IUT Digne Année 2007-2008
DUT Génie biologique TD Proba-Stat **feuille n° 1**

Calcul des probabilités

Exercice 1 Une entreprise possède deux machines A et B. On note A_n (respectivement B_n) l'évènement "la machine A (respectivement B) tombera en pane n fois aujourd'hui". Avec ces notations, écrire les évènements suivants :

1. La machine A ne tombera pas en pane aujourd'hui.
2. Aujourd'hui la machine A tombera en pane 2 fois et la machine B une fois.
3. La machine A tombera en pane moins de trois fois aujourd'hui.
4. La machine A tombera en pane plus de trois fois aujourd'hui.

Exercice 2 On choisi successivement trois personnes dans la population. On note P_i l'événement "la $i^{\text{ème}}$ personne a un rhésus positif". Écrire à l'aide des événements P_i les événements suivants :

E_1 : "au moins une personne a un rhésus positif"

E_2 : "au moins deux personnes a un rhésus négatif"

E_3 : "une personne exactement a un rhésus positif"

E_4 : "au moins une des deux premières personnes a un rhésus négatif"

Exercice 3 Soient A et B deux événements, montrer les relations suivantes :

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$,

Exercice 4 Soient A et B, deux événements, trouver une expression simple pour les évènements suivants :

1. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
3. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

Exercice 5 Soient A et B deux événements d'un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. Montrer les relations suivantes :

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
3. $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

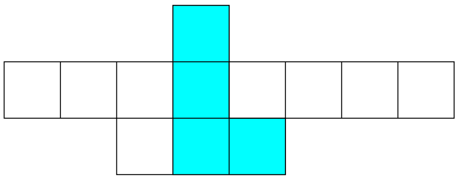
Exercice 6 Dans un groupe de 100 personnes, on en a dénombré 45 blondes, 40 dont les yeux sont bleus, et 25 qui sont blondes aux yeux bleues. On choisi au hasard une personne dans ce groupe. Quelle est la probabilité pour que la personne désigé possède au moins un des deux caractères (cheveux blonds ou yeux bleus) ?

Exercice 7 Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie, et 30% sont vaccinés contre les deux maladies. Quelle est la probabilité, pour un individu choisi au hasard, de n'être vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

Exercice 8 Soit $\Omega = \{1, \ldots, 9\}$.

1. Déterminer la loi $\mathbf{P}$ de probabilité sur Ω telle que la probabilité de l'événement élémentaire $\{i\}$ soit proportionnelle à i pour tout $i \in \Omega$.
2. Calculer la probabilité des événements "pair" et "premier".

Exercice 9 Trois personnes, Anne, Bernard et Clothide choisissent une case au hasard dans la figure suivante :



On s'intéresse à l'évènement V : "la case choisie est colorée". Anne affirme "$\mathbf{P}(V) = \frac{1}{3}$", Bernard répond "mais non, $\mathbf{P}(V) < \frac{1}{4}$", enfin Clothide prétend : "$\mathbf{P}(V) > \frac{1}{2}$". Envisager les trois protocoles suivants du choix de case :

- *Protocole A :* choix d'une case parmis douze ;
- *Protocole B :* choix d'une colone au hasard, puis d'une case au hasard dans cette colone ;
- *Protocole C :* choix d'une ligne au hasard, puis d'une case au hasard dans cette ligne.

Dans chaque cas, calculer $\mathbf{P}(V)$. Quelle est la morale de cette histoire ?

Calcul des probabilités (Solutions)

Correction 1 1. A_0

2. $A_2 \cap B_1$
3. $A_0 \cup A_1 \cup A_2$
4. $\overline{A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{A_0} \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

Correction 2 E_1 $P_1 \cup P_2 \cup P_3$

E_2 $(P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3) \cup (\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3}) \cup (P_1 \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) \cup (\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3})$

E_3 $(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3) \cup (\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3}) \cup (P_1 \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3})$

E_4 $P_1 \cup P_2$

Correction 4 1. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap B$
3. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$

Correction 6 A : “la personne choisi est blonde”
B : “la persone choisie a les yeux bleus”
On a $\mathbf{P}(A) = O,45$, $\mathbf{P}(B) = 0,4$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,25$.
D'ou $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0,6$.

