Практические задачи по теме «Погрешности вычислений»

Задача 1.1. Напишите подпрограмму, вычисляющую указанную функцию путем суммирования части ее ряда Маклорена:

1а) функцию Бесселя первого рода J_0(x): $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$

1б) функцию ошибок $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$,

1в) интеграл Френеля $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$

1г) интеграл Френеля $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$

1д) неполная гамма-функция $\gamma(a,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{a+n}}{n!(a+n)}, \mathrm{Re}\, a > 0$,

1е) интегральный синус $Si(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

Далее, используя эту подпрограмму и формулу численного дифференцирования, найдите производную функции в точках x =0,5, 1, 5, 10, 30 с заданной точностью ε = 10^{-6}. Используйте несколько методов (сравните!), проведите вычисления с разными длинами мантиссы, сравните результаты с табличными. Исследуйте влияние ошибок округления.
Задача 1.3*. Составить программу, моделирующую вычисления на ЭВМ с ограниченной разрядностью m. Продемонстрировать её работу, вычислив машинный эпсилон и просуммировав ряд для sin(x), x=50.

Задача 1.4 (I.9.1 из задачника Аристовой и др.**)**. Написать программу для вычисления exp(x), пользуясь рядом Маклорена и конечностью разрядов машинной арифметики: ввести величину SUM = 1., в цикле по I вычислять TERM = TERM * X / I, и если SUM + TERM равен SUM, то закончить вычисления и напечатать результат, а если не равен, то SUM = SUM + TERM и выполнять цикл далее. Вычислить и сравнить SUM и экспоненту от x для следующих аргументов:

$$x \in \{1, 5, 10, 15, 20, 25, -1, -5, -10, -15, -20, -25\}$$

при вычислениях с одинарной точностью. Объяснить результат. Предложить усовершенствованную процедуру для вычисления экспоненты отрицательного аргумента.

Задача 1.5 (I.9.2 из задачника Аристовой и др **).** Написать программу для вычисления многочлена, пользуясь схемой Горнера:

p = aN // for j = N – 1 to 0 // p = x·p + aj // end for // write x, p

для многочлена p(x) = $(x-2)^9$ на интервале [1.92, 2.08] с шагом 10^{-4}. Результат нарисовать. Объяснить полученный результат. Сравнить его с вычислением по формуле p(x)=$(x-2)^9$. Почему алгоритм вычисления данного многочлена по схеме Горнера непригоден для численного определения нуля функции?

Задача 1.6. (I.9.3.) Вычислить постоянную Эйлера

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

с точностью10^{-12}

Задача 1.7. Построить с максимально возможной точностью (вычисления производятся в типе данных real*4 и real*8) таблицу значений заданной ниже функции. Элементарные функции вычислять с необходимой точностью, используя степенные ряды. Решить обратную задачу теории погрешностей (т.е. указать максимальную погрешность аргумента, обеспечивающую максимально возможную точность вычисления функции):

1.7.1. $z(x) = \sqrt{[1 + arctg(16.7x + 0.1]}\ /\cos(7x + 0.3)\ \ x = 0.01(0.005)0.05$

1.7.2. $z(x) = exp(1 + x) * \cos(\sqrt{1 + x}$ x= 0.01(0.005)0.06

Задача 1.8. В теории переноса важную роль играют специальные функции, называемые интегральными экспонентами, и вводимые интегрированием двумя эквивалентными способами (заменой t на 1/x):

$$E_n(z) = \int_1^{\infty}\frac{e^{-zt}}{t^n}dt = \int_0^1 x^{n-2}e^{-\frac{z}{x}}dx$$
.

