

一、填空题(每题 3 分, 共 39 分)

1. 设 $f(x-y, x+y) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) = \underline{xy}$.

2. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 y + 1} - 1} = \underline{2}$.

3. 设函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极值, 则常数 $a = \underline{-5}$.

4. 函数 $u = x \sin(yz)$ 的全微分为 $du = \underline{\sin(yz)dx + xz \cos(yz)dy + xy \cos(yz)dz}$.

5. 已知平面区域 D 是由直线 $x+y=1$, $x-y=1$ 及 $x=0$ 所围成, 则 $\iint_D y dx dy = \underline{0}$.

6. 微分方程 $y' = y^2 e^{2x}$, 满足初始条件 $y(0) = -2$ 的特解为 $y = \underline{-2e^{-2x}}$.

7. 设 y_1, y_2, y_3 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个不同的解, 且 $\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \neq \text{常数}$, 则微分方程的通解为 $\underline{y = c_1(y_1 - y_2) + c_2(y_2 - y_3) + y_1}$.

8. 周期为 2π 的函数 $f(x)$, 它在一个周期上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x=0$ 处的值为 $\underline{0}$.

9. 设 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分, 则 $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS = \underline{4\sqrt{61}}$.

10. 曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ 在对应 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点处的法平面方程是 $\underline{x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0}$.

11. 设 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{4-x^2}$, 则对弧长的曲线积分 $\int_L e^{x^2+y^2} ds = \underline{2\pi e^4}$.

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数的形式为 $\underline{\frac{1}{2} [1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + \cdots + (\frac{x}{2})^n + \cdots]}, -2 < x < 2$.

13. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 1)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{-1}$.

二、(5 分) 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = \phi(y - bz)$ 所确定, 其中 $\phi(u)$ 有连续导数, a, b 是不全为零的常数,

证明: $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

证明: 方程 $x - az = \phi(y - bz)$ 两边同时对 x, y 求偏导得

$$1 - a \frac{\partial z}{\partial x} = \phi' \cdot (-b \frac{\partial z}{\partial x}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a - b\phi'}$$

$$-a \frac{\partial z}{\partial y} = \phi' \cdot (1 - b \frac{\partial z}{\partial y}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\phi'}{a - b\phi'}$$

$$\text{故 } a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

三、(5分) 设 $z = e^{x^2 y^3}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 e^{x^2 y^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (6xy^2 + 6x^3 y^5) e^{x^2 y^3}$$

四、(6分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 满足条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解.

解: 特征方程为: $r^2 - 3r + 2 = 0$ 特征根为: $r_1 = 2, r_2 = 1$ 对应齐次方程的通解是: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$

设原方程的特解为: $y^* = axe^x$, 将其代入原方程待定系数得 $a = -2$. 所以 $y^* = -2xe^x$

故原方程的通解为 $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x - 2xe^x$ 由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 解得 $c_1 = 3, c_2 = -3$

因此所求的特解是 $y = 3e^{2x} - 3e^x - 2xe^x$

五、(6分) 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

$$\text{解: } \iint_D (x^2 + y) dx dy = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (r \cos \theta)^2 r dr = \frac{65}{4} \pi$$

六、(5分) 利用格林公式, 计算 $\oint_L (2x^2 y - 2y) dx + (\frac{1}{3} x^3 - 2x) dy$, 其中 L 为以 $y = x, y = x^2$ 围成区域的正向边界.

$$\text{解: } \oint_L (2x^2 y - 2y) dx + (\frac{1}{3} x^3 - 2x) dy = - \iint_D x^2 dx dy = - \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 dy = - \frac{1}{20}$$

七、(6分) 设 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0, \end{cases} (0 \leq z \leq 2)$ 绕 z 轴旋转而成的曲面.

(1) 写出 Σ 的方程. (2) 计算 $\iint_{\Sigma} 4(1 - y^2) dz dx + z(8y + 1) dx dy$, 其中 Σ 取下侧.

解: (1) Σ 的方程是 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 2)$.

(2) 设 Σ_1 为 $z = 2, (x^2 + y^2 \leq 2)$ 的上侧, 则

$$\iint_{\Sigma + \Sigma_1} 4(1 - y^2) dz dx + z(8y + 1) dx dy = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\rho^2}^2 \rho dz = 2\pi$$

$$\iint_{\Sigma_1} 4(1 - y^2) dz dx + z(8y + 1) dx dy = \iint_{D_{xy}} 2(8y + 1) dx dy = \iint_{D_{xy}} 2 dx dy = 4\pi$$

$$\iint_{\Sigma} 4(1 - y^2) dz dx + z(8y + 1) dx dy = 2\pi - 4\pi = -2\pi$$

八、(6分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n 2^n}$ 的收敛半径与收敛区间, 并求出它在收敛区间内的和函数.

