Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Бондаренко Анна Андреевна

ТЕМА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель:

Ряховский Алексей Васильевич, доцент

Студент гр. № 601-31

Бондаренко Анна Андреевна

Сургут 2023 г.

Лабораторная работа №1. Числовые последовательности.

Задание

Вычислить пределы данных числовых последовательностей двумя способами:

- аналитически
- используя библиотеки Python для символьных вычислений.

Для каждой числовой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ на одном рисунке построить (используя графические пакеты Python) следующие множества точек ($k = 1, \ldots, m$):

- (k, 0) – синий цвет
- (0, x_k) – зеленый цвет
- (k, x_k) – красный цвет

В случае, если последовательность сходится, построить на соответствующем рисунке точку (оранжевый цвет) изображающую предел последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В задаче 1 для сходящихся последовательностей, для заданного $\varepsilon > 0$ найти такой номер $n(\varepsilon)$, начиная с которого $|x_k - A| < \varepsilon, \forall k \geq n(\varepsilon)$

Аналитическое решение

Рассмотрим предел:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-4}{n^2+11}$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(n-4) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+11) = +\infty$

Поскольку выражение $\frac{\infty}{\infty}$ является неопределенностью, преобразуем его, деля каждое слагаемое в числителе и знаменателе на старшую степень, в данном случае это n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-4}{n^2+11} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-4}{n^2}}{\frac{n^2+11}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{11}{n^2}}$$

Вычислим предел числителя, вычисляя предел каждого слагаемого:

- $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2})$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 0$

Следовательно: $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}) = 0 - 0 = 0$

Аналогично для знаменателя: $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{11}{n^2}) = 1$

Таким образом, предел числителя равен 0, а предел знаменателя равен 1. Отношение бесконечно малой к сходящейтся последовательности является бесконечно малой, поэтому предел будет равен 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-4}{n^2+11} = 0$$

Ответ: 0

Найдем номер n_ε:

$$\varepsilon = 0.001$$

$$|\frac{n-4}{n^2+11}| < 0.001$$

$$\frac{n-4}{n^2+11} < \frac{n-4}{n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < 0.001$$

Ответ: $n_\varepsilon > 1000$

Программное решение

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import *
```

```python
def sequence(n):
    return (n-4) / (n**2 + 11)

def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m+1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')

    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')

    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 7  # number of points
plot_points(m)

n = Symbol("n")
a = limit((n-4)/(n**2+11), n, oo)
print(a)
```

Иллюстрация решения

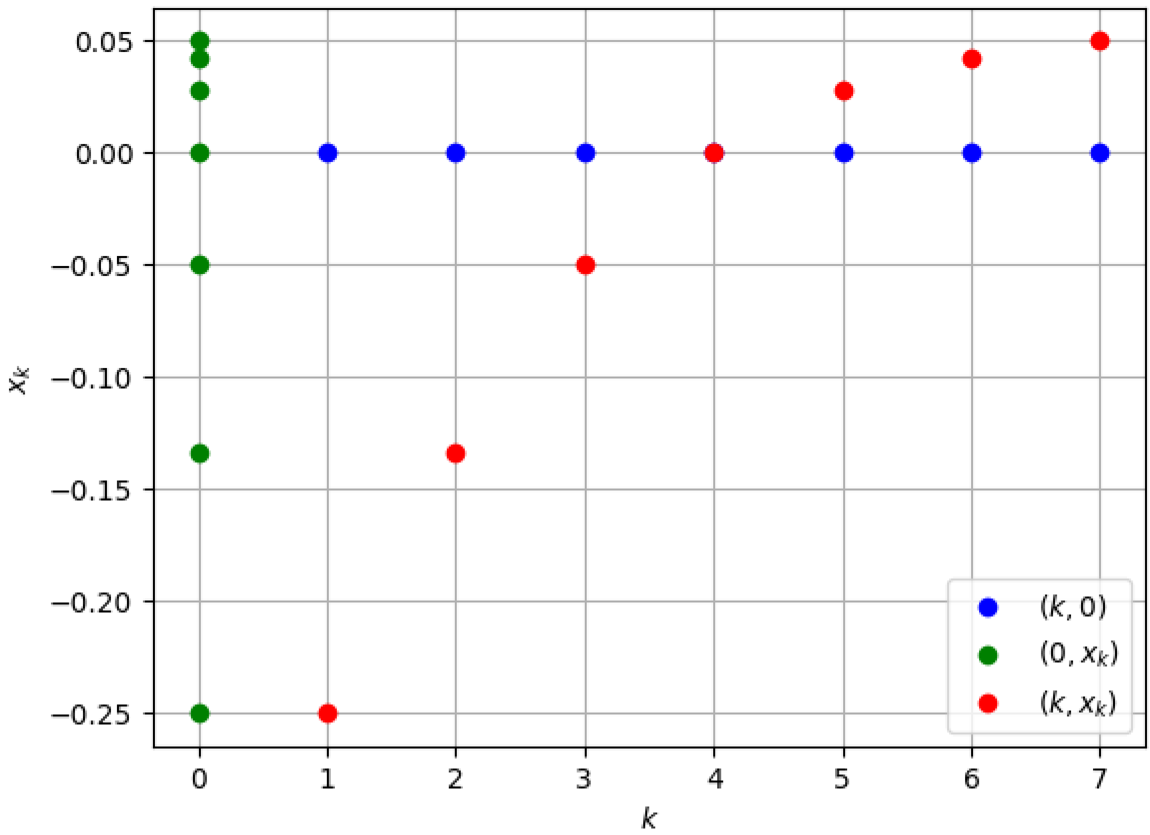

Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

