ESP,DAkar, DIC2 Info-TR

Analyse numérique

chap 1: Les méthodes directes

Dr. Oumar Diop
oumar.diop@uvs.edu.sn

22 janvier 2022

PLAN

Définition et généralités

On appelle système linéaire d'ordre n (n entier positif), une expression de la forme

$$AX = b \tag{1}$$

où

$$A = (a_{ij}), \;\; 1 \leq i, j \leq n$$

désigne une matrice de nombres réels ou complexes de taille $n \times n$

$$b = (b_i), \;\; 1 \leq i \leq n$$

est un vecteur colonne réel ou complexe et

$$x = (x_i), \;\; 1 \leq i \leq n$$

est le vecteur des inconnues du système. La relation (1) équivaut aux équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i.$$

L'équation (1) admet une et une seule solution si la matrice A est régulière (c'est à dire $det(A) \neq 0$).

Définitions et généralités

On rappelle que si la matrice A est régulière la solution (1) est donnée par la formule de Cramer suivante :

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où A_i est la matrice obtenue en replaçant la i-ème colonne de A par le vecteur b.
On calcul le déterminant de la matrice A par la formule suivante

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \Pi_{i=1}^{n} a_{i\sigma i}$$

Par cette formule, la résolution de l'équation (1) requiert $(n+1)!$ floating-point opérations (flops).

Exercice 1

Déterminer la complexité algorithmique c'-à-d le temps nécessaire pour un ordinateur effectuant 10^9 flops par seconde de résoudre un système linéaire de 50 équation à 50 inconnues.

Définition 2

On appelle méthode de résolution directe d'un système linéaire un algorithme qui, si l'ordinateur faisait des calculs exacts, donnerait la solution en un nombre fini d'opérations.

Il existe une autre famille de méthodes de résolution de systèmes linéaires.

Dans ce chapitre, nous nous limitons aux méthodes directes de résolution de systèmes linéaires. On présentera les méthodes suivantes.

- L'algorithme de Gauss
- La méthode LU
- La méthode de Cholesky

Matrice diagonale

On rappelle qu'une matrice D est dite diagonale si elle peut s'exprimer sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$det(D) = \Pi_{i=1}^{n} d_{ii}$ alors le système $Dx = b$ admet une unique solution si et seulement si $d_{ii} \neq 0 \ \ \forall i = 1, ..., n.$
La solution du système $Dx = b$ est donnée par

$$x_i = \frac{b_i}{d_{ii}} \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Systèmes triangulaire inférieur

Une matrice est dite triangulaire inférieure si elle s'écrit sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & 0 & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & & \dots & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$det(L) = \Pi_{i=1}^{n} l_{ii}$ alors le système $Lx = b$ admet une unique solution si et seulement si $l_{ii} \neq 0 \ \ \forall i = 1, ..., n$.
L'algorithme qui permet de résoudre l'équation $Lx = b$ est donné par :

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \tag{2}$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right), \quad \forall i = 2, ..., n. \tag{3}$$

Systèmes triangulaire inférieur

L'implémentation de l'algorithme (2-3) nécessite des calculs élémentaire (additions, multiplications et divisions) de l'ordre de n^2.
En effet

1. Le calcul de (2) nécessite une division
2. Pour la formule (3), on :

$$\sum_{i=2}^{n} ((i-1)additions + (i-1)multiplications + 1division)$$

3. Le nombre d'opérations élémentaires C_L est alors donné par :

$$C_L = \frac{n(n-1)}{2}additions + \frac{n(n-1)}{2}multiplications + n\ divsions.$$

C_L est alors de l'ordre de n^2.

Exercice 3

Ecrire le code scilab permettant de résoudre le système $Lx = b$ où L est une matrice triangulaire inférieur.

Systèmes triangulaires supérieur

Exercice 4

1. *Donner un exemple de matrice carrée triangulaire supérieure d'ordre 4*
2. *Calculer son déterminant.*
3. *Donner l'algorithme permettant de résoudre* $Ux = b$ *où* U *est une matrice triangulaire supérieur*
4. *Ecrire le code scilab permettant de résoudre le système* $Ux = b$ *où* U *est une matrice triangulaire supérieur.*
5. *Calculer le coût de cet algorithme en termes d'opérations élémentaires.*

La méthode d'élimination de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss consiste à transformer le système $AX = b$ en un système ayant la même solution de la forme $UX = b'$ où U est une matrice triangulaire et b' un vecteur. La résolution par élimination de Gauss se fait en deux étapes :

- Triangularisation de la matrice A.
- Résolution du système triangulaire en cascade.

