Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Национальный исследовательский университет

«Московский Энергетический Институт»

**Курсовая работа**

По дисциплине

Численные Методы

«Моделирование колебаний струны в зависимости от входных данных»

Выполнил студент группы А-05-18

Чернов Д. С.

Преподаватель: Амосова О.А.

Москва – 2020

Оглавление

[Постановка задачи 3](#_Toc59665526)

[Аналитическое решение 3](#_Toc59665527)

[*Задача Штурма-Лиувилля* 4](#_Toc59665528)

[*Подстановка* 5](#_Toc59665529)

[Построение тестовых примеров 8](#_Toc59665530)

[*Тестовый пример №1* 8](#_Toc59665531)

[*Тестовый пример №2* 9](#_Toc59665532)

[*Тестовый пример №3* 9](#_Toc59665533)

[Теория 11](#_Toc59665534)

[*Вводим понятие креста* 11](#_Toc59665535)

[*Заполняем уже известные точки* 12](#_Toc59665536)

[*Заполняем матрицу крестом* 13](#_Toc59665537)

[Численное решение 15](#_Toc59665538)

[***Тестовый пример 1*** 15](#_Toc59665539)

[***Таблица*** 15](#_Toc59665540)

[***Струна в половину пройдённого времени*** 16](#_Toc59665541)

[***10 позиций струны в разные промежутки времени*** 17](#_Toc59665542)

[***Полный график струны за все время*** 18](#_Toc59665543)

[*Тестовый пример 2* 19](#_Toc59665544)

[***Таблица*** 19](#_Toc59665545)

[***Струна в половину пройдённого времени*** 20](#_Toc59665546)

[***10 позиций струны в разные промежутки времени*** 21](#_Toc59665547)

[***Полный график струны за все время*** 22](#_Toc59665548)

[*Тестовый пример 3* 23](#_Toc59665549)

[***Струна в половину пройдённого времени*** 24](#_Toc59665550)

[***10 позиций струны в разные промежутки времени*** 25](#_Toc59665551)

[***Полный график струны за все время*** 26](#_Toc59665552)

[Моделирование колебаний в зависимости от начального сосредоточенного импульса 27](#_Toc59665553)

[*Тестовый пример 4* 27](#_Toc59665554)

[*Тестовый пример 5* 29](#_Toc59665555)

[*Тестовый пример 6* 31](#_Toc59665556)

[Код программы 33](#_Toc59665557)

[Литература 40](#_Toc59665558)

# **Постановка задачи**

Решить первую краевую задачу с граничными условиями первого рода с использованием явной схемы. Смоделировать колебания в зависимости от начального сосредоточенного импульса.

Первая краевая задача для уравнения колебаний:

**(1.1)**

**Тестовые примеры:**

****

# **Аналитическое решение**

Рассмотрим смешанную краевую задачу для одномерного уравнения колебаний:

**(1)**

Для начала возьмем однородные краевые условия и правую часть .

Будем искать решение методом Фурье, то есть представим решение в виде произведения двух функций: , одна из которых зависит только от , а другая от .

Тогда подставив в уравнение наше решение получим:

*умножаем на*

Получили равенство, в котором левая часть зависит только от , а правая от . Функции разных переменных могут быть равны между собой только тогда, когда они равны константе. Обозначается эта константа .

После преобразований получим два уравнения:

## ***Задача Штурма-Лиувилля***

Рассмотрим уравнение .

Нам необходимо найти нетривиальные решения, которые будут удовлетворять условиям:

.

Для этого запишем задачу Штурма-Лиувилля.

Решаем задачу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| При | При | При |
|  |  |  |
|  |  |  |

* При

Из первого краевого условия:

Поучаем что:

Из второго краевого условия:

получаем что

*умножаем на*

*возводим в квадрат*

Откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

* При

**гиперболический синус:**

Из первого краевого условия:

Из второго краевого условия:

Получаем, что т.е. задача Штурма– Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

* При

Из первого краевого условия:

Получаем, что , следовательно

Из второго краевого условия:

Получаем, что т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

После ее решения получим:

## ***Подстановка***

Уравнение решим в общем виде, подставив найденное значение :

Вернемся к задаче (1) и получаем, что

Теперь подставим начальные условия :

Разложение нечетной функции в ряд Фурье:

Где коэффициент :

Если функции и удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

Замечаем, что коэффициенты и равны соответственно:

Получаем:

Следовательно, решение будет иметь вид:

После подстановки:

# **Построение тестовых примеров**

****

## ***Тестовый пример №1***

*при*

Решение:

## ***Тестовый пример №2***

****

*при*

Решение:

## 

## ***Тестовый пример №3***

Решение:

# **Теория**

## ***Вводим понятие креста***

Рисунок : итерационный крест

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

t

x

Рисунок 2: описание итераций по матрице значений

Введем сетку с шагом h по x и с шагом по времени

количество точек по х

количество точек по t

Решение задачи будем искать на сетке

Для аппроксимации уравнения возьмем пятиточечный шаблон, где сеточная функция  аппроксимирует функцию в правой части уравнения. В случае, если эта функция непрерывна, то можно положить

