概率论与数理统计

授课老师：杨晔

课程代码：04183

第二章 随机变量及其概率分布

随机变量及其概率分布

- 离散型
  - 基础知识
  - 典型例题
- 连续型
  - 基础知识
  - 典型例题

2.2.1连续型随机变量性质

连续型随机变量
- 基础知识
- 典型例题

二维连续型随机变量:

分布函数: $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

X与Y的概率密度函数: $f(x,y)$

概率密度函数f(x,y) 的性质:

(1) $f(x,y)\geq 0;$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1.$

2.2.1连续型随机变量性质

连续型随机变量
基础知识
典型例题

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

$F(x,y)$只对x的求偏导，fx(x)是X的边缘概率密度函数，

只对y的求偏导，fy(y)是Y的边缘概率密度函数。

若X，Y相互独立，则有$f(x, y)=f_X(x)* f_Y(y)$

2.2.1连续型随机变量性质

连续型随机变量

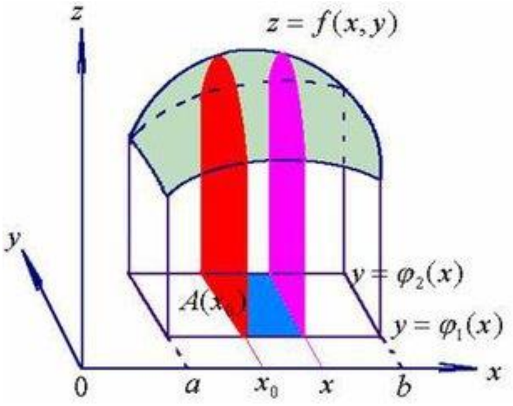
基础知识

典型例题

如果已知(X,Y)的概率密度函数$f(x,y)$，则(X,Y)在

区域D内的取值的概率为：

$$P\{(x,y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$



随机点(X,Y)落在平面区域D上的**概率**等于一平面区域D为底，

以曲面$z=f(x,y)$为顶的**曲顶柱体体积**。

二维连续型随机变量典型例题

例3-7 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0. \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求(X,Y)的分布函数$F(x,y)$.

2.6连续型随机变量性质

二维随机变量
- 基础知识
- 离散型随机变量性质
- 连续型随机变量性质

求分布函数三步法：

1、确定积分区间范围，并画出。

2、根据积分区间，选取对应的上下限。

（先做平行线，后移动平行线）

3、根据积分公式进行积分。

二维连续型随机变量典型例题

求分布函数三步法：

1、确定积分区间范围，并画出。

x>0；y>0

2、根据积分区间，选取对应的上下限。

（先做平行线，后移动平行线）

3、根据积分公式进行积分。

解：由定义知

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,$$

当$x>0$，$y>0$时，

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y e^{-(u+v)}dudv=\int_0^x e^{-u}du\cdot\int_0^y e^{-v}dv=(1-e^{-x})(1-e^{-y}),$$

当$x\le 0$，$y\le 0$时，

$$F(x,y)=0,$$

从而

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0\text{，}y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

二维连续型随机变量性质

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

$F(x,y)$只对x的求偏导，fx(x)是X的边缘概率密度函数，

只对y的求偏导，fy(y)是Y的边缘概率密度函数。

若X，Y相互独立，则有$f(x,y)=f_X(x) * f_Y(y)$

二维连续型随机变量典型例题

二维连续随机变量的均匀分布

设D为平面上的有界区域，其面积为S且$S>0$，如果二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域D上的均匀分布(或称(X,Y)在D上服从均匀分布)

记作$(X,Y)\sim U_D$.

二维连续型随机变量典型例题

例 3-9 设(X,Y)服从下列区域上(如图所示)的均匀分布，其中D: $x \ge y, 0 \le x \le 1, y \ge 0$.求$P\{X+Y \le 1\}$.

二维连续型随机变量典型例题

求分布函数三步法：

1、确定积分区间范围，并画出。

x>0；y>0

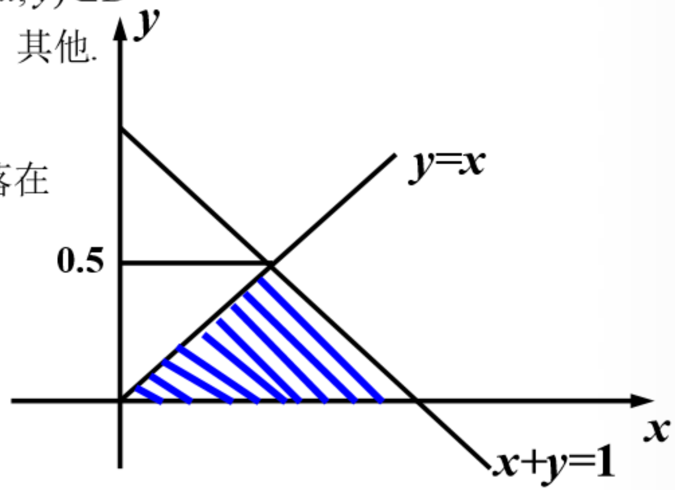
2、根据积分区间，选取对应的上下限。

（先做平行线，后移动平行线）

3、根据积分公式进行积分。

解 如图，D的面积$S=\frac{1}{2}$，所以(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



