

# 压电周期性结构滤波特性的计算模型研究

沈煜年, 胡擎, 尹晓春

(南京理工大学 理学院力学与工程科学系, 南京 210094)

5 **摘要:** 该文基于多种离散模型数值分析了含有压电材料的一维主动式周期性结构的滤波特性。采用弹簧单元或弹性杆单元离散结构的变形场, 并使用一致质量法或集中质量法离散系统的惯性分布, 建立弹簧-质量模型或子结构模型。基于不同的模型, 综合运用传递矩阵法和静力变换超单元法 (Guyan 缩减技术) 计算了周期性结构的通带和阻带。通过比较不同模型  
10 型的计算结果, 发现当无量纲频率处于低频 (0-1.5) 范围时, 子结构模型的通带宽度比弹簧-质点模型的通带宽度略窄; 但当频率继续增加后, 弹簧-质点模型解中的高频波全部过滤, 而子结构模型由于更加逼近结构的惯性是连续分布的事实, 其计算结果则存在宽度极小的数个通带。

**关键词:** 周期性结构; 滤波; 压电材料; Guyan 缩减; 子结构

15 **中图分类号:** O326; O327

## Research on computational model for filtering characteristics of piezoelectric periodic structure

SHEN Yunian, HU Qing, YIN Xiaochun

20 (Department of Mechanics and Engineering Science, School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** In this paper, various discretization models such as spring-mass model and substructure model were established to numerically analyze the filter characteristics of one-dimensional active periodic structure with piezoelectric material. The spring element and rod element are used to discretize deformation field of the structure, respectively. The lumped mass and consistent mass method are adopted to discretize the inertial distribution of the system, respectively. Based on the present models, the transfer matrix method incorporating with Guyan reduction technique are used to calculate the pass bands and stop bands. Through comparing the computational results between different modes, it can be found that when the dimensionless frequency is lower (0-1.5), the bandwidth of pass bands calculated by substructure model is narrower than those calculated by spring-mass model. When the dimensionless frequency is greater than 1.5, all high frequency waves are filtered during spring-mass model solution. However, due to the substructure model is closer to the actual structure, the substructure model solution exists various pass bands even though their bandwidths are all very short.

35 **Key words:** periodic structure; filter; piezoelectric material; Guyan's reduction; substructure

## 0 引言

振动是自然界常见的一种现象, 其在工程技术领域也无处不在。一方面人们可利用振动去改进生产工艺, 例如振动沉桩、振动研磨、振动抛光、振动传输和振动筛选等; 但在更多  
40 情况下, 振动会直接影响仪器设备的功能, 降低工作精度和效率, 加剧构件的磨损, 甚至引起结构的疲劳破坏。因此, 通常需要将振动控制在一定的范围内<sup>[1]</sup>。

由相同的单元, 以相同的方式链接而成的周期性结构 (又称声子晶体) 因其周期性而表现出独特的动力学特性被广泛应用于振动的控制<sup>[2]</sup>。已有的研究发现, 只有处于特定频带的

**基金项目:** 高等学校博士学科点专项科研基金新教师类资助课题 (20123219120042); 高等学校博士学科点专项科研基金博导类资助课题 (20123219110036); 国家自然科学基金 (11302107)

**作者简介:** 沈煜年 (1982-), 男, 副教授, 主要研究方向: 智能结构动力学和摩擦碰撞动力学. E-mail: shenyunian@aliyun.com

机械波能在周期性结构内传播,该频带被称为通带;反之处于其他频带内的波则不能在周期性结构传播,该频带被称为阻带<sup>[3]</sup>。由于处于阻带内的波无法通过周期性结构,因而周期性结构可用作波的过滤器<sup>[4]</sup>。被动周期性结构的波谱宽度和这些频段的位置是固定的,而主动式周期性结构的波谱宽度和这些频段的位置会根据结构的振动情况进行实时调整。因此,采用压电周期性结构是对振动进行主动控制称为目前一个重要的研究方向<sup>[1,5]</sup>。除了具有独特的滤波特性之外,压电周期性结构通过适当调整个别子结构,破坏结构的理想周期性,进而可大大降低波在通带内的传送能力,出现众所周知的局部化现象(即一个外部扰动只对扰动产生的附近造成影响)。较之传统平面波展开法<sup>[1]</sup>,为了更加高效地预估和计算结构的通带、阻带以及局部化现象,人们通常将原本连续的结构简化为具有少量自由度的集中参数系统,建立压电弹簧-质量模型<sup>[3,6-7]</sup>。但此模型将原本连续的变形场和质量分布离散化,会带来一定的误差,相关的收敛性问题目前尚缺乏深入研究。

