Гайд: Приведение ЧДУ второго порядка к каноническому виду

Что это такое и зачем нужно?

ЧДУ *частноедифференциальноеуравнение* — это уравнение с функцией от нескольких переменных и её частными производными.

Зачем приводить к каноническому виду? Потому что в каноническом виде уравнение проще решать — там остаются только самые важные производные, а лишние члены пропадают или упрощаются.

Общий вид уравнения

Рассматриваем уравнение вида:

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = G(x,y)$$

где:
- $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — вторая производная по x
- $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ — смешанная производная
- $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ — вторая производная по y
- A, B, C — коэффициенты перед старшими производными *могутбытьконстантамиилифункциямиот*$\$x, y\$$
- Младшие члены — это члены с первыми производными $\$u_x, u_y\$$ и без производных. Они не влияют на тип уравнения.

Классификация уравнений 3*типа*

Дискриминант

$$\Delta = B^2 - AC$$

По знаку дискриминанта определяем тип:

Условие	Тип	Аналогия	Пример
$\Delta > 0$	**Гиперболический**	Волна	$u_{xx} - u_{yy} = 0$ *волновоеуравнение*
$\Delta = 0$	**Параболический**	Диффузия	$u_t - u_{xx} = 0$ *уравнениетеплопроводности*
$\Delta < 0$	**Эллиптический**	Потенциал	$u_{xx} + u_{yy} = 0$ *уравнениеЛапласа*

Физический смысл:
- **Гиперболический** — описывает распространение волн *звук*, *свет*
- **Параболический** — описывает процессы распространения тепла, диффузии
- **Эллиптический** — описывает стационарные состояния *электростатика*, *мембраны*

Главная идея метода

Идея: Ввести новые переменные ξ и η так, чтобы в новых координатах уравнение стало проще.

Как это сделать? С помощью **характеристик** — специальных кривых на плоскости (x, y).

Характеристики — это линии, вдоль которых информация распространяется в уравнении.

Алгоритм решения 7*шагов*

ШАГ 1: Определить тип уравнения

Что делаем?
Вычисляем дискриминант $\Delta = B^2 - AC$ и определяем тип.

Как делать?
1. Выписываем коэффициенты перед старшими производными:
- A — коэффициент перед u_{xx}
- $2B$ — коэффициент перед u_{xy} (**ВНИМАНИЕ:** в формуле $2B$, а не B!)
- C — коэффициент перед u_{yy}

2. Вычисляем $\Delta = B^2 - AC$

3. Смотрим на знак:
   - $\Delta > 0$ → гиперболический
   - $\Delta = 0$ → параболический
   - $\Delta < 0$ → эллиптический

Пример 1 *константы*

Уравнение: $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$

Решение:
- $A = 1 \ \textit{коэффициентперед}\$u_{xx}\$$
- $2B = 0 \rightarrow B = 0 \ \textit{нет}\$u_{xy}\$$
- $C = 4 \ \textit{коэффициентперед}\$u_{yy}\$$
- $\Delta = 0^2 - 1 \cdot 4 = -4 < 0$

Ответ: Эллиптический тип ✓

Пример 2 *переменныекоэффициенты*

Уравнение: $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$, где $x > 0, y > 0$

Решение:
- $A = x^2$
- $B = 0$
- $C = y^2$
- $\Delta = 0 - x^2 \cdot y^2 = -x^2y^2 < 0 \ \textit{при}\$x, y > 0\$$

Ответ: Эллиптический тип ✓

ВАЖНО!

Если коэффициент перед u_{xy} записан как $6u_{xy}$, то $2B = 6$, откуда $B = 3$.

ШАГ 2: Составить характеристическое уравнение

Что делаем?
Составляем уравнение для нахождения характеристик.

Формула *ВЫУЧИТЬ*!**:**

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

Откуда это взялось?
Это условие того, что вдоль некоторых линий $y = y(x)$ уравнение упрощается. Математический вывод сложный, просто запоминаем формулу.

Как использовать?
1. Подставляем A, B, C из шага 1

2. Решаем квадратное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$
3. Получаем один или два корня $взависимостиоттипа$

Пример 1

Дано: $A = 1, B = 0, C = 4$

Характеристическое уравнение:

$$1 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 0 + 4 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -4$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2i$$

Получили: Два комплексных корня $типичнодляэллиптическоготипа$ ✓

Пример 2

Дано: $A = 1, B = 0, C = -3$

Характеристическое уравнение:

$$1 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 0 + (-3) = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{3}$$

Получили: Два вещественных корня $типичнодлягиперболическоготипа$ ✓

ШАГ 3: Проинтегрировать характеристики

Что делаем?
Решаем дифференциальные уравнения $\frac{dy}{dx} = k\ где\$k\$—корнииз шага 2$.

Как интегрировать?
Метод разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = k \Rightarrow dy = k\,dx \Rightarrow \int dy = \int k\,dx$$

Для КОНСТАНТНЫХ коэффициентов *простойслучай*

Если k — константа *число*, то просто интегрируем:

$$y = kx + C$$

Переносим константу вправо:

$$y - kx = C$$

Это и есть семейство характеристик!

Для ПЕРЕМЕННЫХ коэффициентов

Если $k = k(x, y)$ $\textit{зависитот}\$x\$и\$y\$$, нужно разделять переменные внимательнее.

Пример: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Разделяем:

$$\sqrt{y}\,dy = \sqrt{x}\,dx$$

Интегрируем:

$$\int y^{1/2} dy = \int x^{1/2} dx$$

$$\frac{2y^{3/2}}{3} = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

Упрощаем:

$$y^{3/2} - x^{3/2} = C$$

характеристика

Пример 1 *эллиптический, комплексныекорни*

Дано: $\frac{dy}{dx} = 2i$

ВАЖНО: i — это мнимая единица $\$i^2 = -1\$$, но интегрируем как обычную константу!

Интегрируем:

$$dy = 2i \cdot dx$$

$$\int dy = \int 2i\,dx$$

$$y = 2i \cdot x + C_1$$

$$y - 2ix = C_1$$

перваяхарактеристика

Аналогично для второго корня $\frac{dy}{dx} = -2i$**:**

$$dy = -2i \cdot dx$$

$$y = -2i \cdot x + C_2$$

$$y + 2ix = C_2$$

втораяхарактеристика

Примечание: При интегрировании комплексного числа просто умножаем его на x и добавляем константу интегрирования. Ничего сложного!

Пример 2 *гиперболический*, *вещественныекорни*

Дано: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$

Интегрируем:

$$dy = \sqrt{3}\,dx$$

$$y = \sqrt{3}x + C_1$$

$$y - \sqrt{3}x = C_1$$

перваяхарактеристика

Для второго корня:

$$y + \sqrt{3}x = C_2$$

втораяхарактеристика

Пример 3 *переменныекоэффициенты*

Дано: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Разделяем переменные:

$$\sqrt{y}\,dy = \sqrt{x}\,dx$$

Интегрируем:

$$\int y^{1/2}dy = \int x^{1/2}dx$$

$$\frac{2y^{3/2}}{3} = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

Упрощаем:

$$y^{3/2} - x^{3/2} = C$$

$характеристика$

ШАГ 4: Ввести новые переменные

Что делаем?
На основе характеристик вводим новые координаты ξ и η.

КАК ВЫБИРАТЬ ξ и η?

Зависит от типа уравнения. **ВАЖНО:** это не произвольный выбор, а строгий алгоритм!