## ***Заполняем уже известные точки***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

t

x

Посмотрим внимательно на задачу и посмотрим какие точки на сетке у нас уже есть:

Рисунок 3:краевые точки

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Красным цветом обозначим те точки, которые мы можем найти. Так как у нас есть производная по то мы можем найти красную точку:

Рисунок 4: наглядное представление формулы 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

t

x

(1)

где шаг

Искомая точка:

Однако нам не подходит эта формула так как имеет первый точности. Тогда будем использовать следующие формулы:

Получаем:

Смотрим, что вторая производная по это и есть наша функция подставляем:

Переписываем вторую производную по как (только для линии где стоят красные точки)

Теперь начинаем выражать нужную нам точку:

Рисунок 5: точки, которые мы используем чтобы найти красную

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

t

x

*умножаем на th*

Тогда получаем систему:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

t

x

## ***Заполняем матрицу крестом***

Если мы посмотрим на рис.6 то идея заключается в том чтобы итерироваться крестом по линии (слева направо) и находить самую верхнюю точку (она черная в кресте)

Попробуем расписать одну (которая на рис.6) точку и выразить общую формулу:

Искомая точка:

Рисунок 6: идея итераций крестом

Подставляем дальше:

Как видим, формула получилась достаточно громоздкой, однако точка уже посчитана а другие точки тоже известны тогда получаем:

Выражаем неизвестную точку:

Умножаем на

Рисунок 7: схема итераций крестом

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

t

x

Будем итерироваться крестом так как показано на рис.7. Для этого запишем формулу в общем виде:

Так же нужно сказать, что

Получаем, что разностная схема в общем виде для данной задачи имеет вид:

***\* Примечание: в языке Python индексы будут поменяны местами так как в теоретической части i это столбец, а j это строчка.***

# **Численное решение**

Возьмем такие данные и выведем таблицу.

–максимальная длина отрезка по OX

– максимальное время

– количество разбьений по OX

– количество разбиений по OT

– шаг по OX

– шаг по OT

– максимальное количество струн на графике и столбцов/строк в таблице соответсвено.

### ***Тестовый пример 1***

Разностаня схема:

### ***Таблица***

======================================================================[ Analytical Solution]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| 2.7032041| -3.7787479| 4.54816| -4.9491072| 4.9491072| -4.54816| 3.7787479| -2.7032041| 1.4086628| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| 2.4111708| -3.3705211| 4.0568119| -4.4144439| 4.4144439| -4.0568119| 3.3705211| -2.4111708| 1.2564817| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| 1.593025| -2.2268536| 2.6802758| -2.916558| 2.916558| -2.6802758| 2.2268536| -1.593025| 0.830139| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| 0.4272795| -0.5972844| 0.7189008| -0.7822762| 0.7822762| -0.7189008| 0.5972844| -0.4272795| 0.222659| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| -0.0| -0.8316988| 1.162613| -1.3993392| 1.5226992| -1.5226992| 1.3993392| -1.162613| 0.8316988| -0.4334054| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| -0.0| -1.9091996| 2.668827| -3.2122418| 3.49542| -3.49542| 3.2122418| -2.668827| 1.9091996| -0.9949003| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| -0.0| -2.570111| 3.5927001| -4.32423| 4.7054365| -4.7054365| 4.32423| -3.5927001| 2.570111| -1.3393069| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| -0.0| -2.6702216| 3.7326423| -4.4926666| 4.8887218| -4.8887218| 4.4926666| -3.7326423| 2.6702216| -1.3914753| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| -0.0| -2.1876869| 3.0581181| -3.6807987| 4.0052829| -4.0052829| 3.6807987| -3.0581181| 2.1876869| -1.1400224| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| -0.0| -1.2277967| 1.7163093| -2.0657767| 2.2478871| -2.2478871| 2.0657767| -1.7163093| 1.2277967| -0.6398154| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| -0.0| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

