

Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Бондаренко Анна Андреевна

ТЕМА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель:

Ряховский Алексей Васильевич, доцент

Студент гр. № 601-31

Бондаренко Анна Андреевна

Сургут 2023 г.

Лабораторная работа №1. Числовые последовательности.

Задание

Вычислить пределы данных числовых последовательностей двумя способами:

- аналитически
- используя библиотеки Python для символьных вычислений.

Для каждой числовой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ на одном рисунке построить (используя графические пакеты Python) следующие множества точек ($k = 1, \dots, m$):

- $(k, 0)$ – синий цвет
- $(0, x_k)$ – зеленый цвет
- (k, x_k) – красный цвет

В случае, если последовательность сходится, построить на соответствующем рисунке точку (оранжевый цвет) изображающую предел последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В задаче 1 для сходящихся последовательностей, для заданного $\varepsilon > 0$ найти такой номер $n(\varepsilon)$, начиная с которого $|x_k - A| < \varepsilon, \forall k \geq n(\varepsilon)$

Аналитическое решение

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-4}{n^2+11}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 4) = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 11) = +\infty$

Поскольку выражение $\frac{\infty}{\infty}$ является неопределенностью, преобразуем его, деля каждое слагаемое в числителе и знаменателе на старшую степень, в данном случае это n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-4}{n^2+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-4}{n^2}}{\frac{n^2+11}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{11}{n^2}}$$

Вычислим предел числителя, вычисляя предел каждого слагаемого:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} \right)$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} = 0$

Следовательно: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} \right) = 0 - 0 = 0$

Аналогично для знаменателя: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{11}{n^2} \right) = 1$

Таким образом, предел числителя равен 0, а предел знаменателя равен 1. Отношение бесконечно малой к сходящейся последовательности является бесконечно малой, поэтому предел будет равен 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-4}{n^2+11} = 0$$

Ответ: 0

Найдем номер n_ε :

$$\varepsilon = 0.001$$

$$\left| \frac{n-4}{n^2+11} \right| < 0.001$$

$$\frac{n-4}{n^2+11} < \frac{n-4}{n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < 0.001$$

Ответ: $n_\varepsilon < 1000$

Программное решение

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import *
```

```

def sequence(n):
    return (n-4) / (n**2 + 11)

def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m+1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$$(k, 0)$')

    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$$(0, x_k)$')

    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$$(k, x_k)$')

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 7 # number of points
plot_points(m)

