

지오지브라로 푸는 기하 문제

강사: 차형준

2022.6 고3 모의고사 기하 23번

- 쉬운 문제
- 벡터를 지오지브라에 그려보자.
- \vec{a}, \vec{b} 벡터는 아무거나
- k 는 슬라이드로 만들고 구간을 $[2, 10]$ 간격을 1로
- k 뒤를 띄어 써야 제대로 슬라이드가 나옵니다.

23. 서로 평행하지 않은 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 두 벡터

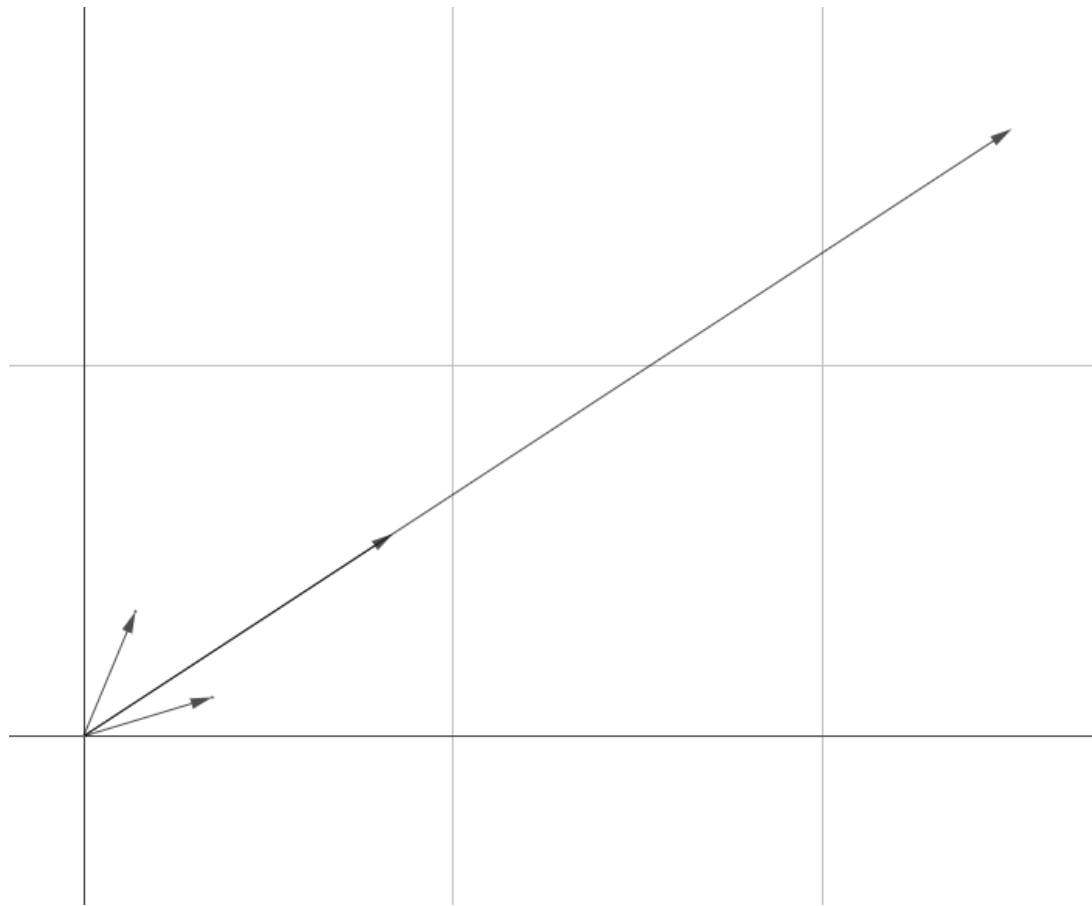
$$\vec{a} + 2\vec{b}, \quad 3\vec{a} + k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k 의 값은? (단, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$)
[2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2022.6 고3 모의고사 기하 23번

- k 를 움직여보면서 언제 평행해지는지 찾아보자.

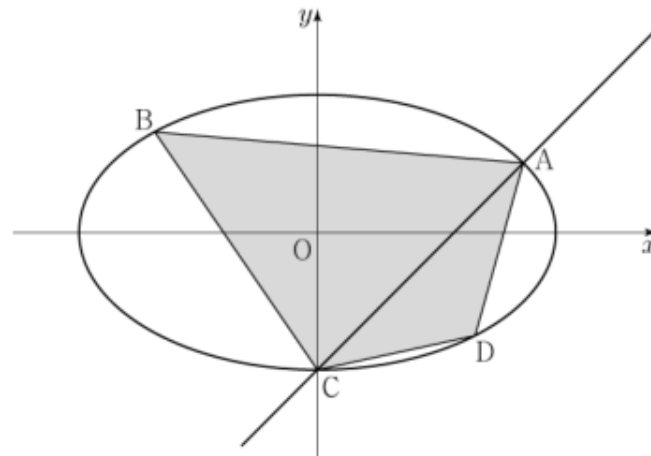


2022.6 고3 모의고사 기하 26번










- 타원은 방정식으로 그리기
- 직선 그리기
- 타원 위의 점 2개 찍기
- 다각형 툴로 사각형 그리기
- 언제 최대가 되는지
점을 움직여 관찰하기