======================================================================[ Difference Scheme]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| 2.7032041| -3.7787479| 4.54816| -4.9491072| 4.9491072| -4.54816| 3.7787479| -2.7032041| 1.4086628| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| 2.4076242| -3.3655635| 4.0508448| -4.4079507| 4.4079507| -4.0508448| 3.3655635| -2.4076242| 1.2546336| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| 1.5803271| -2.2091035| 2.6589115| -2.8933102| 2.8933102| -2.6589115| 2.2091035| -1.5803271| 0.823522| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| 0.404014| -0.564762| 0.6797563| -0.7396809| 0.7396809| -0.6797563| 0.564762| -0.404014| 0.2105351| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| 0.0| -0.8615258| 1.2043075| -1.4495233| 1.5773073| -1.5773073| 1.4495233| -1.2043075| 0.8615258| -0.4489485| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| 0.0| -1.9367972| 2.707405| -3.258675| 3.5459465| -3.5459465| 3.258675| -2.707405| 1.9367972| -1.0092816| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| 0.0| -2.5843261| 3.612571| -4.3481469| 4.7314618| -4.7314618| 4.3481469| -3.612571| 2.5843261| -1.3467144| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| 0.0| -2.6611054| 3.719899| -4.4773286| 4.8720316| -4.8720316| 4.4773286| -3.719899| 2.6611054| -1.3867248| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| 0.0| -2.1501783| 3.0056856| -3.6176902| 3.936611| -3.936611| 3.6176902| -3.0056856| 2.1501783| -1.1204763| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| 0.0| -1.1643834| 1.6276652| -1.9590833| 2.1317881| -2.1317881| 1.9590833| -1.6276652| 1.1643834| -0.6067702| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| 0.0| 0.0785661| -0.1098258| 0.132188| -0.1438412| 0.1438412| -0.132188| 0.1098258| -0.0785661| 0.0409415| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

### ***Струна в половину пройдённого времени***

Желтым выделяем середину, и теперь вывожу ее на графике:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart, line chart  Description automatically generated  Рисунок | Chart, line chart  Description automatically generated  Рисунок |

Смотрим погрешность:

Chart

Description automatically generated

Рисунок 10

Если в таблице сравнить две желтые строчки (это и есть наш график), то получается так же, как на графике погрешности.

### ***10 позиций струны в разные промежутки времени***

Попробуем вывести больше позиций струны в разные промежутки времени. Берём шаг 0.01, выводим два графика:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart, histogram  Description automatically generated  Рисунок | Chart, histogram  Description automatically generated  Рисунок |

Выводим график погрешности для всех позиций струны:

Chart, histogram

Description automatically generated

Рисунок 13

Как видно из графика погрешность начинает расти к предпоследней точке.

### ***Полный график струны за все время***

Пробуем вывести 3D график струны во всех промежутки времени:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart, surface chart  Description automatically generated  Рисунок | Chart, surface chart  Description automatically generated  Рисунок |

Как видно из общего графика погрешности, погрешность возрастает к предпоследней точке.

Chart, surface chart

Description automatically generated

Рисунок 16

**Вывод**: мы видим, что погрешность возрастает по истечению времени. Так же видно, что погрешность достаточно большая, так как аргумент синуса достаточно высок.

## ***Тестовый пример 2***

Разностаня схема:

### ***Таблица***

======================================================================[ Analytical Solution]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| -0.1649528| 0.4769296| -0.5848312| 0.4424871| -0.1108055| -0.268289| 0.5325844| -0.5689902| 0.3619286| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| -0.2677238| 0.7740724| -0.9492001| 0.718171| -0.179841| -0.4354419| 0.8644019| -0.9234897| 0.5874219| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| -0.2681345| 0.7752597| -0.9506561| 0.7192727| -0.1801169| -0.4361098| 0.8657278| -0.9249062| 0.588323| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| 0.0| -0.1660278| 0.4800377| -0.5886424| 0.4453707| -0.1115276| -0.2700374| 0.5360552| -0.5726982| 0.3642872| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| 0.0| -0.0004428| 0.0012802| -0.0015698| 0.0011877| -0.0002974| -0.0007201| 0.0014296| -0.0015273| 0.0009715| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| -0.0| 0.1653115| -0.4779668| 0.586103| -0.4434494| 0.1110465| 0.2688725| -0.5337426| 0.5702276| -0.3627157| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| -0.0| 0.2678614| -0.7744701| 0.9496878| -0.71854| 0.1799334| 0.4356656| -0.864846| 0.9239641| -0.5877237| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| -0.0| 0.2679983| -0.7748659| 0.9501731| -0.7189072| 0.1800254| 0.4358882| -0.865288| 0.9244363| -0.5880241| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| -0.0| 0.1656699| -0.4790028| 0.5873735| -0.4444106| 0.1112872| 0.2694553| -0.5348996| 0.5714636| -0.3635019| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0| 0.0| -0.0| 0.0| -0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

