 16,9066204 | -82,1233122 | 1,02362713 | 20,0594044 | 29,6193334 | 14,5204766 |
|  | 16,9078036 | -82,1238244 | 1,02868441 | 20,0532009 | 29,6310052 | 14,515564 |
|  | 16,9078036 | -82,1082497 | 1,02362713 | 20,0532009 | 29,6127281 | 14,5219701 |
|  | 16,9223844 | -81,9865394 | 1,02868441 | 19,9447201 | 29,6555209 | 14,5290492 |
|  | 16,9078036 | -82,1029433 | 1,02966642 | 20,0532009 | 29,6127281 | 14,515564 |
|  | 16,9078036 | -82,1058243 | 1,02965358 | 20,0532009 | 29,6127281 | 14,5263407 |
|  | 16,9078036 | -82,1071091 | 1,02965358 | 20,0532009 | 29,6161919 | 14,5290492 |
|  | 16,9223844 | -82,1058243 | 1,02965358 | 20,0532009 | 29,6161919 | 14,5290492 |
|  | 16,9134186 | -82,1431176 | 1,02960122 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5155122 |
|  | 16,9134186 | -82,1238244 | 1,02362713 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5060876 |
|  | 16,9134186 | -82,136127 | 1,02960122 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5069916 |
|  | 16,9134186 | -82,136127 | 1,02418476 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5060876 |
|  | 16,9134186 | -82,1238244 | 1,02868441 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,9134186 | -82,136127 | 1,02868441 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5069916 |
|  | 16,7686426 | -82,1038492 | 1,02356499 | 20,2415043 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,7686426 | -82,1038492 | 1,02356499 | 20,2415043 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,8983317 | -82,1086097 | 1,03223664 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,8983317 | -82,1086097 | 1,03223664 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,9127409 | -81,9605701 | 0,9373205 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,9252231 | -81,9605701 | 0,9373205 | 19,9767845 | 29,7151832 | 14,5271226 |
|  | 16,8983317 | -82,1243428 | 1,02362713 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5059884 |
|  | 16,8983317 | -82,1082497 | 1,02662706 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,02927748 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1082497 | 1,02662706 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1082497 | 1,02927748 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,05137648 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5063104 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,05137648 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5069916 |
|  | 16,8983317 | -82,1048462 | 1,05137648 | 20,0594044 | 29,6317991 | 14,5069916 |
|  | 16,9108831 | -82,1082497 | 1,03841502 | 20,0575021 | 29,6317991 | 14,5155122 |
|  | 16,9108831 | -82,1082497 | 1,02927748 | 20,0575021 | 29,6317991 | 14,5155122 |
|  | 16,8836595 | -82,1238244 | 1,03664533 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,5078113 |
|  | 16,8836595 | -82,1082497 | 1,02868441 | 20,0532009 | 29,6428376 | 14,5078113 |
|  | 16,9134186 | -82,1238244 | 1,02927748 | 20,0617475 | 29,6428376 | 14,5063104 |
|  | 16,9160764 | -82,1238244 | 1,02927748 | 20,0594044 | 29,6428376 | 14,509198 |

#### Матриця ‖a‖**:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| matrix a: |  |  |
|  | 0,74909978 | 1,25090023 |
|  | 1,06533225 | 0,93466777 |
|  | 0,74020376 | 1,2597962 |
|  | 1,23388836 | 0,76611166 |
|  | 1,06618661 | 0,93381341 |
|  | 1,22235737 | 0,77764265 |