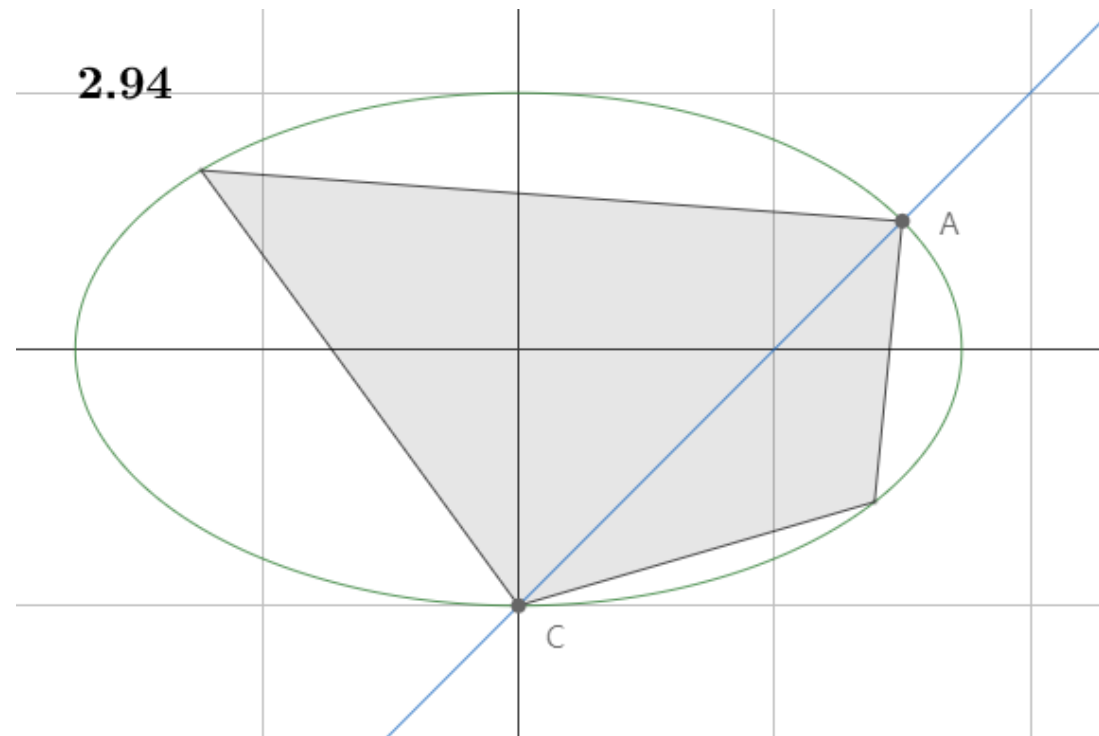
26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 과 직선 $y = x - 1$ 이 만나는
두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이
되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의
넓이의 최댓값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



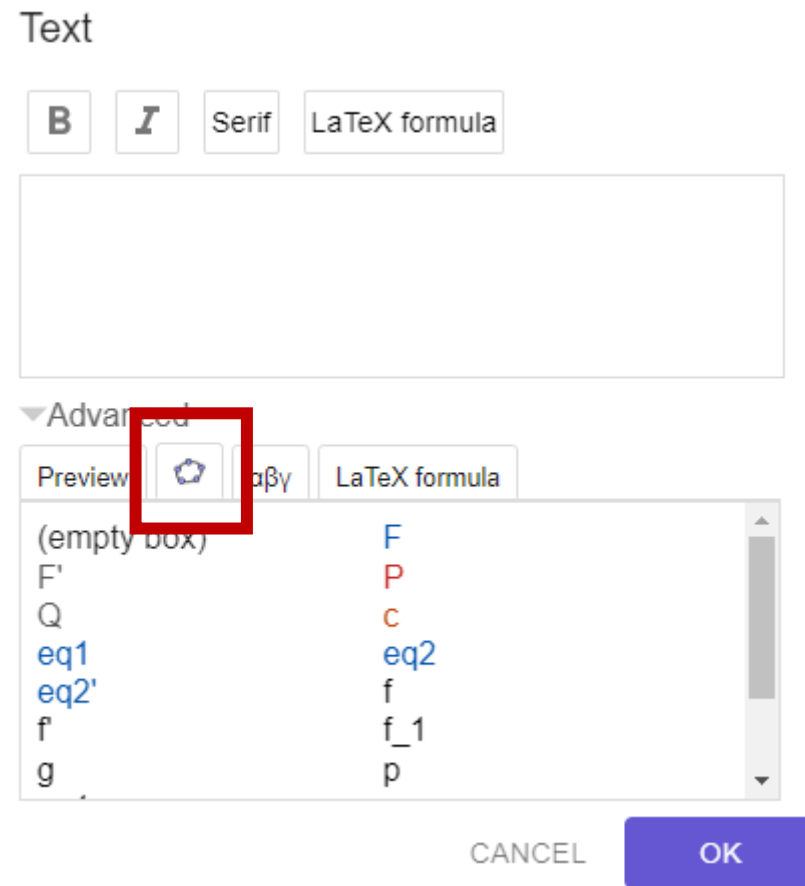
2022.6 고3 모의고사 기하 26번

	eq1: $x^2 / 3 + y^2 = 1$	⋮
	f : $y = x - 1$	⋮
	A = Intersect(eq1, f, 2) → (1.5, 0.5)	⋮
	C = Intersect(eq1, f, 1) → (0, -1)	⋮
	B = Point(eq1) → (-1.51, 0.49)	⋮ 
	D = Point(eq1) → (1.51, -0.49)	⋮ 
	q1 = Polygon(C, B, A, D) → 3	⋮



