Читали ли вы присланные материалы?

- Да, достаточно внимательно.
- Нет. Не нашёл для этого времени.
- Смотрел "по диагонали".

Ответить Отказаться от ответа

z

Леммы, связанные с полнотой (непрерывностью) множества действительных чисел

Определение: Будем говорить, что *система* $S=\{\mathbf{X}\}$ *множеств* **X** *покрывает множество* **Y**, если $\mathbf{Y}\subset\bigcup\limits_{\mathbf{X}\in S}\mathbf{X}$, т.е., если каждая точка множества **Y** содержится хотя бы в одном из множеств~**X** системы~S.

Определение: Подмножество множества $S=\{\mathbf{X}\}$, являющегося системой множеств, будем называть подсистемой системы~S. Таким образом, подсистема системы множеств сама является системой множеств того же типа.

Теорема (*Лемма Гейне - Бореля*): В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

z

Определение: Точка $x \in R$ называется *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) *множества* **X** $\subset R$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество элементов множества **X**. Или, тоже самое: в любой окрестности точки x есть по крайней мере одна, не совпадающая с x точка множества **X**. Множество предельных точек множества **X** обозначается через: $\overline{\mathbf{X}}$.

Пример 1. Пусть $\mathbf{X} = (0,1)$. Тогда $\overline{\mathbf{X}} = [0,1]$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{X} = Q$. Тогда $\overline{\mathbf{X}} = R \bigcup \{\pm\infty\}$.

Пример 3. Пусть $\mathbf{X} = \left\{\frac{1}{n},\ n \in N\right\}$. Тогда $\overline{\mathbf{X}} = \{0\}$.

Пример 4. Пусть $\mathbf{X} = \{(-1)^n,\ n \in N\}$. Тогда $\overline{\mathbf{X}} = \{-1, 1\}$.

z

Теорема (*Лемма Больцано - Вейерштрасса*): Всякое **бесконечное ограниченное** числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

Доказательство. Пусть **X** -- данное подмножество множества R. Из определения ограниченности этого множества следует, что $\exists[a;b]=I\subset R$ такой, что **X** $\subset I$. Покажем, что хотя бы одна из точек этого отрезка является предельной для **X**. Предположим, что каждая точка x отрезка I имеет окрестность **U**(x), в которой либо вообще нет точек множества X, либо их там конечное число. Совокупность $\{$**U**$(x)\}$ таких окрестностей, построенных для каждой точки отрезка I, образует его покрытие интервалами **U**(x), из которого по лемме Гейне-Бореля можно выделить конечную подсистему:

$$\mathbf{U}(x_1),\ \mathbf{U}(x_2),\ \ldots,\mathbf{U}(x_n)$$

интервалов, покрывающую отрезок I. Но, т.к. **X** $\subset I$, эта же система покрывает все множество **X**. Однако, в любой окрестности **U**(x_i) находится только конечное число точек множества **X**, значит, и в их конечном объединении тоже конечное число точек **X**, т.е. **X** -- конечное множество, что неверно. %Зафиксируем далее произвольное $\varepsilon>0$. Требуется найти хотя бы одну точку отрезка I_0, в ε - окрестности которой находится бесконечно много точек множества **X**. Так как рассматриваемое множество -- бесконечно, то хотя бы одна из половин отрезка содержит бесконечное число точек множества **X**. Обозначим данную половину за I_1. Далее, одна из половин отрезка I_1 содержит бесконечно число точек рассматриваемого множества. Обозначим её I_2, и так далее. В силу того, что $|I_n|=\dfrac{I_0}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$, получаем, что при достаточно большом n, весь отрезок I_n содержится в некоторой ε -- окрестности. Выбирая в этом отрезке любую из бесконечного числа точек множества **X**, получаем требуемое.

z

Поняли ли Вы приведённое доказательство?

- да
- нет
- чуть-чуть понял

Ответить Отказаться от ответа

z

Определение: Точка $a \in R$ называется *изолированной точкой множества* $\mathbf{X} \subset R$, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\mathbf{U}_{\delta}(a) \bigcap \mathbf{X} = \{a\}$.

z

Частичные пределы числовой последовательности

Определение: Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ -- некоторая последовательность, а $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ -- возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $\{x_{k_n}\}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

Утверждение 1: Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a, то и любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу a.