n = Symbol("n")
a = limit((n-4)/(n**2+11), n, oo)
print(a)

```

Иллюстрация решения

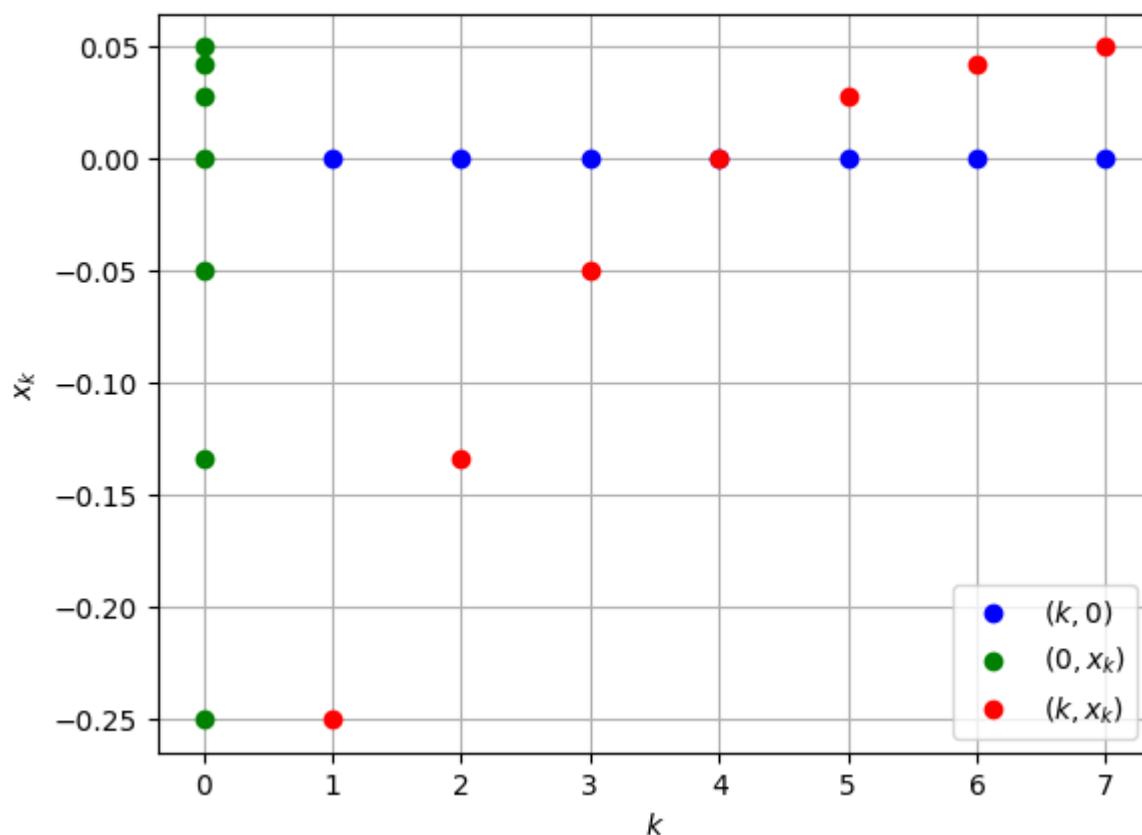


Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

```
PS C:\Users\Анна\Documents\GitHub\programming> & C:/Users/Анна/AppData/Local/Microsoft/WindowsApps/python3.11.exe c:/Users/Анна/Documents/GitHub/programming/math0/mathlab0.py
0
```

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

Задача 2

Аналитическое решение

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{8n^3-1}}{\sqrt[n]{2n-1}}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{8n^3} - 1) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2n} - 1) = 0$

Поскольку выражение $\frac{0}{0}$ является неопределенностью, преобразуем его, раскрывая формулу разности кубов в числителе, и сократим одинаковые скобки в числителе и знаменателе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{8n^3-1}}{\sqrt[n]{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{2n-1})(\sqrt[n]{4n^2} + \sqrt[n]{2n} + 1)}{\sqrt[n]{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{4n^2} + \sqrt[n]{2n} + 1)$$

Вычислим предел, вычисляя предел каждого слагаемого:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{4n^2} + \sqrt[n]{2n} + 1)$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4n^2} = 1$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n} = 1$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

Следовательно: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{4n^2} + \sqrt[n]{2n} + 1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{4n^2} + \sqrt[n]{2n} + 1) = 3$$

Ответ: 3

Программное решение

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import *

def sequence(n):
    return ((8*n**3)**(1/n) - 1) / ((2*n)**(1/n) - 1)

def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m+1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$ (k, 0) $')

    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$ (0, x_k) $')

    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$ (k, x_k) $')

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 5 # number of points
plot_points(m)

n = Symbol("n")
a = limit(((8*n**3)**(1/n) - 1) / ((2*n)**(1/n) - 1), n, oo)
```

```
print(a)
```