======================================================================[ Difference Scheme]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| -0.164793| 0.4764676| -0.5842646| 0.4420585| -0.1106982| -0.2680291| 0.5320685| -0.568439| 0.361578| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| -0.2670369| 0.7720863| -0.9467648| 0.7163284| -0.1793796| -0.4343247| 0.8621841| -0.9211203| 0.5859148| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| -0.2664896| 0.7705038| -0.9448242| 0.7148602| -0.1790119| -0.4334345| 0.8604169| -0.9192323| 0.5847139| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| 0.0| -0.1633617| 0.4723292| -0.57919| 0.4382189| -0.1097367| -0.2657012| 0.5274472| -0.5635018| 0.3584375| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| 0.0| 0.0026494| -0.0076603| 0.0093934| -0.0071071| 0.0017797| 0.0043092| -0.0085542| 0.009139| -0.0058132| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| 0.0| 0.1676407| -0.4847011| 0.594361| -0.4496974| 0.1126111| 0.2726608| -0.5412628| 0.5782618| -0.3678262| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| 0.0| 0.2681016| -0.7751647| 0.9505396| -0.7191845| 0.1800948| 0.4360563| -0.8656217| 0.9247928| -0.5882509| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| 0.0| 0.2653614| -0.767242| 0.9408245| -0.711834| 0.1782541| 0.4315996| -0.8567745| 0.9153409| -0.5822386| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| 0.0| 0.160475| -0.4639829| 0.5689553| -0.4304753| 0.1077976| 0.261006| -0.5181268| 0.5535443| -0.3521037| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| 0.0| -0.0061835| 0.0178785| -0.0219233| 0.0165873| -0.0041537| -0.0100572| 0.0199648| -0.0213295| 0.0135675| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

### ***Струна в половину пройдённого времени***

Желтым выделяем середину, и теперь вывожу ее на графике:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart  Description automatically generated  Рисунок | Chart  Description automatically generated  Рисунок |

Смотрим погрешность:

Chart

Description automatically generated

Рисунок 19

Если в таблице сравнить две желтые строчки (это и есть наш график), то получается так же, как на графике погрешности.

### ***10 позиций струны в разные промежутки времени***

Попробуем вывести больше позиций струны в разные промежутки времени. Берём шаг 0.01, выводим два графика:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart, histogram  Description automatically generated  Рисунок | Chart, line chart, histogram  Description automatically generated  Рисунок |

Выводим график погрешности для всех позиций струны:

Chart, bar chart, histogram

Description automatically generated

Рисунок 22

Как видно из графика погрешность начинает расти к предпоследней точке.

### ***Полный график струны за все время***

Пробуем вывести 3D график струны во всех промежутки времени:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart, surface chart  Description automatically generated  Рисунок | Chart, surface chart  Description automatically generated  Рисунок |

Как видно из общего графика погрешности, погрешность возрастает к предпоследней точке.

A picture containing stationary

Description automatically generated

Рисунок 25

**Вывод**: мы видим, что погрешность возрастает по истечению времени. Так же видно, что погрешность достаточно большая, так как аргумент синуса достаточно высок.

## ***Тестовый пример 3***

Разностаня схема:

======================================================================[ Analytical Solution]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| 0.0| -0.0| -0.0| 0.0| 0.0| -0.0| 0.0| 0.0| -0.0| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| 0.0618719| -0.0286429| -0.0431356| 0.0568595| 0.0059418| -0.0607462| 0.0337945| 0.03864| -0.0590703| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| 0.1238106| -0.0573167| -0.0863177| 0.1137802| 0.01189| -0.1215578| 0.0676254| 0.0773216| -0.1182043| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| 0.1852601| -0.0857641| -0.1291588| 0.1702514| 0.0177912| -0.1818893| 0.1011891| 0.1156978| -0.1768713| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| 0.0| 0.2459778| -0.1138726| -0.1714896| 0.2260501| 0.0236221| -0.2415022| 0.1343531| 0.153617| -0.2348395| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| 0.0| 0.3057237| -0.1415313| -0.213143| 0.2809558| 0.0293597| -0.300161| 0.1669864| 0.1909292| -0.2918801| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| 0.0| 0.3642619| -0.1686309| -0.2539544| 0.3347515| 0.0349814| -0.3576341| 0.19896| 0.2274872| -0.3477675| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| 0.0| 0.421361| -0.1950643| -0.2937625| 0.3872249| 0.0404648| -0.4136943| 0.2301475| 0.2631466| -0.4022811| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| 0.0| 0.4767956| -0.2207271| -0.3324101| 0.4381684| 0.0457884| -0.4681203| 0.2604259| 0.2977663| -0.4552056| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| 0.0| 0.5303466| -0.2455179| -0.3697445| 0.4873811| 0.0509311| -0.5206969| 0.2896755| 0.3312097| -0.5063317| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| 0.0| 0.5818024| -0.2693388| -0.4056183| 0.5346683| 0.0558725| -0.5712165| 0.3177807| 0.3633447| -0.5554575| -0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