本文中采用有限单元法离散周期性结构的变形场,并分别使用一致质量法和集中质量法离散的惯性分布,综合运用传递矩阵法、静力变换超单元法(Guyan 缩减技术),推导了系统的有限元控制方程。计算了含有压电材料的一维主动式周期性结构的滤波特性,对计算结果的收敛性进行了研究,并重点讨论了子结构模型和弹簧-质量模型计算通带和阻带的精度。

## 1 压电周期性杆结构的动力学建模

图 1 为一个典型的压电主动周期性杆,由多个相同的材料周期连接而成。每个材料周期又由一段非智能材料和一段压电材料粘结组成。每个材料周期中的非智能结构长度为  $L_s$ , 密度为  $\rho_s$ , 弹性模量为  $E_s$  和横截面积为  $A_s$ 。每个材料周期中的压电结构的长度为  $L_p$ , 密度为  $\rho_p$ , 弹性模量为  $E_p$  和横截面积为  $A_p$ 。忽略结构的横向惯性效应和横向变形效应,故文中假定各种材料的泊松比均为零。通过控制压电结构的施加电压达到改变整个周期性结构的滤波特性。

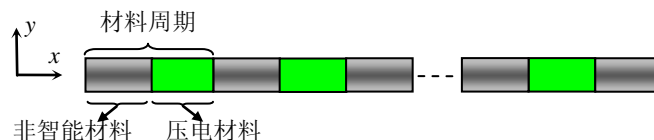


图 1 压电主动周期性结构示意图

Fig. 1 Schematic drawing of active piezoelectirc periodic structure

图 2 为主动式压电周期结构的子结构离散模型。首先,将每个材料周期划分为非智能材料和压电材料。然后,采用有限单元法将每个非智能材料结构离散为  $n_s$  个普通杆单元,而每个压电材料结构离散为  $n_p$  个压电杆单元。在计算分析时,单元的质量阵可分别离散为集中质量阵和一致质量阵。

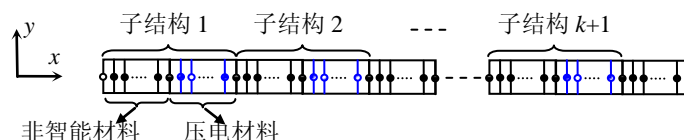


图 2 压电主动周期性结构的子结构离散模型

Fig. 2 substructure discretization model of active piezoelectirc periodic structure

### 1.1 非智能材料的动力学方程

根据有限元理论,非智能材料的动力学方程可表示为:

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{x}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{x}^{(s)} = \mathbf{F}^{(s)} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{M}^{(s)}$ ,  $\mathbf{K}^{(s)}$  和  $\mathbf{F}^{(s)}$  分别为非智能材料的质量阵、刚度阵和外力阵。 $\mathbf{x}^{(s)}$  和  $\ddot{\mathbf{x}}^{(s)}$  分别为节点位移列阵和加速度列阵。

$$\mathbf{M}^{(s)} = \begin{bmatrix} m_s/n_s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2m_s/n_s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2m_s/n_s & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_s/n_s \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} 2m_s/3n_s & m_s/3n_s & \cdots & 0 & 0 \\ m_s/3n_s & 4m_s/3n_s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 4m_s/3n_s & m_s/3n_s \\ 0 & 0 & \cdots & m_s/3n_s & 2m_s/3n_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(s)} = \begin{bmatrix} n_s k_s & -n_s k_s & \cdots & 0 & 0 \\ -n_s k_s & 2n_s k_s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2n_s k_s & -n_s k_s \\ 0 & 0 & \cdots & -n_s k_s & n_s k_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{(s)} = \begin{bmatrix} F_L \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{Is} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(s)} = \begin{bmatrix} x_L \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n_s-1} \\ x_1 \end{bmatrix}$$

