№1. Исследовать функцию на условный экстремум.

$U = 3 - 8x + 6y$, если $x^2 + y^2 = 36$

$\varphi(x,y) = 0$

$L = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x;y)$

$x^2 + y^2 - 36 = 0$

$L = 3 - 8x + 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 36)$

$L'_x = (3 - 8x + 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 36))'_x = -8 + 2\lambda x$

$L'_y = 6 + 2\lambda y$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x;y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0 \\ 6 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{2\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{2\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{5}{6} \\ \lambda = -\frac{5}{6} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 36$$

$$\frac{25}{\lambda^2} = 36$$

$$\lambda^2 = \frac{25}{36}$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{5}{6} \\ \lambda = -\frac{5}{6} \end{array}\right.$$

При $\lambda = \frac{5}{6}$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\frac{5}{6}} \\ y = -3 \cdot \frac{6}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4{,}8 \\ y = -3{,}6 \end{cases} \quad M_1(4{,}8; -3{,}6)$$

При $\lambda = -\frac{5}{6}$ $\begin{cases} x = -\frac{4 \cdot 6}{5} \\ y = \frac{3 \cdot 6}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4{,}8 \\ y = 3{,}6 \end{cases}$ $M_2(-4{,}8; 3{,}6)$

Дифференциал 2-го порядка

$d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + L''_{yy}(dy)^2$

$L''_{xx} = (-8 + 2\lambda x)' = 2\lambda \quad L''_{xy} = 0 \quad L''_{yy} = (6 + 2\lambda y)' = 2\lambda \quad L''_{yx} = 0$

$d^2L = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda \cdot (dy)^2$

При $\lambda = \frac{5}{6}$ $\quad d^2L = \frac{5}{3}(dx)^2 + \frac{5}{3}(dy)^2 > 0$ Точка $M_1(4{,}8; -3{,}6)$ – точка минимума

При $\lambda = -\frac{5}{6}$ $\quad d^2L = -\frac{5}{3}(dx)^2 - \frac{5}{3}(dy)^2 < 0$ Точка $M_2(-4{,}8; 3{,}6)$ – точка максимума

№2. Исследовать функцию на условный экстремум

$U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$, если $x^2 + 16y^2 = 64$

$\varphi(x,y) = 0$

$L = 2\cdot(x^2 + 16y^2) + 12xy + 15 + \lambda(x^2 + 16y^2 - 64)$

$L = 12xy + 143 + \lambda(x^2 + 16y^2 - 64)$

$L'_x = 12y + 2\lambda x$

$L'_y = 12x + 32\lambda y$

$\begin{cases} 12y + 2\lambda x = 0 \\ 12x + 32\lambda y = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{\lambda x}{6} \\ x = -\frac{8\lambda y}{3} \\ x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{\lambda\cdot\left(-\frac{8\lambda y}{3}\right)}{6} \\ x = -\frac{8\lambda y}{3} \\ x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases}$ 1) $y = \frac{8\lambda^2 y}{18}$

$9y = 4\lambda^2 y$

$4\lambda^2 = 9$

$\left[\begin{array}{l} \lambda = -\frac{3}{2} \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

При $\lambda = -\frac{3}{2}$

$\begin{cases} y = \frac{3x}{12} \\ x = \frac{8\cdot 3y}{6} \\ 16y^2 + 16y^2 = 64 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{x}{4} \\ x = 4y \\ y^2 = 2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ x = 4\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\sqrt{2} \\ x = -4\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ $M_1(4\sqrt{2}; \sqrt{2})$ $M_2(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

При $\lambda = \frac{3}{2}$

$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} \\ x = -4y \\ y^2 = 2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ $M_3(-4\sqrt{2}; \sqrt{2})$ $M_4(4\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

Дифференциал 2-ого порядка

$d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + L''_{yy}(dy)^2$

$L''_{xx} = 2\lambda$ $L''_{yy} = 32\lambda$ $L''_{xy} = 12$

$d^2L = 2\lambda(dx)^2 + 24\,dx\,dy + 32\lambda(dy)^2$

При $\lambda = -\frac{3}{2}$

$d^2L = -\frac{2\cdot 3}{2}(dx)^2 + 24dxdy + 32\cdot -\frac{3}{2}(dy)^2$

$d^2L = -3(dx)^2 + 24dxdy + (-48)(dy)^2$

При $\lambda = \frac{3}{2}$

$d^2L = \frac{2\cdot 3}{2}(dx)^2 + 24dxdy + \frac{32\cdot 3}{2}(dy)^2$

$d^2L = 3(dx)^2 + 24dxdy + 48(dy)^2$

Достаточные условие в матричной форме.