事件$\{X+Y\le 1\}$意味着随机点(X,Y)落在区域D_1：$x+y\le 1, 0\le y\le x$上，则

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} 2dxdy=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

二维连续型随机变量典型例题

27．设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,2)$，Y 服从参数为 2 的指数分布，且 X 与 Y 相互独立.

求：（1）(X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；（2）$P\{X \le 1, Y \le 2\}$.

27. 解 （1）因为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$ ……2 分

又 X,Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 0\le x\le 2, y>0,\\ 0, & 其他;\end{cases}$$ ……4 分

（2）$P\{X\le 1,Y\le 2\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 2\}=\frac{1}{2}\int_0^2 2e^{-2y}dy=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$. ……8 分

二维连续型随机变量典型例题

例 3-13 设(X,Y)的概率密度为

$$f_X(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$P\{X\le\frac{1}{2}\}$

二维连续型随机变量典型例题

例 3-13 设(X,Y)的概率密度为

$$f_X(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$P\{X\le\frac{1}{2}\}$

解

$$P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^1 8xy\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}4x\cdot\left[y^2\right]_x^1 dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}4x\cdot\left(1-x^2\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(4x-4x^3\right)dx$$

$$=\left[2x^2-x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{16}$$

二维连续型随机变量典型例题

对连续型随机变量(X,Y),分量X(或Y)的概率密度称为(X,Y)关于X(或Y)的**边缘概率密度**，简称**边缘密度**，记为$f_X(x)$(或$f_Y(y)$).

边缘概率密度$f_X(x)$或$f_Y(y)$可由(X,Y)的概率密度$f(x,y)$求出:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\ -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx,\ -\infty<y<+\infty.$$

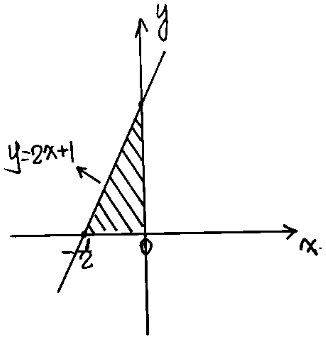
二维连续型随机变量典型例题

设(X ,Y)服从D上的均匀分布,其中D为x轴、y轴与 $y = 2x+1$ 围成的三角形区域,求(X ,Y)的边缘概率密度。

二维连续型随机变量典型例题

设(X ,Y)服从D上的均匀分布,其中D为x轴、y轴与 y = 2x+1围成的三角形区域,求(X ,Y)的边缘概率密度。

解 (X,Y)的概率密度为:



$$f(x,y)=\begin{cases}4, & -\dfrac{1}{2}\le x\le 0,\ 0\le y\le 2x+1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二维连续型随机变量典型例题

设(X ,Y)服从D上的均匀分布,其中D为x轴、y轴与 y = 2x+1围成的三角形区域,求(X ,Y)的边缘概率密度。

(X,Y)关于X的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$,

当$x<-\frac{1}{2}$时, $f_X(x)=0$;

当$-\frac{1}{2}\le x\le 0$时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{2x+1} 4dy=8x+4$;

当$x\ge 0$时, $f_X(x)=0$;

即 $$f_X(x)=\begin{cases}8x+4, & -\frac{1}{2}\le x\le 0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

同理(X,Y)关于Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}2-2y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

二维连续型随机变量典型例题

◆ 设X与Y为互相独立的随机变量，X在[-1,1]上服从均匀分布，Y服从参数λ=2的指数分布，

1）求（X,Y）的概率密度。　　　2) $P\{X \leqslant 1,\ Y \leqslant 2\}$

二维连续型随机变量典型例题

◆ 设X与Y为互相独立的随机变量，X在[-1,1]上服从均匀分布，Y服从参数λ=2的指数分布，

1）求（X,Y）的概率密度。　　2)P{X≤1，Y≤2}

解　由已知条件得X,Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y\ge 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

因为X与Y相互独立,所以(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-2y}, & -1\le x\le 1,\ y\ge 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

二维连续型随机变量典型例题

◆ 设X与Y为互相独立的随机变量，X在[-1,1]上服从均匀分布，

Y服从参数λ=2的指数分布，

1）求（X,Y）的概率密度。　　2)P{X≤1，Y≤2}

$$(2)P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 2\}=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 2\}=\frac{1}{2}\int_0^2 2e^{-2y}\,dy=\frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

二维连续型随机变量典型例题

◆ 设二维随机变量（X,Y）的概率密度为：

$$f(x, y)=\begin{cases} cx, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1）求常数C;

2）求（X，Y)分别关于X，Y的边缘概率密度;

3）试问X与Y是否相互独立，为什么?