其中,  $m_s$  和  $k_s$  表示非智能材料质量的一半  $A_s \rho_s L_s / 2$  和刚度  $A_s E_s / L_s$ 。节点位移列阵和外力阵下标  $L$  和  $Is$  表示非智能材料左右两侧接口。

对于一个频率为  $\omega$  的定频正弦运动, 即:

$$\ddot{\mathbf{x}}^{(s)} = -\omega^2 \mathbf{x}^{(s)} \quad (2)$$

将上式带入公式(1), 可得到:

$$(\mathbf{K}^{(s)} - \omega^2 \mathbf{M}^{(s)}) \mathbf{x}^{(s)} = \mathbf{F}^{(s)} \quad (3)$$

## 1.2 压电材料的动力学方程

一维压电材料的本构方程<sup>[8]</sup>为:

$$\begin{Bmatrix} E_p \\ T_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon^s & -h_p \\ -h_p & C^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_p \\ S_p \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $E_p$ 、 $D_p$ 、 $T_p$  和  $S_p$  分别为电场强度、电位移、应力和应变。同时,  $\varepsilon^s$ 、 $h_p$  和  $C^D$  分别为介电常数、压电耦合常数和弹性模量。

考虑一个压电弹杆连续体, 其宽度为  $b$ 、厚度为  $t_p$  和长度为  $L_p$ 。在压电杆连续体的两端施加的电压为  $V$ , 则式(4)可用截面内力  $F_p$ 、两端的电荷  $Q_p$  和两端的总位移差  $(x_R - x_L)$  表示为:

$$\begin{Bmatrix} V/t_p \\ F_p/bt_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon^s & -h_p \\ -h_p & C^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_p/bL_p \\ (x_R - x_L)/L_p \end{Bmatrix} \quad (5)$$

消除公式(5)电荷  $Q_p$ , 得到:

$$F_p = -h_p \varepsilon^s b V_p + [bt_p(C^D - h_p^2 \varepsilon^s)/L_p](x_R - x_L) \quad (6)$$

压电电压  $V_p$  按如下控制律生成:

$$V_p = -K_g(x_R - x_L) \quad (7)$$

其中  $K_g$  表示控制增益。将公式(7)带入公式(6), 得到:

$$F_p = \{h_p \varepsilon^s b K_g + [bt_p(C^D - h_p^2 \varepsilon^s)/L_p]\}(x_R - x_L) = (k_{pc} + k_{ps}) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_L \\ x_R \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中,  $k_{pc}$ 和 $k_{ps}$ 表示控制增益引起的主动压电刚度 $h_p \varepsilon^s b K_g$ 和结构压电刚度 $bt_p(C^D - h_p^2 \varepsilon^s)/L_p$ 。

105 为了便于接下来讨论主动控制引起的刚度变化对滤波特性的影响, 这里定义两个参量, 即结构刚度比  $r_{ks} = k_{ps} / k_s$  和可控刚度比  $r_{kc} = k_{pc} / k_s$ 。通过改变可控刚度比, 可以达到改变结构刚度的目的, 进而改变结构的波阻抗, 最终达到改变结构滤波特性的目的。由公式 (8) 可得到作用在压电杆连续体两端的力矢量  $\{F_{lp} \ F_R\}^T$

$$\begin{Bmatrix} F_{lp} \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p & -k_p \\ -k_p & k_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_l \\ x_R \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中,  $k_p = (k_{pc} + k_{ps})$  表示压电材料的总刚度。

110 一旦压电杆连续体被离散为多个有限单元, 则该压电材料的动力学方程可由一维压电有限元理论表示为:

$$\mathbf{M}^{(p)} \ddot{\mathbf{x}}^{(p)} + \mathbf{K}^{(p)} \mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{F}^{(p)} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{M}^{(p)}$ ,  $\mathbf{K}^{(p)}$  和  $\mathbf{F}^{(p)}$  分别为压电材料的质量阵、刚度阵和外力阵。 $\mathbf{x}^{(p)}$  和  $\ddot{\mathbf{x}}^{(p)}$  分别为节点位移列阵和加速度列阵。