======================================================================[ Difference Scheme]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| 0.0618404| -0.0286283| -0.0431136| 0.0568304| 0.0059387| -0.0607152| 0.0337772| 0.0386203| -0.0590401| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| 0.1237434| -0.0572856| -0.0862709| 0.1137185| 0.0118835| -0.1214919| 0.0675887| 0.0772797| -0.1181401| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| 0.1851497| -0.0857129| -0.1290818| 0.17015| 0.0177806| -0.1817809| 0.1011288| 0.1156289| -0.1767659| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| 0.0| 0.2458127| -0.1137962| -0.1713745| 0.2258984| 0.0236063| -0.2413401| 0.134263| 0.1535139| -0.2346819| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| 0.0| 0.3054889| -0.1414226| -0.2129793| 0.28074| 0.0293372| -0.2999305| 0.1668582| 0.1907826| -0.2916559| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| 0.0| 0.3639387| -0.1684813| -0.2537291| 0.3344546| 0.0349503| -0.3573168| 0.1987835| 0.2272854| -0.347459| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| 0.0| 0.4209275| -0.1948636| -0.2934602| 0.3868265| 0.0404232| -0.4132687| 0.2299107| 0.2628758| -0.4018673| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| 0.0| 0.4762265| -0.2204636| -0.3320133| 0.4376454| 0.0457337| -0.4675615| 0.2601151| 0.2974109| -0.4546622| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| 0.0| 0.5296136| -0.2451786| -0.3692335| 0.4867075| 0.0508607| -0.5199773| 0.2892751| 0.330752| -0.5056319| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| 0.0| 0.5808746| -0.2689093| -0.4049714| 0.5338156| 0.0557834| -0.5703056| 0.3172739| 0.3627653| -0.5545717| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

### ***Струна в половину пройдённого времени***

Желтым выделяем середину, и теперь вывожу ее на графике:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart, line chart  Description automatically generated  Рисунок | Chart, line chart  Description automatically generated  Рисунок |

Смотрим погрешность:

Diagram

Description automatically generated

Рисунок 28

Если в таблице сравнить две желтые строчки (это и есть наш график), то получается так же, как на графике погрешности.

### ***10 позиций струны в разные промежутки времени***

Попробуем вывести больше позиций струны в разные промежутки времени. Берём шаг 0.01, выводим два графика:

|  |  |
| --- | --- |
| A picture containing histogram  Description automatically generated  Рисунок | A picture containing histogram  Description automatically generated  Рисунок |

Выводим график погрешности для всех позиций струны:

**Chart, diagram, histogram

Description automatically generated**

Рисунок 31

Как видно из графика погрешность начинает расти к предпоследней точке.

### ***Полный график струны за все время***

Пробуем вывести 3D график струны во всех промежутки времени:

|  |  |
| --- | --- |
| Chart, surface chart  Description automatically generated  Рисунок | Chart, surface chart  Description automatically generated  Рисунок |

Как видно из общего графика погрешности, погрешность возрастает к предпоследней точке.

**Chart, surface chart

Description automatically generated**

Рисунок 34

**Вывод**: мы видим, что погрешность возрастает по истечению времени. Однако, так как тут аргумент синуса намного меньше, погрешность так же много меньше.

# **Моделирование колебаний в зависимости от начального сосредоточенного импульса**

Возьмем такие данные и выведем таблицу.

–максимальная длина отрезка по OX

– максимальное время

– количество разбьений по OX

– количество разбиений по OT

– шаг по OX

– шаг по OT

– максимальное количество струн на графике и столбцов/строк в таблице соответсвено.

## ***Тестовый пример 4***

Разностная схема:

*======================================================================[ Difference Scheme]======================================================================*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0| 0.0| 0.0| 0.6| 0.6| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.01| 0.0| 4e-07| 0.5999794| 0.5999996| 2.06e-05| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.02| 0.0| 0.0010187| 0.5894462| 0.5989813| 0.0105538| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.03| 0.0| 0.0456221| 0.4307279| 0.5543779| 0.1692721| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.04| 0.0| 0.2796474| 0.2040286| 0.3203526| 0.3959714| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.05| 0.0| 0.3676488| 0.3626177| 0.2323502| 0.2373822| 1e-06| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.06| 0.0| 0.2328813| 0.2555463| 0.3670354| 0.3444434| 8.33e-05| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.07| 0.0| 0.359445| 0.3348846| 0.2381723| 0.264673| 0.0023827| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.08| 0.0| 0.2474299| 0.2611853| 0.3246844| 0.3311557| 0.0278857| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.09| 0.0| 0.3475501| 0.2694358| 0.1062432| 0.270305| 0.1462066| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

*| 0.1| 0.0| 0.2559339| 0.0458143| -0.0023017| 0.3297034| 0.3463619| 9e-07| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|*

*+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+*

Выведем график струны в половину времени и 10 ее состояний в разные промежутки времени с шагом 0.1

|  |  |
| --- | --- |
| ***Chart, line chart  Description automatically generated***  Рисунок | ***Chart, histogram  Description automatically generated***  Рисунок |

Выведем весь график струны за все время:

***Chart, surface chart

Description automatically generated***

Рисунок 37

## ***Тестовый пример 5***

Разностная схема:

======================================================================[ Difference Scheme]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.06| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0077353| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| -0.0019889| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 7e-07| 0.0005723| 9.6e-06| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 8.72e-05| -1.35e-05| 0.0005894| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0020701| -0.0002515| 0.0074502| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0138498| 0.0003851| 0.0248891| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.02588| -0.0004493| 0.0122985| 1e-07| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| 0.0| 0.0| 0.0| 8e-07| -0.0017918| 0.0004726| -0.015754| 5.6e-06| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| 0.0| 0.0| 0.0| 2.52e-05| -0.0104192| -0.0004698| 0.0097067| 0.0001242| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0003795| 0.0117718| 0.0004497| -0.0041163| 0.0013497| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

