Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Бондаренко Анна Андреевна

Числовые последовательности

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель:

Ряховский Алексей Васильевич, доцент

Студент гр. № 601-31

Бондаренко Анна Андреевна

Сургут 2023 г.

Лабораторная работа №2.

Задание

1. Аналитически найти область определения функций, а затем построить их графики, используя графические пакеты Python. Для каждой из функций график построить на отдельном рисунке.
2. Вычислить пределы данных функций двумя способами: аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений. Используя графические пакеты Python, построить графики функций, иллюстрирующие поведение функций в окрестностях тех точек, в которых вычисляется предел. Если предел существует, построить на соответствующем рисунке точку, изображающую предел данной функции.
3. Найти (аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений) точки разрыва функции и определить их тип. Используя графические пакеты Python построить графики функций, иллюстрирующие поведение функций в окрестностях точек разрыва.

Задача 1

Найти область определения и построить графики следующих функций:

$\frac{x}{x-2}$, $arcsin(\frac{2}{x+3})$

Найдем область определения первой функции:

$\frac{x}{x-2}$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x \neq 2$$

Отсюда следует, что $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Найдем область определения второй функции:

$arcsin(\frac{2}{x+3})$

Область определения арксинуса это все значения x, при которых аргумент принадлежит промежутку $[-1, 1]$:

$\frac{2}{x+3} \in [-1, 1]$

Решим систему:

$$\begin{cases}\frac{2}{x+3} \geq -1\\ \frac{2}{x+3} \leq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2+x+3}{x+3} \geq 0\\ \frac{2-(x+3)}{x+3} \leq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5+x}{x+3} \geq 0\\ \frac{-1-x}{x+3} \leq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5+x \geq 0\\ x+3 > 0\end{cases}\\ \begin{cases}5+x \leq 0\\ x+3 < 0\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1-x \leq 0\\ x+3 > 0\end{cases}\\ \begin{cases}-1-x \geq 0\\ x+3 < 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 5\\ x > -3\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq -5\\ x < -3\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq -1\\ x > -3\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq -1\\ x < -3\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

Найдем объединение и пересечение всех получившихся промежутков:

$x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$

Построим графики данных функций

Программа:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sp
from sympy import Symbol,limit
from math import pi,log


def pic1():
    x = [round(i, 2) for i in np.arange(-20, 21, 0.1)]
    y = [round((i/(i-2)),2) for i in x]
    plt.plot(x, y, linewidth=2, color='red')
    plt.title('График функции x/(x-2)', fontsize=15)
    plt.xlabel('x', fontsize=14)
    plt.ylabel('y', fontsize=14)
    plt.grid(True)
def pic2():
    x = np.linspace(-15,11,1000)
    y = np.arcsin(2/(x+3))
    plt.plot(x, y, linewidth=2, color='blue')
    plt.title('График функции arcsin(2/(x+3))', fontsize=15)
    plt.xlabel('x', fontsize=14)
    plt.ylabel('y', fontsize=14)
    plt.grid(True)