$$115 \quad \mathbf{M}^{(p)} = \begin{bmatrix} m_p/n_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2m_p/n_p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2m_p/n_p & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_p/n_p \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} 2m_p/3n_p & m_p/3n_p & \cdots & 0 & 0 \\ m_p/3n_p & 4m_p/3n_p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 4m_p/3n_p & m_p/3n_p \\ 0 & 0 & \cdots & m_p/3n_p & 2m_p/3n_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(p)} = \begin{bmatrix} n_p k_p & -n_p k_p & \cdots & 0 & 0 \\ -n_p k_p & 2n_p k_p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2n_p k_p & -n_p k_p \\ 0 & 0 & \cdots & -n_p k_p & n_p k_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{(s)} = \begin{bmatrix} F_{lp} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(s)} = \begin{bmatrix} x_l \\ x_l \\ \vdots \\ x_{n_p-1} \\ x_R \end{bmatrix}$$

其中,  $m_s$  和  $k_p$  表示压电材料质量的一半  $A_p \rho_p L_p / 2$  和压电材料的整体刚度。节点位移列阵和外力阵下标 R 和  $I_p$  表示被压电材料左右两侧接口。

对于一个频率为  $\omega$  的定频正弦运动, 即:

$$120 \quad \ddot{\mathbf{x}}^{(p)} = -\omega^2 \mathbf{x}^{(p)} \quad (11)$$

将上式带入公式 (10), 可得到正弦运动的动力学方程:

$$[\mathbf{K}^{(p)} - \omega^2 \mathbf{M}^{(p)}] \mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{F}^{(p)} \quad (12)$$

### 1.3 单个材料周期子结构的动力学方程

125 将正弦运动非智能材料的动力学方程 (3) 和正弦运动压电材料动力学方程 (12) 拼装在一起, 可形成一个材料周期子结构的动力学方程。首先, 根据子结构技术按内部自由度和界面自由度将动力学方程写成分块形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sm} \\ \mathbf{D}_{ms} & \mathbf{D}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_m \end{Bmatrix} \quad (13)$$

其中，下角标 $s$ 表示子结构内部自由度，下角标 $m$ 表示界面自由度。然后，采用Guyan静力凝聚技术消除界面自由度，得到以子结构的等效静力平衡方程：

$$\bar{\mathbf{D}}_m \mathbf{x}_m = \bar{\mathbf{f}}_m \quad (14)$$

其中， $\bar{\mathbf{D}}_m = \mathbf{D}_{mm} - \mathbf{D}_{ms}(\mathbf{D}_{ss})^{-1}\mathbf{D}_{sm}$ ， $\bar{\mathbf{f}}_m = \mathbf{f}_m - \mathbf{D}_{ms}(\mathbf{D}_{ss})^{-1}\mathbf{f}_s$ 。由于不考虑内部节点上有载荷作用，故 $\mathbf{f}_s = 0$ 。由于子结构只有左右两个界面自由度，方程（14）中的各个矩阵可表示为

$$\bar{\mathbf{D}}_m = \begin{bmatrix} \bar{D}_{LL} & \bar{D}_{LR} \\ \bar{D}_{RL} & \bar{D}_{RR} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_m = \begin{Bmatrix} x_L \\ x_R \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}_m = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (15)$$

#### 1.4 整个周期结构的动力学特性

根据公式（14），可将周期结构中的第 $k$ 个子结构的动力学等效静力平衡方程改写为：

$$\begin{Bmatrix} x_R^{(k)} \\ F_R^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{D}_{LR}^{-1}\bar{D}_{LL} & \bar{D}_{LR}^{-1} \\ -\bar{D}_{RR}\bar{D}_{LR}^{-1}\bar{D}_{LL} + \bar{D}_{RL} & \bar{D}_{RR}\bar{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_L^{(k)} \\ F_L^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

由第 $k$ 和 $k+1$ 个子结构界面处的力和位移连续性条件，可知：

$$\begin{cases} x_R^{(k)} = x_L^{(k+1)} \\ F_R^{(k)} = F_L^{(k+1)} \end{cases} \quad (17)$$

将条件（17）带入公式（16），可得

$$\begin{Bmatrix} x_L^{(k+1)} \\ F_L^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{D}_{LR}^{-1}\bar{D}_{LL} & \bar{D}_{LR}^{-1} \\ -\bar{D}_{RR}\bar{D}_{LR}^{-1}\bar{D}_{LL} + \bar{D}_{RL} & \bar{D}_{RR}\bar{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_L^{(k)} \\ F_L^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