#### Матриця **:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| matrix F1: |  |  |  |
|  | -74,0696253 | 11,8593578 | 62,3758032 |
|  | -73,8158413 | 24,6416412 | 49,361526 |
|  | -73,8158413 | 24,6416412 | 49,361526 |
|  | -73,8158413 | 24,6416412 | 49,361526 |
|  | -73,8851271 | 24,6416412 | 49,3693566 |
|  | -73,8325694 | 24,7470903 | 49,361526 |
|  | -73,0784554 | 24,7470903 | 48,7021045 |
|  | -73,0784554 | 24,7470903 | 48,7021045 |
|  | -72,8992073 | 24,7470903 | 48,7021045 |
|  | -17,7989122 | 25,043131 | -6,24411725 |
|  | -74,0544061 | 24,7434111 | 49,3371349 |
|  | -74,0701321 | 24,7539568 | 49,3375247 |
|  | -74,0324163 | 24,7573181 | 49,3402218 |
|  | -73,9976673 | 24,7573181 | 49,3402218 |
|  | -74,080234 | 24,7434111 | 49,3362985 |
|  | -74,0390965 | 24,7434111 | 49,3229434 |
|  | -74,0661745 | 24,7510656 | 49,3289483 |
|  | -74,0620904 | 24,7434111 | 49,3353877 |
|  | -74,0492416 | 24,7434111 | 49,3237315 |
|  | -73,9049137 | 24,609558 | 49,3780097 |
|  | -74,0391181 | 24,7434111 | 49,3159009 |
|  | -74,0421969 | 24,7434111 | 49,3290739 |
|  | -74,0435656 | 24,7434111 | 49,3360776 |
|  | -74,0312745 | 24,7434111 | 49,3360776 |
|  | -74,0777593 | 24,7434111 | 49,3479399 |
|  | -74,0616276 | 24,7539568 | 49,3364197 |
|  | -74,0703119 | 24,7434111 | 49,3375247 |
|  | -74,0743212 | 24,7539568 | 49,3364197 |
|  | -74,0578842 | 24,7539568 | 49,3366921 |
|  | -74,0709905 | 24,7539568 | 49,3375247 |
|  | -74,1488451 | 24,9757566 | 49,4392659 |
|  | -74,1488451 | 24,9757566 | 49,4392659 |
|  | -74,0503477 | 24,6491218 | 49,4392659 |
|  | -74,0503477 | 24,6491218 | 49,4392659 |
|  | -73,9520997 | 24,6491218 | 49,4392659 |
|  | -73,9427493 | 24,6491218 | 49,4392659 |
|  | -74,0734815 | 24,7510656 | 49,3362985 |
|  | -74,0541164 | 24,7510656 | 49,3366921 |
|  | -74,0485287 | 24,7510656 | 49,3366921 |
|  | -74,0541164 | 24,7510656 | 49,3249229 |
|  | -74,0521546 | 24,7510656 | 49,3249229 |
|  | -74,0321709 | 24,7510656 | 49,3249229 |
|  | -74,0321709 | 24,7510656 | 49,3257556 |
|  | -74,0321709 | 24,7510656 | 49,3257556 |
|  | -74,0359887 | 24,7487184 | 49,3361708 |
|  | -74,0427523 | 24,7487184 | 49,3361708 |
|  | -74,0742841 | 24,7510656 | 49,3385267 |
|  | -74,0635845 | 24,7434111 | 49,3385267 |
|  | -74,0574452 | 24,7539568 | 49,3366921 |
|  | -74,0554543 | 24,7510656 | 49,3402218 |