```
PS C:\Users\Анна\Documents\GitHub\programming> & C:/Users/Анна/AppData/Local/Microsoft/WindowsApps/python3.11.exe c:/Users/Анна/Documents/GitHub/programming/math0/mathlab0.py
0
```

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

Задача 2

Аналитическое решение

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8n^3}-1}{\sqrt[n]{2n}-1}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{8n^3} - 1) = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2n} - 1) = 0$

Поскольку выражение $\frac{0}{0}$ является неопределенностью, преобразуем его, раскрывая формулу разности кубов в числителе, и сократим одинаковые скобки в числителе и знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8n^3}-1}{\sqrt[n]{2n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{2n}-1)(\sqrt[n]{4n^2}+\sqrt[n]{2n}+1)}{\sqrt[n]{2n}-1} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{4n^2}+\sqrt[n]{2n}+1)$$

Вычислим предел, вычисляя предел каждого слагаемого:

- $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{4n^2}+\sqrt[n]{2n}+1)$
    - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^2} = 1$
    - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = 1$
    - $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Следовательно: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{4n^2}+\sqrt[n]{2n}+1) = 1+1+1 = 3$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{4n^2}+\sqrt[n]{2n}+1) = 3$$

Ответ: 3

Программное решение

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import *

def sequence(n):
    return ((8*n**3)**(1/n) - 1) / ((2*n)**(1/n) - 1)

def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m+1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')

    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')

    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 5  # number of points
plot_points(m)

n = Symbol("n")
a = limit(((8*n**3)**(1/n) - 1) / ((2*n)**(1/n) - 1), n, oo)
```

```
print(a)
```

```
```