二维连续型随机变量典型例题

1.$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 cxdy = 1$，得$c = 2$.

2.(X,Y)关于X,Y的边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, 0 < y < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

3.因为f(x,y)=$f_X(x)f_Y(y)$,所以X与Y 相互独立。

各章节的重点知识汇总

章节	重点知识
随机事件与概率	六种随机事件的运算关系（包含、和、差、积、互斥、互不相容） 两种概率模型（古典概型、伯努利概型）
随机变量与概率分布	两种类型的随机变量。1、离散型随机变量及概率分布(一维、二维）；2、连续型随机变量及概率分布（一维、二维）
数字特征	四种数字特征（期望、方差、协方差、相关系数）
参数估计及检验	两种置信区间判断 两种假设验证判断
大数定理及中心极限定理	五个统计公式
其它知识点	无偏估计（样本的期望等于总体期望） 回归分析（两个式子）

随机变量的数字特征

随机变量的数字特征

- 期望
- 方差
- 协方差及相关系数

一维随机变量函数的期望

随机变量的数字特征
- 期望
- 方差
- 协方差及相关系数

典型一维随机变量分布的期望			
离散型		连续型	
基本公式	$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$	基本公式	$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$
0-1分布	p	均匀分布~U(a,b)	$\frac{a+b}{2}$
二项分布~B(n,p)	np	指数分布~E(λ)	$\frac{1}{\lambda}$
泊松分布~P(λ)	λ	正态分布~N(μ,σ^2)	μ

随机变量的数字特征
$$\begin{cases} \text{期望} \\ \text{方差} \\ \text{协方差及相关系数} \end{cases}$$

性质1 $E(C)=C$, 其中C为常数.

性质2 $E(CX)=C\cdot E(X)$.

性质3 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

推广：

$$E(C_1X+C_2Y)=C_1E(X)+C_2E(Y),\text{其中}C_1,\ C_2\text{为常数}.$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}C_iE(X_i),\text{其中}C_i(i=1,2,\ldots,n)\text{是常数}.$$

性质4 若X与Y是相互独立的随机变量,则

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

随机变量的数字特征 $\begin{cases} \text{期望} \\ \text{方差} \\ \text{协方差及相关系数} \end{cases}$

例4-12 已知(X,Y)的分布率为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

求: (1)$E(2X+3Y)$; (2)$E(XY)$.

解 (1)由数学期望定义知

$$E(2X+3Y)=\sum_i\sum_j(2x_i+3y_j)p_{ij}$$

$$=(2\times0+3\times0)\times\frac{1}{3}+(2\times0+3\times1)\times0+(2\times1+3\times0)\times\frac{1}{2}+(2\times1+3\times1)\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{11}{6}.$$

(2) $$E(XY)=\sum_i\sum_j(x_iy_j)p_{ij}$$

$$=(0\times0)\times\frac{1}{3}+(0\times1)\times0+(1\times0)\times\frac{1}{2}+(1\times1)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

$$\text{随机变量的数字特征}\begin{cases}\text{期望}\\\text{方差}\\\text{协方差及相关系数}\end{cases}$$

(2)若(X,Y)为二维连续型随机变量, $f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度与边缘概率密度, 则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy.$$

随机变量的数字特征

- 期望
- 方差
- 协方差及相关系数

例4-35 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1)E(X), E(Y);(2) D(X), D(Y);(3)Cov(X,Y),$\boldsymbol{\rho}_{XY}$.

随机变量的数字特征 $\begin{cases} \text{期望} \\ \text{方差} \\ \text{协方差及相关系数} \end{cases}$

例4-35 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1)E(X), E(Y);(2) D(X), D(Y);(3)Cov(X,Y),$\boldsymbol{\rho}_{XY}$.

$$(1)\ E(X)=\int_0^1\left(\int_0^x x\cdot 8xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5},$$

$$E(Y)=\int_0^1\left(\int_0^x y\cdot 8xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{15}.$$

第四章 随机变量的数字特征

随机变量的数字特征

- 期望
- 方差
- 协方差及相关系数

典型一维随机变量分布的方差			
离散型		连续型	
基本公式	$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.	基本公式	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx$
0-1分布	$p(1-p)$	均匀分布~U(a,b)	$\frac{(b-a)^2}{12}$
二项分布~B(n,p)	$np(1-p)$	指数分布~E(λ)	$\frac{1}{\lambda^2}$
泊松分布~P(λ)	λ	正态分布~N(μ,σ^2)	σ^2

方差的性质

随机变量的数字特征 $\begin{cases} \text{期望} \\ \text{方差} \\ \text{协方差及相关系数} \end{cases}$

性质4-5 $D(C)=0,\ D(X+C)=D(X).$

性质4-6 $D(CX)=C^2D(X)$，其中C常数.