令 $\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{Bmatrix} x_L^{(k)} \\ F_L^{(k)} \end{Bmatrix}$ ， $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\bar{D}_{LR}^{-1}\bar{D}_{LL} & \bar{D}_{LR}^{-1} \\ -\bar{D}_{RR}\bar{D}_{LR}^{-1}\bar{D}_{LL} + \bar{D}_{RL} & \bar{D}_{RR}\bar{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix}$ ，则公式（18）进一步改写为：

$$\mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{Y}^{(k)} \quad (19)$$

其中， $\mathbf{T}$ 为第 $k$ 个子结构的传递矩阵，在本文中所有子结构的传递矩阵均相同。根据传递矩阵理论将公式（19）进一步的表示为：

$$\mathbf{Y}^{(k+1)} = \lambda \mathbf{Y}^{(k)} \quad (19)$$

其中， $\lambda$ 为传递矩阵 $\mathbf{T}$ 的特征值， $\lambda$ 也可定义为两个相邻子结构状态向量的比值。因此， $|\lambda|=1$ 定义了一个通带，反之 $|\lambda| \neq 1$ 则定义了一个阻带。通常情况下 $\lambda$ 可改写为：

$$\lambda = e^{\mu} = e^{\alpha+i\beta} \quad (20)$$

其中 $\mu$ 为传播系数， $\alpha$ 和 $\beta$ 分别表示相邻两个子结构间的状态向量的指数衰减量和相位差。

因此， $\alpha=0$ 意味着子结构间状态的传递是通带；反之，则意味着子结构间状态的传递是阻带。 $\alpha$ 和 $\beta$ 以及其他相关物理量的基本特征可通过分析传递矩阵 $\mathbf{T}$ 的基本特征获得。根据传递矩阵法的基本理论可知，传递矩阵 $\mathbf{T}$ 的特征值必须满足以下方程：

$$\lambda^2 - \text{tr}[\mathbf{T}]\lambda + 1 = 0 \quad (21)$$

其中， $\text{tr}[\mathbf{T}]$ 为传递矩阵 $\mathbf{T}$ 主对角线上元素的和。解上述方程可得传递矩阵 $\mathbf{T}$ 的特征值为：

$$\lambda_{1,2} = \text{tr}[\mathbf{T}]/2 \pm \sqrt{(\text{tr}[\mathbf{T}]/2)^2 - 1} \quad (22)$$

注意到通带的必要条件是 $|\lambda_{1,2}|=1$ ，则要求 $\text{tr}[\mathbf{T}]/2 < 1$ 和 $\text{tr}[\mathbf{T}]/2 > -1$ 。对于处于通带的情况（即 $\alpha=0$ ），我们可以得到衰减参数 $\beta$ 的表达式为：

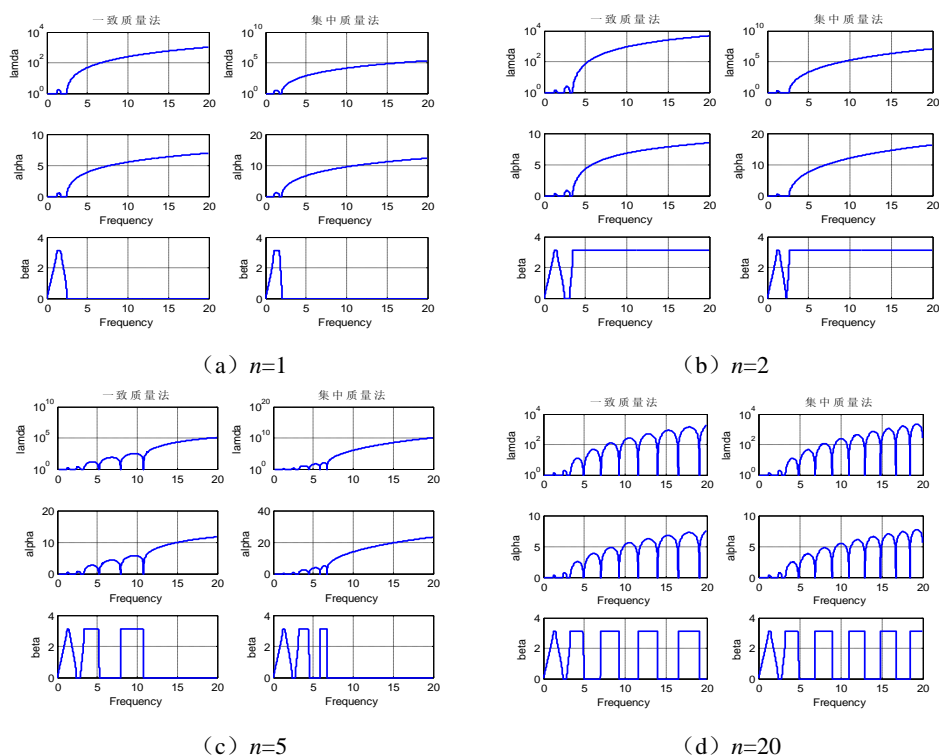
$$\beta = \cos^{-1}(\text{tr}[\mathbf{T}]/2) \quad (23)$$