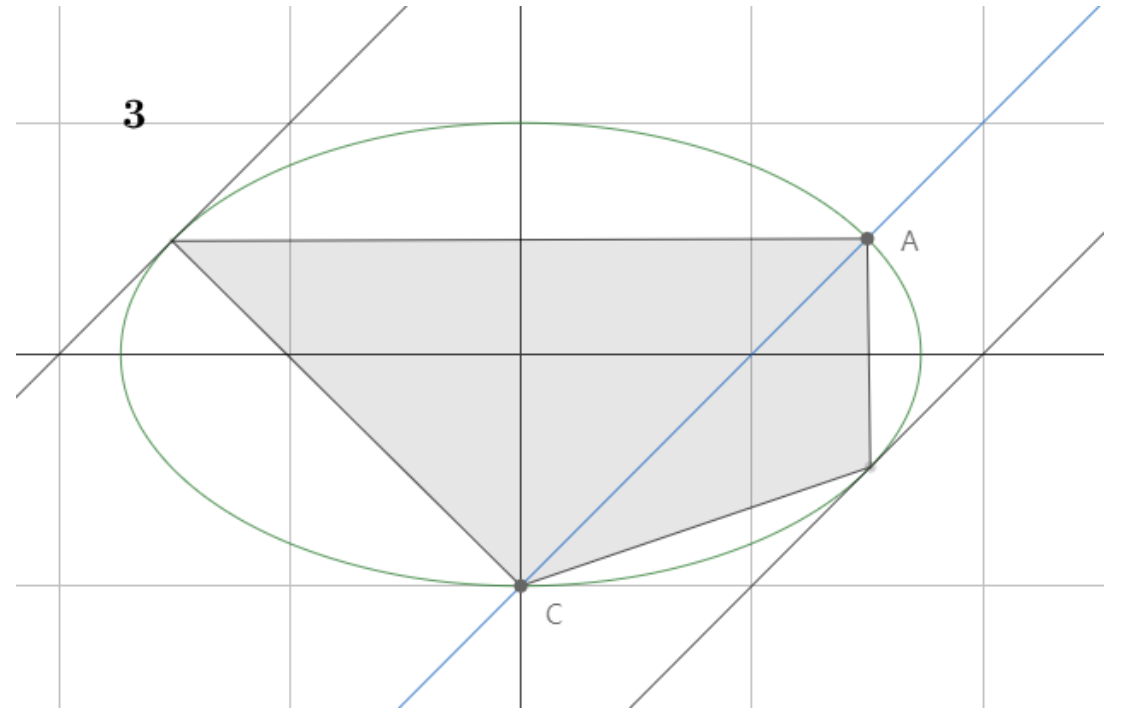
텍스트 사용법

- 지오지브라 아이콘을 클릭하면
대수창에 있는 것을 텍스트로
- 도형은 넓이, 선분은 길이가 표시



2022.6 고3 모의고사 기하 26번

- 한 직선과 평행한 접선을 그리는 방법은?
- 실제로 손으로 계산할 땐?

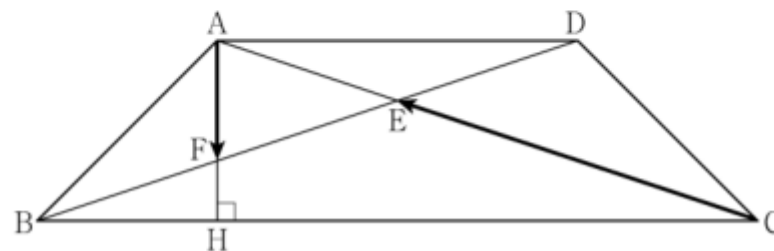


2022.6 고3 모의고사 기하 27번

- 사다리꼴 작도하기
 - 필요한 각도는?
- 주어진 조건대로 벡터 그리기
- 내적 구하기
- 그리드의 크기를 1로 잡으면 그리기 쉽다.

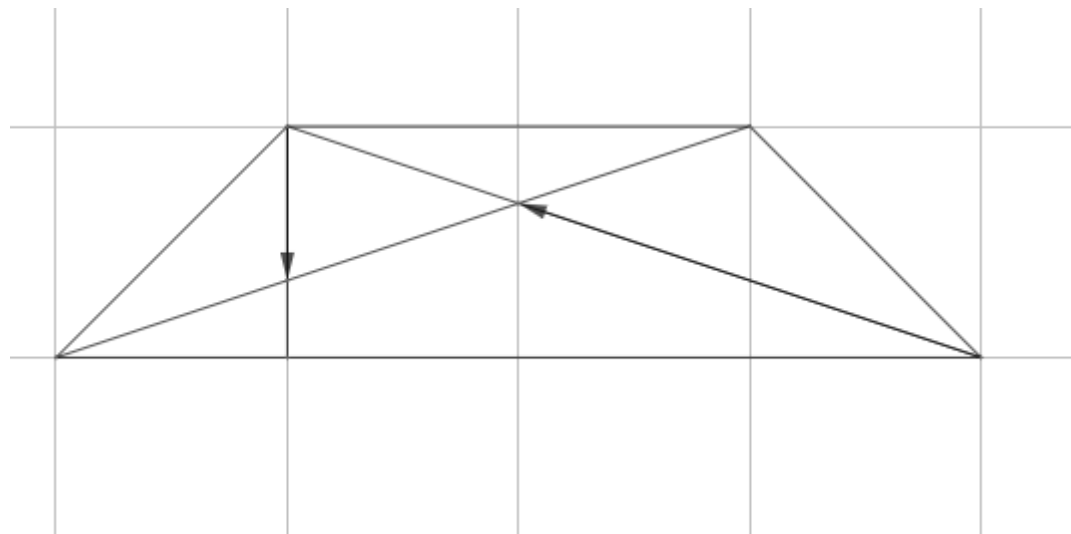
27. $\overline{AD} = 2$, $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{2}$, $\angle ABC = \angle BCD = 45^\circ$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$



2022.6 고3 모의고사 기하 27번

●	$u = \text{Vector}(D, G)$	⋮
	$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0.67 \end{pmatrix}$	
●	$v = \text{Vector}(A, F)$	⋮
	$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -0.67 \end{pmatrix}$	
	$a = u \cdot v$	⋮
	$\rightarrow -0.44$	



2022.6 고3 모의고사 기하 28번

- 움직이는 점
- c 값은 슬라이더 활용하기
- 언제 최대가 될까?
그림을 통해 확인해보자.
- 최대인 점의 특징을 먼저 찾고
(3,3)이 되도록 c 를 조정해보자.