性质4-7 当X与Y相互独立,则$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$

推广：若$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立,则

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots D(X_n).$$

随机变量的数字特征
$$\begin{cases}\text{期望} \\ \text{方差} \\ \text{协方差及相关系数}\end{cases}$$

例4-26 设X_1，X_2，L，X_n相互独立，$E(X_i)=\mu, D(X)=\sigma^2\ (i=1,2,\dots\ ,n)$，

求$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$的期望和方差.

解
$$E(Y)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu.$$

$$D(X)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

几种重要的随机变量的分布及其数字特征汇总表

表 4-1

	分布	分布律或概率密度	期望	方差
离散型	X 服从参数为 p 的 0-1 分布	$P\{X=0\}=q, P\{X=1\}=p$; $0<p<1, q=1-p$	p	pq
离散型	X 服从二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n; 0<p<1, q=1-p$	np	npq
离散型	X 服从泊松分布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0,1,\cdots; \lambda>0$	λ	λ
连续型	均匀分布 $X\sim U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
连续型	指数分布 $X\sim E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}(\lambda>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
连续型	正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\sigma>0)$	μ	σ^2

随机变量的数字特征

- 期望
- 方差
- 协方差及相关系数

协方差

随机变量的数字特征

$$\begin{cases} \text{期望} \\ \text{方差} \\ \text{协方差及相关系数} \end{cases}$$

定义式 $Cov(X,Y)= E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$

重要公式 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$

注： $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

当$X=Y$时 $Cov(X,X)=E(X-E(X))(X-E(X))]=D(X).$

随机变量的数字特征
- 期望
- 方差
- 协方差及相关系数

协方差性质：

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$.

(2) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$,其中a,b为任意常数.

(3) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$.

(4) 若X与Y相互独立,则$Cov(X,Y)=0$.

随机变量的数字特征 $\begin{cases} \text{期望} \\ \text{方差} \\ \text{协方差及相关系数} \end{cases}$

4.3.1 相关系数

定义4-5 若$D(X)>0, D(Y)>0$,称 $\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为X与Y系数,

记为ρ_{XY} 即

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

例4-34 设随机变量(X,Y)的分布率为

X \ Y	-1	1
-1	0.25	0.5
1	0	0.25

求E(X), E(Y), D(X), D(Y),Cov(X,Y),ρ_{XY}.

解 X,Y 的分布律分别为

X	-1	1
P	0.25	0.75

Y	-1	1
P	0.75	0.25

$$E(X)=-1\times 0.25+1\times 0.75=0.5,$$
$$E(X^2)=(-1)^2\times 0.25+1^2\times 0.75=1,$$
$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1-0.25=0.75,$$
$$E(Y)=(-1)\times 0.75+1\times 0.25=-0.5,$$
$$E(Y^2)=(-1)^2\times 0.75+1\times 0.25=1,$$
$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1-0.25=0.75,$$
$$E(XY)=1\times 0.25+(-1)\times 0.5+1\times 0.25=0,$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.25,$$
$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{0.25}{\sqrt{0.75}\sqrt{0.75}}=\frac{1}{3}.$$

例4-35 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求:(1)E(X), E(Y);(2) D(X), D(Y);(3)Cov(X,Y),$\boldsymbol{\rho}_{XY}$.

(1) $E(X)=\int_0^1\left(\int_0^x x\cdot 8xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$,

$E(Y)=\int_0^1\left(\int_0^x y\cdot 8xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{15}$.

(2) $E(X^2)=\int_0^1\left(\int_0^x x^2\cdot 8xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

$E(Y^2)=\int_0^1\left(\int_0^x y^2 8xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$,

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$,

$D(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{11}{225}$.

(3) $E(XY)=\int_0^1\left(\int_0^x xy\cdot 8xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{9}$,

所以，

$\mathrm{Cov}(x,y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$,

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{2\sqrt{66}}{33}.$$

各章节的重点知识汇总

章节	重点知识
随机事件与概率	六种随机事件的运算关系（包含、和、差、积、互斥、互不相容） 两种概率模型（古典概型、伯努利概型）
随机变量与概率分布	两种类型的随机变量。1、离散型随机变量及概率分布(一维、二维）；2、连续型随机变量及概率分布（一维、二维）
数字特征	四种数字特征（期望、方差、协方差、相关系数）
参数估计及检验	两种置信区间判断 两种假设验证判断
大数定理及中心极限定理	五个统计公式
其它知识点	无偏估计（样本的期望等于总体期望） 回归分析（两个式子）

THANKS