Выведем график струны в половину времени и 10 ее состояний в разные промежутки времени с шагом 0.1

|  |  |
| --- | --- |
| ***Chart, box and whisker chart  Description automatically generated***  Рисунок | ***Chart, histogram  Description automatically generated***  Рисунок |

Выведем весь график струны за все время:

***Chart, surface chart

Description automatically generated***

Рисунок 40

## ***Тестовый пример 6***

Разностная схема:

======================================================================[ Difference Scheme]======================================================================

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| t| u(0, t)| u(0.3, t)| u(0.6, t)| u(0.9, t)| u(1.2, t)| u(1.5, t)| u(1.8, t)| u(2.1, t)| u(2.4, t)| u(2.7, t)| u(3.0, t)|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.01| 0.0| 0.0| 0.0| 6.24e-05| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.02| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0059511| 9.5e-05| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.03| 0.0| 0.0| 0.0| 0.019108| 0.0037553| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.04| 0.0| 0.0| 0.0| -0.0110571| 0.0165264| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.05| 0.0| 0.0| 1e-06| 0.0063818| 0.0004735| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.06| 0.0| 0.0| 4.86e-05| -0.0042787| -0.0072705| 9e-07| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.07| 0.0| 0.0| 0.0008316| 0.0034968| 0.0091169| 3.73e-05| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.08| 0.0| 0.0| 0.0054434| -0.0033943| -0.0092705| 0.0005908| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.09| 0.0| 0.0| 0.0128705| 0.003647| 0.0089278| 0.004024| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

| 0.1| 0.0| 5e-07| 0.004038| -0.0040783| -0.0084837| 0.0113128| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0| 0.0|

+-------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+-------------+

Выведем график струны в половину времени и 10 ее состояний в разные промежутки времени с шагом 0.1

|  |  |
| --- | --- |
| **Chart  Description automatically generated**  Рисунок | **Chart, line chart  Description automatically generated**  Рисунок |

Выведем весь график струны за все время:

**Chart, surface chart

Description automatically generated**

Рисунок 43

**Вывод:** из этих трех графиков (особенно хорошо видно в 3D) что по струне как бы ударяют, и мы видим, как этот удар распространяется дальше. Если взять время больше, чем 0.1 ты будет видно, как удар распространиться до концов струны и отразиться от них.

**Заключение:** в курсовой работе мы построили разностную схему для первой краевой задачи для уравнения колебаний. Мы построили два примера и придумали еще один чтобы посмотреть, как упадет погрешность. После отладки программы с помощью точного решения мы смоделировали колебания в зависимости начального сосредоточенного импульса.

# **Код программы**

import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
from matplotlib import cm  
  
# ==========================[Global Variables]=============================  
  
l = 3  
T = 0.1  
N1 = 100  
N2 = 2000  
h = l / N1  
th = T / N2  
quantity = 10  
  
func1 = not True  
func2 = not True  
func3 = not True  
func4 = not True  
func5 = not True  
func6 = True  
  
if func3:  
 a = 1  
else:  
 a = 5  
  
if func4:  
 eps = 0.1 \* l  
 xi = l / 4  
  
if func5:  
 eps = 0.01 \* l  
 xi = l / 2  
  
if func6:  
 eps = 0.01 \* l  
 xi = l / 3  
  
# ==========================[Global Functions]=============================  
  
analytic = True  
if func4 or func5 or func6:  
 analytic = False  
  
  
def analytical(x, t):  
 if func1:  
 return np.sin(3 \* np.pi \* x) \* 5 \* np.cos(15 \* np.pi \* t)  
 if func2:  
 return np.sin(4 \* np.pi \* x) \* np.sin(20 \* np.pi \* t)  
 if func3:  
 return np.sin(2 \* np.pi \* x) \* np.sin(2 \* np.pi \* t)  
 if func4:  
 return 0  
 if func5:  
 return 0  
 if func6:  
 return 0  
 return -1  
  
  
def f(x, t):  
 if func1:  
 return 0  
 if func2:  
 return 0  
 if func3:  
 return 0  
 if func4:  
 return 0  
 if func5:  
 return 0  
 if func6:  
 return 0  
 return -1  
  
  
# u(0,t) = μ[1](t)  
def left(x):  
 if func1:  
 return 0  
 if func2:  
 return 0  
 if func3:  
 return 0  
 if func4:  
 return 0  
 if func5:  
 return 0  
 if func6:  
 return 0  
 return -1  
  
  
# u(l,t) = μ[2](t)  
def right(x):  
 if func1:  
 return 0  
 if func2:  
 return 0  
 if func3:  
 return 0  
 if func4:  
 return 0  
 if func5:  
 return 0  
 if func6:  
 return 0  
 return -1  
  
