ДЗ №5. производные функции нескольких
переменных.

Вебинар 8.

$z = \sqrt{1-x^3} + \ln(y^2-1)$

$\sqrt{1-x^3} \geq 0$

$1-x^3 \geq 0$

$x^3-1 \leq 0$

$x^3 \leq 1$

$x \leq 1$

$y^2-1 > 0$

$y^2 > 1$

$\left[\begin{array}{l} y < -1 \\ y > 1 \end{array} \right.$

Область определения $x \in (-\infty; 1]$
$y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$z = \left(1+ \dfrac{\ln x}{\ln y}\right)^3$

$z'_x = 3 \cdot \left(1+ \dfrac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \left(1+ \dfrac{\ln x}{\ln y}\right)'$

$z'_x = 3 \cdot \left(\dfrac{\ln y}{\ln y} + \dfrac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln y}$

$z'_x = \dfrac{3}{x \ln y} \cdot \dfrac{(\ln y + \ln x)^2}{\ln^2 y}$

$z'_x = \dfrac{3 \cdot (\ln y + \ln x)^2}{x \ln^3 y}$

$$z'_y = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot y \ln x$$

$$z'_y = \frac{3y \ln x (\ln y + \ln x)^2}{\ln^3 y}$$

№3 Найти полный дифференциал функции в точке $(1,1)$.

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}$$

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} \cdot \left(2y - \sin\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'\right)$$

$$z'_x = \frac{\left(2y - \frac{\sin\frac{x}{y}}{y}\right)}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}$$

$$z'_y = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} \cdot \left(2x + \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'\right)$$

$$z'_y = \frac{-\sin\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x}{2\sqrt{2xy} - \cos\frac{x}{y}}$$

$$z'_y = \frac{\frac{x \cdot \sin\frac{x}{y}}{y^2} + 2x}{2\sqrt{2xy} - \cos\frac{x}{y}}$$

$$dz(x,y) = \frac{\left(2y - \frac{\sin\frac{x}{y}}{y}\right)}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}dx + \frac{\left(2x + \frac{x \cdot \sin\frac{x}{y}}{y^2}\right)}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}dy$$

$$dz(1;1) = \frac{\left(2 \cdot 1 - \frac{\sin 1}{1}\right)}{2\sqrt{2} + \cos 1}dx + \frac{\left(2 + \frac{\sin 1}{1}\right)}{2\sqrt{2} + \cos 1}dy$$

$$dz(1;1) = \frac{2 - \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} dx + \frac{2 + \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} dy$$

№4 Исследовать функцию на экстремум.

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

$$z'_x = 2x + y - 6 \qquad\qquad 2x + y - 6 = 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y = 6 - 2x$$
$$z'_y = 2y + x - 9$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2y + x - 9 = 0$$

$$z''_{xx} = 2 \qquad\qquad\qquad\qquad 2y = -x + 9$$

$$z''_{xy} = 1 \qquad\qquad\qquad 2 \cdot (6 - 2x) = 9 - x$$

$$z^4_{yy} = 2 \qquad\qquad\qquad 12 - 4x = 9 - x$$

$$z''_{yx} = 1 \qquad\qquad\qquad 3x = 3$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0 \qquad 4 - 1 = 3 > 0$$

~~Точка функция имеет~~
Точка (1;4) — критическая точка, не экстремум.