**Exercices pour le cours d'accélérateurs – Février 2017**

Mécanique relativiste:

1.Etablissez les relations donnant , , et pc en fonction:

a. de l'énergie au repos WR et de l'énergie cinétique K

b. de l'énergie totale W et de l'énergie au repos WR

2. Etablissez la relation donnant K en fonction de pc et WR

3. Calculez , , pc et 

a. pour des protons de K = 1 MeV, 50 MeV, 50 GeV.

b. pour des électrons de K = 10 keV, 1 MeV, 50 MeV, 50 GeV.

Qu'en déduisez-vous quant à la relation "K =  " ?

4. a.Quelle est en GeV l'énergie cinétique d'un insecte de masse 1mg voyageant à la vitesse de 0.1 m/s ?

b. un objet de masse 1.14 mg tombe sur le sol depuis une hauteur de 10cm.Quelle est en TeV la valeur de son énergie cinétique au moment de l'impact?

c. Quelle est en MJ l’énergie totale contenue dans un faisceau du LHC (2808 paquets de 1.1x1011 protons de 7 TeV)

d. Quelle est en MJ l’énergie d’un train de 200 t circulant à la vitesse de 212km/h ?

5. Etablissez les relations:

a. 

b. 

6. Refroidissement par électrons de la machine AD: un faisceau d'électrons est accéléré par une haute tension U à une énergie cinétique K = eU où leur vitesse correspond à la vitesse du faisceau d'antiprotons de quantité de mouvement p circulant dans la machine.

a. Quelle est la valeur de la tension U à appliquer pour que les électrons aient la même vitesse que des antiprotons de quantité de mouvement p = 105 MeV/c, 200 MeV/c, 309 MeV/c, 609 MeV/c ?

b. L'alimentation haute tension peut au maximum fournir une tension Umax = 35 kV. Quelle est la quantité de mouvement maximale à laquelle le dispositif peut “refroidir” des antiprotons?

Orbites fermées:

1.Cas des cyclotrons et synchrocyclotrons: le champ d'induction est constant et à symétrie cylindrique:  ; 

On appellera particule de référence celle qui décrira, à cause de ses conditions initiales particulières, une orbite fermée circulaire associée à un *p* donné. En cours d'accélération, la particule de référence passe lentement d'une orbite à une autre au fur et à mesure que son énergie augmente. L'orbite est déterminée par trois paramètres *R*, *B* et *K* dont deux seulement sont indépendants. Le champ aux environs de l'orbite est caractérisé par l'indice de champ *n*:

 (On note l'accroissement en passant d'une orbite à une autre)

On définit enfin le "facteur de compaction en quantité de mouvement" par:



Calculez:

a. f(B,R) où f est la fréquence de révolution

b. (n)

2. Cas général:

a. Démontrez que si la particule n'est pas relativiste la fréquence de révolution est indépendante du rayon, donc de l'énergie (principe du cyclotron).

b. Calculez l'énergie cinétique limite d'un cyclotron à protons non-relativiste, en admettant que la particule doit être considérée comme relativiste dès que (m-mR)/mR 1%

c. Calculez l'énergie cinétique d'injection pour les synchrotrons à protons dont les valeurs extrêmes du champ sont respectivement Bmin = 0.012 T et Bmax = 1.2 T, et dont l'énergie cinétique finale est 3, 30, 300 GeV.

3.Le synchrocyclotron du CERN (R.I.P.) accélérait des protons à 600 MeV. Calculez Rmax, et les valeurs initiale et finale de la fréquence de révolution, sachant que B = 1.9 T et en supposant le champ constant sur l'orbite.

Accélérateurs linéaires:

1.Le LINAC I du CERN (R.I.P):

Il accélère normalement des protons de 520 keV à 9.87, 30.45, 49.70 MeV dans ses trois tanks successifs. On veut l'utiliser pour accélérer des ions O6+.

a. Les tanks ont une longueur respective de 5.5 m, 11.9 m et 11.24 m. Ils opèrent à

= -30 et le facteur de temps de transit moyen est respectivement de 0.78, 0.79 et 0.84. Quel est le champ électrique moyen régnant dans chacun des tanks pour les protons?

b. Le tank 3 est constitué de 27 cavités. Toujours pour des protons, calculez la fréquence RF en choisissant une valeur moyenne "raisonnable"pour dans le tank.

c. Quelle est la condition permettant l'accélération d'ions O6+ à la place des protons? Quelles seraient les énergies cinétiques exprimées en MeV/nucléon et en MeV à l'entrée et la sortie des trois tanks? A quelles valeurs de champ cela conduirait-il?

d. La puissance RF nécessaire à la réalisation de la condition précédente n'étant pas disponible, on décide d'opérer la machine à vitesse moitié ("mode 2/"). Calculez les énergies et les champs moyens dans ces conditions.