Иллюстрация решения

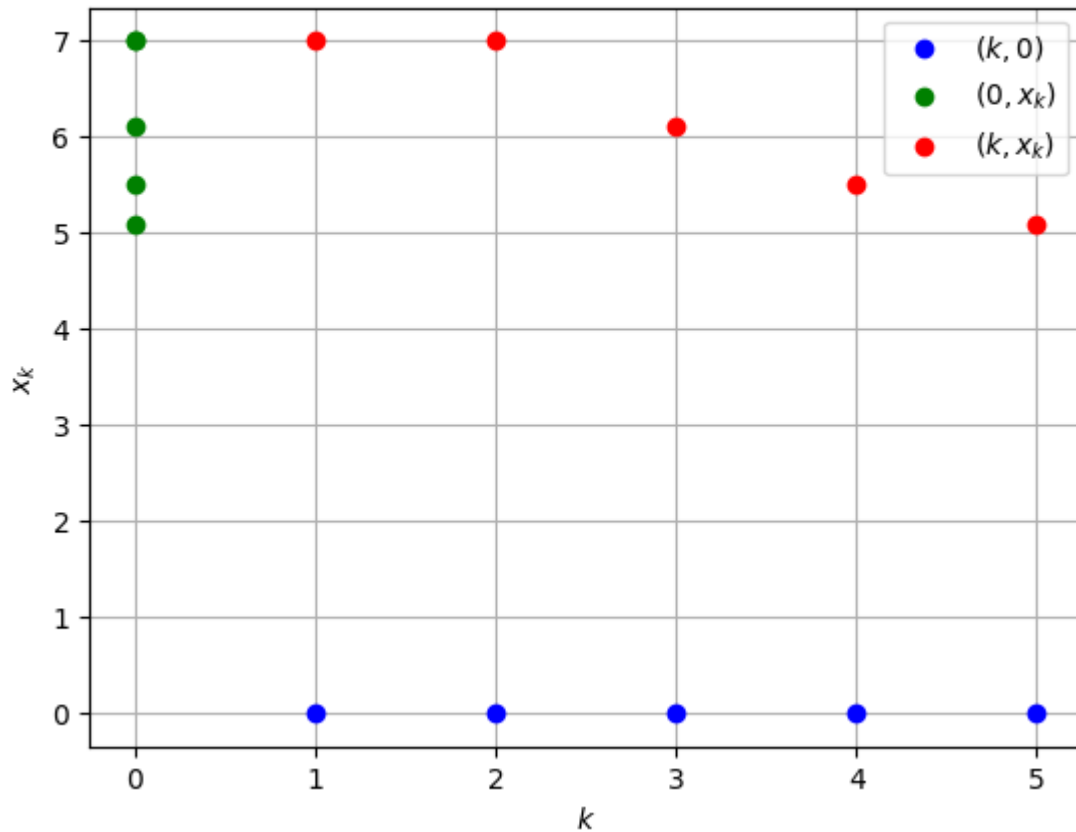


Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

```
PS C:\Users\Анна\Documents\GitHub\programming> & C:/Users/Анна/AppData/Local/Microsoft/windowsApps/python3.11.exe c:/Users/Анна/Documents/GitHub/pro  
gramming/math0/mathlab0.py  
3
```

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

Задача 3

Аналитическое решение

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{3n+1} - \frac{2n^2+3}{6n-1} \right)$$

Сложим дроби в пределе:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{3n+1} - \frac{2n^2+3}{6n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(6n-1) - (3n+1)(2n^2+3)}{(3n+1)(6n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2-9n-3}{18n^2+3n-1}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (-3n^2 - 9n - 3) &= -\infty \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (18n^2 + 3n - 1) &= +\infty \end{aligned}$$

Поскольку выражение $\frac{-\infty}{+\infty}$ является неопределенностью, преобразуем его, деля каждое слагаемое в числителе и знаменателе на старшую степень, в данном случае это n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2-9n-3}{18n^2+3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3n^2-9n-3}{n^2}}{\frac{18n^2+3n-1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3-\frac{9}{n}-\frac{3}{n^2}}{18+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

Вычислим предел числителя, вычисляя предел каждого слагаемого:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-3 - \frac{9}{n} - \frac{3}{n^2} \right) \\ \circ \lim_{n \rightarrow \infty} (-3) &= -3 \\ \circ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{9}{n} \right) &= 0 \\ \circ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{n^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-3 - \frac{9}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = -3 - 0 - 0 = -3$$

$$\text{Аналогично для знаменателя: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(18 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 18$$

Таким образом, предел числителя равен -3 , а предел знаменателя равен 18 , поэтому предел будет равен $-\frac{1}{6}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{3n+1} - \frac{2n^2+3}{6n-1} \right) = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{6}$$

