1) $f(x)$ Пример функции не имеющей предела в нуле и бесконечности

$f(x) = \sin(x + \frac{1}{x})$

$f(x) = tg(x + \frac{1}{x})$

2) Функция, не имеющая предела в точке, но определенная на ней

$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ Определена при $x=0$, но имеет разрыв в этой точке

$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq -1, \ x \to 2 \\ 2-x, & x \geq 2, \ x \to 5 \end{cases}$

Определена в точке 2, но имеет в ней разрыв.

$x_0 = 2 \quad f(2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 1, \ \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 0.$

$x = 2$ - точка разрыва.

3). $f(x) = x^3 - x^2$

а) Область значений и определения

$D(f) = \mathbb{R}$ — определение на всей числовой прямой $\quad$ $ran(f) = \mathbb{R}$ — значение б) Нули функции и их кратность

$f(x)=0$, при $x_1=1$ и $x_2=0$

$x_1=1$ - точка нечетной кратности

$x_2=0$ - точка четной кратности

в) Отрезки знакопостоянства

$f(x)\leq 0$ при $x\in(-\infty;1]$

$f(x)>0$ при $x\in(1;+\infty)$

$f(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$

г) Интервалы монотонности

Функция возрастает при $x\in(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

Функция убывает при $x\in(0;\frac{2}{3})$

д) Четность функции

$\forall_x \in (1;+\infty)\ D(f): f(x)>0$

$\forall_x \in (-\infty;1]\ D(f): f(x)\leq 0$

Нечетная функция

Функция общего вида

е) Ограниченность

Неограничена

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x} \cdot 0 = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x^2 = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = +\infty$$

ж) Апериодична

$$f(x+T) = (x+T)^3 - (x+T)^2$$

$\cancel{f(x+T)}$

№4

а) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3x-2)}{4x^2} = \frac{3x-2}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = -\frac{1}{2}$$

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{1+x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

в) $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{3}{x}\right)^{4x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{3}{x} \cdot \frac{x}{3} \cdot (4x+1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{3\cdot(4x+1)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{12x+3}{x}} = e^{12}$$

Теоремы о пределах

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{4x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2\cdot 2x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-1} = (1)^{-1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin(x)} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = ?$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x + \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right) + \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) =$

$= 0 + 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) + \ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x} =$

$= 1 + (-\infty)$