ESP, Dakar
MIABD, MSSI, DIC2 Info

Exercices de Calcul numérique matriciel

NB: chaque question est notée sur 2 points.

Exercice 1 *Soit le système linéaire, de matrice notée A, suivant :*

$$\begin{cases} 3x - 7y - 2z &= -7 \\ -3x + 5y + z &= 5 \\ 6x - 4y &= 2 \end{cases} \tag{1}$$

QCM 1 (Choisir la bonne réponse)

la matrice A est factorisable par LU ? Pourquoi?

1. ☐ *Oui, car toutes les sous-matrices principales d'ordre 1 à $n-1$ sont diagonales,*
2. ☐ *Oui, car toutes les sous-matrices principales d'ordre 1 à $n-1$ sont inversibles,*
3. ☐ *Non, car la sous-matrices principale d'ordre 3 est inversibles,*
4. ☐ *Non, car les valeurs propres de A sont non nuls,*
5. ☐ *Pas de bonne réponse.*

QCM 2 (Choisir la bonne réponse)

Déterminer la factorisation de LU de A.

1. ☐ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
2. ☐ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$
3. ☐ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
4. ☐ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
5. ☐ *Pas de bonne réponse.*

Exercice 2 *Soit le système linéaire, de matrice notée A, suivant :*

$$\begin{cases} 9x - 2y + z &= 13 \\ -1x + 5y - z &= 9 \\ x - 2y + 9z &= -11 \end{cases} \tag{2}$$

QCM 3 (Choisir la bonne réponse)

Calculer la matrice d'itération T_{GC} de la méthode de Gauss-Seidel.

1. ☐ $T_{GC} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$

2. ☐ $T_{GC} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$

3. ☐ $T_{GC} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$

4. ☐ $T_{GC} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{9} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$

5. ☐ *Pas de bonne réponse.*

QCM 4 (Choisir la bonne réponse)

La méthode de Gauss-Seidel converge

1. ☐ *Vrai,*

2. ☐ *faux.*

QCM 5 (Choisir la bonne réponse)

La méthode de Jacobi, lorsqu'elle converge, converge de manière plus rapide que celle de Gauss-Seidel.

1. ☐ *Vrai,*

2. ☐ *faux.*

QCM 6 (Choisir la bonne réponse)

Considérons la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est convergente car

1. ☐ A est symétrique définie positive,

2. A n'est oas à diagonale dominante

3. ☐ A est une matrice inversible,

4. ☐ Pas de bonne réponse.

1 Exercices : Jacobi et Gauss-Seidel

Analyser la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss- Seidel pour la résolution d'un système linéaire associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

QCM 7 (Choisir la bonne réponse)

Déterminer la matrice d'itération de la méthode de Jacobi pour résoudre le système $Ax = b$.

1. ☐ $$B_J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
2. ☐ $$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$
3. ☐ $$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$
4. ☐ $$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
5. ☐ Pas de bonne réponse.

QCM 8 (Choisir la bonne réponse)

Déterminer la matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système $Ax = b$.

1. ☐ $$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
2. ☐ $$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$
3. ☐ $$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$
4. ☐ $$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^{-2} \end{pmatrix}$$
5. ☐ Pas de bonne réponse.

QCM 9 (Choisir la bonne réponse)

Donner une relation entre $\rho(B_J)$ et $\rho(B_{GS})$

1. ☐$\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$,
2. ☐$\rho(B_{GS}) = 2\rho(B_J)$,
3. ☐$\rho(B_{GS}) = \sqrt{\rho(B_J)^3}$,
4. ☐$\rho(B_{GS}) = \frac{3}{2}\rho(B_J)$,
5. ☐ Pas de bonne réponse.

QCM 10 (Choisir la bonne réponse)

La méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent si

1. ☐$|\alpha| < 1$,
2. ☐$|\alpha| > 1$,
3. ☐$|\alpha| < \frac{1}{2}$,
4. ☐$|\alpha| < \sqrt{2}$,
5. ☐ Pas de bonne réponse.