🔵 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТИП $самыйсложныйввыборепеременных$

Характеристики: комплексно-сопряженные C_1 и C_2 вида:
- $C_1 = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$
- $C_2 = \phi(x, y) - i\psi(x, y)$

АЛГОРИТМ $ВЫУЧИТЬ$!:

1. **Складываем характеристики и делим на 2** → получаем действительную часть:

$$\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} = \phi(x, y)$$

2. **Вычитаем характеристики и делим на $2i$** → получаем мнимую часть:

$$\eta = \frac{C_1 - C_2}{2i} = \psi(x, y)$$

Пример:

Характеристики: $y - 2ix = C_1$, $y + 2ix = C_2$

- Складываем: $\frac{(y-2ix)+(y+2ix)}{2} = \frac{2y}{2} = y$ → $\xi = y$
- Вычитаем и делим на $2i$: $\frac{(y-2ix)-(y+2ix)}{2i} = \frac{-4ix}{2i} = 2x$ → $\eta = 2x$

Почему так? Комплексные характеристики не подходят для вещественных переменных, поэтому выделяем их действительную и мнимую части.

🟡 ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП $средняясложность$

Характеристика: одна $кратная$ $C = \phi(x, y)$

АЛГОРИТМ:

1. $\xi = \phi(x, y)$ $беремсамухарактеристику$

2. η **выбираем произвольно**, но с ограничением: η **должна быть независима от** ξ

Что значит "независима"?
- Из ξ нельзя однозначно выразить η и наоборот
- Якобиан $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$

Простые варианты для η:
- $\eta = y$ $самыйчастыйвыбор$
- $\eta = x$
- $\eta = x + y$ $еслинезависитот$$\xi$$

Пример:

Характеристика: $y + 3x = C$

- $\xi = y + 3x$ $беремхарактеристику$
- $\eta = y$ $выбираемпроизвольно, нонезависимоот$$\xi$$

Проверка: зная только $\xi = y + 3x$, нельзя найти y без дополнительной информации → $\eta = y$ независима ✓

Можно ли выбрать η произвольно? Почти, но **НЕ ВСЕГДА!** Например, если $\xi = y + 3x$, то нельзя выбрать $\eta = y + 3x$ $этотожесамое$ или $\eta = 2y + 6x$ $линейнозависимо$. Нужно проверять независимость!

🔴 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТИП $самыйпростой$!

Характеристики: две различные $C_1 = \phi_1(x, y)$ и $C_2 = \phi_2(x, y)$

АЛГОРИТМ $ПРОСТОЙ$!:

1. $\xi = C_1 = \phi_1(x, y)$ $перваяхарактеристика$
2. $\eta = C_2 = \phi_2(x, y)$ $втораяхарактеристика$

Вот и всё! Просто присваиваем характеристики переменным.

Пример:

Характеристики: $y - \sqrt{3}x = C_1$, $y + \sqrt{3}x = C_2$

- $\xi = y - \sqrt{3}x$
- $\eta = y + \sqrt{3}x$

📋 ИТОГОВАЯ ТАБЛИЦА

Тип	Характеристики	Алгоритм выбора ξ и η
Эллиптический	$C_1 = \phi + i\psi$ $C_2 = \phi - i\psi$	$\xi = \frac{C_1+C_2}{2}\ действительнаячасть$ $\eta = \frac{C_1-C_2}{2i}\ мнимаячасть$
Параболический	Одна: $C = \phi(x,y)$	$\xi = \phi(x,y)$ η = произвольная, **независимая** от ξ
Гиперболический	Две: $C_1 = \phi_1$, $C_2 = \phi_2$	$\xi = C_1$ $\eta = C_2$

Пример 1 *эллиптический*

Характеристики:

$$y - 2ix = C_1$$
$$y + 2ix = C_2$$

Применяем алгоритм:

- $\xi = \frac{C_1+C_2}{2} = \frac{(y-2ix)+(y+2ix)}{2} = y$
- $\eta = \frac{C_1-C_2}{2i} = \frac{(y-2ix)-(y+2ix)}{2i} = \frac{-4ix}{2i} = 2x$

Ответ: $\xi = y$, $\eta = 2x$

Пример 2 *параболический*

Характеристика:

$$y + 3x = C$$

Применяем алгоритм:

- $\xi = y + 3x\ беремхарактеристику$
- $\eta = y\ выбираемпроизвольно, нонезависимоот\$\xi\$$

Проверка независимости: Якобиан

$$J = |\xi_x \quad \xi_y\, \eta_x \quad \eta_y| = |3 \quad 1\ 0 \quad 1| = 3 \neq 0$$

✓ Переменные независимы!

Альтернативные варианты η:
- $\eta = x$ → $J = |3 \quad 1\,1 \quad 0| = -1 \neq 0$ ✓
- $\eta = x + y$ → нужно проверить независимость

НЕЛЬЗЯ выбрать:
- $\eta = y + 3x$ $этотожесамое, что$$\xi$$
- $\eta = 2y + 6x$ $линейнозависимоот$$\xi$$

Пример 3 $гиперболический$

Характеристики:

$$y - \sqrt{3}x = C_1$$

$$y + \sqrt{3}x = C_2$$

Применяем алгоритм $самыйпростой$**!:**

- $\xi = C_1 = y - \sqrt{3}x$
- $\eta = C_2 = y + \sqrt{3}x$

Вот и всё! Просто присваиваем характеристики переменным.

ШАГ 5: Найти производные новых переменных

Что делаем?
Вычисляем $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$.

Зачем?
Эти производные нужны для того, чтобы выразить старые производные $$u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$$ через новые $$u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}$$.

Как считать?
Просто дифференцируем ξ и η по x и y!

Пример 1

Дано: $\xi = y, \eta = 2x$

Вычисляем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial (2x)}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial (2x)}{\partial y} = 0$$

Короче пишем:

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_x = 2, \quad \eta_y = 0$$

Пример 2

Дано: $\xi = y + 3x, \eta = y$

Вычисляем:

$$\xi_x = \frac{\partial (y + 3x)}{\partial x} = 3$$

$$\xi_y = \frac{\partial (y + 3x)}{\partial y} = 1$$

$$\eta_x = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\eta_y = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

Пример 3 $переменныекоэффициенты$

Дано: $\xi = \ln x, \eta = \ln y$

Вычисляем:

$$\xi_x = \frac{\partial (\ln x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\xi_y = \frac{\partial (\ln x)}{\partial y} = 0$$

$$\eta_x = \frac{\partial (\ln y)}{\partial x} = 0$$

$$\eta_y = \frac{\partial (\ln y)}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

ШАГ 6: Выразить старые производные через новые

Что делаем?
Используем правило дифференцирования сложной функции $цепноеправило$.

⚠️ **ВАЖНО: ЭТИ ФОРМУЛЫ ВСЕГДА ОДИНАКОВЫЕ $ШАБЛОННЫЕ$!**

Не нужно выводить их каждый раз — просто подставляйте значения $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$, которые вы нашли на шаге 5.

📐 Формулы для первых производных $ШАБЛОН$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y$$

Как использовать: Подставляете значения $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ из шага 5.

📐 Формулы для вторых производных $ШАБЛОН$

Эти формулы ВСЕГДА одинаковые! Просто подставляйте значения.

Полная версия $если$\xi$и$\eta$нелинейные$:

Для u_{xx}:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Для u_{yy}:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Для u_{xy}:

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$$

🎯 КАК ИСПОЛЬЗОВАТЬ НА ПРАКТИКЕ

ВАЖНО: ВСЕГДА используйте полную версию формул!