## 2 主动式周期性结构的滤波特性

### 2.1 计算模型的收敛性和精度

图 3 为不同离散密度下传递矩阵  $\mathbf{T}$  的特征值  $\lambda$ 、指数衰减量  $\alpha$  和相位差  $\beta$  的子结构模型解随无量纲频率  $\Omega = \omega / \sqrt{k_s / m}$  的变化图。为方便分析, 将压电材料和普通材料的离散单元数均取为  $n_s = n_p = n$ 。研究发现, 当  $n=20$  时, 采用一致质量阵  $\lambda$  值的计算结果已经收敛, 即  $\lambda$  值不会随离散密度的继续增加而产生较大的改变; 采用集中质量阵却需要取  $n=50$  计算结果才收敛。因而, 为保证计算精度, 本文后面的计算中均取  $n=50$ 。导致一致质量矩阵计算精度相对较高的原因是由于单元质量只分布在集中质量阵的对角线上, 只考虑了单元节点自由度对振动的贡献; 而一致质量矩阵除了对角线上有质量分布外, 其它位置也有质量分布, 其不仅考虑了单元节点自由度对振动的贡献, 也考虑了单元内部对振动的贡献。

图 3 (a) 中采用集中质量阵的计算结果即为文献[3]弹簧-质点模型解。通过比较弹簧-质点模型解和子结构模型解, 我们发现当无量纲频率处于低频 (0-1.5) 范围时, 子结构模型的通带宽度比弹簧-质点模型的通带宽度略窄; 但当频率继续增加后, 两种模型的解则出现了较大差别。弹簧-质点模型解对于高频波全部过滤, 但子结构模型则存在宽度极小的数个通带, 在实际工程中这种带宽极小的高频通带对于提高隔振效果的意义很小。





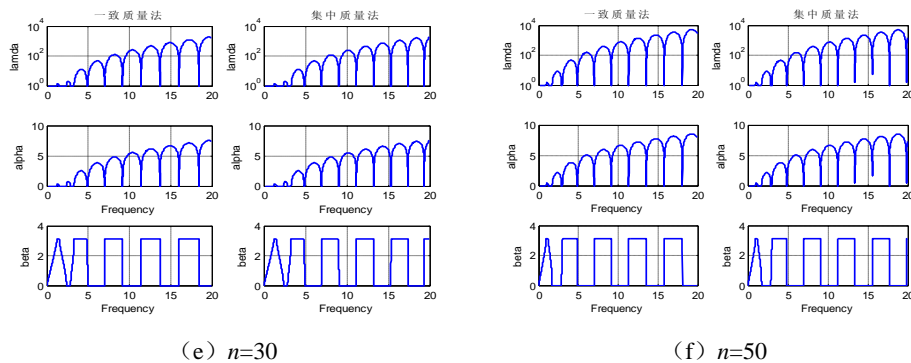


图 3 不同离散密度下传播系数的计算结果 ( $r_{ks}=1$ ,  $r_{kc}=2$ )

Fig. 3 Computaional results of "Propagation Constant" for different discretization density of structure

## 2.2 控制增益对周期性结构滤波特性的影响

图 4 为无主动控制下指数衰减量  $\alpha$  和相位差  $\beta$  随无量纲频率  $\Omega$  的变化图。从图中可以发现，在无主动控制下，该被动周期结构具有简单的滤波器特性，首个通带的截止频率  $\Omega$  为 0.954。观察还发现，周期性结构的通带主要分布在 0 到 1.8 的频率范围内，高于此范围的频率几乎全部处于阻带范围内。

