

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИЗУАЛЬНЫХ  
ОБРАЗОВ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА:  
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ  
ПЕРЕМЕННЫХ**

***Лукашова Мария Алексеевна***

*Студентка*

*Факультет компьютерных наук, НИУ ВШЭ, Москва, Россия*

*E-mail: ma.lukashova@yandex.ru*

Математические идеи, понятия и методы имеют множество возможностей для интуитивного представления. Данная работа посвящена компьютерному построению образов, возникающих при решении задач по теме интегральное исчисление. Главная цель нашего исследования — демонстрация нового подхода к обучению этой теме.

Проведенные нами исследования показали, что на сегодняшний день среди множества программ и ресурсов, осуществляющих визуализацию математических задач, крайне мало графических представлений в области интегрального исчисления. Трехмерные области интегрирования возникают при вычислении объемов и площадей фигур, значений интегралов, а также при решении задач на перестановку порядка интегрирования. В перечисленных случаях необходимы графические представления с целью улучшить понимание поставленной задачи и возможных путей ее решения обучающимся.

С этой целью нами была разработана методология построения двумерных и трехмерных областей интегрирования, являющаяся одной из частей общего проекта VisualMath.ru, находящегося в стадии разработки. В рамках данного проекта предполагается создать сервер, который будет предоставлять преподавателям математического анализа все необходимые средства для планирования и проведения лекций по курсу математического анализа, взаимодействия с аудиторией в режиме реального времени и хранения всех необходимых материалов, включая динамические иллюстрации и статические информационные блоки, в удобном и доступном для поиска виде. Надеемся, данный сервер положит начало дальнейшим разработкам в области интерактивного обучения математическому анализу.

В приведенном исследовании для построения графиков из сборника [1], а также для оформления пользовательского интерфейса были использованы библиотеки Grafar и Skeleton, написанные на языке JavaScript [2]-[3], математический пакет Matlab и различные алгоритмы компьютерной графики. В работе демонстрируются прин-

ципы и методы построения областей интегрирования. Кроме того, приведены примеры визуализаций двойных и тройных интегралов с использованием вышеупомянутых методов и средств.

Свои исследования в этой области мы начали с построения статических трехмерных областей интегрирования, используя для этого средства математического пакета Matlab. Однако при более детальном рассмотрении текущей темы выяснилось, что статические картинки не обеспечивают полного представления математических объектов.

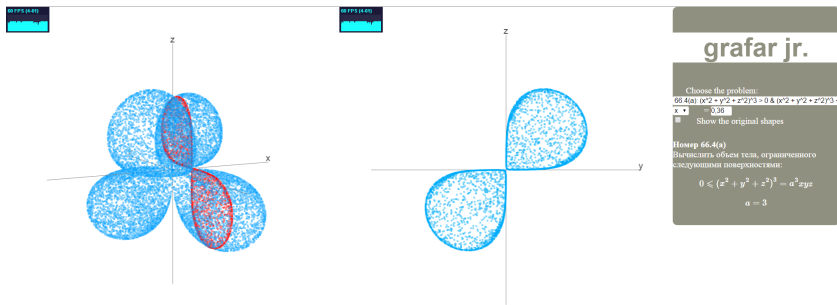


Рис. 1: Компьютерная визуализация заданной области интегрирования

В силу структуры и устройства человеческого восприятия, для общего пространственного представления трехмерного объекта его статического представления недостаточно, требуется построение данной области интегрирования, как минимум, с нескольких точек обзора. Но и это не всегда решает проблему, так как обучающемуся хочется покрутить эти графики самому, в реальном времени, рассмотреть их со всех возможных сторон, а также посмотреть на динамическое изменение проекций при фиксировании одной из переменных. С этой проблемой нам помогла справиться среда JavaScript, в которой оказалось возможным построение динамических трехмерных графиков. На рис.1 представлена область интегрирования, ограниченная следующими поверхностями:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 > 0, (x^2 + y^2 + z^2)^3 < a^3 xyz;$$

при фиксированном значении параметра  $a = 3$ , а также проекция,

перпендикулярная оси  $Ox$ , при фиксированном  $x = 0.39$ .

Полученные программы позволяют в реальном времени манипулировать точками обзора для полученных областей интегрирования, кроме того, у пользователя есть возможность увидеть исходные ограничения, заданные в условии задачи, что дает полное представление того, почему область имеет тот или иной вид. Аналогично изображениям, построенным в среде Matlab, пользователю предоставлена возможность посмотреть на сечения, перпендикулярные осям, при разных фиксированных значениях переменных  $x, y, z$ .

### **Литература**

1. Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Изд-во Моск. Ун-та ЧеРо, 1997;
2. Three.js <http://threejs.org/>
3. WebGL <http://www.khronos.org/webgl/>