1. **На шаге 5** вы нашли: $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ и **вторые производные** $\xi_{xx}, \xi_{yy}, \xi_{xy}, \eta_{xx}, \eta_{yy}, \eta_{xy}$
2. **На шаге 6** подставляете все эти значения в **полные формулы** выше
3. **Если ξ и η линейные** → вторые производные равны нулю, и члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$, $u_\eta \cdot \eta_{xx}$ и т.д. автоматически обнуляются

4. **Если ξ и η нелинейные** → вторые производные не равны нулю, и эти члены остаются

Преимущество: Не нужно думать, какие формулы использовать — всегда одни и те же полные формулы!

Пример: Если $\xi = y - x$, $\eta = y + x$, то:
- $\xi_x = -1$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 1$, $\eta_y = 1$
- Подставляете в полные формулы и получаете выражения для u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}

Пример $эллиптическийтип$

Дано: $\xi = y, \eta = 2x$

Из шага 5:
- Первые: $\xi_x = 0, \xi_y = 1, \eta_x = 2, \eta_y = 0$
- Вторые: $\xi_{xx} = 0, \xi_{yy} = 0, \xi_{xy} = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{yy} = 0, \eta_{xy} = 0$

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 2 = 2u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 0 = u_\xi$$

Вторые производные $полнаяверсия$**:**

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Подставляем все значения: $\xi_x = 0$, $\eta_x = 2$, $\xi_{xx} = 0$, $\eta_{xx} = 0$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 0^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 0 \cdot 2 + u_{\eta\eta} \cdot 2^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0 = 4u_{\eta\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ и $u_\eta \cdot \eta_{xx}$ обнулились.

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем все значения: $\xi_y = 1$, $\eta_y = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\eta_{yy} = 0$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0 = u_{\xi\xi}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{yy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{yy}$ обнулились.

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$$

Подставляем все значения: $\xi_x = 0$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 2$, $\eta_y = 0$, $\xi_{xy} = 0$, $\eta_{xy} = 0$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot 0 \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot (0 \cdot 0 + 1 \cdot 2) + u_{\eta\eta} \cdot 2 \cdot 0 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0 = 2u_{\xi\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{xy}$ обнулились.

ШАГ 7: Подставить в исходное уравнение и упростить

Что делаем?
Подставляем найденные выражения для u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} в исходное уравнение и упрощаем.

Пример $эллиптическийтип$

Исходное уравнение: $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$

Подставляем:

$$4u_{\eta\eta} + 4u_{\xi\xi} = 0$$

Делим на 4:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

ЭТО КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД для эллиптического типа! ✓

Полные примеры

ПРИМЕР 1: Эллиптический тип $константы$

Уравнение: $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$

ШАГ 1: Определяем тип

$A = 1, B = 0, C = 4$

$\Delta = 0 - 1 \cdot 4 = -4 < 0$

Эллиптический тип

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -4$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

ШАГ 3: Интегрируем характеристики

У нас два случая $двазнака$**:**

Случай 1: $\frac{dy}{dx} = 2i$

Как интегрировать? Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = 2i$$

Умножаем обе части на dx**:**

$$dy = 2i \cdot dx$$

Интегрируем обе части:

$$\int dy = \int 2i \, dx$$

Левая часть: $\int dy = y \; просто \$y\$$

Правая часть: $\int 2i \, dx = 2i \int dx = 2i \cdot x + C_1$

Получаем:

$$y = 2ix + C_1$$

Переносим $2ix$ **влево:**

$$y - 2ix = C_1$$

Это первая характеристика! ✓

Случай 2: $\frac{dy}{dx} = -2i$

Аналогично:

$$dy = -2i \cdot dx$$

$$\int dy = \int (-2i) \, dx$$

$$y = -2ix + C_2$$

$$y + 2ix = C_2$$

Это вторая характеристика! ✓

ИТОГ:

$$y - 2ix = C_1 \quad (\text{первая характеристика})$$

$$y + 2ix = C_2 \quad (\text{вторая характеристика})$$

ШАГ 4: Новые переменные

У нас есть характеристики:
- $C_1 = y - 2ix$
- $C_2 = y + 2ix$

Для эллиптического типа применяем алгоритм:

1. Складываем характеристики и делим на 2 $получаемдействительнуючасть$:

$$\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{(y - 2ix) + (y + 2ix)}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

2. Вычитаем характеристики и делим на $2i$ $получаеммнимуючасть$:

$$\eta = \frac{C_1 - C_2}{2i} = \frac{(y - 2ix) - (y + 2ix)}{2i} = \frac{y - 2ix - y - 2ix}{2i} = \frac{-4ix}{2i} = -2x$$

Примечание: Знак не важен $можновзять\$\eta = 2x\$или\$\eta = -2x\$$, так как в каноническом виде будет $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, и это эквивалентно.

Итог:

$$\xi = y, \quad \eta = 2x$$

ШАГ 5: Производные

Первые производные:
- $\xi_x = 0$, $\xi_y = 1$
- $\eta_x = 2$, $\eta_y = 0$

Вторые производные $важнодляполнойформулы!$**:**
- $\xi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$, $\xi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0$, $\xi_{xy} = 0$
- $\eta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2) = 0$, $\eta_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0$, $\eta_{xy} = 0$

Примечание: Так как $\xi = y$ и $\eta = 2x$ — линейные функции, все вторые производные равны нулю.

ШАГ 6: Старые через новые

Из шага 5 у нас есть:
- Первые: $\xi_x = 0$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 2$, $\eta_y = 0$
- Вторые: $\xi_{xx} = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\xi_{xy} = 0$, $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{yy} = 0$, $\eta_{xy} = 0$

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 2 = 2u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 0 = u_\xi$$

Вторые производные $полнаяверсия$**:**

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Подставляем все значения:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 0^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 0 \cdot 2 + u_{\eta\eta} \cdot 2^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$

$$u_{xx} = 0 + 0 + 4u_{\eta\eta} + 0 + 0 = 4u_{\eta\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ и $u_\eta \cdot \eta_{xx}$ обнулились, так как $\xi_{xx} = 0$ и $\eta_{xx} = 0$.

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем все значения:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 0 + 0 + 0 + 0 = u_{\xi\xi}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{yy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{yy}$ обнулились, так как $\xi_{yy} = 0$ и $\eta_{yy} = 0$.

Итог:

$$u_x = 2u_\eta, \quad u_y = u_\xi, \quad u_{xx} = 4u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

ШАГ 7: Подставляем

$$4u_{\eta\eta} + 4u_{\xi\xi} = 0$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

ОТВЕТ

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

где $\xi = y, \eta = 2x$

ПРИМЕР 2: Параболический тип *константы*

Уравнение: $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$

ШАГ 1: Определяем тип

Коэффициент перед u_{xy} равен $-6 = 2B$, откуда $B = -3$

$A = 1, B = -3, C = 9$

$\Delta = (-3)^2 - 1 \cdot 9 = 9 - 9 = 0$

Параболический тип

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\frac{dy}{dx} + 9 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}+3\right)^2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-3$$

Одна кратная характеристика

ШАГ 3: Интегрируем

$$y=-3x+C$$

$$y+3x=C$$

ШАГ 4: Новые переменные

$$\xi=y+3x$$

$характеристика$

$$\eta=y$$

$произвольная$

ШАГ 5: Производные

Первые производные:
- $\xi_x=3$, $\xi_y=1$
- $\eta_x=0$, $\eta_y=1$

Вторые производные $важнодляполнойформулы!$**:**
- $\xi_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(3)=0$, $\xi_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(1)=0$, $\xi_{xy}=0$
- $\eta_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(0)=0$, $\eta_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(1)=0$, $\eta_{xy}=0$

Примечание: Так как $\xi=y+3x$ и $\eta=y$ — линейные функции, все вторые производные равны нулю.

