Тема 7 "Ряды"

1. Признак Д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^2\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n (n!)^2}{(n+1)^2\cdot(n!)^2\cdot n^n} =$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n\cdot(n+1)} = 0 < 1$$ сходящится

2. Признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

сходящится

3. Признак Лейбница.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = 0; \quad \frac{(-1)^n}{n+\ln n} > \frac{(-1)^n}{(n+1)+\ln(n+1)}$$

Сходится условно

$(-1)^n \to \pm 1$

$n+\ln n \to +\infty$

4. Признак Раабе

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3^n}{2^n} : \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}n\right) < 0$ - расходится

5. Разложить функцию по Тейлору в единице

$f(x) = \ln(16x^2)$

$\ln(16x^2) = \frac{\ln 16}{0!}(x-1)^0 + \frac{2}{1!}(x-2)^1 - \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 - \frac{12}{4!}(x-1)^4 ... =$

$= \ln 16 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$

$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} + \ln 16$

6. Дана функция $f(x) = x^2$

a. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-2; 0]$.

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos nx$

$a_0 = \cancel{\frac{1}{\pi}}$?

Задание 8 "Понятие об интеграле"

1. Найти неопределенный интеграл

$$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)\,dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - x^2 - x - \cos x - \sin x + e^x + x\ln x + C$$

2. Найти неопределенный интеграл

$$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)\,dx =$$

$$= x^2 + \frac{6x^2z^2}{2} - \frac{5x^3y}{3} - 3x\ln z =$$

$$= x^2(3z^2 + 1) - \frac{5x^3y}{3} - 3x\ln z$$

3. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi} 3x^2 \sin(2x)\,dx = -\frac{3}{2}\int_0^{\pi} x^2\,d\cos 2x = -\frac{3}{2}\left(x^2\cos 2x - \int \cos 2x\,dx^2\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x^2\cos 2x - 2\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx\right) = -\frac{3}{2}\left(x^2\cos 2x - \frac{2}{2}\int_0^{\pi} x\,d\sin 2x\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x^2\cos 2x - x\sin 2x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x\,d2x\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x^2\cos 2x - x\sin 2x - \frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3\cos 2x}{4} - \frac{6x^2\cos 2x}{4} + \frac{6x\sin 2x}{4}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\left((3 - 6x^2)\cos 2x + 6x\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(3-6\pi^2\right)\cos 2\pi + 6\pi \sin 2\pi - 3\cos 0 - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(3-6\pi^2\right)-3\right) = -\frac{6\pi^2}{4} = -\frac{3\pi^2}{2}$$

4. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1} + C$$

$t = \sqrt{x+1}$ $t^2 = x+1$ $x = t^2 - 1$ $dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{t} \cdot 2t\,dt = 2t + C = 2\sqrt{x+1} + C$$