CH05. 이산형 확률분포

5.1 1차원 이산형 확률변수

In [ ]:
```python
# 라이브러리: NumPy(수식), Matplotlib(그림)
```

In [1]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

%precision 3
%matplotlib inline
```

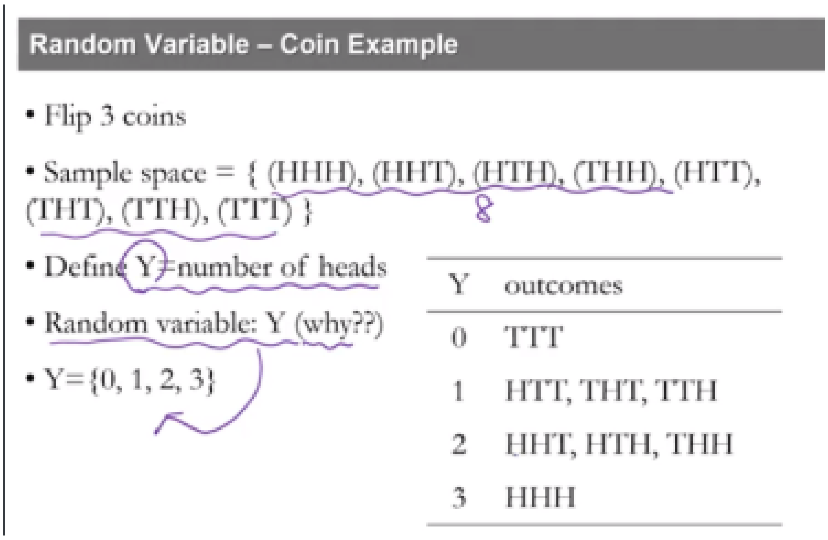
5.1.1 1차원 이산형 확률변수의 정의

용어정리

Random Variable (확률변수)

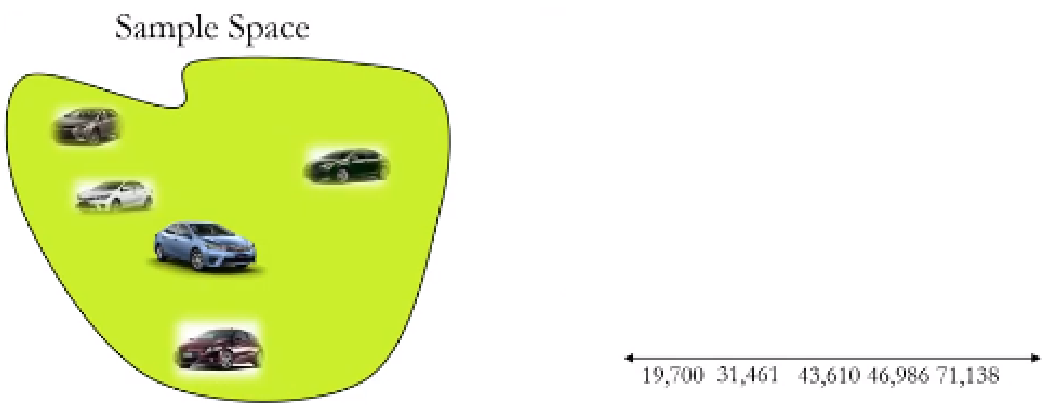
확률변수는 함수(function)입니다.

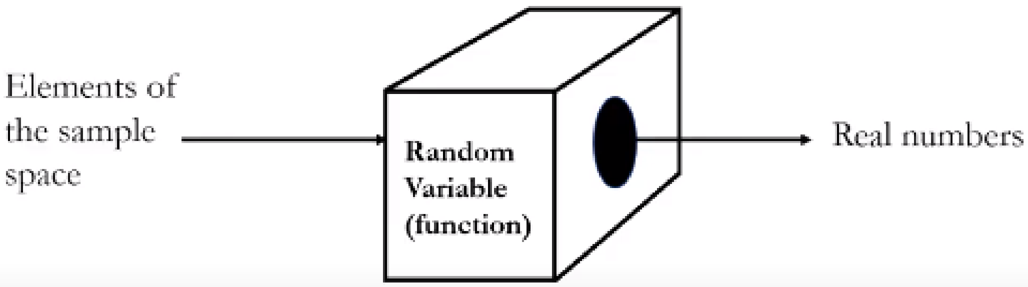
즉, 표본공간(sample space)에 있는 원소를 실수로 대응시키는 함수입니다.



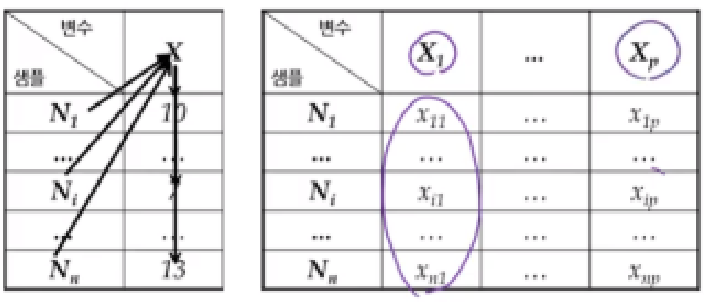
Random Variable

No	모델	주행거리	마력	용량	가격
1	TOYOTA Corolla 2.0 D4D HATCHBTERRA 2/3-Doors	46,986	90	2,000	13,500
2	TOYOTA Corolla 1800 T SPORT VVTI 2/3-Doors	19,700	192	1,800	21,500