28. 좌표평면에서 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직이는 점 P 가 있다.

두 점 $A(c, 0)$, $B(-c, 0)$ ($c > 0$)에 대하여 $\overline{PB} - \overline{PA}$ 의 값이
최대가 되도록 하는 점 P 의 좌표가 $(3, 3)$ 일 때, 상수 c 의 값은?

[4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

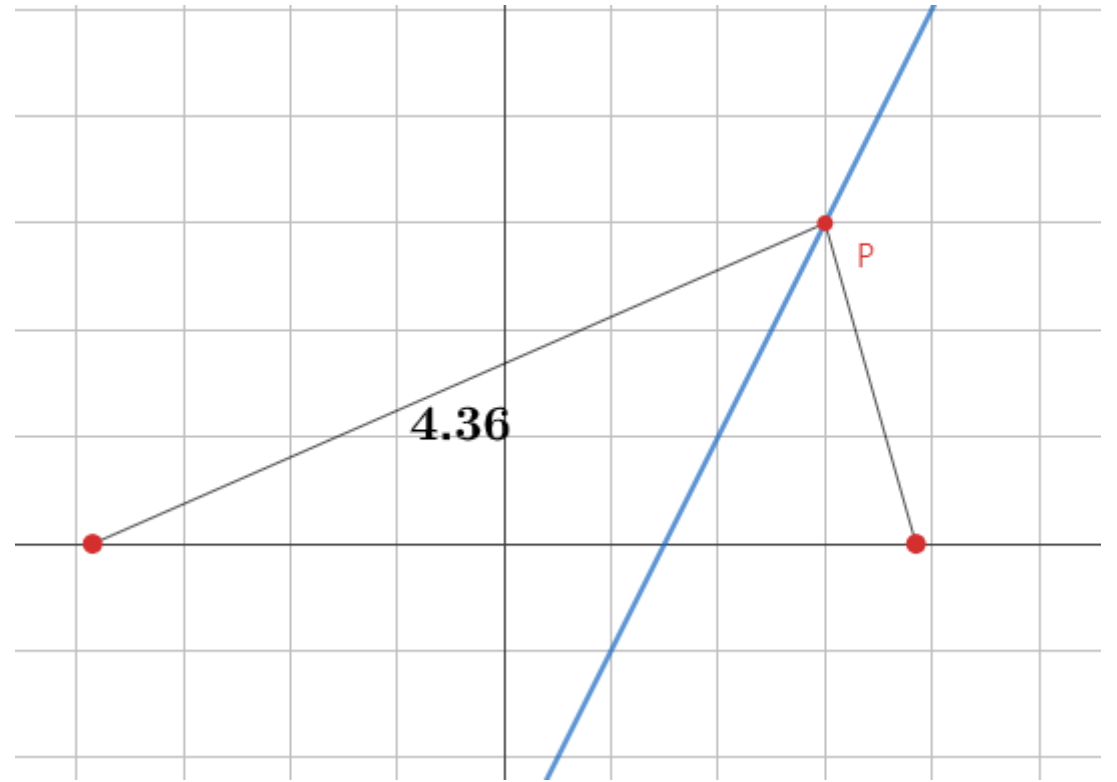
③ $3\sqrt{2}$

④ $\frac{9}{2}$

⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

2022.6 고3 모의고사 기하 28번

- 적절히 움직이다 보면 최대를 구할 수 있다.
- 두 거리의 차와 관련된 것은?
- 세 점을 이용해 그 이차곡선을 그려보자
- 어떤 특징이 있는가?
- 왜 그렇게 되는가?

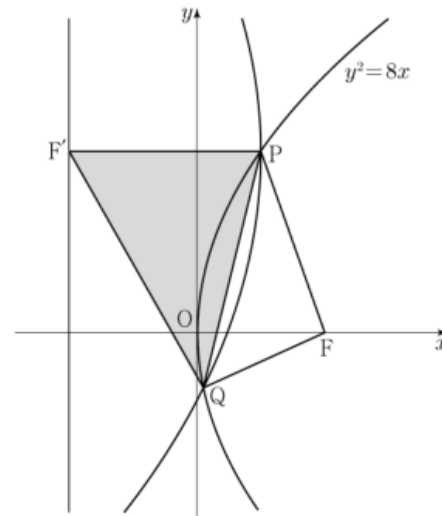


2022.6 고3 모의고사 기하 29번

- 주어진 식으로 포물선을 그리기
- 준선, 초점, 점P, 점F'을 그리기
- 점 P를 꼭지점으로 하는 포물선을 그리려면 어떻게 해야 할까?