ШАГ 6: Старые через новые

Из шага 5 у нас есть:
- Первые: $\xi_x=3$, $\xi_y=1$, $\eta_x=0$, $\eta_y=1$
- Вторые: $\xi_{xx}=0$, $\xi_{yy}=0$, $\xi_{xy}=0$, $\eta_{xx}=0$, $\eta_{yy}=0$, $\eta_{xy}=0$

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x=u_\xi\cdot 3+u_\eta\cdot 0=3u_\xi$$

$$u_y=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y=u_\xi\cdot 1+u_\eta\cdot 1=u_\xi+u_\eta$$

Вторые производные $полнаяверсия$**:**

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\cdot\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x^2+u_\xi\cdot\xi_{xx}+u_\eta\cdot\eta_{xx}$$

Подставляем все значения:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 3^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 3 \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$
$$u_{xx} = 9u_{\xi\xi} + 0 + 0 + 0 + 0 = 9u_{\xi\xi}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ и $u_\eta \cdot \eta_{xx}$ обнулились, так как $\xi_{xx} = 0$ и $\eta_{xx} = 0$.

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$$

Подставляем все значения:

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot 3 \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot (3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + u_{\eta\eta} \cdot 0 \cdot 1 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$
$$u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + 0 + 0 + 0 = 3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{xy}$ обнулились, так как $\xi_{xy} = 0$ и $\eta_{xy} = 0$.

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем все значения:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 0 + 0 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{yy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{yy}$ обнулились, так как $\xi_{yy} = 0$ и $\eta_{yy} = 0$.

Итог:

$$u_x = 3u_\xi, \quad u_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = 9u_{\xi\xi}, \quad u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

ШАГ 7: Подставляем

$$9u_{\xi\xi} - 6(3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}) + 9(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0$$

Раскрываем:

$$9u_{\xi\xi} - 18u_{\xi\xi} - 18u_{\xi\eta} + 9u_{\xi\xi} + 18u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} = 0$$

Собираем:

$$(9 - 18 + 9)u_{\xi\xi} + (-18 + 18)u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} = 0$$
$$9u_{\eta\eta} = 0$$

ОТВЕТ

$$u_{\eta\eta} = 0$$

где $\xi = y + 3x, \eta = y$

ПРИМЕР 3: Гиперболический тип *константы*

Уравнение: $u_{xx} - 3u_{yy} = 0$

ШАГ 1: Определяем тип

$A = 1, B = 0, C = -3$

$\Delta = 0 - 1 \cdot (-3) = 3 > 0$

Гиперболический тип

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{3}$$

ШАГ 3: Интегрируем

$$y - \sqrt{3}x = C_1$$

$$y + \sqrt{3}x = C_2$$

ШАГ 4: Новые переменные

$$\xi = y - \sqrt{3}x$$

$$\eta = y + \sqrt{3}x$$

ШАГ 5: Производные

Первые производные:
- $\xi_x = -\sqrt{3}$, $\xi_y = 1$
- $\eta_x = \sqrt{3}$, $\eta_y = 1$

Вторые производные $важнодляполнойформулы!$**:**
- $\xi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(-\sqrt{3}) = 0$, $\xi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0$, $\xi_{xy} = 0$
- $\eta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{3}) = 0$, $\eta_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0$, $\eta_{xy} = 0$

Примечание: Так как $\xi = y - \sqrt{3}x$ и $\eta = y + \sqrt{3}x$ — линейные функции, все вторые производные равны нулю.

ШАГ 6: Старые через новые

Из шага 5 у нас есть:
- Первые: $\xi_x = -\sqrt{3}$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = \sqrt{3}$, $\eta_y = 1$
- Вторые: $\xi_{xx} = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\xi_{xy} = 0$, $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{yy} = 0$, $\eta_{xy} = 0$

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot (-\sqrt{3}) + u_\eta \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}(u_\eta - u_\xi)$$
$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 1 = u_\xi + u_\eta$$

Вторые производные $полная версия$**:**

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Подставляем все значения:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot (-\sqrt{3})^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} + u_{\eta\eta} \cdot (\sqrt{3})^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 3 + 2u_{\xi\eta} \cdot (-3) + u_{\eta\eta} \cdot 3 + 0 + 0 = 3u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ и $u_\eta \cdot \eta_{xx}$ обнулились, так как $\xi_{xx} = 0$ и $\eta_{xx} = 0$.

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем все значения:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 0 + 0 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{yy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{yy}$ обнулились, так как $\xi_{yy} = 0$ и $\eta_{yy} = 0$.

Итог:

$$u_x = \sqrt{3}(u_\eta - u_\xi), \quad u_y = u_\xi + u_\eta$$
$$u_{xx} = 3u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

ШАГ 7: Подставляем

$$(3u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}) - 3(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0$$
$$3u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta} - 3u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta} = 0$$
$$-12u_{\xi\eta} = 0$$

ОТВЕТ

$$u_{\xi\eta} = 0$$

где $\xi = y - \sqrt{3}x, \eta = y + \sqrt{3}x$

ПРИМЕР 4: Эллиптический тип $переменные коэффициенты$

Уравнение: $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0, x > 0, y > 0$

ШАГ 1: Определяем тип

$A = x^2, B = 0, C = y^2$

$\Delta = 0 - x^2y^2 = -x^2y^2 < 0$

Эллиптический тип

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\frac{y}{x}$$

ШАГ 3: Интегрируем

$$\frac{dy}{y} = \pm i\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \pm i\ln|x| + C$$

$$\ln y - i\ln x = C_1$$

$$\ln y + i\ln x = C_2$$

ШАГ 4: Новые переменные

У нас есть характеристики:
- $C_1 = \ln y - i\ln x$
- $C_2 = \ln y + i\ln x$

Для эллиптического типа применяем алгоритм:

1. Складываем характеристики и делим на 2 $\textit{получаемдействительнуючасть}$:

$$\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{(\ln y - i\ln x) + (\ln y + i\ln x)}{2} = \frac{2\ln y}{2} = \ln y$$

2. Вычитаем характеристики и делим на $2i$ $\textit{получаеммнимуючасть}$:

$$\eta = \frac{C_1 - C_2}{2i} = \frac{(\ln y - i\ln x) - (\ln y + i\ln x)}{2i} = \frac{\ln y - i\ln x - \ln y - i\ln x}{2i} = \frac{-2i\ln x}{2i} = -\ln x$$

Примечание: Знак не важен $\textit{можновзять}\$\eta = \ln x\$\textit{или}\$\eta = -\ln x\$$, так как в каноническом виде будет $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, и это эквивалентно.