3	TOYOTA Corolla 1.9D HATCHB TERRA 2/3-Doors	71,138	69	1,900	12,950
4	TOYOTA Corolla 1.8 VVTL-I T-Sport 3-Drs 2/3-Doors	31,461	192	1,800	20,950
5	TOYOTA Corolla 1.8 16V VVTLI3DR T SPORT BNS 2/3-Doors	43,610	192	1,800	19,950





Random Variable



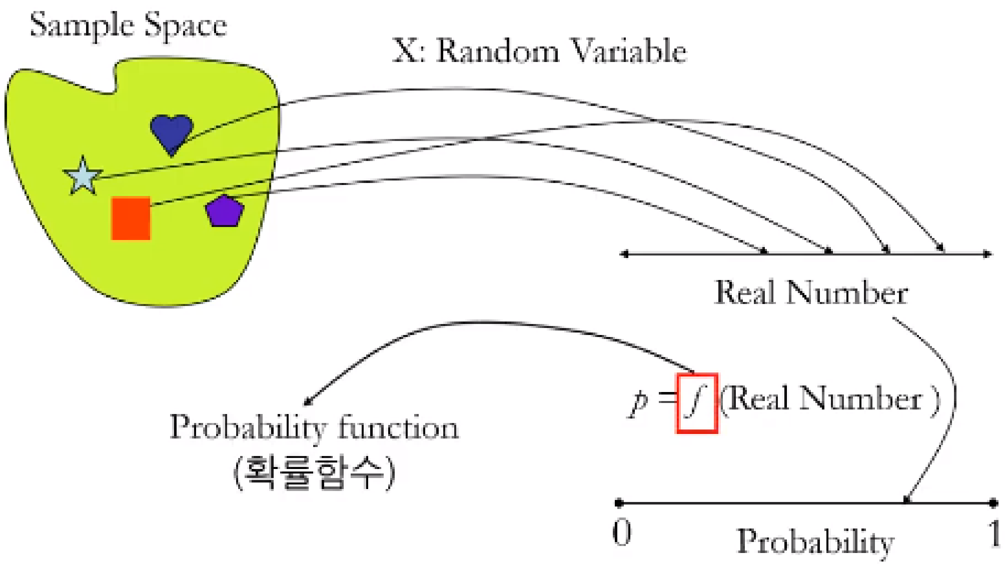
데이터

- 확률변수
  - 이산형(Discreate ~, countable)

    ex) 코로나19 확진자 수, 주사위 값
  - 연속형(Continuous ~, uncountable)

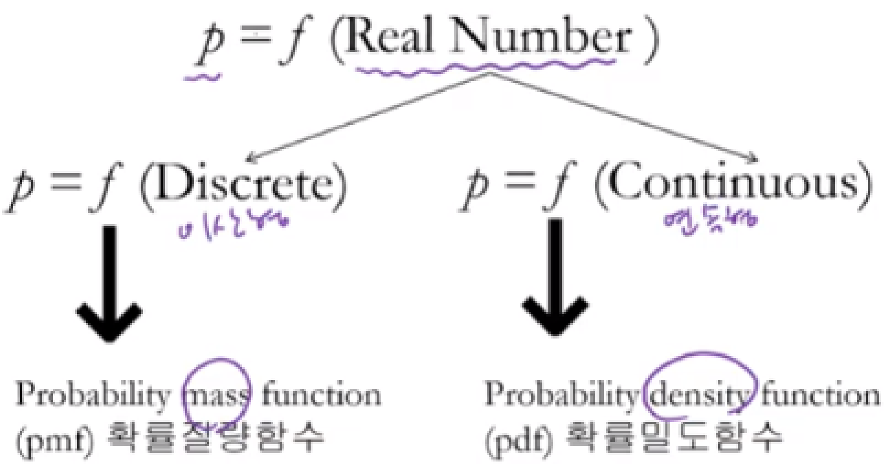
ex) 18홀 골프 치는 데 걸리는 시간, 서울시민 연소득

Probability Function (확률함수)

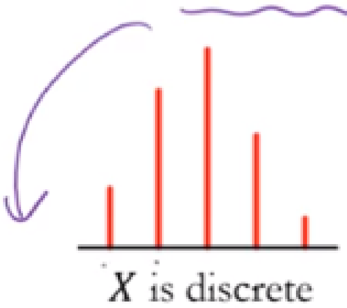


- 0~1 값
- 모든 p의 합 = 1

확률변수에도 이산형과 연속형이 있었던 것처럼 **확률함수**에도 두 가지로 나뉩니다.



$$p(x) = P[X = x]$$



probability mass function = PMF

In [ ]:

```

```

실행 (p.116)

[표 5-1] 불공정한 주사위의 확률분포

눈	1	2	3	4	5	6
확률	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

불공정한 주사위의 확률변수를 파이썬으로 구현해봅시다.

In [2]:

```
x_set = np.array([1,2,3,4,5,6])
```

In [3]:

```
x_set
```

Out[3]:

```
array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
```

In [6]:

```
def f(x):                    # 확률을 반환하는 함수
    if x in x_set:
        return x / 21
    else:
        return 0
```

In [9]:

```
X = [x_set, f]               # 확률변수 X 정의
```

Out[9]:

```
[array([1, 2, 3, 4, 5, 6]), <function __main__.f>]
```

In [10]:

```
# 확률 p_k를 구한다
prob = np.array([f(x_k) for x_k in x_set])
# x_k와 p_k의 대응을 사전식으로 표시
dict(zip(x_set, prob))
```

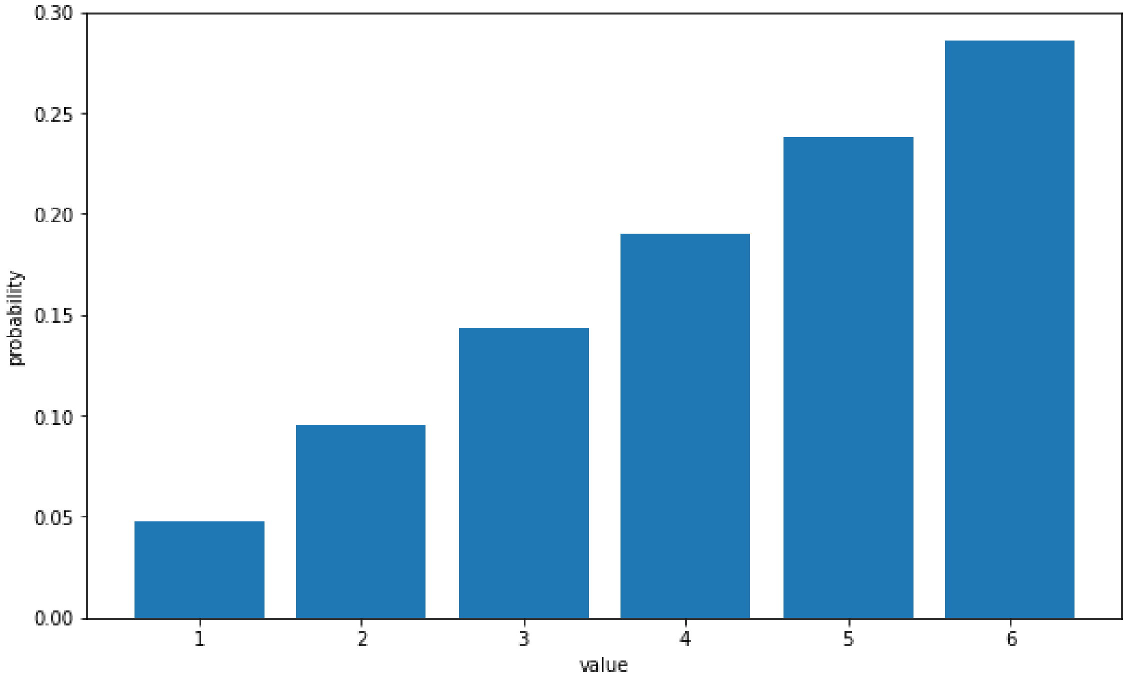
Out[10]:

```
{1: 0.048, 2: 0.095, 3: 0.143, 4: 0.190, 5: 0.238, 6: 0.286}
```

In [26]:

```
fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
ax = fig.add_subplot(111)
ax.bar(x_set, prob)
ax.set_xlabel('value')
ax.set_ylabel('probability')

plt.show()
```


0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
probability
1
2
3
4
5
6
value

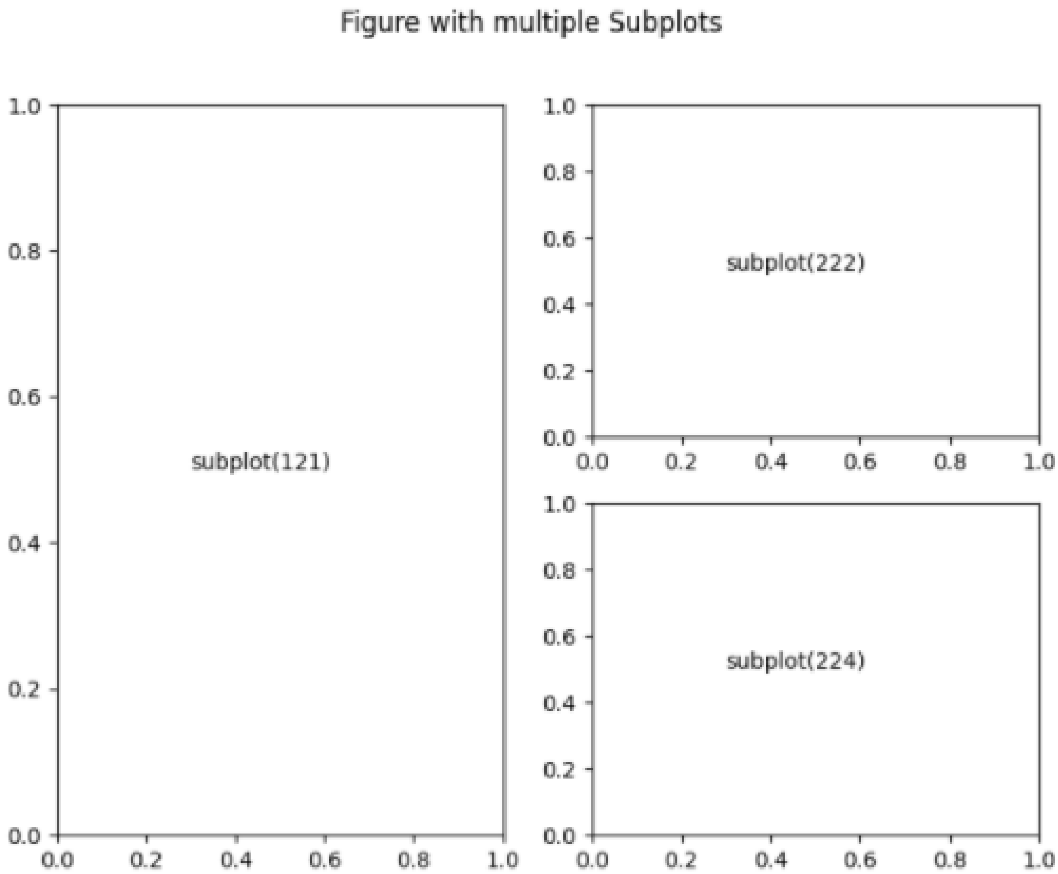
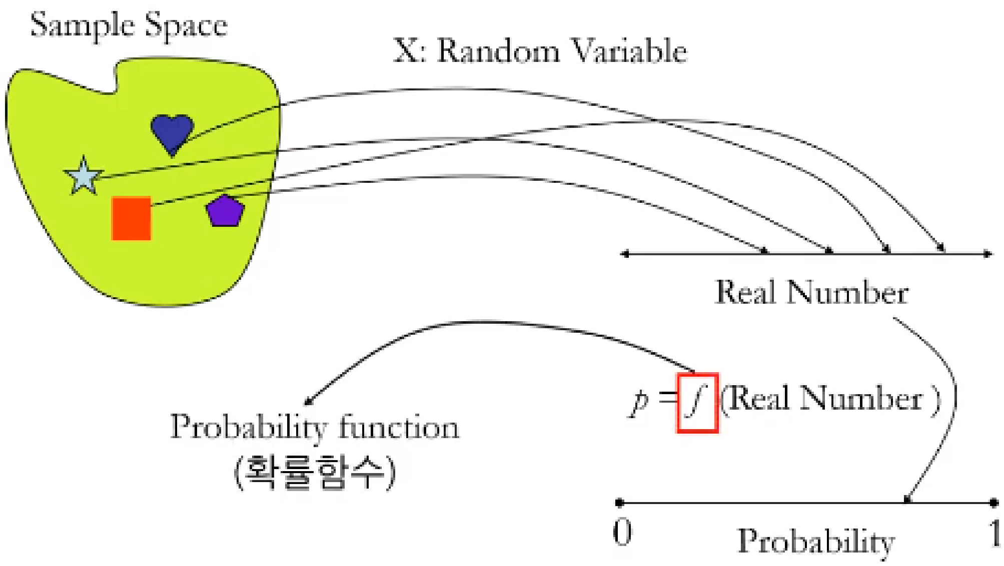


Figure with multiple Subplots
subplot(121)
subplot(222)
subplot(224)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0

- 확률의 성질



In [33]:
```
np.all(prob >= 0)
```

Out[33]: True

In [34]:
```
np.sum(prob)
```

Out[34]: 1.000

- 누적분포함수 (p.120)

In [35]:
```
def F(x):
    return np.sum([f(x_k) for x_k in x_set if x_k <= x])
```

In [36]:
```
F(3)
```

Out[36]: 0.286

- 확률변수의 변환과 확률분포(p.121)

  주사위 X -> 2X + 3

  - X : {1,2,3,4,5,6}
  - Y = 2X + 3
  - Y : {5,7,9,11,13,15}

  (확률변수의 표준화: 평균 빼고 표준편차로 나눌 때 중요한 연산)

In [37]:
```
y_set = np.array([2 * x_k + 3 for x_k in x_set])
prob = np.array([f(x_k) for x_k in x_set])
dict(zip(y_set, prob))
# 변환 후도 확률변수, x_k의 확률과 y_k의 확률이 같다.
```