Доказательство.
Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon.$$

Далее, т.к. $k_n \geqslant n$, то для $\forall k_n \geqslant N(\varepsilon)$ элементы последовательности $\{x_{k_n}\}$, и подавно, удовлетворяют неравенству: $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$.

Замечание: Очевидно, что обратное -- неверно, т.е., если любая подпоследовательность некоторой последовательности сходится, то сама последовательность может и расходится.

Упражнение: Докажите, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой.

z

Определение: Точка $a \in R \bigcup \{\pm\infty\}$ называется *частичным пределом* (*предельной точкой*) числовой последовательности $\{x_n\}$, если выполнено одно из условий:

1. В любой окрестности точки a находится бесконечно много элементов последовательности~$\{x_n\}$;
2. Существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ сходящаяся к a при $n \to \infty$.

Утверждение: Оба этих утверждения эквивалентны.

Доказательство.

Семинарские занятия.

z

Определение: Точка $a \in R\bigcup\{\pm\infty\}$ называется *частичным пределом* (*предельной точкой*) числовой последовательности $\{x_n\}$, если выполнено одно из условий:

1. В любой окрестности точки a находится бесконечно много элементов последовательности~$\{x_n\}$;
2. Существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ сходящаяся к a при $n \to \infty$.

Утверждение: Оба этих утверждения эквивалентны.

Доказательство.

Семинарские занятия.

z

Лемма: Числовая последовательность сходится тогда, и только тогда, когда у неё есть только одна предельная точка, совпадающая с пределом данной последовательности.

Доказательство.

Лекция №6.

z

Поняли ли Вы приведённое доказательство?

- да
- нет
- чуть-чуть понял

Ответить Отказаться от ответа

z

Определение: Наибольшая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ называется *верхним пределом* этой последовательности, и обозначается символом: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Определение: Наименьшая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ называется *нижним пределом* этой последовательности, и обозначается символом: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Запишем несколько следствий леммы Больцано - Вейерштрасса.
Утверждение (*Теорема Больцано - Вейерштрасса*): Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. %У всякой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний пределы и, в частности, существует хотя бы одна предельная точка.

Утверждение: Если $\{x_n\}$ -- ограниченная последовательность, $\underline{x}$ и $\overline{x}$ -- её нижний и верхний пределы, ε -- произвольное положительное число, то вне интервала $(\underline{x}-\varepsilon;\, \overline{x}+\varepsilon)$ лежит лишь конечное число элементов этой последовательности. Или, что тоже самое, на данном интервале лежат все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего от ε).

z

Выберете последовательность:

- $x_n = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\}$
- $x_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- $\begin{cases} x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \\ y_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!} \end{cases}$
- $x_n = \{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 2, -2, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$
- $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$
- $x_n = (0.9)^n$
- $x_n = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{n}{n+5} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$
- $x_n = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)^{n+1} + \frac{n}{n+10} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$
- $x_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- $x_n = \sin n$
- $x_n = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$
- $x_n = \{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{1} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{1} - \frac{1}{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{3} - \frac{1}{7}, \ldots\}$
- $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$
- $x_n = (-1)^n$
- $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $x_n = (-1)^n \cdot n^{\frac{1}{n}} + \frac{2n+6}{n} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$

Рисовать

Анимация Логарифмическая шкала Вертикальные отрезки

z

Предыдущий слайд

- $\begin{cases} x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \\ y_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!} \end{cases}$
- $x_n = \{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 2, -2, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
- $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$
- $x_n = (0.9)^n$
- $x_n = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{n}{n+5} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$
- $x_n = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)^{n+1} + \frac{n}{n+10} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$
- $x_n = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
- $x_n = \{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{1} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{1} - \frac{1}{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{3} - \frac{1}{7}, \dots\}$
- $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$
- $x_n = (-1)^n$
- $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $x_n = (-1)^n \cdot n^{\frac{1}{n}} + \frac{2n+6}{n} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$

Рисовать

Анимация Логарифмическая шкала Вертикальные отрезки