Для этих функций справедливо рекуррентное соотношение

$$nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x),\quad n \ge 1,\qquad E_n(0) = \frac{1}{n-1},\quad n \ne 1.$$

Напишите программу, осуществляющую вычисление интегральных экспонент первого, второго и третьего порядка со всеми верными знаками, пользуясь представлением первой интегральной экспоненты через логарифм и быстро сходящийся ряд:

0 < x < 1

$$E_1(x) = -c - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k\cdot k!},$$

где c – постоянная Эйлера, c = 0.577 215 664 901 533,

а также представлением интегральных экспонент в виде бесконечной цепной дроби:

$$E_n(x) = e^{-x}\cfrac{1}{x+\cfrac{n}{1+\cfrac{1}{x+\cfrac{n+1}{1+\cfrac{2}{x+\cfrac{n+2}{1+\cfrac{3}{x+\cfrac{n+3}{1+\dots}}}}}}}}$$

Достоинством последней формулы является то, что все коэффициенты ее положительны. Для оценки точности последней формулы используйте половину разности между соседними четным и нечетным приближением цепной дроби, т.к. четные и нечетные приближения подходят к значению функции с разных сторон. При каких x нужно использовать приближение рядом, а при каких – цепной дробью?

Задача 1.9. Матрица *A* для каждого варианта задана в таблице:

N	A	α	β	N	A	α	β
1.9.1	$\begin{matrix} 31 & 27 & 22 \\ 32.2 & 28.2 & 24 \\ 36 & 32 & 27 \end{matrix}$	0.1	0.4	1.9.2	$\begin{matrix} 30 & 34 & 19 \\ 31.4 & 35.4 & 20 \\ 24 & 28 & 13 \end{matrix}$	0.05	0.1
1.9.3	$\begin{matrix} 3 & 1 & 13 \\ 13.4 & 11.4 & 23 \\ 5 & 3 & 15 \end{matrix}$	0.05	0.1	1.9.4	$\begin{matrix} 9 & 5 & 6 \\ 13.5 & 9.5 & 11 \\ 8 & 4 & 5 \end{matrix}$	0.1	0.5
1.9.5	$\begin{matrix} -7 & -8 & -10 \\ 28.6 & 27.6 & 25 \\ 7 & 6 & 4 \end{matrix}$	0.1	0.2	1.9.6	$\begin{matrix} -3 & -1 & -13 \\ 26.8 & 22.4 & 46 \\ 5 & 3 & 15 \end{matrix}$	0.1	0.1

элементы матрицы заданы приближенно с относительной погрешностью a) δ =α% и b) δ = β%. (см. таблицу)
Проверить корректность постановки задачи о вычислении обратной матрицы. Если задача о вычислении обратной матрицы корректна, найти относительную погрешность результата.
Указание: определитель матрицы является дифференцируемой функцией элементов матрицы и ее максимум достигается в точках с координатами a_{ij} **(** 1 ± δ) (угловые точки)

Задача 1.9. 1. Примените алгоритм Архимеда для нахождения числа π как предела последовательности периметров правильных вписанных в круг 2^n -угольников. Существует рекурсивная связь между периметрами двух последовательных многоугольников из этого класса вида:

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (p_n / 2^n)^2}\right)}.$$

Очевидно, $p_2 = 2\sqrt{2}$. Вычислить значение p_n для значений n = 3,4,…,60. Объясните результаты, оцените влияние вычислительной погрешности (длины мантиссы).

2. Формулу для вычисления p_n из п.1 можно улучшить (плане накопления вычислительной погрешности), устранив из нее вычитание. Запишем p_{n+1} в виде

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{r_{n+1}}$$, где

$$r_{n+1} = 2\left(1 - \sqrt{1 - (p_n / 2^n)^2}\right),$$

$r_3 = 2/(2 + \sqrt{2})$. Покажите, что

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{2 + \sqrt{4 - r_n}}.$$

Полученную итерационную формулу используйте для вычисления p_n и r_n для значений $n = 3,4,\ldots,60$. В конечном счете, разность $4 - r_n$ будет округляться до значения 4. Таким образом, последняя формула также подвержена влиянию ошибок округления при больших значениях n. Однако есть ли теперь основания для беспокойства?

- другие задачи из задачника Аристовой и др. издания 2021 г.