Accélérateurs circulaires:

1. Un synchrotron à protons de 10 GeV possède un champ magnétique qui monte à 1.5 Tesla en 1 seconde.

a. Quelle est la quantité de mouvement en GeV/c à 1.5 Tesla?

b. Que vaut (B) à l'énergie maximum?

c. Si 2/3 de la circonférence est occupée par les aimants de courbure, que valent et R (rayon moyen)?

d. Quelle est la fréquence de révolution à 10 GeV?

e. Quelle est la fréquence de révolution à 1 GeV?

f. En supposant qu'on part de la fréquence calculée en (e), calculez le gain d'énergie par tour nécessaire pour accélérer de 1 GeV à 10 GeV en 0.9 secondes.

g. Si sin(S) = sin(45), quelle sera la tension crête sur la cavité?

2. Rappel: on appelle dispersion (parfois notée P), la fonction D(s) = R/(p/p)

Si la dispersion moyenne est de 6 m, que valent

a. tr ?

b. la quantité de mouvement à la transition?

c.  à 1 GeV et à 10 GeV?

3. Energie de transition:

On définit par la relation:  ,

où dénote la déviation par rapport à la particule de référence.

a. Quelle est la signification physique de ?

b. On rappelle que . Calculez en fonction de et .

c. On note tr la valeur de qui annule . Quelle en est la signification physique?

d. Dans les machines Bevatron, PS et LEAR, vaut respectivement

2.42, 0.026 et -0.046. Discutez les trois cas.

Oscillations bétatroniques dans un synchrotron à gradient constant:

1. Soit un synchrotron constitué de N = 4 mailles FO, avec:

 longueur de chaque section droite O,

L longueur de chaque section courbe F,

Etablir:

a)la matrice de transfert de la maille

b)les conditions sur  pour qu'il y ait stabilité horizontale et verticale

c)les valeurs de  et  dans les deux directions, en fonction de n et  On utilisera l'approximation: /L<<1

d)le coefficient (R/R)/(p/p) en fonction de n et 

e)les acceptances dans les deux directions, pour une ouverture donnée, en supposant 

f)les extrema de  dans le plan horizontal et en déduire le facteur de forme 

On supposera que le facteur circonférentiel  est voisin de 1.

2. Les caractéristiques du Bevatron (Synchrotron à gradient constant de 6GeV de Berkeley) sont les suivantes:

 = 15m  = 6m n = 0.67 N = 4

Vérifiez qu'il y a stabilité dans les deux directions.

Calculez 

Calculez les amplitudes maxima de l'enveloppe des trajectoires dans les deux directions sachant que l'émittance du faisceau injecté est de 30 mm.mrad, et en supposant que 

En déduire les dimensions minima de la chambre à vide.

Calculez les extrema de et le facteur de forme correspondant.

Approximation des lentilles minces:

On établira l’équivalence entre un quadrupole magnétique de longueur l[m] et de force K[m-2] et une maille formée d’une section droite de longueur L, coupée en son milieu par une lentille infiniment mince de longueur focale f. Cette approximation sera utilisée pour le calcul de la maille FODO du LHC.

1.Lentille mince:

1. Soit une lentille infiniment mince de longueur focale f. Calculer sa matrice de transfert.
2. Soit la maille formée par une première section droite de longueur L/2, la lentille mince, une seconde section droite de longueur L/2. Calculer la matrice de transfert de cette maille.
3. Identifier f et L pour qu’en première approximation, la maille décrite en b. soit équivalente à un quadrupole focalisant de longueur l[m] et de force K[m-2].
4. Identifier f et L pour qu’en première approximation, la maille décrite en b. soit équivalente à un quadrupole défocalisant de longueur l[m] et de force K[m-2].

2. Maille FODO du LHC:

Les quadrupoles, de force 8.72 10-3 m-2, alternativement focalisant et défocalisant, mesurent 3.1 m de long. Ils sont séparés par un train de 3 aimants de courbure de 14.20 m chacun. Entre deux aimants de courbure se trouve une section droite de 1.46m de long. Les sections droites qui séparent un quadrupole d’un aimant de courbure mesurent 2.42m de long.

1. En assimilant les aimants de courbure à des sections droites, et en utilisant pour les quadrupoles le modèle des lentilles minces, réduisez la maille à 4 éléments dont vous donnerez les caractéristiques.
2. Calculez les extrema des fonctions .

Synchrotron à gradients alternés:

On calculera pour le synchrotron à protons du CERN, les paramètres relatifs 1.à l'orbite fermée, 2.aux oscillations bêtatroniques, et 3.aux oscillations synchrotroniques.

1.Orbite fermée:

On part de l'énergie désirée: K = 28.5 GeV, du champ maximum possible: Bmax = 1.4 Tesla, de la longueur totale souhaitée des sections droites: lSS = 190 m.