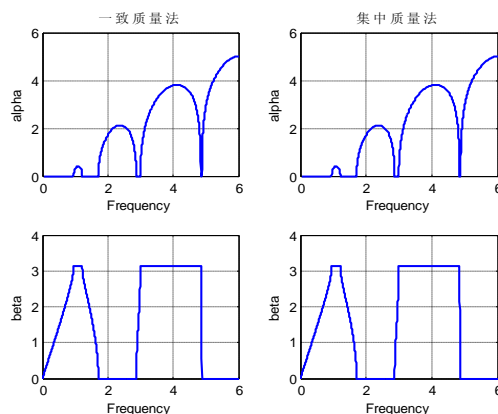
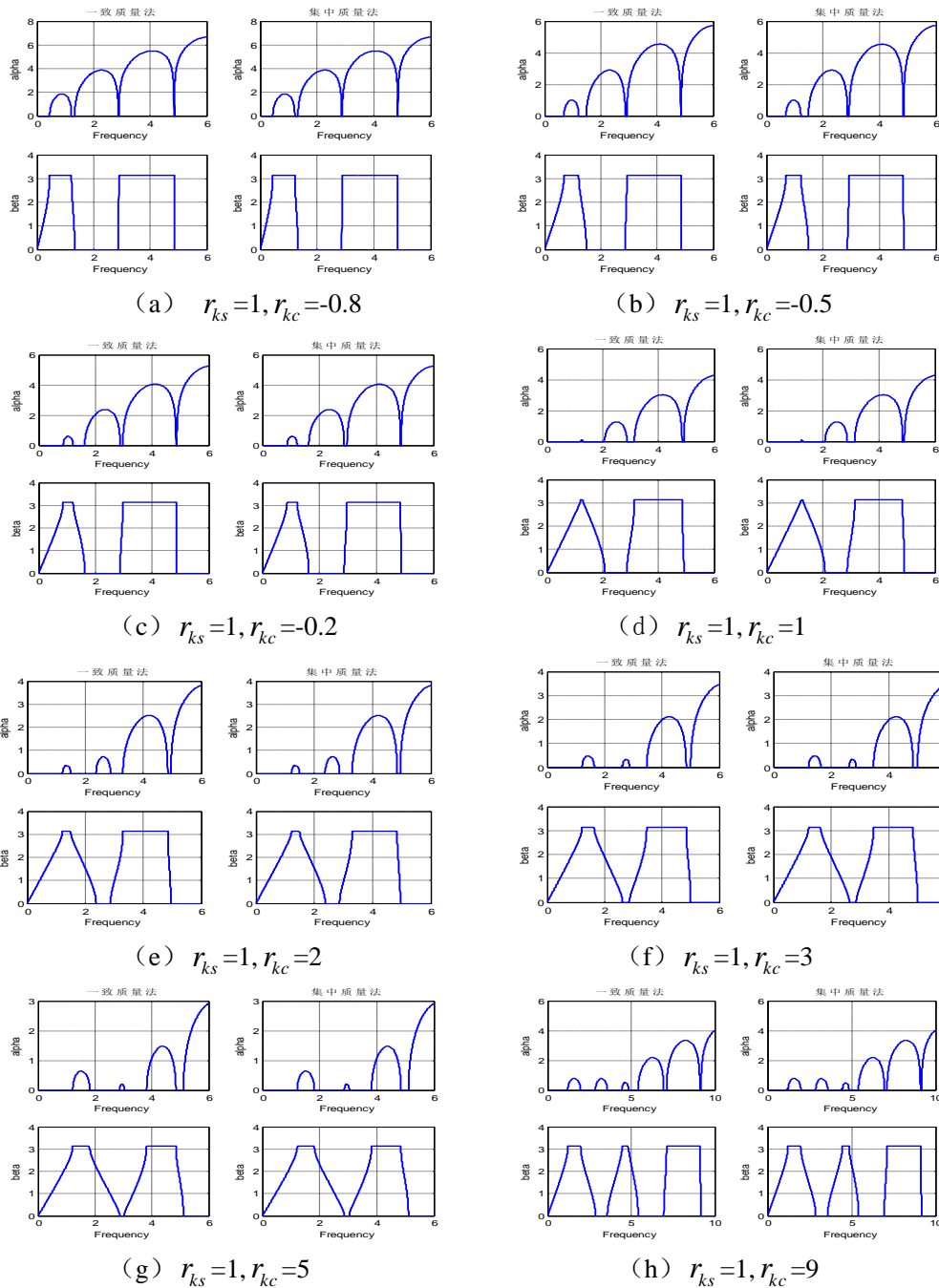