Иллюстрация решения

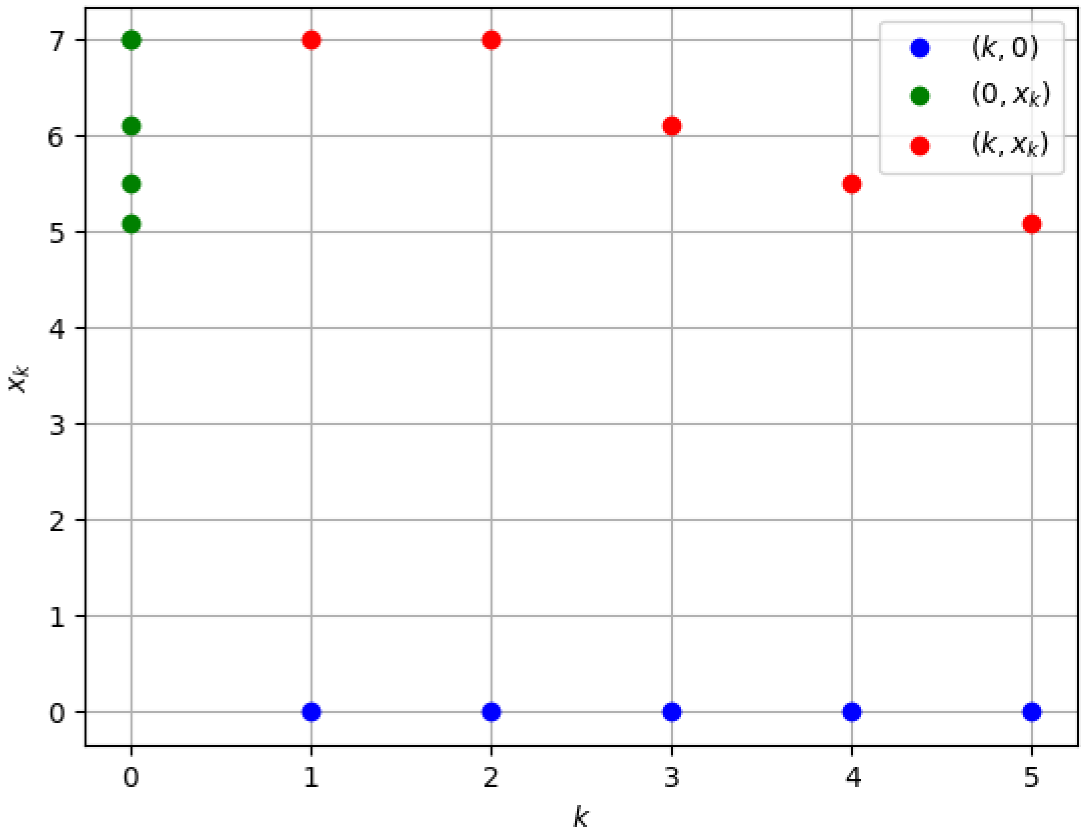

Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

```
PS C:\Users\Анна\Documents\GitHub\programming> & C:/Users/Анна/AppData/Local/Microsoft/WindowsApps/python3.11.exe c:/Users/Анна/Documents/GitHub/pro
gramming/math0/mathlab0.py
3
```

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

Задача 3

Аналитическое решение

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3n+1} - \frac{2n^2+3}{6n-1}\right)$$

Сложим дроби в пределе:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2}{3n+1} - \frac{2n^2+3}{6n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(6n-1)-(3n+1)(2n^2+3)}{(3n+1)(6n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^2-9n-3}{18n^2+3n-1}$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(-3n^2 - 9n - 3) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(18n^2 + 3n - 1) = +\infty$

Поскольку выражение $\frac{-\infty}{+\infty}$ является неопределенностью, преобразуем его, деля каждое слагаемое в числителе и знаменателе на старшую степень, в данном случае это n^2:

$$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^2-9n-3}{18n^2+3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{-3n^2-9n-3}{n^2}}{\frac{18n^2+3n-1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3-\frac{9}{n}-\frac{3}{n^2}}{18+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

Вычислим предел числителя, вычисляя предел каждого слагаемого:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(-3 - \frac{9}{n} - \frac{3}{n^2})$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(-3) = -3$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{9}{n}) = 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{3}{n^2}) = 0$

Следовательно: $\lim\limits_{n\to\infty}(-3 - \frac{9}{n} - \frac{3}{n^2}) = -3 - 0 - 0 = -3$

Аналогично для знаменателя: $\lim\limits_{n\to\infty}(18 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}) = 18$

Таким образом, предел числителя равен -3, а предел знаменателя равен 18, поэтому предел будет равен $-\frac{1}{6}$:

$$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2}{3n+1} - \frac{2n^2+3}{6n-1}) = -\frac{1}{6}$$