```
Out[37]: {5: 0.048, 7: 0.095, 9: 0.143, 11: 0.190, 13: 0.238, 15: 0.286}
```

- 확률변수 - 이산형, 연속형
- 확률함수 - 이산형(PMF), 연속형(PDF)
- 확률분포
- 확률의 성질
- 누적분포함수
- 확률변수의 변환

```
In [ ]:
```

5.1.2 1차원 이산형 확률변수의 지표

- 기댓값 (확률변수의 평균, 뮤, E(X))

  ex) 주사위 무제한 던진 값의 합 / 무제한의 갯수

  ex) 40(6), 50(8), 60(6)

```
In [38]: np.sum([x_k * f(x_k) for x_k in x_set])
```

```
Out[38]: 4.333
```

```
In [41]: sample = np.random.choice(x_set, int(1e6), p=prob)
         np.mean(sample)
```

```
Out[41]: 4.334
```

- 변환한 확률변수의 기댓값

변환한 확률변수의 기댓값은 (2x+3) * f(x_k)의 총합으로 생각하면 된다.

```
In [ ]:
```

```
In [53]: def E(X, g=lambda x: x):
             x_set, f = X             # 이걸 왜 넣어놓은 거지?
             return np.sum([g(x_k) * f(x_k) for x_k in x_set])
```

```
In [54]: E(X)
```

```
Out[54]: 4.333
```

```
In [55]: E(X, g=lambda x: 2*x + 3)
```

Out[55]: 11.667

In [56]:
```
2 * E(X) + 3
```

Out[56]: 11.667

기댓값의 성질

기댓값은 다음과 같은 성질을 가진다는 것을 수학적으로 증명할 수 있다. 변환된 확률변수의 기댓값을 계산할 때는 기댓값의 성질을 이용한다.

- 확률변수가 아닌 상수 c에 대해

$$\text{E}[c] = c$$

- 선형성

$$\text{E}[cX] = c\text{E}[X]$$

$$\text{E}[X + Y] = \text{E}[X] + \text{E}[Y]$$

$$\text{E}[c_1X + c_2Y] = c_1\text{E}[X] + c_2\text{E}[Y]$$

- 분산

분산은 우리가 원래 알고 있던 것처럼 편차 제곱의 기댓값이 된다.

In [57]:
```
mean = E(X)
np.sum([(x_k-mean)**2 * f(x_k) for x_k in x_set])
```

Out[57]: 2.222

In [58]:
```