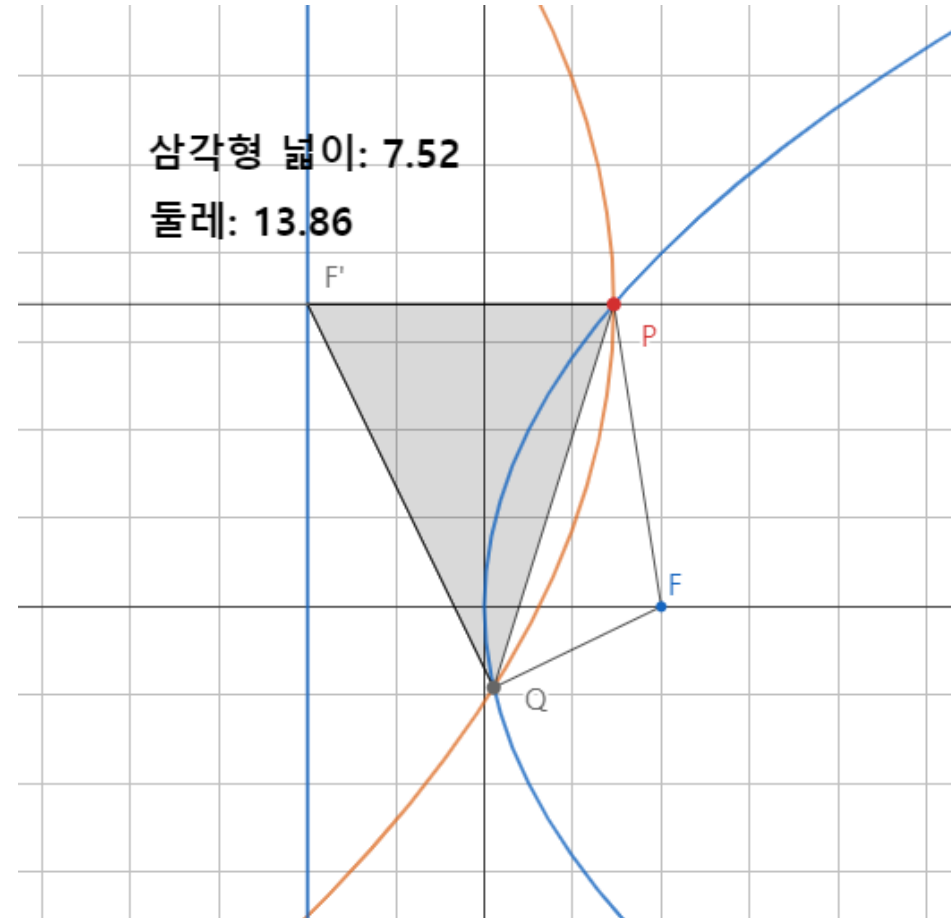
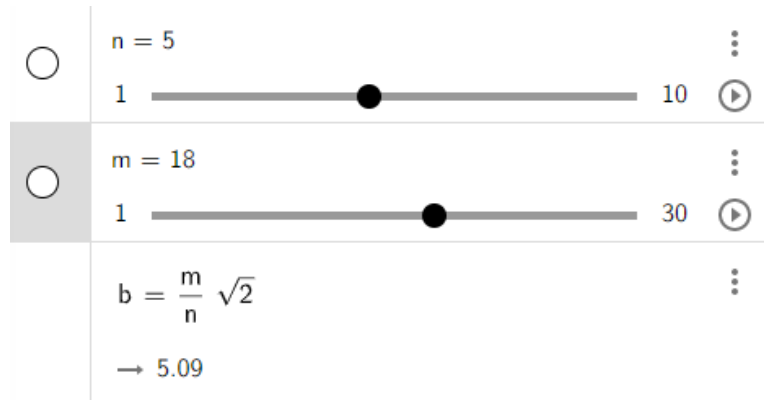
- 힌트:  Reflect about Point

29. 초점이 F 인 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x 축과 평행한 직선이 포물선 $y^2 = 8x$ 의 준선과 만나는 점을 F'이라 하자. 점 F'을 초점, 점 P를 꼭지점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2 = 8x$ 와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF'QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF'Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x 좌표는 2보다 작고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