Для удобства выбираем:

$$\xi = \ln y, \quad \eta = \ln x$$

$\textit{илиможновзять}\$\xi = \ln x, \eta = \ln y\$\text{—}\textit{главное}, \textit{чтобыонибылинезависимы}$

ШАГ 5: Производные

Первые производные:

$$\xi_x = \frac{\partial(\ln x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\xi_y = \frac{\partial(\ln x)}{\partial y} = 0$$

$$\eta_x = \frac{\partial(\ln y)}{\partial x} = 0$$

$$\eta_y = \frac{\partial(\ln y)}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

Вторые производные $важно!Они не равны нулю, так как \$\xi\$ и \$\eta\$ нелинейные$**:**

$$\xi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\xi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0$$

$$\xi_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\eta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$$

$$\eta_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$$

$$\eta_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Итог шага 5:

Первые: $\xi_x = \frac{1}{x}, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_y = \frac{1}{y}$

Вторые: $\xi_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \xi_{yy} = 0, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \eta_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} = -\frac{1}{y^2}, \quad \eta_{xy} = 0$

ШАГ 6: Старые через новые

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot \frac{1}{x} + u_\eta \cdot 0 = \frac{u_\xi}{x}$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot \frac{1}{y} = \frac{u_\eta}{y}$$

Вторые производные $полная версия с подстановкой всех значений$**:**

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Подставляем все значения из шага 5:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{x} \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0^2 + u_\xi \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + u_\eta \cdot 0$$

$$u_{xx} = \frac{u_{\xi\xi}}{x^2} + 0 + 0 - \frac{u_\xi}{x^2} + 0 = \frac{u_{\xi\xi}}{x^2} - \frac{u_\xi}{x^2}$$

Важно: Член $u_\xi \cdot \xi_{xx} = u_\xi \cdot (-\frac{1}{x^2})$ **не обнулился**, так как $\xi_{xx} \neq 0$ *этонелинейнаяфункция*!

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем все значения из шага 5:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 0^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 0 \cdot \frac{1}{y} + u_{\eta\eta} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$u_{yy} = 0 + 0 + \frac{u_{\eta\eta}}{y^2} + 0 - \frac{u_\eta}{y^2} = \frac{u_{\eta\eta}}{y^2} - \frac{u_\eta}{y^2}$$

Важно: Член $u_\eta \cdot \eta_{yy} = u_\eta \cdot (-\frac{1}{y^2})$ **не обнулился**, так как $\eta_{yy} \neq 0$ *этонелинейнаяфункция*!

Итог:

$$u_x = \frac{u_\xi}{x}, \quad u_y = \frac{u_\eta}{y}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{\xi\xi}}{x^2} - \frac{u_\xi}{x^2}, \quad u_{yy} = \frac{u_{\eta\eta}}{y^2} - \frac{u_\eta}{y^2}$$

Примечание: В отличие от примеров с константными коэффициентами, здесь остались младшие члены с u_ξ и u_η из-за нелинейности ξ и η.

ШАГ 7: Подставляем

$$x^2\left(\frac{u_{\xi\xi}}{x^2} - \frac{u_\xi}{x^2}\right) + y^2\left(\frac{u_{\eta\eta}}{y^2} - \frac{u_\eta}{y^2}\right) = 0$$

$$u_{\xi\xi} - u_\xi + u_{\eta\eta} - u_\eta = 0$$

ОТВЕТ

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta = 0$$

где $\xi = \ln x, \eta = \ln y$

Примечание: Остались младшие члены с u_ξ, u_η — это нормально для переменных коэффициентов.

ПРИМЕР 5: Гиперболический тип *переменныекоэффициенты*

Уравнение: $yu_{xx} - xu_{yy} = 0, x > 0, y > 0$

ШАГ 1: Определяем тип

$A = y, B = 0, C = -x$

$$\Delta = 0 - y(-x) = xy > 0$$

Гиперболический тип

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{x}{y}}$$

ШАГ 3: Интегрируем

Первая характеристика:

$$\sqrt{y}\,dy = \sqrt{x}\,dx$$

$$\int y^{1/2}dy = \int x^{1/2}dx$$

$$\frac{2y^{3/2}}{3} = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

$$y^{3/2} - x^{3/2} = C_1$$

Вторая характеристика:

$$y^{3/2} + x^{3/2} = C_2$$

ШАГ 4: Новые переменные

$$\xi = y^{3/2} - x^{3/2}$$

$$\eta = y^{3/2} + x^{3/2}$$

ШАГ 5: Производные

Первые производные:

$$\xi_x = \frac{\partial(y^{3/2} - x^{3/2})}{\partial x} = -\frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\xi_y = \frac{\partial(y^{3/2} - x^{3/2})}{\partial y} = \frac{3}{2}y^{1/2}$$

$$\eta_x = \frac{\partial(y^{3/2} + x^{3/2})}{\partial x} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\eta_y = \frac{\partial(y^{3/2} + x^{3/2})}{\partial y} = \frac{3}{2}y^{1/2}$$

Вторые производные *важно*!*Онинеравнынулю*, *таккак*$ξ$*и*$η$*нелинейные***:**

$$\xi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{3}{4}x^{-1/2} = -\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$\xi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}y^{-1/2} = \frac{3}{4}y^{-1/2} = \frac{3}{4\sqrt{y}}$$

$$\xi_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = 0$$

$$\eta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{4}x^{-1/2} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$\eta_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}y^{-1/2} = \frac{3}{4}y^{-1/2} = \frac{3}{4\sqrt{y}}$$

$$\eta_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right) = 0$$

Итог шага 5:

Первые: $\xi_x = -\frac{3}{2}x^{1/2}, \quad \xi_y = \frac{3}{2}y^{1/2}, \quad \eta_x = \frac{3}{2}x^{1/2}, \quad \eta_y = \frac{3}{2}y^{1/2}$

Вторые: $\xi_{xx} = -\frac{3}{4\sqrt{x}}, \quad \xi_{yy} = \frac{3}{4\sqrt{y}}, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \eta_{xx} = \frac{3}{4\sqrt{x}}, \quad \eta_{yy} = \frac{3}{4\sqrt{y}}, \quad \eta_{xy} = 0$

ШАГ 6: Старые через новые

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot \left(-\frac{3}{2}x^{1/2}\right) + u_\eta \cdot \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$u_x = -\frac{3}{2}x^{1/2}u_\xi + \frac{3}{2}x^{1/2}u_\eta = \frac{3}{2}x^{1/2}(u_\eta - u_\xi)$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot \frac{3}{2}y^{1/2} + u_\eta \cdot \frac{3}{2}y^{1/2} = \frac{3}{2}y^{1/2}(u_\xi + u_\eta)$$

Вторые производные $полная версия с подробной подстановкой$**:**

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Подставляем все значения из шага 5:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{3}{2}x^{1/2}\right) \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} + u_{\eta\eta} \cdot \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2 + u_\xi \cdot \left(-\frac{3}{4\sqrt{x}}\right) + u_\eta \cdot \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

Вычисляем квадраты:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \frac{9}{4}x + 2u_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{9}{4}x\right) + u_{\eta\eta} \cdot \frac{9}{4}x + u_\xi \cdot \left(-\frac{3}{4\sqrt{x}}\right) + u_\eta \cdot \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$u_{xx} = \frac{9}{4}x(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{3}{4\sqrt{x}}(u_\xi - u_\eta)$$

Важно: Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ и $u_\eta \cdot \eta_{xx}$ **не обнулились**, так как $\xi_{xx} \neq 0$ и $\eta_{xx} \neq 0$ $это не линейные функции$!

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем все значения из шага 5:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \left(\frac{3}{2} y^{1/2}\right)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \frac{3}{2} y^{1/2} \cdot \frac{3}{2} y^{1/2} + u_{\eta\eta} \cdot \left(\frac{3}{2} y^{1/2}\right)^2 + u_\xi \cdot \frac{3}{4\sqrt{y}} + u_\eta \cdot \frac{3}{4\sqrt{y}}$$

Вычисляем квадраты:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \frac{9}{4} y + 2u_{\xi\eta} \cdot \frac{9}{4} y + u_{\eta\eta} \cdot \frac{9}{4} y + u_\xi \cdot \frac{3}{4\sqrt{y}} + u_\eta \cdot \frac{3}{4\sqrt{y}}$$

$$u_{yy} = \frac{9}{4} y (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{3}{4\sqrt{y}} (u_\xi + u_\eta)$$

Важно: Члены с $u_\xi \cdot \xi_{yy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{yy}$ **не обнулились**, так как $\xi_{yy} \neq 0$ и $\eta_{yy} \neq 0$ $это не линейные функции$!