Программное решение

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import *

def sequence(n):
```



```

return ((n**2) / (3*n + 1)) - ((2*n**2 + 3) / (6*n - 1))

def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m+1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$ (k, 0)$')

    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$ (0, x_k)$')

    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$ (k, x_k)$')

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 7 # number of points
plot_points(m)

n = Symbol("n")
a = limit(((n**2) / (3*n + 1)) - ((2*n**2 + 3) / (6*n - 1)), n, oo)
print(a)

```

Иллюстрация решения

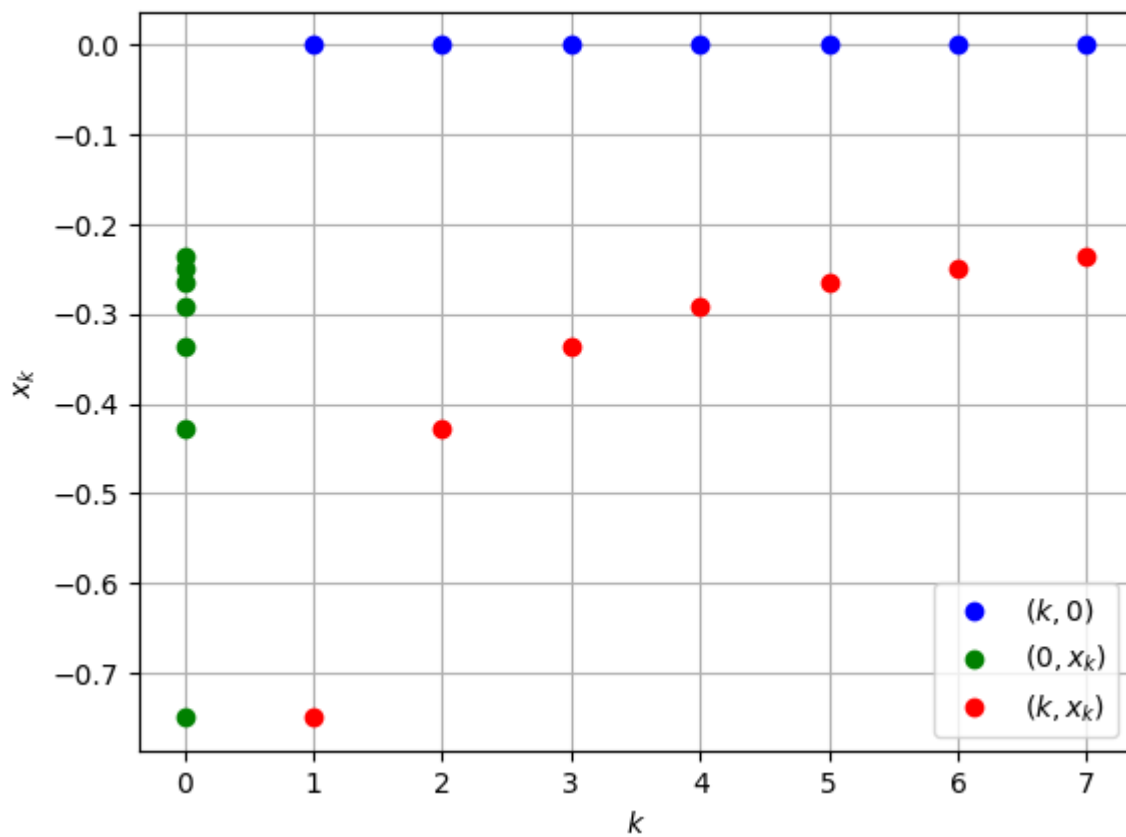


Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

```
PS C:\Users\Анна\Documents\GitHub\programming> & C:/Users/Анна/AppData/Local/Microsoft/WindowsApps/python3.11.exe c:/Users/Анна/Documents/G
itHub/programming/math0/mathlab0.py
-1/6
```

Рис. 2. Вывод программы в терминале.