#### Матриця **:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| matrix F2: |  |  |  |
|  | -54,3147572 | 7,36338277 | 47,1020652 |
|  | -54,0901646 | 15,2998029 | 38,9806447 |
|  | -54,0901646 | 15,2998029 | 38,9806447 |
|  | -54,0901646 | 15,2998029 | 38,9806447 |
|  | -54,2080862 | 15,2998029 | 38,9856264 |
|  | -54,1180983 | 15,3652754 | 38,9806447 |
|  | -53,4712383 | 15,3652754 | 38,4030942 |
|  | -53,4712383 | 15,3652754 | 38,4030942 |
|  | -53,1661655 | 15,3652754 | 38,4030942 |
|  | -4,82399795 | 15,5490848 | -9,72518845 |
|  | -54,3130085 | 15,3629911 | 38,9618866 |
|  | -54,3260914 | 15,3695387 | 38,9621346 |
|  | -54,279041 | 15,3716257 | 38,9638504 |
|  | -54,2478347 | 15,3716257 | 38,9638504 |
|  | -54,323072 | 15,3629911 | 38,9613545 |
|  | -54,273648 | 15,3629911 | 38,9468523 |
|  | -54,3199562 | 15,3677437 | 38,9506726 |
|  | -54,3125837 | 15,3629911 | 38,9577516 |
|  | -54,3043977 | 15,3629911 | 38,9456659 |
|  | -54,1660287 | 15,2798827 | 38,9911313 |
|  | -54,2918296 | 15,3629911 | 38,9406842 |
|  | -54,2945386 | 15,3629911 | 38,9490647 |
|  | -54,2957395 | 15,3629911 | 38,9544053 |
|  | -54,2762995 | 15,3629911 | 38,9544053 |
|  | -54,3224377 | 15,3629911 | 38,9687606 |
|  | -54,3119311 | 15,3695387 | 38,9614316 |
|  | -54,3159037 | 15,3629911 | 38,9621346 |
|  | -54,3227274 | 15,3695387 | 38,9614316 |
|  | -54,3055599 | 15,3695387 | 38,9616049 |
|  | -54,3170587 | 15,3695387 | 38,9621346 |
|  | -54,4744396 | 15,5072525 | 39,0453466 |
|  | -54,4744396 | 15,5072525 | 39,0453466 |
|  | -54,3057364 | 15,3044476 | 39,0453466 |
|  | -54,3057364 | 15,3044476 | 39,0453466 |
|  | -54,268919 | 15,3044476 | 39,0453466 |
|  | -54,253305 | 15,3044476 | 39,0453466 |
|  | -54,3312878 | 15,3677437 | 38,9613545 |
|  | -54,3124668 | 15,3677437 | 38,9616049 |
|  | -54,3059466 | 15,3677437 | 38,9616049 |
|  | -54,3124668 | 15,3677437 | 38,951297 |
|  | -54,3091278 | 15,3677437 | 38,951297 |
|  | -54,2781064 | 15,3677437 | 38,951297 |
|  | -54,2781064 | 15,3677437 | 38,9518267 |
|  | -54,2781064 | 15,3677437 | 38,9518267 |
|  | -54,2819158 | 15,3662863 | 38,9584526 |
|  | -54,2934272 | 15,3662863 | 38,9584526 |
|  | -54,3327565 | 15,3677437 | 38,9627721 |
|  | -54,3282284 | 15,3629911 | 38,9627721 |
|  | -54,3048128 | 15,3695387 | 38,9616049 |
|  | -54,3014882 | 15,3677437 | 38,9638504 |