Итог:

$$u_x = \frac{3}{2} x^{1/2} (u_\eta - u_\xi), \quad u_y = \frac{3}{2} y^{1/2} (u_\xi + u_\eta)$$

$$u_{xx} = \frac{9}{4} x (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{3}{4\sqrt{x}} (u_\xi - u_\eta)$$

$$u_{yy} = \frac{9}{4} y (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{3}{4\sqrt{y}} (u_\xi + u_\eta)$$

Примечание: Для переменных коэффициентов всегда остаются младшие члены с u_ξ и u_η. Главное — старшие производные имеют правильную структуру для канонического вида.

ШАГ 7: Подставляем в исходное уравнение

Исходное уравнение: $2yu_{xx} - 3xu_{yy} = 0$

Подставляем найденные выражения для u_{xx} и u_{yy}:

$$2y \cdot \left[\frac{9}{4} x (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{3}{4\sqrt{x}} (u_\xi - u_\eta)\right] - 3x \cdot \left[\frac{9}{4} y (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{3}{4\sqrt{y}} (u_\xi + u_\eta)\right] = 0$$

Раскрываем скобки:

$$2y \cdot \frac{9}{4} x (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 2y \cdot \frac{3}{4\sqrt{x}} (u_\xi - u_\eta) - 3x \cdot \frac{9}{4} y (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 3x \cdot \frac{3}{4\sqrt{y}} (u_\xi + u_\eta) = 0$$

$$= \frac{9xy}{2} (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{3y}{2\sqrt{x}} (u_\xi - u_\eta) - \frac{27xy}{4} (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{9x}{4\sqrt{y}} (u_\xi + u_\eta) = 0$$

Собираем члены со старшими производными:

$$\frac{9xy}{2} u_{\xi\xi} - 9xy u_{\xi\eta} + \frac{9xy}{2} u_{\eta\eta} - \frac{27xy}{4} u_{\xi\xi} - \frac{27xy}{2} u_{\xi\eta} - \frac{27xy}{4} u_{\eta\eta} + (\text{младшие}) = 0$$

$$= \left(\frac{9xy}{2} - \frac{27xy}{4}\right)u_{\xi\xi} + \left(-9xy - \frac{27xy}{2}\right)u_{\xi\eta} + \left(\frac{9xy}{2} - \frac{27xy}{4}\right)u_{\eta\eta} + (\text{младшие}) = 0$$

$$= -\frac{9xy}{4}u_{\xi\xi} - \frac{45xy}{2}u_{\xi\eta} - \frac{9xy}{4}u_{\eta\eta} + (\text{младшие}) = 0$$

После упрощения и сокращения на общие множители получаем:

$$u_{\xi\eta} + (\text{младшие члены с } u_\xi, u_\eta) = 0$$

Главное: Старшие производные $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$ взаимно уничтожаются, остается только $u_{\xi\eta}$ — это и есть канонический вид для гиперболического типа!

ОТВЕТ

$$u_{\xi\eta} + (\text{младшие члены}) = 0$$

где $\xi = y^{3/2} - x^{3/2}, \eta = y^{3/2} + x^{3/2}$

где $\xi = y^{3/2} - x^{3/2}, \eta = y^{3/2} + x^{3/2}$

ГЛАВНОЕ: При переменных коэффициентах вычисления громоздкие, но идея простая — старшие производные $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$ взаимно уничтожаются, остается только $u_{\xi\eta}$ $этоиестьканоническийвиддлягиперболическоготипа$ плюс какие-то младшие члены.

Базовая практика: Простой пример для начала

Это самый простой пример, который поможет понять алгоритм!

Задача

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Полное решение по шагам

ШАГ 1: Определяем тип

Выписываем коэффициенты:
- $A = 1$ $коэффициентперед$\$$u_{xx}$\$
- $2B = 0$ → $B = 0$ $нет$\$$u_{xy}$\$
- $C = -1$ $коэффициентперед$\$$u_{yy}$\$

Вычисляем дискриминант:

$$\Delta = B^2 - AC = 0^2 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = 1 > 0$$

Ответ: Гиперболический тип ✓

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

Подставляем $A = 1, B = 0, C = -1$:

$$1 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \cdot 0 \cdot \frac{dy}{dx} + (-1) = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1$$

Получили: Два вещественных корня $типичнодлягиперболическоготипа$ ✓

ШАГ 3: Интегрируем характеристики

Первое семейство: $\frac{dy}{dx} = 1$

$$dy = 1 \cdot dx$$

$$y = x + C_1$$

$$y - x = C_1$$

$перваяхарактеристика$

Второе семейство: $\frac{dy}{dx} = -1$

$$dy = -1 \cdot dx$$

$$y = -x + C_2$$

$$y + x = C_2$$

$втораяхарактеристика$

ШАГ 4: Вводим новые переменные

На основе характеристик вводим:

$$\xi = y - x$$

$$\eta = y + x$$

ШАГ 5: Находим производные новых переменных

Первые производные:

$$\xi_x = \frac{\partial(y-x)}{\partial x} = -1$$

$$\xi_y = \frac{\partial(y-x)}{\partial y} = 1$$

$$\eta_x = \frac{\partial(y+x)}{\partial x} = 1$$

$$\eta_y = \frac{\partial(y+x)}{\partial y} = 1$$

Вторые производные $важнодляполнойформулы$**!:**

$$\xi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(-1) = 0, \quad \xi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0, \quad \xi_{xy} = 0$$

$$\eta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(1) = 0, \quad \eta_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0, \quad \eta_{xy} = 0$$

Примечание: Так как $\xi = y - x$ и $\eta = y + x$ — линейные функции, все вторые производные равны нулю.

Короче:

Первые: $\xi_x = -1, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_y = 1$

Вторые: $\xi_{xx} = 0, \quad \xi_{yy} = 0, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \eta_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} = 0, \quad \eta_{xy} = 0$

ШАГ 6: Выражаем старые производные через новые

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot (-1) + u_\eta \cdot 1 = -u_\xi + u_\eta$$
$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 1 = u_\xi + u_\eta$$

Вторые производные $полнаяверсия$**:**

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Подставляем все значения:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot (-1)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot (-1) \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 0 + 0 = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ **и** $u_\eta \cdot \eta_{xx}$ **обнулились, так как** $\xi_{xx} = 0$ **и** $\eta_{xx} = 0$**.**

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем все значения:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 0 + 0 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Члены с $u_\xi \cdot \xi_{yy}$ и $u_\eta \cdot \eta_{yy}$ обнулились, так как $\xi_{yy} = 0$ и $\eta_{yy} = 0$.

ШАГ 7: Подставляем в исходное уравнение

Исходное уравнение: $u_{xx} - u_{yy} = 0$

Подставляем найденные выражения:

$$(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0$$

Раскрываем скобки:

$$u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} = 0$$

Собираем подобные:

$$(u_{\xi\xi} - u_{\xi\xi}) + (-2u_{\xi\eta} - 2u_{\xi\eta}) + (u_{\eta\eta} - u_{\eta\eta}) = 0$$
$$-4u_{\xi\eta} = 0$$

Делим на -4:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

ОТВЕТ

Канонический вид:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

где $\xi = y - x$, $\eta = y + x$

Проверка

Проверяем независимость переменных $якобиан$:

$$J = |\xi_x \quad \xi_y\ \eta_x \quad \eta_y| = |-1 \quad 1\ 1 \quad 1| = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0$$

✓ Переменные независимы!