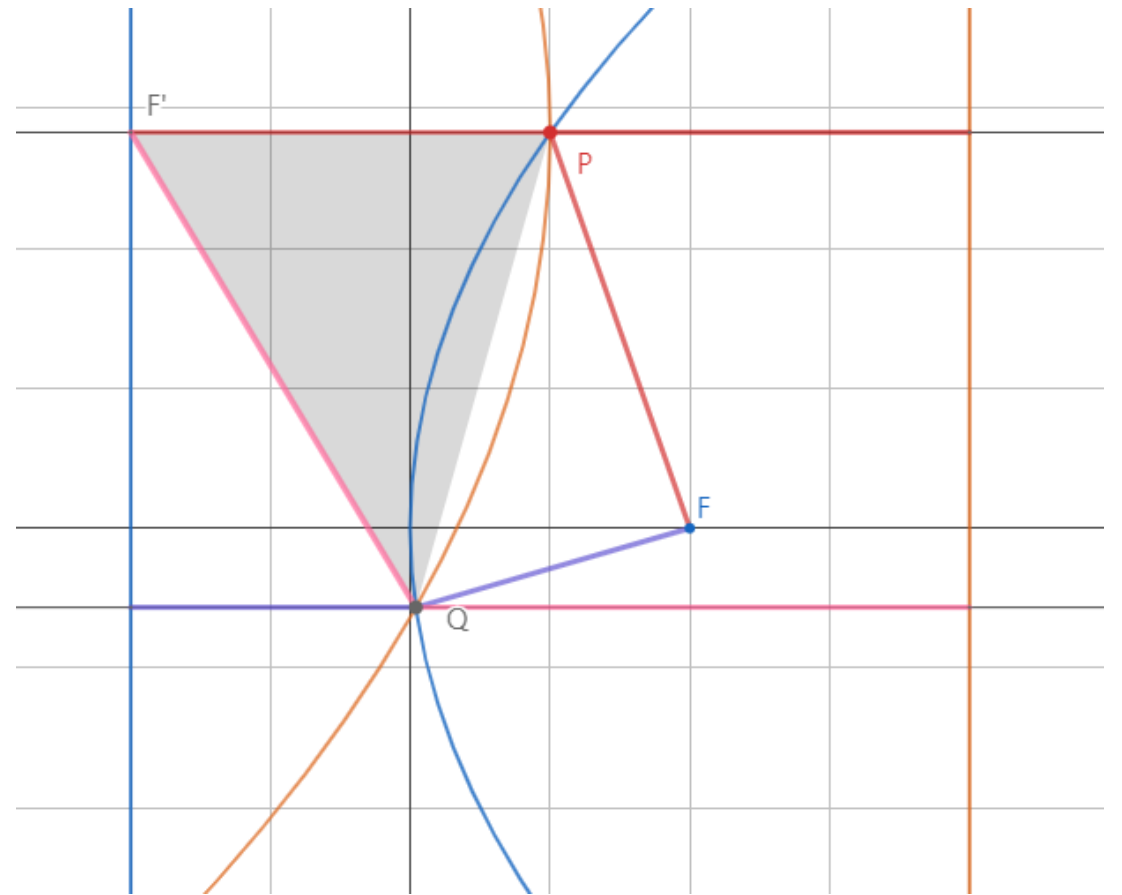
2022.6 고3 모의고사 기하 29번

- 둘레를 구하는 명령어:
Perimeter(도형)
- 점 P를 움직이면서 적절한 답이 언제 나오는지 찾아보자.
- 답의 근사값을 찾기 위해 슬라이드를 이용



2022.6 고3 모의고사 기하 29번

- 실제로 이러한 답이 나오는 이유는 무엇일까?
- 그림에서 같은 길이를 갖는 것들이 무엇인지 찾아보자.



2022.6 고3 모의고사 기하 30번

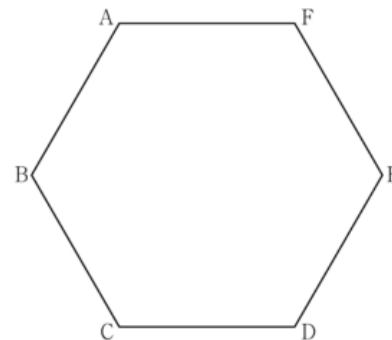
- 한 변의 길이가 4인 정육각형 그리기
 - 역시 그리드를 이용하면 편리
 - 반시계 방향으로 그려짐에 유의한다.
- 점C를 중심으로 하고 반지름이 1인 원을 그리기

30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k 에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 k 의 값을 α , $|\overrightarrow{CX}|$ 의 값이 최대가 되도록 하는 k 의 값을 β 라 하자.

$$(가) \overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$$

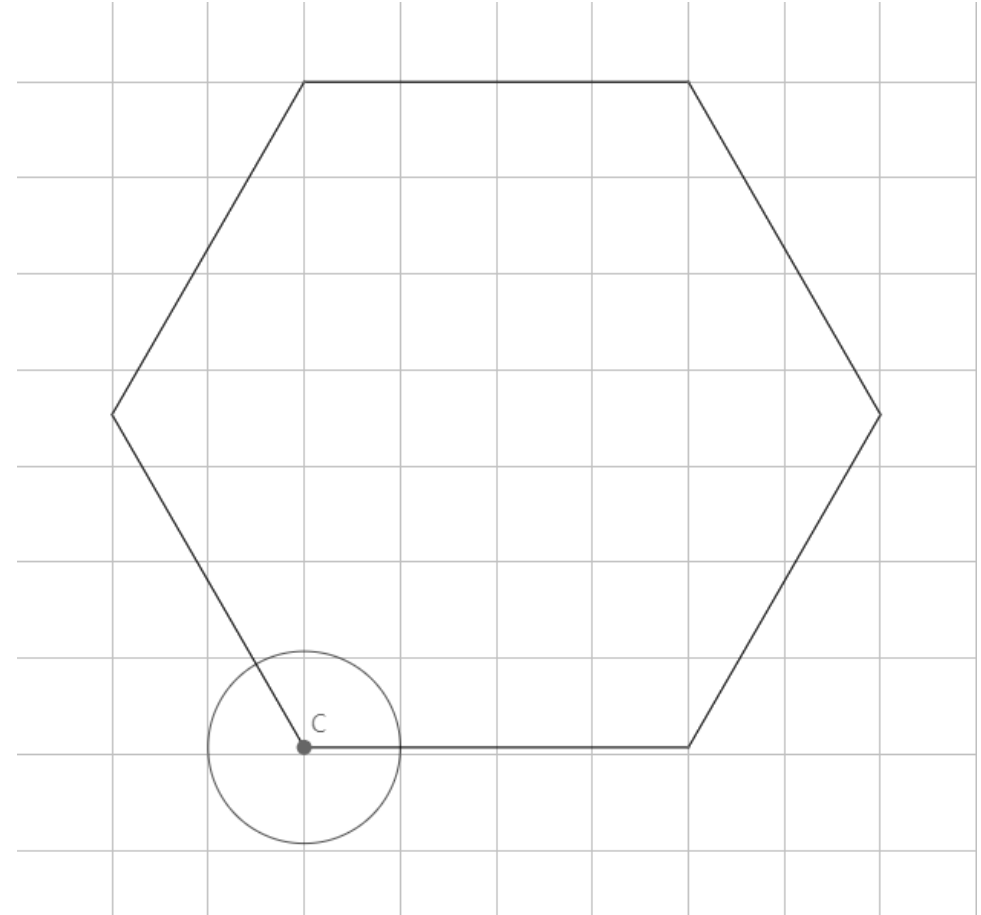
$$(나) \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD}$$

$\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



2022.6 고3 모의고사 기하 30번

- 정육각형 위의 점 P
- 원 위의 점 Q
- 점P를 그냥 점으로 찍게 되면 어떤 문제가 생길까? 점 P를 움직여 확인해보자.
- Point(도형) 으로 점을 만들고 움직여보자. 무엇이 다른가?