Considérons l'exemple $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 9 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

On met ce système sous la forme de tableau comme suit :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 9 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array} \end{array}$$

Le premier pivot étant non nul, on effectue alors les opérations suivantes :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 1 & -15 & 6 & -16 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ l_2 \leftarrow l_2 - 8l_1 \\ l_3 \leftarrow -2l_1 \\ l_4 \leftarrow -2l_1 \end{array} \end{array} \tag{5}$$

La méthode d'élimination de Gauss

On voit ici que le second pivot est nul, on peut utiliser la méthode du **pivot partiel**: on prend comme pivot le plus grand élément de la colonne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Alors on intervertit la 2ième et la 3ième ligne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 1 & -15 & 6 & -16 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_3 \\ l_3 \leftarrow l_2 \end{array}$$

Le second pivot 9, on poursuit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & \frac{-124}{9} & \frac{55}{9} & \frac{-124}{9} \end{pmatrix} \quad l_4 \leftarrow l_4 - \frac{1}{9} l_2$$

Le 3ième pivot (-50) étant non nul, on poursuit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2491}{225} & 0 \end{pmatrix} \quad l_4 \leftarrow l_4 - \frac{1}{50} \frac{124}{9} l_3$$

La méthode d'élimination de Gauss

Ce dernier tableau est équivalent au système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & +6z & -2t & = & 6 \\ & 9y & -11z & -t & = & -20 \\ & & -50z & -18t & = & -50 \\ & & & \frac{2491}{225}t & = & 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

En faisant une remontée, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1 \\ t & = & 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

Remarque 5

Lorsqu'un pivot est nul dans se processus d'élimination de GAUSS, on peut utiliser une autre méthode appelée **Pivot total**
Par exemple pour le tableau (5), on utilise le plus grand élément en module de la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -50 & -18 \\ 9 & -11 & -1 \\ 1 & -15 & 6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Algorithme d'élimination de Gauss


```
//Triangulation
pour i allant de 1 à n − 1 faire

    //Recherche du pivot partiel
      numlignepiv = i
      pour k allant de i à n faire
          si |A(k, i)| > |A(numlignepiv, i)| alors
              numlignepiv = k
          finsi


  //On met le pivot à sa place
      si numlignepiv ≠ i alors
        //On échange les lignes numlignepiv et i
          pour j allant de i à n faire
            tampon = A(numlignepiv, j)
            A(numlignepiv, j) = A(i, j)
            A(i, j) = tampon
          finpour
      finsi
  finpour
```

//Elimination

$pivot = A(i,i)$

pour k **allant de** $i+1$ **à** n **faire**

$factpivot = \dfrac{A(k,i)}{pivot}$

pour j **allant de** i **à** n **faire**

$A(k,j) = A(k,j) - factpivot * A(i,j)$

finpour

$b(k) = b(k) - factpivot * b(i)$

finpour

//Résolution par la remontée

$X(n) = \dfrac{b(n)}{A(n,n)}$

pour i **allant de** $n-1$ **à** 1 **par pas de** -1 **faire**

pour j **allant de** $i+1$ **à** n **faire**

$b(i) = b(i) - A(i,j) * X(j)$

finpour

$X(i) = \dfrac{b(i)}{A(i,i)}$

finpour

Exercice 6

1. *Ecrire une fonction scilab* $[At, bt] = Gauss(A, b)$ *qui renvoit une matrice triangulaire inférieure* At *et un vecteur* b *tel que le système* $Ax = b$ *soit équivalent à* $Atx = bt$*. Tester sur le système suivant :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Ecrire une fonction* $[x] = ResolGauss(A, b)$ *permettant de résoudre le système* $Ax = b$ *par la méthode de Gauss. Tester sur le système*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La factorisation LU

La factorisation LU d'une matrice carrée A consiste en la décomposer sous forme de produit de deux matrice $A = LU$:

- L est une matrice triangulaire inférieure, avec $l_{ii} = 1.$
- U est une matrice triangulaire supérieure

La factorisation LU permet de résoudre plusieurs systèmes $Ax = b$, où b peut varier

La résolution de $Ax = b$ se fait alors en deux étapes :

$$LY = b$$

puis

$$Ux = y.$$

Une matrice A est dite décomposable en produit LU si tous ses mineurs principaux sont non nuls.

La factorisation LU (exemple)

Soit à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccc} 3x & -2y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & +z & = & 7 \\ 4x & -3y & +2z & = & 4 \end{array}\right. \tag{10}$$

Ce système peut sécrire sous la forme $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad et \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{11}$$

Les mineurs principaux de la matrice A sont :

$$|3| = 3 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0. \tag{12}$$

Les matrice L et U sont de la forme suivante.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad et \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix},$$

Par identification $A = LU$, on obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}, \quad et \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix},$$

La résolution du système initial revient à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires :

$$L = \begin{cases} LX' = b \\ UX = Y \end{cases}$$

$$LX' = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow X' = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{17}{3} \\ \frac{15}{3} \end{pmatrix}$$

et

$$UX = X' \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{17}{3} \\ \frac{15}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La factorisation LU (Exercice)

Soit le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle factorisable en LU ? Si oui pourquoi ?
2. Si A est factorisable, donner sa matrice L et U.
3. Résoudre le système $Ax = b$.
4. Trouver la matrice A^{-1}.