图 4 无主动控制下压电周期结构的滤波特性 ( $r_{ks}=1$ ,  $r_{kc}=0$ ,  $n=50$ )

Fig. 4 Filtering characteristics of piezoelectric periodic structure under no active control ( $r_{ks}=1$ ,  $r_{kc}=0$ ,  $n=50$ )

图 5 为主动控制下指数衰减量  $\alpha$  和相位差  $\beta$  随无量纲频率  $\Omega$  的变化图。通过改变控制增益  $K_g$ ，可改变周期性结构的刚度比  $r_{ks}$  和  $r_{kc}$ 。从图中可以发现，通过改变刚度比  $r_{kc}$  可以导致周期性结构的通带和阻带的范围发生较大的变化，这样可以获得对不同频率波的过滤能力，阻止外部激励沿结构的传播。

图 5 (a) - (c) 为  $K_g$  分别选定 -0.8、-0.5 和 -0.2 时（正比例反馈控制）对周期性结构滤波特性的影响。从图中可以发现，较小的  $K_g$  降低了首个通带的截止频率  $\Omega$ 。图 5 (a) - (c) 为当采用控制增益  $K_g$  分别选定为 1、2、3 和 5 和 9（即负比例反馈控制）对周期性结构滤波特性的影响。从图中可以发现，提高  $K_g$  不仅使低频的通带发生较大改变，对于高频波的影响更大，而且较高的  $K_g$  增加了陷波的宽度。

图 5 主动控制下压电周期结构的滤波特性 ( $n=50$ )Fig. 5 Filtering characteristics of piezoelectric periodic structure under active control ( $n=50$ )

### 3 结论

本文比较了两种用以分析压电周期性结构滤波特性的计算模型（即弹簧-质量模型和子结构模型）。研究发现当频率处于低频（0-1.5）范围时，由于更加逼近实际结构的质量在空间中是连续分布的事实，子结构模型的通带宽度比弹簧-质点模型的通带宽度略窄。但当频率继续增加后，两种模型的解则出现了较大差别。弹簧-质点模型解对于高频波将全部过滤；子结构模型则存在数个宽度极小的通带，但在实际工程中这种带宽极小的高频通带对于解决一般的隔振问题的意义较小，基本可以忽略。

### [参考文献] (References)



- [1] Li F, Wang Y. Study on localization of plane elastic waves in disordered periodic 2-2 piezoelectric composite structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 296: 554-566.
- 220 [2] 杨立峰. 一维压电Fibonacci类准周期声子晶体传输特性[J]. 物理学报, 2012, 61(10): 107702-1-107702-6.
- [3] Baz A. Active Control of Periodic Structures[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2001, 123: 472-479.
- [4] Wang Y, Li F, Kishimoto K, Wang Y, Huang W. Wave Localization in Randomly Disordered Periodic Piezoelectric Rods with Initial Stress[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2008(6): 529-530.
- [5] 尹进, 张盛, 陈飙松, 张洪武. 基于多重多级子结构声子能带与传输特性分析[J]. 力学学报, 2014, 46 (5) : 786-793.
- 225 [6] 温激鸿, 王刚, 刘耀宗, 郁殿龙. 基于集中质量法的一维声子晶体弹性波带隙计算[J]. 物理学报, 2004, 53 (10) : 3384-3388.
- [7] 付志强, 林书玉. 一维指数形变截面有限周期声子晶体的研究[J]. 物理学报, 2012, 61 (19) : 194301-1-194301-6.
- 230 [8] Agnes G. Piezoelectric Coupling of Bladed-Disk Assemblies[C]. Proc. Of Smart Structures and Materials Conference on Passive Damping, 1999, 3672: 94-103.