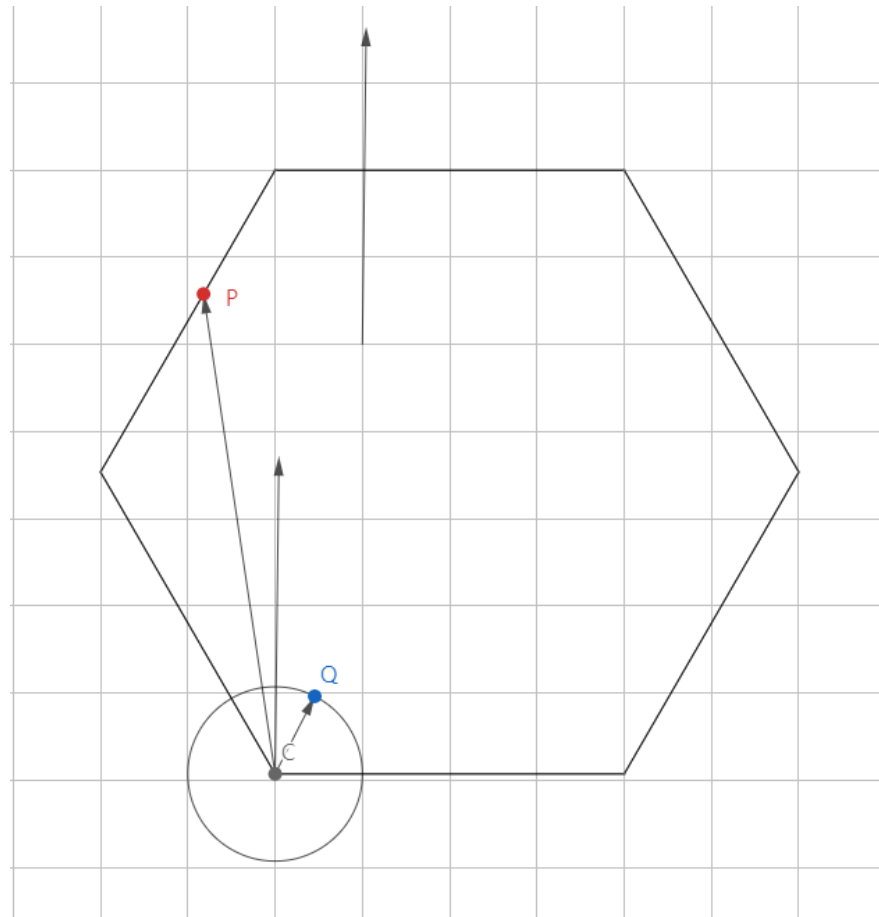


2022.6 고3 모의고사 기하 30번

$$(가) \overrightarrow{CX} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$$

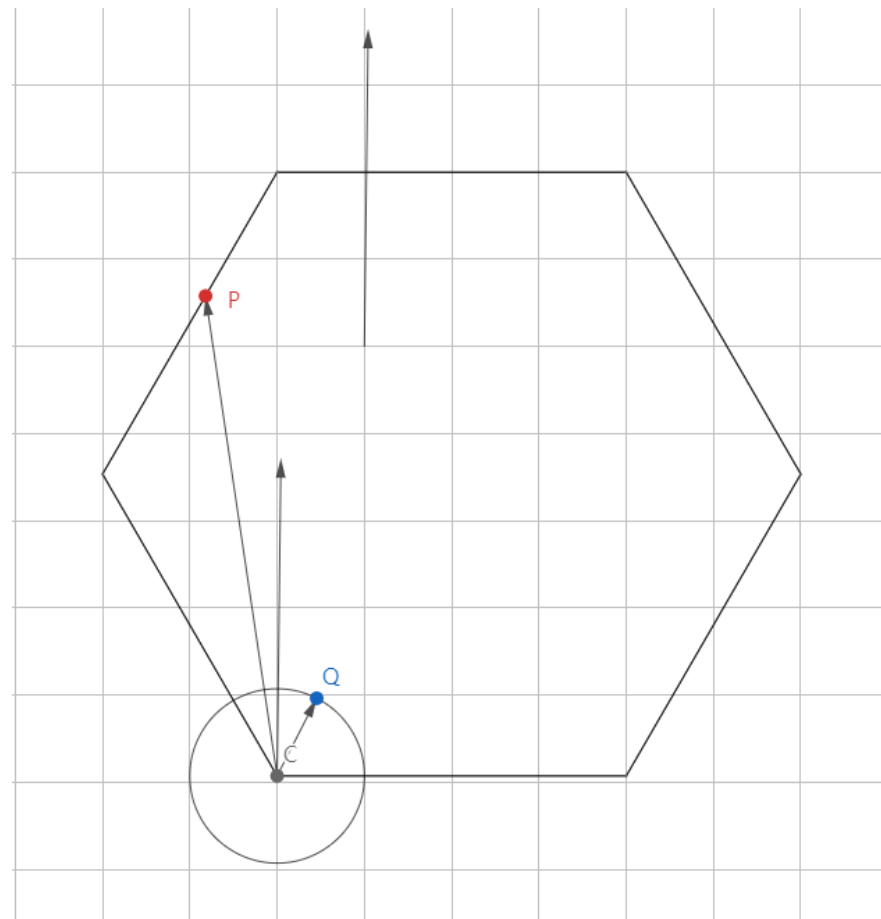
$$(나) \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k \overrightarrow{CD}$$