解: 收敛半径 $R = 2$, 收敛区间为 $[-1, 3)$

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n} \quad s'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3-x}$$

$$s(1) = 0,$$

$$\int_1^x s'(x) dx = \int_1^x \frac{1}{3-x} dx,$$

$$s(x) = \ln 2 - \ln(3-x) \quad (-1 \leq x < 3)$$

九、(5分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的正项级数, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛. 试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的敛散性, 并说明理由.

解: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 是绝对收敛的.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛, 所以部分和 $s_m = \sum_{n=1}^m (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{m+1}$ 有界, 从而数列 $\{a_n\}$ 有界

即存在常数 $M > 0$, 使 $|a_n| < M (n=1, 2, 3, \dots)$, 故 $|a_n b_n| < M b_n (n=1, 2, 3, \dots)$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的正项级数, 由比较审敛法知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

十、(6分) 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t dt = x+1$, 求 $f(x)$.

解: 方程 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t dt = x+1$ 两边对 x 求导得

$$f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1$$

$$\text{即} \quad f'(x) + \tan x \cdot f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

求解上面的一阶线性微分方程得

$$f(x) = e^{-\int \tan x dx} \left[\int \frac{1}{\cos x} e^{\int \tan x dx} dx + C \right] = \sin x + C \cos x$$

由于 $f(0) = 1$, 所以 $C = 1$, 故 $f(x) = \sin x + \cos x$

十一、(5分) 证明: $(\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy$ 为某二元函数 $f(x, y)$ 的全微分, 并求 $f(x, y)$,

计算 $\int_{(0,1)}^{(1,0)} (\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy$.

$$\text{解 因为} \quad P = \sin y - y \sin x, Q = x \cos y + \cos x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \sin x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以 $(\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy$ 为某二元函数 $f(x, y)$ 的全微分

$$\begin{aligned} & (\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy \\ &= (\sin y dx + x \cos y dy) + (\cos x dy - y \sin x dx) \\ &= d(x \sin y + y \cos x) \end{aligned}$$

故 $f(x, y) = x \sin y + y \cos x + c$

$$\int_{(0,1)}^{(1,0)} (\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy = [x \sin y + y \cos x]_{(0,1)}^{(1,0)} = -1$$

十二、(6分) 求抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 的一个切平面, 使它与抛物面及圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的立体的体积最小, 并求出最小的体积, 写出所求切平面方程.

解：设 $F(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 - z$ ，得 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = -1$

抛物线在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

即 $z = 2x_0x + 2y_0y + 1 - x_0^2 - y_0^2$

该平面与抛物面及圆柱面所围成的立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r dr \int_{2x_0 \cdot r \cdot \cos\theta + 2y_0 \cdot r \cdot \sin\theta + 1 - x_0^2 - y_0^2}^{1+r^2} dz \\ &= \pi(x_0^2 + y_0^2) + \frac{3}{2}\pi - 2x_0\pi \end{aligned}$$

解

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_0} = 2\pi x_0 - 2\pi = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y_0} = 2\pi y_0 = 0 \end{cases}$$

得 $x_0 = 1, y_0 = 0$ ，由题意可知 V 的最小值一定存在，且只有一个驻点，故可断定 V 的最小值为

$$V = \pi + \frac{3}{2}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{2}, \text{ 切平面为 } z = 2x$$

@@

北京林业大学 2006—2007 学年第 2 学期考试试卷答案

试卷名称：高等数学（经济类、A 卷）

课程所在院系：基础学院

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1、已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$ ，则模 $|M_1M_2| = \underline{\quad 2 \quad}$ 。

2、以点 $O(2, -2, 1)$ 为球心，通过坐标原点的球面方程是：

$$\underline{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9}。$$

3、曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x - z + 1 = 0$ 的交线平行于 z 轴的投影柱面为 $\underline{x^2 - x + y^2 = 1}$ 。

4、设 $f(x, y) = \ln(x - \sqrt{x^2 - y^2})$ ，其中 $x > 0, y > 0$ ，

$$\text{则 } f(x+y, x-y) = \underline{\ln(x+y-2\sqrt{xy})}。$$

5、设 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$ ，则 $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \underline{\quad 6 \quad}$ 。

6、设 $u = f(x + xy + xyz)$ ，则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{(1 + y + yz)f'}$ 。