  
# u(x,0) = ψ(x)  
def bottom(x):  
 if func1:  
 return 5 \* np.sin(3 \* np.pi \* x)  
 if func2:  
 return 0  
 if func3:  
 return 0  
 if func4:  
 if (xi - eps) <= x <= (xi + eps):  
 return 2 \* eps  
 else:  
 return 0  
 if func5:  
 if (xi - eps) <= x <= (xi + eps):  
 return 2 \* eps  
 else:  
 return 0  
 if func6:  
 if (xi - eps) <= x <= (xi + eps):  
 return 2 \* eps  
 else:  
 return 0  
 return -1  
  
  
# u[t](x,0) = φ(x)  
def derivative(x):  
 if func1:  
 return 0  
 if func2:  
 return 20 \* np.pi \* np.sin(4 \* np.pi \* x)  
 if func3:  
 return 2 \* np.pi \* np.sin(2 \* np.pi \* x)  
 if func4:  
 return 0  
 if func5:  
 return 0  
 if func6:  
 return 0  
 return -1  
  
  
# ===========================[Main Functions]==============================  
  
def diff\_scheme():  
 global a  
 global l  
 global T  
 global h  
 global th  
 global N1  
 global N2  
  
 x = np.linspace(0, l, N1)  
 t = np.linspace(0, T, N2)  
  
 U = np.zeros((N2, N1))  
  
 # filling bottom border  
 for i in range(0, N1):  
 U[0][i] = bottom(x[i])  
  
 # filling left and right borders  
 for j in range(0, N2):  
 U[j][0] = left(t[j])  
 U[j][N1 - 1] = right(t[j])  
  
 # filling 1 row (the one with the derivative)  
 for i in range(1, N1 - 1):  
 U[1][i] = th \* derivative(x[i]) + ((th \*\* 2) / 2) \* (  
 (a \*\* 2) \* (U[0][i + 1] - 2 \* U[0][i] + U[0][i - 1]) / (h \*\* 2) + f(x[i], t[i])) + U[0][i]  
  
 # the rest of the matrix  
 for j in range(1, N2 - 1):  
 for i in range(1, N1 - 1):  
 U[j + 1][i] = (th \*\* 2) \* f(x[i], t[j]) + (  
 ((a \*\* 2) \* (th \*\* 2) / (h \*\* 2)) \* (U[j][i + 1] - 2 \* U[j][i] + U[j][i - 1])) + 2 \* U[j][i] - \  
 U[j - 1][i]  
  
 return x, U  
  
  
def printTable(data, name):  
 \_h = l / quantity  
 \_th = T / quantity  
 tbl\_step\_h = int(N1 / quantity)  
 tbl\_step\_th = int(N2 / quantity)  
  
 margin = 13  
 line = '+-------+'  
 line += (('-' \* margin) + '+') \* (quantity + 1)  
 divider\_no = 9 + (margin + 1) \* (quantity + 1) - 22  
 divider\_no = int(divider\_no / 2)  
 \_name = '[{:>' + str(20) + '}]'  
 divider = '=' \* divider\_no  
 divider = divider + \_name + divider  
  
 step\_t = 0  
 step\_x = 0  
  
 # Creating a header  
 head = []  
 head\_val = []  
 head\_string = '|{:>7}|'.format('t')  
  
 for i in range(quantity + 1):  
 head.append('u({}, t)'.format(round(step\_x, 1)))  
 step\_x += \_h  
  
 for i in range(quantity + 1):  
 head\_val.append('{:>' + str(margin) + '}|')  
  
 for i in range(quantity + 1):  
 head\_val[i] = head\_val[i].format(head[i])  
  
 for i in range(quantity + 1):  
 head\_string += head\_val[i]  
  
 # drawing the header  
  
 print(divider.format(name))  
 print(line)  
 print(head\_string)  
 print(line)  
  
 # filling left column and table  
 \_i = 0  
 for i in range(quantity + 1):  
  
 val = ['|{:>7}|'.format(round(step\_t, 2))]  
 val\_string = ''  
 for j in range(quantity + 1):  
 val.append('{:>' + str(margin) + '}|')  
  
 \_j = 0  
 for j in range(1, quantity + 2):  
 val[j] = val[j].format(round(data[\_i][\_j], 7))  
 if \_j == 0:  
 \_j += tbl\_step\_h - 1  
 else:  
 \_j += tbl\_step\_h  
  
 for j in range(quantity + 2):  
 val\_string += val[j]  
  
 print(val\_string)  
 print(line)  
 step\_t += \_th  
  
 if \_i == 0:  
 \_i += tbl\_step\_th - 1  
 else:  
 \_i += tbl\_step\_th  
  
  
# =============================[diff\_scheme]===============================  
#  
x, arr = diff\_scheme()  
  
moment = int(N2 / 2)  
second\_h = T / quantity  
second\_m = T / 2  
  
plt.plot(x, arr[moment], color='black')  
plt.legend()  
plt.grid('True')  
plt.title('Difference Scheme\nTime = {}'.format(second\_m))  
plt.savefig("pic\_1.png", dpi=500)  
plt.show()  
  
