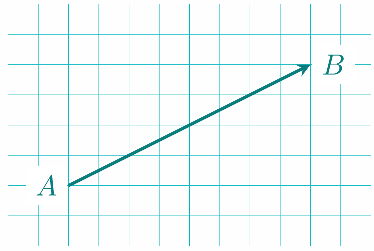
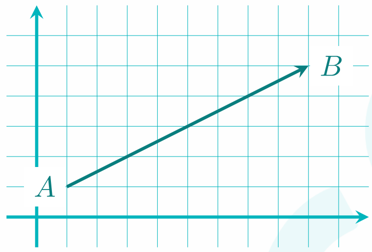
Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая - концом, называется направленным отрезком или **вектором**.



Координаты вектора. Если точки $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа x_2-x_1 и y_2-y_1 равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.



$$A(1;1),\ B(9;5)$$
$$\overrightarrow{AB}\ \{9-1;5-1\}$$
$$\overrightarrow{AB}\ \{8;4\}$$

Модуль или длина вектора. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{a_1;a_2\}$, то $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

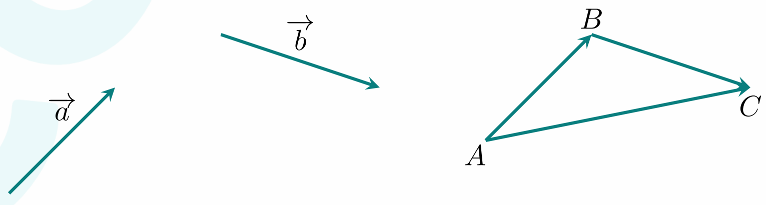
$$\overrightarrow{AB}\ \{8;4\}$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

Координаты суммы векторов. Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $\{a_1;a_2\}$ и $\{b_1;b_2\}$, то координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $\{a_1+b_1;a_2+b_2\}$.

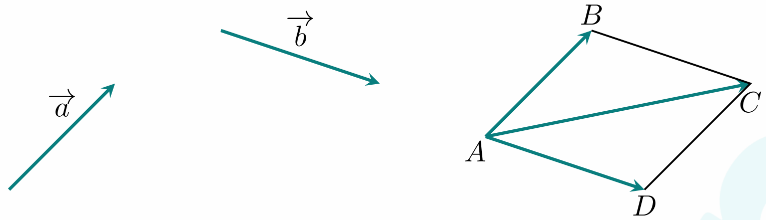
$$\overrightarrow{AB}\ \{8;4\},\ \overrightarrow{KL}\ \{3;5\}$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KL}=\{8+3;4+5\}=\{11;9\}$$

Правила сложения двух векторов.

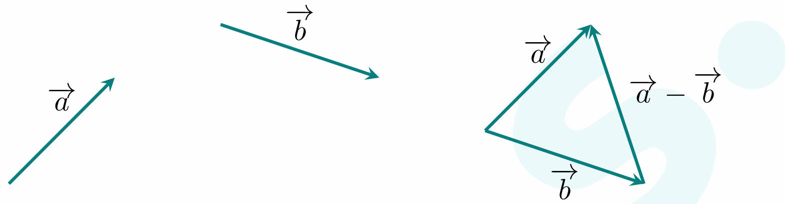
Правило треугольника. Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и записывают $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.



Правило параллелограмма. Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$. Тогда искомая сумма $\vec{a}+\vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.



Разность векторов. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.



Координаты разности векторов. Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$, то координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$ равны $(a_1-b_1; a_2-b_2)$.

$$\overrightarrow{AB}\ \{8;4\},\ \overrightarrow{KL}\ \{3;5\}$$
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KL}=\{8-3;4-5\}=\{5;-1\}$$

Умножение вектора на число. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1. $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$ (т.е. длина нового вектора будет в $|k|$ раз больше);
2. если $k>0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ (сонаправленные); если $k<0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ (противоположно направленные).

Координаты умноженного вектора. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1; ka_2)$.

$$\overrightarrow{AB}\ \{8;4\}$$
$$3\overrightarrow{AB}=\{3\cdot 8;4\cdot 5\}=\{32;20\}$$

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

$$|\overrightarrow{AB}|=6\sqrt{3},\ |\overrightarrow{KL}|=6\sqrt{3},\ \angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{KL})=60^\circ$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}=6\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ=54$$

Скалярное произведение векторов $a\,(a_1;a_2)$ и $b\,(b_1;b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

$$\overrightarrow{AB}\ \{8;4\},\ \overrightarrow{KL}\ \{3;5\}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}=\{8\cdot 3;4\cdot 5\}=\{24;20\}$$

Условие перпендикулярности двух векторов. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\text{Если } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ то } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\,(a_1, a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2)$ можно вычислить по формуле:

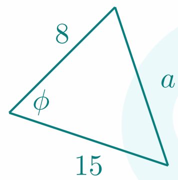
$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\overrightarrow{AB}\ \{8; 4\},\ \overrightarrow{KL}\ \{3; 5\}$$

$$\cos\angle(\vec{AB}, \vec{KL}) = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{44}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{34}} = \frac{44}{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{34}} = \frac{11}{\sqrt{170}}$$

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\angle(b, c)$$



$$\cos\phi = 0,3$$

$$a^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 0,3$$
$$a^2 = 289 - 72$$
$$a = \sqrt{217}$$