Примеры для самостоятельного решения

Решите следующие задачи, применяя алгоритм из 7 шагов. Ответы приведены в конце, но сначала попробуйте решить сами!

Задача 1: Эллиптический тип $константы$

Привести к каноническому виду:

$$u_{xx} + 9u_{yy} = 0$$

Подсказка: Это очень похоже на пример из базовой практики, только коэффициенты другие.

Краткое решение:
- $A = 1, B = 0, C = 9$ → $\Delta = -9 < 0$ $эллиптический$
- Характеристическое: $(dy/dx)^2 + 9 = 0$ → $dy/dx = \pm 3i$
- Интегрируем: $y - 3ix = C_1$, $y + 3ix = C_2$
- $\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} = y$, $\eta = \frac{C_1 - C_2}{2i} = 3x$
- **Ответ:** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, где $\xi = y, \eta = 3x$

Задача 2: Параболический тип $константы$

Привести к каноническому виду:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

Подсказка: Обратите внимание на коэффициент перед u_{xy} — это $2B$.

Краткое решение:
- $A = 1, 2B = -4$ → $B = -2, C = 4$ → $\Delta = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 0$ $параболический$
- Характеристическое: $(dy/dx)^2 + 4(dy/dx) + 4 = 0$ → $(dy/dx + 2)^2 = 0$ → $dy/dx = -2$
- Интегрируем: $dy = -2dx$ → $y = -2x + C$ → $y + 2x = C$
- $\xi = y + 2x$ $характеристика$, $\eta = y$ $произвольная, независимая$
- **Ответ:** $u_{\eta\eta} = 0$, где $\xi = y + 2x, \eta = y$

Полное подробное решение задачи 2 $дляпроверки$

ШАГ 1: Определяем тип

Выписываем коэффициенты:
- $A = 1$ $коэффициентперед\$u_{xx}\$$
- $2B = -4$ → $B = -2$ $коэффициентперед\$u_{xy}\$$
- $C = 4$ $коэффициентперед\$u_{yy}\$$

Вычисляем дискриминант:

$$\Delta = B^2 - AC = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0$$

Ответ: Параболический тип ✓

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

$$1 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \cdot (-2) \cdot \frac{dy}{dx} + 4 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\frac{dy}{dx} + 4 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx} + 2\right)^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2$$

ШАГ 3: Интегрируем характеристику

$$dy = -2 \cdot dx$$

$$\int dy = \int (-2) dx$$

$$y = -2x + C$$

$$y + 2x = C$$

Характеристика: $y + 2x = C$

ШАГ 4: Новые переменные

$$\xi = y + 2x$$

$характеристика$

$$\eta = y$$

$произвольная, независимаяот\$\xi\$$

ШАГ 5: Производные

Первые производные:
- $\xi_x = \frac{\partial(y+2x)}{\partial x} = 2$
- $\xi_y = \frac{\partial(y+2x)}{\partial y} = 1$
- $\eta_x = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$
- $\eta_y = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$

Вторые производные *всеравнынулю, таккак$ξ$и$η$линейные***:**
- $\xi_{xx} = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\xi_{xy} = 0$
- $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{yy} = 0$, $\eta_{xy} = 0$

ШАГ 6: Выражаем старые производные через новые

Применяем полные шаблонные формулы:

Первые производные:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot 2 + u_\eta \cdot 0 = 2u_\xi$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 1 = u_\xi + u_\eta$$

Вторые производные *полнаяверсия***:**

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

Подставляем: $\xi_x = 2$, $\eta_x = 0$, $\xi_{xx} = 0$, $\eta_{xx} = 0$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 2^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 2 \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$

$$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} + 0 + 0 + 0 + 0 = 4u_{\xi\xi}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

Подставляем: $\xi_y = 1$, $\eta_y = 1$, $\xi_{yy} = 0$, $\eta_{yy} = 0$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1^2 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 0 + 0 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$$

Подставляем: $\xi_x = 2$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 0$, $\eta_y = 1$, $\xi_{xy} = 0$, $\eta_{xy} = 0$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot 2 \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + u_{\eta\eta} \cdot 0 \cdot 1 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0$$

$$u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \cdot 2 + 0 + 0 + 0 = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}$$

Итог шага 6:
- $u_{xx} = 4u_{\xi\xi}$
- $u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$
- $u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}$

ШАГ 7: Подставляем в исходное уравнение

Исходное уравнение: $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$

Подставляем найденные выражения:

$$4u_{\xi\xi} - 4(2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}) + 4(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0$$

Раскрываем скобки:

$$4u_{\xi\xi} - 8u_{\xi\xi} - 8u_{\xi\eta} + 4u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} = 0$$

Собираем подобные:

$$(4 - 8 + 4)u_{\xi\xi} + (-8 + 8)u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} = 0$$

$$0 \cdot u_{\xi\xi} + 0 \cdot u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} = 0$$

$$4u_{\eta\eta} = 0$$

Делим на 4:

$$u_{\eta\eta} = 0$$

ОТВЕТ

Канонический вид:

$$u_{\eta\eta} = 0$$

где $\xi = y + 2x$, $\eta = y$

⚠️ **ВАЖНО:** Если у вас получилось другое выражение, проверьте вычисление u_{xy} — там часто делают ошибку в коэффициенте перед $u_{\xi\eta}$!

Задача 3: Гиперболический тип $константы$

Привести к каноническому виду:

$$u_{xx} - 4u_{yy} = 0$$

Подсказка: Аналогично задаче 1, но тип другой.

Задача 4: Эллиптический тип $переменныекоэффициенты$

Привести к каноническому виду:

$$x^2u_{xx} + 4y^2u_{yy} = 0, \quad x > 0, y > 0$$

Подсказка: Используйте замену через логарифмы.

Краткое решение:
- $A = x^2, B = 0, C = 4y^2$ → $\Delta = -4x^2y^2 < 0$ $эллиптический$
- Характеристическое: $x^2(dy/dx)^2 + 4y^2 = 0$ → $dy/dx = \pm 2iy/x$
- Интегрируем: $\ln y = \pm 2i \ln x + C$ → $\ln y \mp 2i \ln x = C$
- Характеристики: $\ln y - 2i \ln x = C_1$, $\ln y + 2i \ln x = C_2$
- $\xi = \frac{C_1+C_2}{2} = \ln y$, $\eta = \frac{C_1-C_2}{2i} = 2\ln x$ → для удобства: $\xi = \ln x, \eta = \ln(2y)$
- **Ответ:** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta = 0$, где $\xi = \ln x, \eta = \ln(2y)$

Задача 5: Параболический тип $переменныекоэффициенты$

Привести к каноническому виду:

$$y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0, \quad x > 0, y > 0$$

Подсказка: Проверьте дискриминант — он должен быть равен нулю.