plt.figure()
pic1()
plt.figure()
pic2()
plt.show()
```

Результат работы программы:

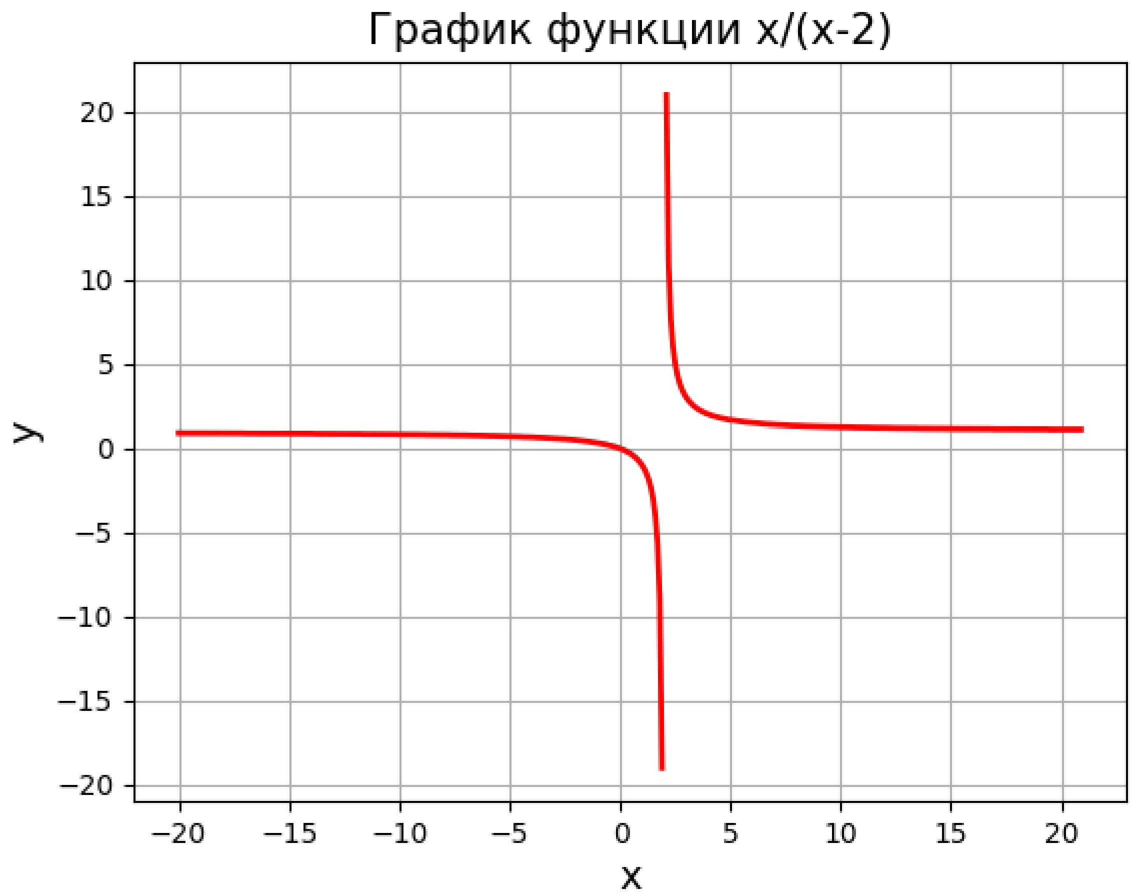

График функции x/(x-2)
y
x
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20

Рис. 1.

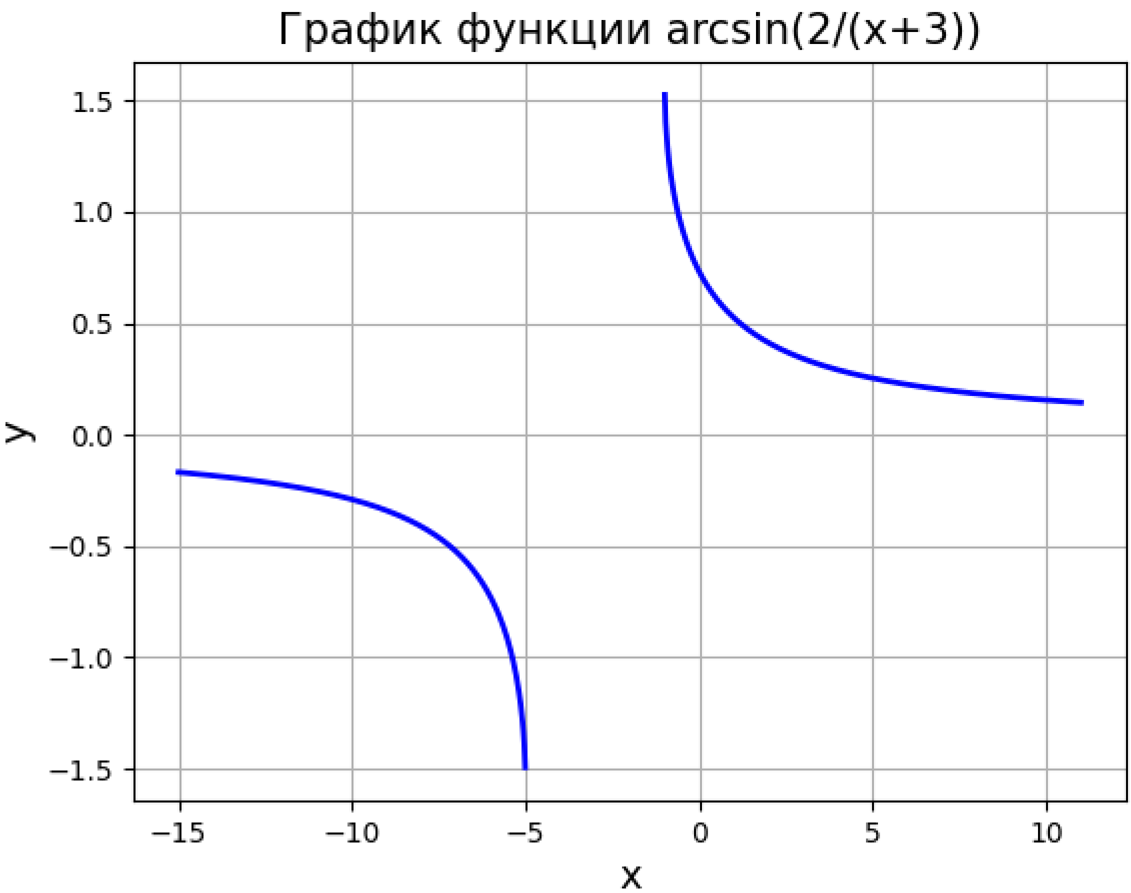

График функции arcsin(2/(x+3))
y
x
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−15
−10
−5
0
5
10

Рис. 2.

Задача 2

Вычислить пределы данных функций двумя способами: аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений. Используя графические пакеты Python, построить графики функций, иллюстрирующие поведение функций в окрестностях тех точек, в которых вычисляется предел. Если предел существует, построить на соответствующем рисунке точку, изображающую предел данной функции.

Функция: $\frac{xtgx}{\pi - x}$

Вычислим предел этой функции