- (가) 조건에 나온 벡터 그리기
- 연산하면 위치벡터가 나오므로
평면벡터로 바꿔야한다. 어떻게?



2022.6 고3 모의고사 기하 30번

●	$u = \text{Vector}(D, P)$ \vdots $\rightarrow \begin{pmatrix} -0.82 \\ 5.51 \end{pmatrix}$
●	$v = \text{Vector}(D, Q)$ \vdots $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.89 \end{pmatrix}$
●	$w = \frac{1}{2} u + v$ \vdots $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.04 \\ 3.64 \end{pmatrix}$
●	$a = \text{Vector}(D, D + w)$ \vdots $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.04 \\ 3.64 \end{pmatrix}$

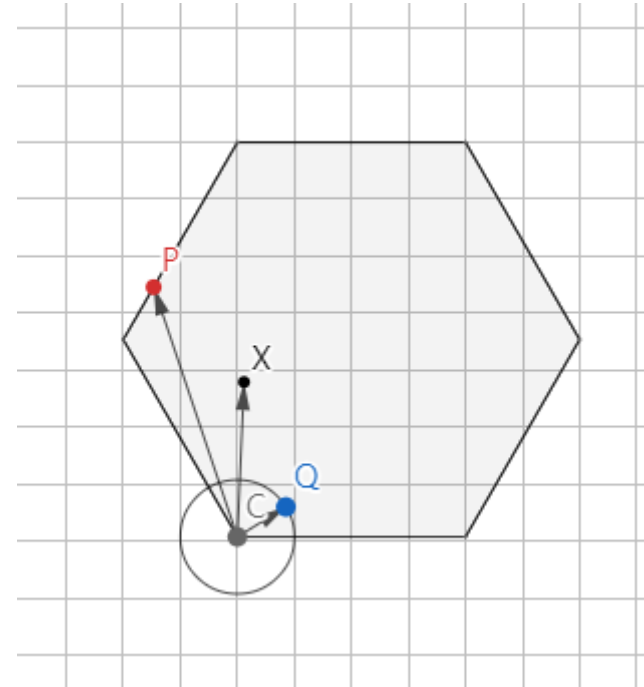


2022.6 고3 모의고사 기하 30번

$$(가) \quad \overrightarrow{CX} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$$

$$(나) \quad \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k \overrightarrow{CD}$$

- Point(벡터)로 점 X를 잡는다.
- 벡터 CD를 그린다.
- (나)의 좌변의 벡터를 그린다.
- 두 벡터가 실수배라면 어떤 관계?

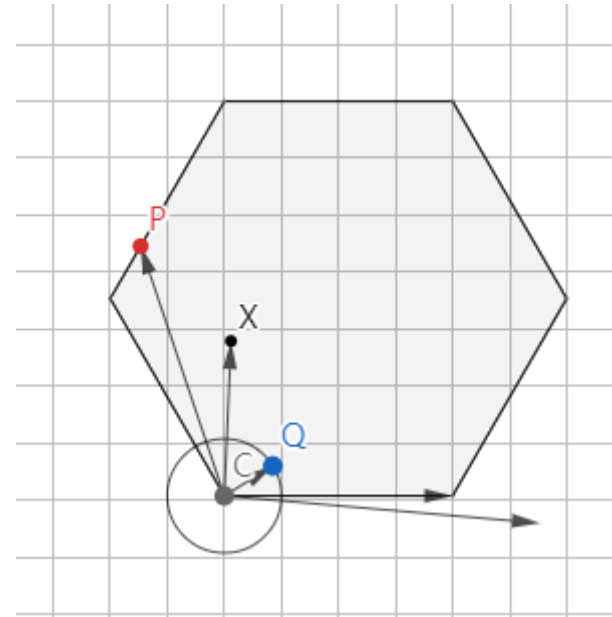


2022.6 고3 모의고사 기하 30번

$$(가) \quad \overrightarrow{CX} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$$

$$(나) \quad \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD}$$

- k값을 길이의 비로 계산하여 확인하자.
- 두 벡터의 각도를 구하자.
- 점 P, Q를 움직여 (나)조건에 맞도록 조정하여 최대 최소가 언제 나타나는지 확인하자.



마치면서

- 직접적으로 답이 나오게 할 수 없는 경우가 더 많음
 - 답을 구하는 것보다 답을 구하는 과정을 관찰하고 시뮬레이션 해보자
 - 손으로 직접 만들고 눈으로 볼 수록 수학적 사고력이 늘어난다
 - 어려운 문제들을 직접 그래프, 그림을 그려보면서 생각하고 연습하자
-
- 다양한 공학적 도구(SageMath, Matlab, R, Spss 등)은 실제 현장에서 이미 많이 사용되고 있다.
 - 수학적으로 풀어나가는 방법을 안다면 계산은 직접 도구가 해주는 것이 현장. '무엇으로 어떻게 풀까?' 가 더 중요