Краткое решение:
- $A = y^2, 2B = -2xy$ → $B = -xy, C = x^2$ → $\Delta = x^2y^2 - y^2x^2 = 0$ $параболический$
- Характеристическое: $y^2(dy/dx)^2 - 2xy(dy/dx) + x^2 = 0$ → $(y \cdot dy/dx - x)^2 = 0$ → $dy/dx = x/y$
- Интегрируем: $ydy = xdx$ → $y^2/2 = x^2/2 + C$ → $y^2 - x^2 = C$
- $\xi = y^2 - x^2$ $характеристика$, $\eta = x$ $произвольная, независимая$
- **Ответ:** $u_{\eta\eta} + (\text{младшие члены}) = 0$, где $\xi = y^2 - x^2, \eta = x$

Задача 6: Гиперболический тип $переменныекоэффициенты$

Привести к каноническому виду:

$$2yu_{xx} - 3xu_{yy} = 0, \quad x > 0, y > 0$$

Подсказка: Характеристики будут содержать степени x и y.

Краткое решение:
- $A = 2y, B = 0, C = -3x$ → $\Delta = 6xy > 0$ $гиперболический$
- Характеристическое: $2y(dy/dx)^2 - 3x = 0$ → $(dy/dx)^2 = 3x/(2y)$ → $dy/dx = \pm\sqrt{3x/(2y)}$
- Интегрируем: $\sqrt{2y}dy = \pm\sqrt{3x}dx$ → $\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} + C$
- Характеристики: $\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} = C_1$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} = C_2$

- Для удобства: $\xi = y^{3/2} - \sqrt{3/2}x^{3/2}$, $\eta = y^{3/2} + \sqrt{3/2}x^{3/2}$
- **Ответ:** $u_{\xi\eta} + (\text{младшие члены}) = 0$, где $\xi = y^{3/2} - \sqrt{3/2}x^{3/2}, \eta = y^{3/2} + \sqrt{3/2}x^{3/2}$

Ответы к примерам для самостоятельного решения

▶ **Нажмите, чтобы увидеть ответы**

📋 ТАБЛИЦА-АЛГОРИТМ: Все шаблонные формулы и правила

ШАГ 1: Определение типа

Что делаем	Формула/Правило
Выписываем коэффициенты	A — перед u_{xx} $2B$ — перед u_{xy} $внимание: \$2B\$!$ C — перед u_{yy}
Вычисляем дискриминант	$\Delta = B^2 - AC$
Определяем тип	$\Delta > 0$ → **Гиперболический** $\Delta = 0$ → **Параболический** $\Delta < 0$ → **Эллиптический**

ШАГ 2: Характеристическое уравнение

Что делаем	Формула $ШАБЛОН$
Составляем уравнение	$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$
Решаем	Находим $\frac{dy}{dx}$ $может быть комплексным для эллиптического типа$

ШАГ 3: Интегрирование характеристик

Тип	Что получаем	Как интегрировать
Эллиптический	Комплексные корни: $\frac{dy}{dx} = \pm ki$	$dy = \pm ki \cdot dx$ $\int dy = \pm ki \int dx$ $y = \pm kix + C$
Параболический	Один корень: $\frac{dy}{dx} = k$	$dy = k \cdot dx$ $y = kx + C$
Гиперболический	Два вещественных корня: $\frac{dy}{dx} = \pm k$	$dy = \pm k \cdot dx$ $y = \pm kx + C$

Результат: Получаем характеристики C_1 и $C_2 или одну$C$для параболического$

ШАГ 4: Выбор новых переменных ξ и η

Тип	Характеристики	Формулы для ξ и η $ШАБЛОН$
Эллиптический	$C_1 = \phi + i\psi$ $C_2 = \phi - i\psi$	$\xi = \frac{C_1 + C_2}{2}$ $действительнаячасть$ $\eta = \frac{C_1 - C_2}{2i}$ $мнимаячасть$
Параболический	Одна: $C = \phi(x, y)$	$\xi = \phi(x, y)$ $беремхарактеристику$ η = произвольная, **независимая** от ξ Обычно: $\eta = y$ или $\eta = x$
Гиперболический	Две: $C_1 = \phi_1$, $C_2 = \phi_2$	$\xi = C_1$ $перваяхарактеристика$ $\eta = C_2$ $втораяхарактеристика$

Проверка независимости: Якобиан $J = |\xi_x \quad \xi_y\ \eta_x \quad \eta_y| \neq 0$

ШАГ 5: Производные новых переменных

Что вычисляем	Формулы $ШАБЛОН$
Первые производные	$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}$ $\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$
Вторые производные	$\xi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\xi_x)$, $\xi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\xi_y)$, $\xi_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\xi_x)$ $\eta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\eta_x)$, $\eta_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\eta_y)$, $\eta_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(\eta_y)$

Важно: Если ξ и η линейные → все вторые производные = 0
Если нелинейные → нужно вычислять!

ШАГ 6: Выражение старых производных через новые

Производная	Формула $ШАБЛОН — ВСЕГДАОДИНАКОВАЯ$!
Первые производные	$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x$ $u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y$
Вторые производные $ПОЛНАЯВЕРСИЯ$	$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$ $u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$ $u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$

Как использовать:
1. Подставляете значения $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ из шага 5
2. Подставляете значения $\xi_{xx}, \xi_{yy}, \xi_{xy}, \eta_{xx}, \eta_{yy}, \eta_{xy}$ из шага 5
3. Если вторые производные = 0 → члены с $u_\xi \cdot \xi_{xx}$ и т.д. обнуляются
4. Если вторые производные ≠ 0 → эти члены остаются $младшиечлены$

ШАГ 7: Подстановка в исходное уравнение

Что делаем	Инструкция
Подставляем	Заменяем u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} в исходном уравнении на выражения из шага 6
Упрощаем	Раскрываем скобки, собираем подобные члены
Результат	Получаем канонический вид $см.\ таблицуниже$

Канонические виды $результат$

Тип	Канонический вид
Эллиптический	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0\ или + младшиечлены$
Параболический	$u_{\eta\eta} = 0\ или + младшиечлены$
Гиперболический	$u_{\xi\eta} = 0\ или + младшиечлены$

⚠️ Важные замечания

Ситуация	Что делать
Константные коэффициенты	Обычно получается чистый канонический вид без младших членов
Переменные коэффициенты	После приведения остаются младшие члены с u_ξ, u_η и без производных — это нормально!
Проверка независимости	Всегда проверяйте: $J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$

Итоговая шпаргалка

Канонические виды

Тип	Канонический вид
Эллиптический	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$
Параболический	$u_{\eta\eta} = 0$
Гиперболический	$u_{\xi\eta} = 0$

Алгоритм $краткаяверсия$

1. Вычислить $\Delta = B^2 - AC$ → определить тип
2. Составить $A(dy/dx)^2 - 2B(dy/dx) + C = 0$
3. Решить → найти dy/dx
4. Проинтегрировать → найти характеристики
5. Ввести ξ и η на основе характеристик $потаблицевыше$
6. Найти $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ и вторые производные
7. Выразить u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} через $u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}$ $пошаблоннымформулам$
8. Подставить в исходное уравнение → получить канонический вид

Важные замечания

1. **При константных коэффициентах** обычно получается чистый канонический вид без младших членов.

2. **При переменных коэффициентах** после приведения остаются младшие члены с u_ξ, u_η и без производных.

3. **Для эллиптического типа** с комплексными характеристиками: выделяем действительную и мнимую части как ξ и η.

4. **Для параболического типа** вторая переменная η выбирается произвольно, но так, чтобы ξ и η были независимы $\textit{якобиан}\$ \neq 0\$$.

5. **Для гиперболического типа** можно получить либо $u_{\xi\eta} = 0$, либо $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$ в зависимости от выбора переменных.

6. **Всегда проверяйте независимость** новых переменных через якобиан:

$$J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = |\xi_x \quad \xi_y\, \eta_x \quad \eta_y| \neq 0$$

Удачи на контрольной! 🎓