# # ================================[String]=================================  
second\_step = int(N2 / quantity)  
print(second\_step)  
count = 0  
last = 0  
for i in range(0, N2, second\_step):  
 plt.plot(x, arr[i], label="{}".format(count))  
 count += 1  
 last += second\_h  
  
plt.legend()  
plt.grid('True')  
plt.title('Difference Scheme\nTime: from 0 to {}; Step: {}'.format(round(last, 1), second\_h))  
plt.savefig("pic\_2.png", dpi=500)  
plt.show()  
  
# =============================[Analytical]================================  
if analytic:  
 x\_axis = np.linspace(0, l, N1)  
 t\_axis = np.linspace(0, T, N2)  
 x, t = np.meshgrid(x\_axis, t\_axis)  
  
 precise = analytical(x, t)  
  
 plt.plot(x[moment], precise[moment], color='black')  
 plt.legend()  
 plt.grid('True')  
 plt.title('Analytical Solution\nTime = {}'.format(second\_m))  
 plt.savefig("pic\_3.png", dpi=500)  
 plt.show()  
  
# ==========================[Analytical Strings]===========================  
if analytic:  
 count = 0  
 last = 0  
 for i in range(0, N2, second\_step):  
 plt.plot(x[0], precise[i], label="{}".format(count))  
 count += 1  
 last += second\_h  
  
 plt.legend()  
 plt.grid('True')  
 plt.title('Analytical Solution\nTime: from 0 to {}; Step: {}'.format(round(last, 1), second\_h))  
 plt.savefig("pic\_4.png", dpi=500)  
 plt.show()  
  
# ================================[Error1]=================================  
if analytic:  
 err = np.zeros(N2)  
  
 plt.plot(x[moment], abs(arr - precise)[moment], color='black')  
 plt.legend()  
 plt.grid('True')  
 plt.title('Error\nTime = {}'.format(second\_m))  
 plt.savefig("pic\_5.png", dpi=500)  
 plt.show()  
  
# ================================[Error2]=================================  
if analytic:  
 count = 0  
 last = 0  
 for i in range(0, N2, second\_step):  
 plt.plot(x[0], abs(arr - precise)[i], label="{}".format(count))  
 count += 1  
 last += second\_h  
  
 plt.legend()  
 plt.grid('True')  
 plt.title('Error\nTime: from 0 to {}; Step: {}'.format(round(last, 1), second\_h))  
 plt.savefig("pic\_6.png", dpi=500)  
 plt.show()  
  
# ================================[Error3]=================================  
if analytic:  
 fig = plt.figure(figsize=(10, 10))  
 ax = fig.add\_subplot(1, 1, 1, projection='3d')  
  
 x\_axis = np.linspace(0, l, N1)  
 y\_axis = np.linspace(0, T, N2)  
 x, y = np.meshgrid(x\_axis, y\_axis)  
 ax.plot\_surface(x, y, abs(arr - precise), rstride=1, cstride=1, cmap=cm.plasma)  
 plt.xlabel('x')  
 plt.ylabel('t')  
 plt.title('Error')  
 plt.savefig("pic\_7.png", dpi=500)  
 plt.show()  
  
fig = plt.figure(figsize=(10, 10))  
ax = fig.add\_subplot(1, 1, 1, projection='3d')  
  
x\_axis = np.linspace(0, l, N1)  
y\_axis = np.linspace(0, T, N2)  
x, y = np.meshgrid(x\_axis, y\_axis)  
ax.plot\_surface(x, y, arr, rstride=1, cstride=1, cmap=cm.plasma)  
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('t')  
plt.title('Difference Scheme')  
plt.savefig("pic\_8.png", dpi=500)  
plt.show()  
  
if analytic:  
 fig = plt.figure(figsize=(10, 10))  
 ax = fig.add\_subplot(1, 1, 1, projection='3d')  
  
 x\_axis = np.linspace(0, l, N1)  
 y\_axis = np.linspace(0, T, N2)  
 x, y = np.meshgrid(x\_axis, y\_axis)  
 ax.plot\_surface(x, y, precise, rstride=1, cstride=1, cmap=cm.plasma)  
 plt.xlabel('x')  
 plt.ylabel('t')  
 plt.title('Analytical Solution')  
 plt.savefig("pic\_9.png", dpi=500)  
 plt.show()  
# ================================[Tables]==================================  
if analytic:  
 printTable(precise, 'Analytical Solution')  
  
printTable(arr, 'Difference Scheme')

# **Литература**

# 

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. “Вычислительные методы для инженеров”. М.: Высшая школа, 1994.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. “Численные методы”. М.: Наука, 1989.