Calculer:

a. Le rayon de courbure des aimants.

b. le rayon moyen R de l'accélérateur

c. le facteur circonférentiel = R/

Montrez qu'un injecteur du type Cockroft-Walton (K  5MeV) conduirait à un champ magnétique trop voisin du champ rémanent (< 50 Gauss).

Un accélérateur doit donc être utilisé comme injecteur. Supposant que son énergie est de 50 MeV, calculez:

d. Le champ magnétique d'injection

e. Les paramètres relativistes = v/c et à l'injection.

Supposant que h =20 (harmonique de la radio-fréquence), calculez:

f. La fréquence d'accélération à l'injection

g. La fréquence d'accélération à l'énergie maximum

h. Les paramètres de la loi de fréquence f(B)

On désire avoir la possibilité d'accélérer les protons à l'énergie maximum en 1.2 secondes. En déduire le dB/dt nécessaire (supposé constant).

Calculez, en fonction de e, , R et dB/dt, le gain d'énergie par tour que le système d'accélération doit fournir afin de garder la particule de référence sur l'orbite circulaire.

2. Oscillations bétatroniques:

L'accélérateur est constitué de N = 50 mailles du type FOFDOD

O: section droite sans champ

F: secteur focalisant dans le plan horizontal, indice de champ nF < 0

D: secteur défocalisant dans le plan horizontal, indice de champ nD > 0

avec -nF = nD = n >> 1 et on peut admettre |1-nF| |1-nD| n

Les mouvements horizontaux et verticaux seront donc régis par les mêmes équations.

a. Démontrez que le produit FOFDOD conduit aux résultats suivants:



avec:  et 

b. Démontrez que la solution approchée est: 

c. Calculez la valeur maximum de n pour qu'il y ait encore stabilité, en supposant k<<1

d. Supposant n = 290, calculez 

e. Supposant que le facteur de forme  et que l'émittance du faisceau injecté est de 20 mm mrad, calculez l'amplitude maximum des oscillations bétatroniques.

3.Oscillations synchrotroniques

Supposons que la phase stable S soit de 35 à l'injection.

a. Montrez qu'il y a stabilité des oscillations synchrotroniques autour de cette phase à l'injection.

b. Calculez la tension crête de l'ensemble des unités d'accélération.

c. Déterminez approximativement les limites 1 et 2 de la région stable:

(2-1)/2 sera approximativement la fraction des particules circulant dans la machine qui sera "acceptée" par le système d'accélération.

d. Montrez que la phase de 35 devient instable lorsque les protons atteignent une certaine énergie au cours de l'accélération. Calculer cette énergie de transition et la nouvelle phase stable S

e. Calculez les déplacements maxima de l'orbite fermée dans l'hypothèse où les particules injectées ont une dispersion d'énergie cinétique 

f. Calculez la longueur d'onde synchrotronique à l'injection. Vérifiez qu'elle est bien supérieure à la longueur d'onde bétatronique, justifiant ainsi a posteriori que l'on pouvait étudier indépendamment les duex types d'oscillations.

4.Limitations d'intensité:

L'intensité limite que l'on peut accélérer est donnée par la relation:



avec:

|| = espace disponible dans le diagramme de travail = 0.5 si les seules résonnances non compensées sont entières ou demi-entières.

A = acceptance = 20 mm.mrad

B = rapport de groupage RF = 0.3

r0 = rayon classique du proton = 1.5 10-18 m

Calculez cette intensité limite à 50 MeV. Par quel facteur cette intensité augmente-t-elle en passant à 800 MeV, 1GeV, 1.4GeV, toutes autres choses (A, B, ||) restant égales par ailleurs?

Collisionneurs:

Calculez la luminosité attendue pour les collisions p-p, p-Pb et Pb-Pb du LHC en utilisant les données suivantes :

Energie = 6.5 ZTeV, circonférence de la machine = 26.66 km

1. p-p  
   2808 paquets de 1.1x1011 charges,  
   émittances transverses normalisées \* = 1.6 m  
   fonctions enveloppes au point de collision = 0.8 m
2. Pb-Pb  
   518 paquets de Pb82+ de 1.5x1010 charges ;   
   émittances transverses normalisées \* = 4 m  
   fonctions enveloppes au point de collision = 0.8 m
3. p-Pb  
   540 paquets de Pb82+ de 1.8x1010 charges ;  
   émittances transverses normalisées \* = 4  m  
   684 paquets de protons de 2.3x1010 charges  
   fonctions enveloppes au point de collision = 0.8 m  
   On supposera d’une part que les dimensions transversales des paquets sont identiques pour les deux types de particules, et d’autre part que parmi tous les paquets, seuls 513 se croisent effectivement.