Correction 7 A : “l'individu est vacciné contre la fièvre jaune”
B : “l'individu est vacciné contre la diphtérie”
On a $\mathbf{P}(A) = O,45$, $\mathbf{P}(B) = 0,6$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,3$ et on demande $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.
On a $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Comme $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0,75$, on obtient $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 0,25$.

Correction 8 1. $\mathbf{P}(\{i\}) = k \times i$ pour tout $i \in \Omega$ et $\sum_{i=1}^{9} \mathbf{P}(\{i\}) = 1 = k \sum_{i=1}^{9} i = 45 \times k$. D'ou $k = \frac{1}{45}$ et $\mathbf{P}(\{i\}) = \frac{i}{45}$

2. $\mathbf{P}(\text{“pair”}) = \frac{2+4+6+8}{45} = \frac{20}{45}$, $\mathbf{P}(\text{“impair”}) = 1 - \mathbf{P}(\text{“pair”}) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ et $\mathbf{P}(\text{“premier”}) = \frac{2+3+5+7}{45} = \frac{17}{45}$.

Correction 9 - *Protocole A :* On choisit une case parmis 12, 4 issues sur 12 sont favorables, donc $\mathbf{P}(V) = 12$.

- *Protocole B :* On choisit une colonne au hasard, puis une case au hasard dans cette colonne :

$$\mathbf{P}(V) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 = \frac{3}{16} < \frac{1}{4}.$$

- *Protocole C :* On choisit une ligne au hasard, puis une case au hasard dans cette ligne :

$$\mathbf{P}(V) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{43}{72} \geq \frac{1}{2}.$$

Le choix d'une case “au hasard” n'est pas assez précis pour conduire de façon sûre à un calcul de probabilités. Chacun des protocoles proposé permet le choix d'une case au hasard.

IUT Digne | Année 2007-2008
DUT Génie biologique | TD Proba-Stat **feuille n° 1**

Calcul des probabilités (Méthodes)

☞ Comment calculer des probabilités grâce au calcul ensembliste ?

Dans de nombreuses situations, on connaît les probabilités de certains événements et on cherche à calculer celles d'événements pouvant s'exprimer en fonction des premiers (dans le lengage ensembliste). On cherche à calculer la probabilité d'un événement E :

1. Rechercher et exprimé les probabilités des événements présent dans l'énoncé du problème.
2. Exprimer E en fonction des événements de probabilités connues.
3. Exprimer E en langage ensembliste. Cette traduction se fait en remplaçant les "et" par des "$\cap$", les "ou" par des "$\cup$" et les négations par des complémentaires.
4. Simplifier ou transformer l'expression obtenue grâce au calcul ensembliste de façon à pouvoir appliquer les formules du calcul des probabilités.

☞ Rappels sur les relations ensemblistes :

Quelques propriétés sur les opérations sur les ensembles qui doivent facilement être retrouvé :

$$
\begin{array}{r|l}
A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup \emptyset = A \\
A \cap \Omega = A & A \cup \Omega = \Omega \\
A \cap A = A & A \cup A = A \\
A \cap B = B \cap A & A \cup B = B \cup A \\
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap \overline{A} = \emptyset & A \cup \overline{A} = \Omega \\
\text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cap B = B & \text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cup B = A
\end{array}
$$

☞ Quelle sont les formules à retenir pour le calcul des probabilités ?

Soient un univers Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. On a les formules suivantes :

Parties de Ω	Vocabulaire des évènements	Propriétés sur les probabilités
A	A quelconque	$0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$
$\emptyset, \Omega$	événement *impossible*, *certain*	$\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
$A \cap B$	A et B *incompatibles*	$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement *contraire* de A	$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
A, B	A et B quelconques	$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B)$
$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$	Univers fini	$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\omega_i) = 1$
$\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$	Univers discret	$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\omega_i) = 1$