$\varphi'_x = (x^2+16y^2-64)'_x = 2x$

$\varphi'_y = (x^2+16y^2-64)'_y = 32y$

$A = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$

$L''_{xx} = (12y + 2\lambda x)' = 2\lambda$

$L''_{xy} = 12$

$L''_{yx} = (12x + 32\lambda y)' = 12$

$L''_{yy} = 32\lambda$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 32\lambda \end{vmatrix}$

$M_1(4\sqrt{2}; \sqrt{2})$ при $\lambda = -\frac{3}{2}$

$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 8\sqrt{2} & 32\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & -3 & 12 \\ 32\sqrt{2} & 12 & -48 \end{vmatrix} = 0 + 32\cdot 8\cdot 12\cdot 2 + 8\cdot 2\cdot 32\cdot 12 + 3\cdot 32^2\cdot 2 - 0 + 48\cdot 64\cdot 2 =$ сумма положит. чисел $= \cancel{(32\cdot 8\cdot 12\cdot 2)^2 + 6\cdot 32^2 + 48\cdot 64\cdot 2} > 0$

$A_1 > 0$, значит M_1 точка max

$M_2(-4\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ $\lambda = -\frac{3}{2}$

$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -8\sqrt{2} & -32\sqrt{2} \\ -8\sqrt{2} & -3 & 12 \\ -32\sqrt{2} & 12 & -48 \end{vmatrix} = 0 + (-32\sqrt{2})\cdot(-8\sqrt{2})\cdot 12 + (-8\sqrt{2})\cdot 12\cdot(-32\sqrt{2}) - (-32\sqrt{2})^2\cdot(-3) - 0 - (-8\sqrt{2})^2\cdot(-48)$

$= 0 + (32\cdot 8\cdot 12\cdot 2)\cdot 2 + 32^2\cdot 6 - 0 + 64\cdot 2\cdot 48 + \cancel{32}\ 8\cdot 12\cdot 2 > 0$ сумма положит. чисел

$A_2 > 0$, значит M_2 – точка max

$M_3(-4\sqrt{2}; \sqrt{2})$ при $\lambda = \frac{3}{2}$

$A_3 = \begin{vmatrix} 0 & -8\sqrt{2} & 32\sqrt{2} \\ -8\sqrt{2} & 3 & 12 \\ 32\sqrt{2} & 12 & 48 \end{vmatrix} = -8\cdot 32\cdot 2\cdot 12 - 8\cdot 32\cdot 2\cdot 12 - 32^2\cdot 6 - 64\cdot 2\cdot 48$ сумма отриц. чисел

$A_3 < 0$

M_3 – точка min

$M_4(4\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ при $\lambda = \frac{3}{2}$

$A_4 \begin{vmatrix} 0 & 8\sqrt{2} & -32\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 3 & 12 \\ -32\sqrt{2} & 12 & 48 \end{vmatrix} =$ сумма отрицат. чисел

$= -32\cdot 8\cdot 2\cdot 12 - 8\cdot 32\cdot 2\cdot 12 - 32^2\cdot 6 - 64\cdot 2\cdot 48$

$A_4 < 0$, M_4 – точка min

№3 Найти производную функции $V=x^2+y^2+z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9,8,-12)$ в точку $M(8;-12;9)$

$V'_x=2x \quad |\vec{c}|=\sqrt{81+64+144}$

$V'_y=2y \quad |\vec{c}|=\sqrt{289}$

$V'_z=2z \quad |\vec{c}|=17$

$V'_x|_M=16 \quad \vec{c}_0=\left(-\frac{9}{17},\frac{8}{17},-\frac{12}{17}\right)$

$V'_y|_M=-24 \quad V'_{\vec{c}}|_M=16\cdot\left(-\frac{9}{17}\right)+(-24)\cdot\frac{8}{17}+18\cdot\left(-\frac{12}{17}\right)$

$V'_z|_M=18 \quad V'_{\vec{c}}|_M=-\frac{144}{17}-\frac{192}{17}-\frac{216}{17}=-32\frac{8}{17}$

№4. Найти производную функции $V=e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d}=(4,-13,-16)$ в точку $L(-16;4;-13)$

$V'_x=2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2} \quad V'_x|_L=-32\cdot e^{256+16+169} \quad V'_x|_L=-32\cdot e^{441}$

$V'_y=2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2} \quad V'_y|_L=8\cdot e^{441}$

$V'_z=2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2} \quad V'_y|_L=-26\cdot e^{441}$

$V''_{xx}=2\cdot(2x^2+1)\cdot e^{x^2+y^2+z^2} \quad |\vec{d}|=\sqrt{16+169+256}$

$V''_{xy}=4xy\, e^{x^2+y^2+z^2} \quad |\vec{d}|=\sqrt{441}$

$V''_{xz}=4xz\, e^{x^2+y^2+z^2} \quad |\vec{d}|=21 \quad \vec{d}_0=\left(\frac{4}{21};-\frac{13}{21},-\frac{16}{21}\right)$

$V'_d|_L=-32\cdot e^{441}\cdot\frac{4}{21}-8e^{441}\cdot\frac{13}{21}+26\cdot e^{441}\cdot\frac{16}{21}$

$\cancel{V'_d|_L=8\cdot e^{441}\left(\frac{-4\cdot4}{21}-\frac{13}{21}+\frac{26\cdot2}{21}\right)} \quad V'_d|_L=e^{441}\left(-\frac{128}{21}-\frac{104}{21}+\frac{416}{21}\right)$

$\cancel{V'_d|_L=8\cdot e^{441}\left(-\frac{29}{21}+\frac{52}{21}\right)} \quad V'_d|_L=8\cdot e^{441}\frac{16}{21}$