Ответ: $-\frac{1}{6}$

Программное решение

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import *

def sequence(n):
```

```
    return (((n**2) / (3*n + 1)) - ((2*n**2 + 3) / (6*n - 1)))

def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m+1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')

    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')

    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 7  # number of points
plot_points(m)

n = Symbol("n")
a = limit(((n**2) / (3*n + 1)) - ((2*n**2 + 3) / (6*n - 1)), n, oo)
print(a)
```

Иллюстрация решения

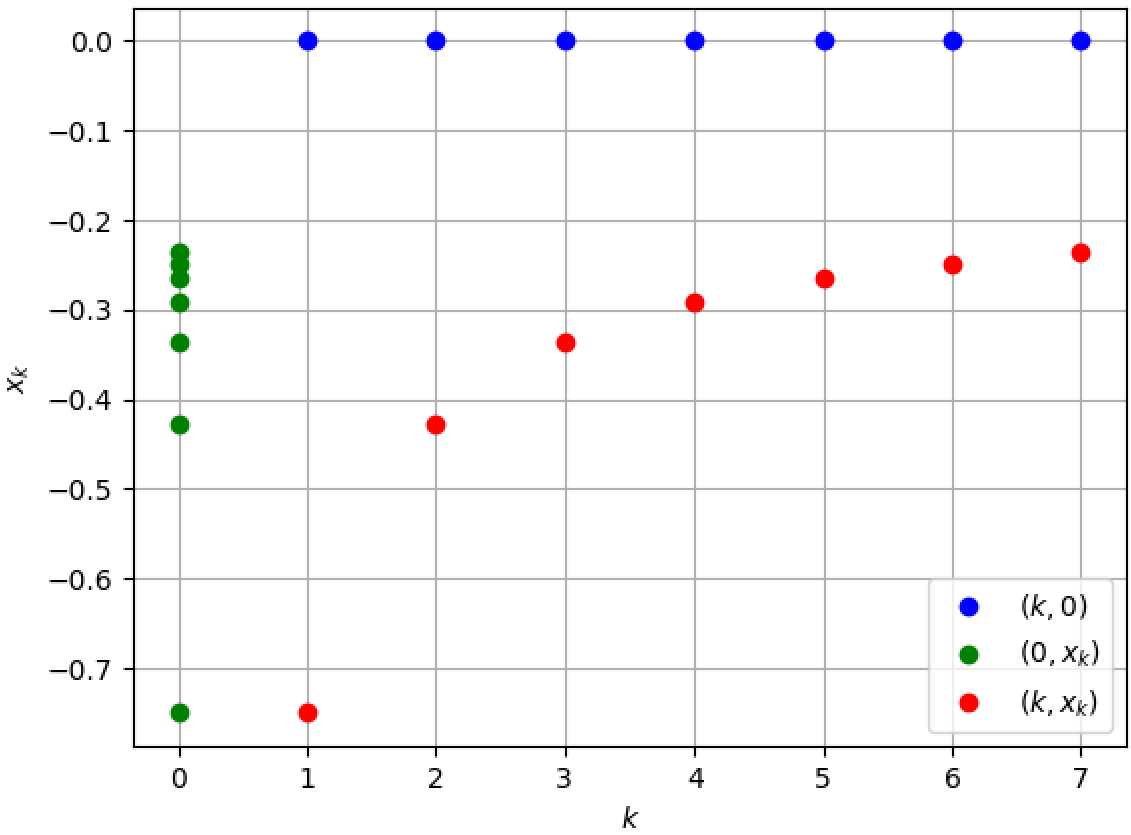

Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

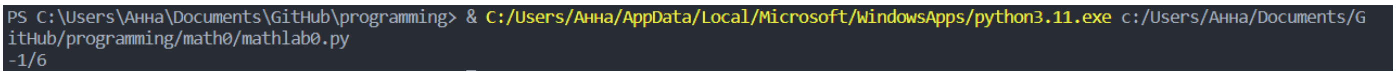

Рис. 2. Вывод программы в терминале.