#### Матриця ‖C‖**:**

|  |  |
| --- | --- |
| matrix c: | |
| 1 | 1 |
| 1 | 1 |
| 1 | 1 |

#### Значення відновлених (нормованих) значень цільових функцій

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Y rebuilt normalized : | |  |
|  | 0,16553571 | 0,15069078 |
|  | 0,18732588 | 0,19028302 |
|  | 0,18732588 | 0,19028302 |
|  | 0,18732588 | 0,19028302 |
|  | 0,12587059 | 0,07734306 |
|  | 0,27604698 | 0,22782185 |
|  | 0,37073951 | 0,29713139 |
|  | 0,37073951 | 0,29713139 |
|  | 0,54998758 | 0,60220419 |
|  | 1,0001016 | 0,9998984 |
|  | 0,02613994 | 0,01186918 |
|  | 0,02134939 | 0,00558199 |
|  | 0,06512355 | 0,05643519 |
|  | 0,09987254 | 0,08764151 |
|  | -0,00052438 | 0,00127359 |
|  | 0,02725796 | 0,03619542 |
|  | 0,0138395 | -0,00153991 |
|  | 0,01670845 | 0,00815898 |
|  | 0,01790104 | 0,00425929 |
|  | 0,08265396 | 0,10498536 |
|  | 0,02019391 | 0,01184566 |
|  | 0,03028809 | 0,01751706 |
|  | 0,03592309 | 0,02165694 |
|  | 0,04821424 | 0,04109687 |
|  | 0,01359181 | 0,009314 |
|  | 0,02874883 | 0,01903933 |
|  | 0,01062398 | 0,00922197 |
|  | 0,01605529 | 0,00824302 |
|  | 0,03276463 | 0,02558375 |
|  | 0,02049097 | 0,01461467 |
|  | 0,26617736 | 0,07815957 |
|  | 0,26617736 | 0,07815957 |
|  | 0,03804003 | 0,04405784 |
|  | 0,03804003 | 0,04405784 |
|  | 0,13628805 | 0,08087517 |
|  | 0,14563848 | 0,09648919 |
|  | 0,01388269 | -0,00218958 |
|  | 0,03364131 | 0,01688179 |
|  | 0,03922907 | 0,02340197 |
|  | 0,02187213 | 0,00657382 |
|  | 0,02383398 | 0,00991282 |
|  | 0,04381765 | 0,04093424 |
|  | 0,04465029 | 0,04146395 |
|  | 0,04465029 | 0,04146395 |
|  | 0,04890047 | 0,04282313 |
|  | 0,04213683 | 0,0313117 |
|  | 0,0153083 | -0,00224073 |
|  | 0,01835334 | -0,0024653 |
|  | 0,03320362 | 0,0263309 |
|  | 0,03583312 | 0,03010594 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Y rebuilt normalized : | |  |
|  | 197,717501 | 199,294827 |
|  | 222,42755 | 247,716133 |
|  | 222,42755 | 247,716133 |
|  | 222,42755 | 247,716133 |
|  | 152,737255 | 109,590558 |
|  | 323,037271 | 293,626126 |
|  | 430,418605 | 378,391687 |
|  | 430,418605 | 378,391687 |
|  | 633,685914 | 751,49572 |
|  | 1144,11522 | 1237,87574 |
|  | 39,6426964 | 29,5160096 |
|  | 34,2102046 | 21,826776 |
|  | 83,8501084 | 84,0202422 |
|  | 123,25546 | 122,185561 |
|  | 9,40535768 | 16,5576002 |
|  | 40,9105299 | 59,2670023 |
|  | 25,6939944 | 13,1166842 |
|  | 28,9473777 | 24,9784294 |
|  | 30,2997783 | 20,2091169 |
|  | 103,72959 | 143,39709 |
|  | 32,8998986 | 29,4872453 |
|  | 44,3466891 | 36,4233684 |
|  | 50,7367787 | 41,4864331 |
|  | 64,6749501 | 65,2614671 |
|  | 25,4131105 | 26,3910164 |
|  | 42,6011774 | 38,2850951 |
|  | 22,0475987 | 26,2784717 |
|  | 28,2066975 | 25,0812194 |
|  | 47,1550905 | 46,2889242 |
|  | 33,2367603 | 32,8737355 |
|  | 311,84513 | 110,589157 |
|  | 311,84513 | 110,589157 |
|  | 53,1373953 | 68,882741 |
|  | 53,1373953 | 68,882741 |
|  | 164,550647 | 113,910331 |
|  | 175,154041 | 133,006283 |
|  | 25,7429655 | 12,3221434 |
|  | 48,1492428 | 35,6464343 |
|  | 54,485764 | 43,6206122 |
|  | 34,8029904 | 23,0397865 |
|  | 37,0277317 | 27,1233746 |
|  | 59,6892148 | 65,0625733 |
|  | 60,6334307 | 65,7104116 |
|  | 60,6334307 | 65,7104116 |
|  | 65,4531288 | 67,3726918 |
|  | 57,7831646 | 53,2942125 |
|  | 27,3596093 | 12,2595919 |
|  | 30,8126871 | 11,9849422 |
|  | 47,6529084 | 47,2026858 |
|  | 50,6347571 | 51,8195596 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Error normalized (Y - F) | |  |
|  | 0,0559247 | 0,01969719 |
| Error (Y\_ - F\_)) | |  |
|  | 63,4186052 | 24,0896686 |