$$\lim_{x \to \pi} \frac{xtgx}{\pi - x}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim_{x \to \pi} xtgx = 0$
- $\lim_{x \to \pi} (\pi - x) = 0$

Поскольку выражение $\frac{0}{0}$ является неопределенностью, преобразуем его с помощью замены переменных:

$$y = \pi - x \to x = \pi + y$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{xtgx}{\pi - x} = \lim_{y \to 0} \frac{(\pi + y)tg(\pi + y)}{\pi - (\pi + y)}$$

Воспользуемся правилом приведения: $tg(\pi + y) = tgy$

$$\lim_{y \to 0} \frac{(\pi + y)tg(\pi + y)}{\pi - (\pi + y)} = -\lim_{y \to 0} \frac{(\pi + y)tgy}{y}$$

Воспользуемся следствием из первого замечательного предела:

$$-\lim_{y \to 0} \frac{(\pi + y)tgy}{y} = -\lim_{y \to 0} (\pi + y) = -\pi$$

Программа для вычиления предела заданной функции и построения графика функции:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sp
from sympy import Symbol,limit
```

```python
from math import pi,log


x1 = np.linspace(-np.pi/2 + 0.01, np.pi/2 - 0.01, 1000)
y1 = x1 * np.tan(x1) / (np.pi - x1)
x2 = np.linspace(np.pi/2 + 0.01, np.pi - 0.01, 1000)
y2 = x2 * np.tan(x2) / (np.pi - x2)
x3 = np.linspace(np.pi + 0.01, 3*np.pi/2 - 0.01)
y3 = x3 * np.tan(x3) / (np.pi - x3)
x4 = np.linspace(3*np.pi/2 + 0.01, 2*np.pi - 0.01)
y4 = x4 * np.tan(x4) / (np.pi - x4)

n = Symbol('n')
a = limit(n * sp.tan(n) / (sp.pi - n), n, sp.pi)
print(a)

plt.plot(x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, color='red')
plt.plot(pi,a,'o', color='orange')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Результат работы программы:

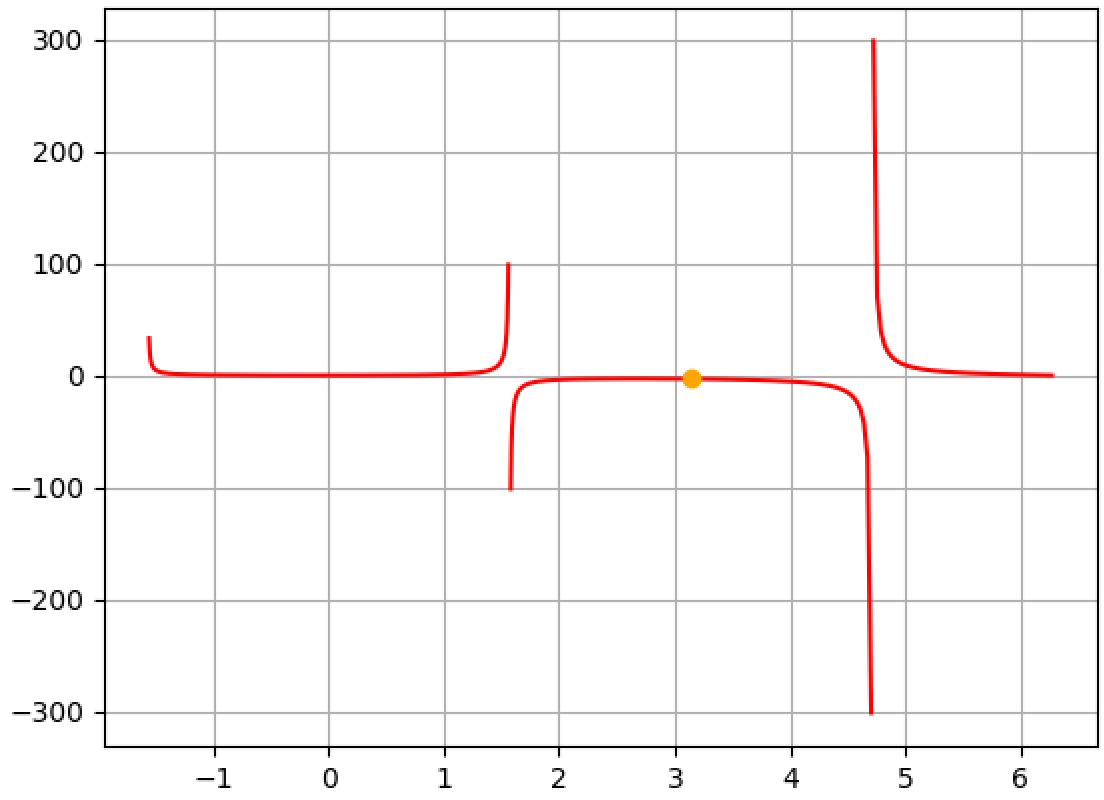

Рис. 3. График функции и предел данной функции.