7、设 $z = e^{xy}$ ，则全微分 $dz = \underline{ye^{xy}dx + xe^{xy}dy}$ 。

8、交换二次积分的次序 $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$

$$\underline{\int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx}。$$

9、微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ 的特解 $y(x) = \underline{e^x + e^{2x}}$ 。

10、微分方程 $y'' - 4y = e^{2x} - 2x + 1$ 的特解形式可设为 $y^*(x) = \underline{Axe^{2x} + Bx + C}$ 。

二、综合计算题（每小题 6 分，共 66 分）

11、设二元函数 $z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right) + x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$ ，求 $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解： $\frac{\partial z}{\partial x} = f' + g - \frac{y}{x} g'$ (2 分)， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y} f'' + \frac{y^2}{x^3} g''$ (2 分)，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} f'' - \frac{y}{x^2} g'' \quad (2 \text{ 分}), \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

12、求由方程 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ 所决定隐函数 $y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

解： $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$ ， $F_x = e^x - y^2$ (2 分)，

$$F_y = \cos y - 2xy \quad (2 \text{ 分}), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy} \quad (2 \text{ 分})。$$

13、求函数 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

解： $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$ ， $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$ ，驻点 $(0, 0)$ (2 分)

$$L(x, y; \lambda) = x^2 - y^2 + 2 + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right), \quad (2 \text{ 分})$$

$$L_x = 2x + 2\lambda x = 0, \quad L_y = -2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0, \quad L_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0,$$

可能极值点 $(0, 2), (0, -2), (1, 0), (-1, 0)$,

$f(0, 2) = f(0, -2) = -2$ 最小， $f(1, 0) = f(-1, 0) = 3$ 最大。(2 分)

14、计算 $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ， D 是由直线 $x = 2, y = x$ 和曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域。

解： $I = \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy$ (2 分) $= \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/x}^x dx$ (2 分)

$$= \int_1^2 [x^3 - x] dx = \frac{9}{4}。 \quad (2 \text{ 分})$$

15、计算 $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ，其中 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 。

解： $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho$ (4 分) $= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_1^2 = \frac{15}{2} \pi$ 。(2 分)

16、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域。

解：令 $x-3=y$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$ ， $R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} / \frac{1}{(n+1)^2} = 1$ ，(3分)

当 $y = \pm 1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2}$ 均收敛，

收敛域 $-1 \leq y \leq 1$ ， $2 \leq x \leq 4$ 。(3分)

17、判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛。

解： $\left| \frac{\ln n}{n} \right| \geq \frac{1}{n}$ ， $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散， $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 发散。(2分)

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，当 $x > e$ ， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，(2分)

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ， $\therefore \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 条件收敛。(2分)

18、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 在收敛域 $(-1, 1)$ 内的和函数，

并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ 的和。

解： $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ， $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ ， $|x| \leq 1$ ，(3分)

$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ， $|x| \leq 1$ (2分)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 3$ (1分)

19、求微分方程 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}$ 的通解。

解： $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ ， $Y = Ce^{-x^2}$ (2分)，

设 $y(x) = u(x)e^{-x^2} \Rightarrow u'(x) = 2x$ ，(2分)

$u(x) = x^2 + C$ ， $\therefore y(x) = (x^2 + C)e^{-x^2}$ 。(2分)

20、求微分方程 $y'' - 2y' + y = e^x$ 的通解。

解： $y'' - 2y' + y = 0$ ， $r^2 - 2r + 1 = 0$ ， $r = 1$ (二重根)，(2分)

$Y = (C_1 + C_2 x)e^x$ ，设 $y^* = Ax^2 e^x$ ，(2分)

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$ ， $\therefore Y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$ ，(2分)

21、验证方程 $(x^3 + y \ln y - y - 2xy)dx + (x \ln y - x^2 + \cos y)dy = 0$ 是全微分方程，并求其通解。

解: $\frac{\partial(x^3 + y \ln y - y - 2xy)}{\partial y} = \frac{\partial(x \ln y - x^2 + \cos y)}{\partial x} = \ln y - 2x, (2 \text{ 分})$

$$x^3 dx + [(y \ln y - y)dx + x \ln y dy] - (2xy dx + x^2 dy) + \cos y dy = 0, (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{4}x^4 + xy(\ln y - 1) - x^2 y + \sin y = C. (2 \text{ 分})$$

三、证明题 (4 分)

22、设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$, 证明 $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$ 。

证明: $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy, D: a < x < b, a < y < b, (2 \text{ 分})$

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] dx dy \geq \iint_D dx dy = (b-a)^2. (2 \text{ 分})$$