def V(X, g=lambda x: x):
    x_set, f = X
    mean = E(X, g)
    return np.sum([(g(x_k)-mean)**2 * f(x_k) for x_k in x_set])
```

In [59]:
```
V(X)
```

Out[59]: 2.222

In [60]:
```
V(X, lambda x: 2*x + 3)
```

Out[60]: 8.889

In [61]:
```
2**2 * V(X)
```

Out[61]: 8.889

분산의 성질

분산은 다음과 같은 성질을 만족한다.

- 분산은 항상 0 또는 양수이다.

$$\text{Var}[X] \geq 0$$

- 확률변수가 아닌 상수 값 c에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\text{Var}[c] = 0$$

$$\text{Var}[cX] = c^2\text{Var}[X]$$

In [ ]:

5.2 2차원 이산형 확률변수

5.2.1 2차원 이산형 확률변수의 정의

1차원 확률분포 2개를 동시에 다루는 변수 (X,Y)

우리 교재에서는 불공정한 주사위 2개를 사용하지만 여기서는 아래의 표를 봐주시길 바랍니다.

In [ ]:

i \ j	0	1	2	3
0	.15	.10	.0875	.0375
1	.10	.175	.1125	0
2	.0875	.1125	0	0
3	.0375	0	0	0

(X, Y) = {(i, j)|i=0, 1, 2, 3; j= 0, 1, 2, 3}

확률변수(X,Y)가 i, j를 취하는 확률 P

P = 결합확률함수

P(i, j) = P(i)*P(j)

(p.130)

Joint Probability Distribution (결합확률분포)

"동시에"

- 2차원 이산형 확률변수' 확률의 성질
  - P(i, j) >= 0
  - sum(P(i, j)) = 1

In [62]:
```
x_set = np.arange(2, 13)
y_set = np.arange(1, 7)
```

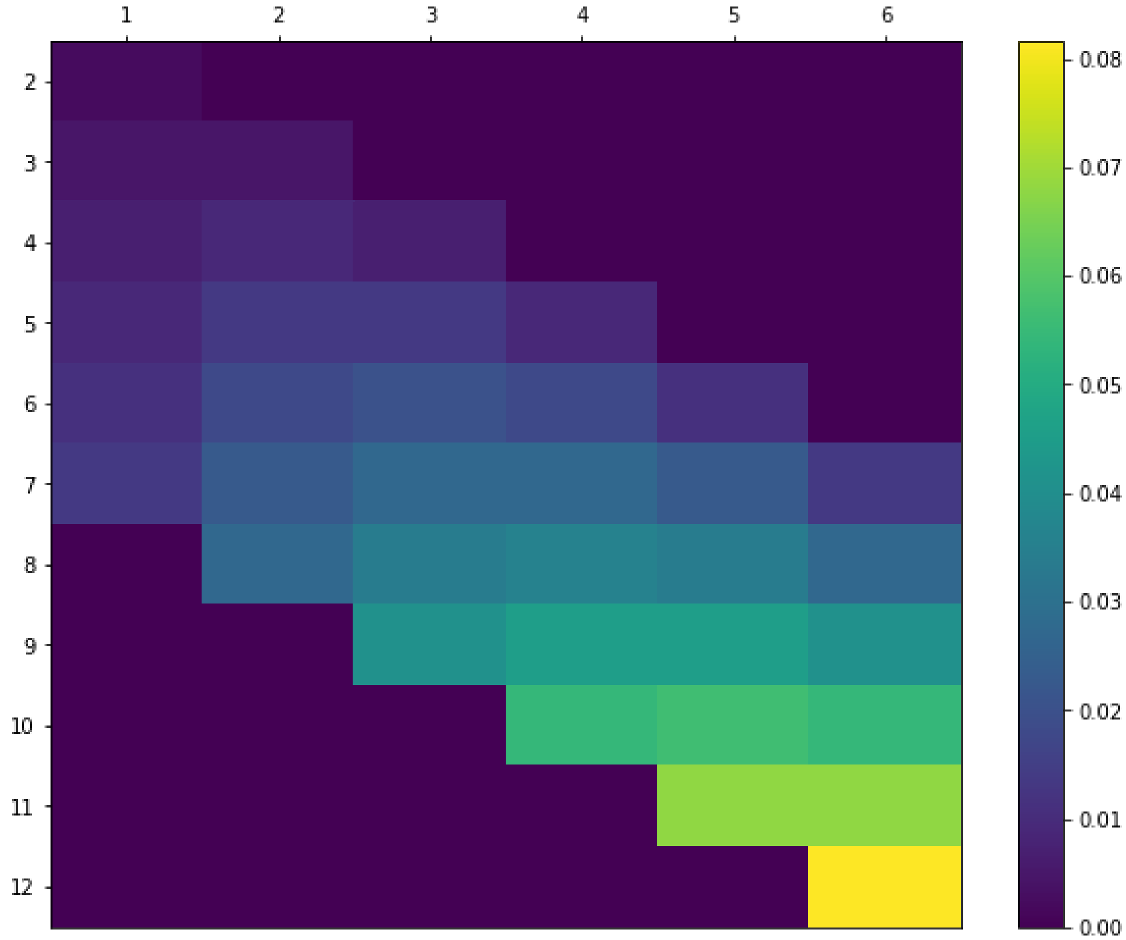
In [63]:
```
def f_XY(x, y):
    if 1 <= y <=6 and 1 <= x - y <= 6:
        return y * (x-y) / 441
    else:
        return 0
```

In [64]:
```
XY = [x_set, y_set, f_XY]
```

In [65]:
```
prob = np.array([[f_XY(x_i, y_j) for y_j in y_set]
                  for x_i in x_set])

fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111)

c = ax.pcolor(prob)
ax.set_xticks(np.arange(prob.shape[1]) + 0.5, minor=False)
ax.set_yticks(np.arange(prob.shape[0]) + 0.5, minor=False)
ax.set_xticklabels(np.arange(1, 7), minor=False)
ax.set_yticklabels(np.arange(2, 13), minor=False)
# y축을 내림차순의 숫자가 되게 하여, 위 아래를 역전시킨다
ax.invert_yaxis()
# x축의 눈금을 그래프 위쪽에 표시
ax.xaxis.tick_top()
fig.colorbar(c, ax=ax)
plt.show()
```



In [66]:

```
np.all(prob >= 0)
```

Out[66]: True

In [67]:

```
np.sum(prob)
```

Out[67]: 1.000

- 주변확률분포
  - Marginal Probability Function(주변확률함수)

    결합확률분포에서 개별 확률변수에 관심.

    ex) X에 대해 궁금해, X 어떻게 움직이는지 궁금해. 다른 조건들인 Y는 그대로 서 있고 X만 가봐.

    = X에 대한 주변확률 함수.
  - Marginal Probability Distribution(주변확률분포)

i \ j	0	1	2	3	Row Sum $P\{B=i\}$
0	.15	.10	.0875	.0375	.3750
1	.10	.175	.1125	0	.3875
2	.0875	.1125	0	0	.2000
3	.0375	0	0	0	.0375
Column sum $P\{G=j\}$	.3750	.3875	.2000	.0375	

In [69]:

```
def f_X(x):
    return np.sum([f_XY(x, y_k) for y_k in y_set])
```

In [70]:

```
def f_Y(y):
    return np.sum([f_XY(x_k, y) for x_k in x_set])
```

In [72]:

```
X = [x_set, f_X]
Y = [y_set, f_Y]
```

In [73]:

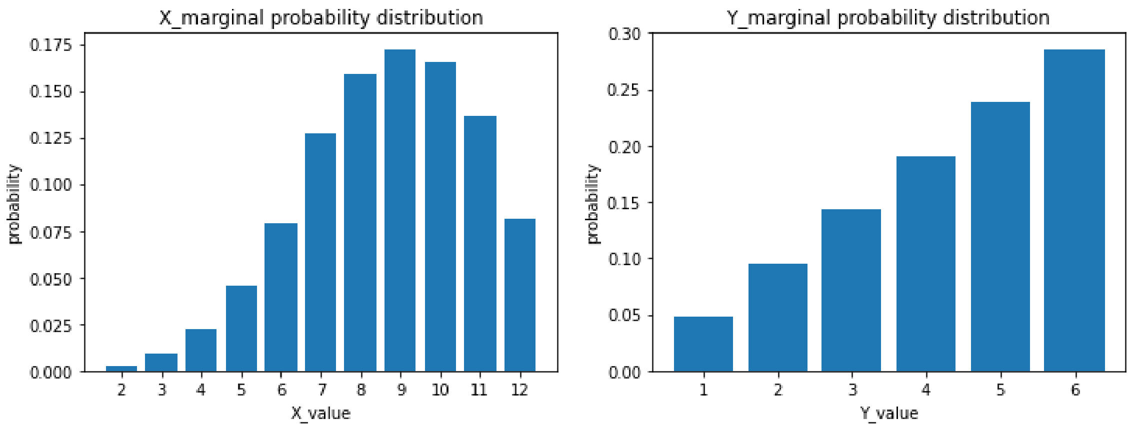
```
prob_x = np.array([f_X(x_k) for x_k in x_set])
prob_y = np.array([f_Y(y_k) for y_k in y_set])

fig = plt.figure(figsize=(12, 4))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)

ax1.bar(x_set, prob_x)
ax1.set_title('X_marginal probability distribution')
ax1.set_xlabel('X_value')
ax1.set_ylabel('probability')
ax1.set_xticks(x_set)

ax2.bar(y_set, prob_y)
ax2.set_title('Y_marginal probability distribution')
ax2.set_xlabel('Y_value')
ax2.set_ylabel('probability')

plt.show()
```



5.2.2 2차원 이산형 확률변수의 지표

- 기댓값

In [74]:
```
np.sum([x_i * f_XY(x_i, y_j) for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

Out[74]: 8.667

In [75]:
```
def E(XY, g):
    x_set, y_set, f_XY = XY
    return np.sum([g(x_i, y_j) * f_XY(x_i, y_j)
                   for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

In [76]:
```
mean_X = E(XY, lambda x, y: x)
mean_X
```

Out[76]: 8.667

In [77]:
```
mean_Y = E(XY, lambda x, y: y)
mean_Y
```

Out[77]: 4.333

In [78]:
```
a, b = 2, 3
```

In [79]:
```
E(XY, lambda x, y: a*x + b*y)
```

Out[79]: 30.333

In [80]:
```
a * mean_X + b * mean_Y
```

Out[80]: 30.333

- 분산

In [81]:
```
np.sum([(x_i-mean_X)**2 * f_XY(x_i, y_j)
       for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

Out[81]: 4.444

In [82]:
```
def V(XY, g):
    x_set, y_set, f_XY = XY
    mean = E(XY, g)
```

```python
    return np.sum([(g(x_i, y_j)-mean)**2 * f_XY(x_i, y_j)
                   for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

In [83]:
```python
var_X = V(XY, g=lambda x, y: x)
var_X
```

Out[83]: 4.444

In [84]:
```python
var_Y = V(XY, g=lambda x, y: y)
var_Y
```

Out[84]: 2.222

- 공분산

In [85]:
```python
def Cov(XY):
    x_set, y_set, f_XY = XY
    mean_X = E(XY, lambda x, y: x)
    mean_Y = E(XY, lambda x, y: y)
    return np.sum([(x_i-mean_X) * (y_j-mean_Y) * f_XY(x_i, y_j)
                    for x_i in x_set for y_j in y_set])
```

In [86]:
```python
cov_xy = Cov(XY)
cov_xy
```

Out[86]: 2.222

In [87]:
```python
V(XY, lambda x, y: a*x + b*y)
```

Out[87]: 64.444

In [88]:
```python
a**2 * var_X + b**2 * var_Y + 2*a*b * cov_xy
```

Out[88]: 64.444

- 상관계수

In [89]:
```python
cov_xy / np.sqrt(var_X * var_Y)
```

Out[89]: 0.707