```
PS C:\Users\Анна\Documents\GitHub\programming> & C:/Users/Анна/AppData/Local/Microsoft/WindowsApps/python3.11.exe c:/Users/Анна/Documents/GitHub/programming/math1/mathlab1.py
-pi
```

Рис. 4. Вывод результата в терминале.

Задача 3

Найти (аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений) точки разрыва функции и определить их тип. Используя графические пакеты Python построить графики функций, иллюстрирующие поведение функций в окрестностях точек разрыва.

Функция:

$$f(x) = \begin{cases} ln(1-x), \text{если } x < 1 \\ x^2 - x, \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем пределы этой функции при x стремящемся к 1 слева и справа

Предел слева:

$$\lim_{x \to 1-0} ln(1-x)$$

Логарифм в нуле неопределен, следовательно, точка с координатами $(1, 0)$ является асимптотой графика функции $ln(1-x)$. Функция $ln(1-x)$ - убывающая, следовательно:

$$\lim_{x \to 1-0} ln(1-x) = -\infty$$

Предел справа:

$$\lim_{x \to 1+0} (x^2 - x) = 0$$

Эти два односторонних предела не равны между собой, а предел функции слева не является конечным, значит точка 1 является точкой разрыва 2-го рода.

Программа для вычисления односторонних пределов и построения графика функции:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sp
from sympy import Symbol,limit
from math import pi,log
```

```
x1 = np.linspace(-10,0.99999, 1000)
y1 = np.log(1 - x1)
x2 = np.linspace(1, 10, 1000)
y2 = [i*i - i for i in x2]
n = Symbol('n')
lp = limit(sp.log(1 - n), n, 1, dir='-')
rp = limit(n*n - n, n, 1, dir='+')
print(f" Предел функции слева {lp}, справа {rp}")
plt.plot(x1,y1,x2,y2, color='red')
plt.plot(1,1,'ro', color='orange')
plt.text(-2.5,10, 'Точка разрыва')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Результат работы программы:

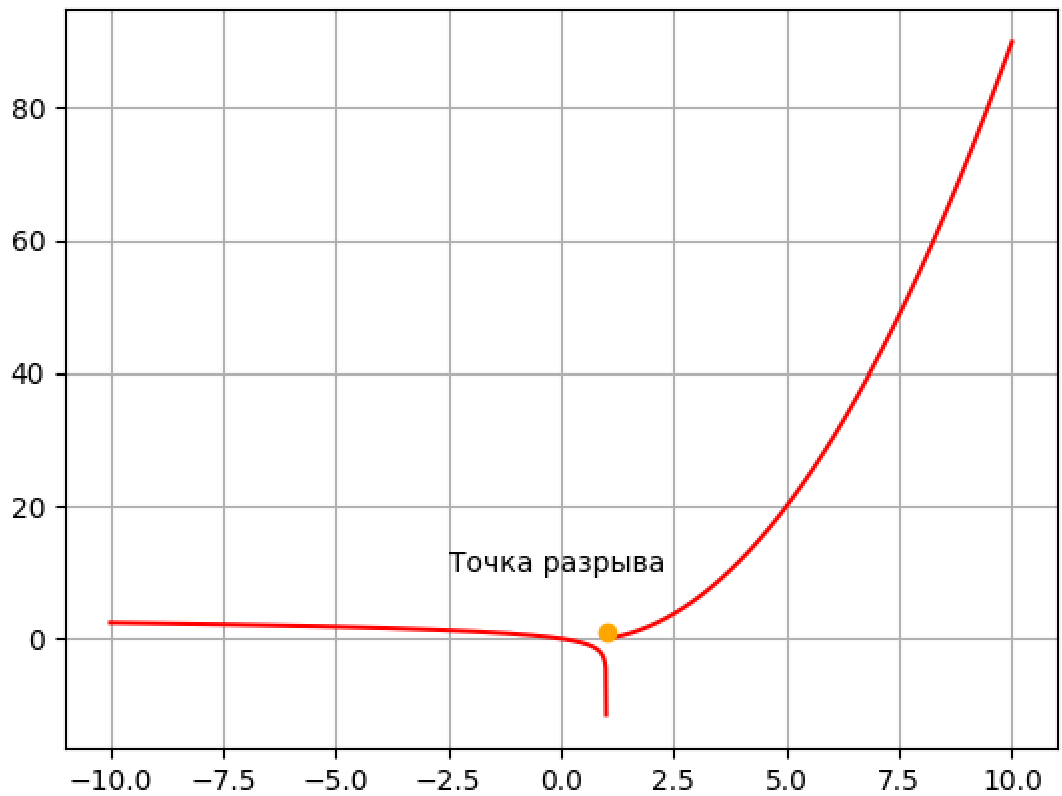

Рис. 5. График функции и точка разрыва данной функции.

```
PS C:\Users\Анна\Documents\GitHub\programming> & C:/Users/Анна/AppData/Local/Microsoft/WindowsApps/python3.11.exe c:/Users/Анна/Documents/GitHub/programming/math1/mathlab1.py
 Предел функции слева -oo, справа 0
```

Рис. 6. Вывод результата в терминале.