**Séries Temporelles 1, 2A**
**TD2, 2023–2024**

---

**Indications :**

— Vous devriez préparer tous les exercices de ce document avant la séance de TD du **07 novembre 2023**.

— Votre chargé.e de TD/TP choisira de manière aléatoire **un exercice parmi les 6** que vous pouvez lui remettre en main propre au début de la séance du **07/11/2023**. L'exercice rendu comptera comme un *Bonus* de **3 points maximum** ajoutés à votre note d'examen final.
*Exemple : si vous avez rendu l'exercice demandé et vous que vous avez obtenu* 1.5 *points ; et si à l'examen vous avez obtenu* 14/20*, alors votre note finale sera de* $14 + 1.5 = 15.5$ *(sur 20).*

— **Attention** : le choix de l'exercice se fera de manière aléatoire ! ! ! Si la sortie du tirage donne un exercice que vous n'avez pas fait, vous n'aurez pas de *bonus*. Par ailleurs, le rendu doit se faire obligatoirement avant de démarrer la séance de TD.

---

**Exercice 1** – Soit $(\epsilon_t)_t$ un bruit blanc. Pour chacun des processus suivants, dire s'il s'agit d'un processus ARMA stationnaire. Si oui, déterminer les ordres $p$ et $q$ et préciser si le processus admet une représentation AR($\infty$) et/ou MA($\infty$) et si la représentation ARMA est minimale.

(1.1) $X_t = \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \epsilon_t + \epsilon_{t-1}$

(1.2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} X_{t-k} = \epsilon_t$

(1.3) $X_t = \frac{5}{4}X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1}$

(1.4) $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \epsilon_t + \frac{1}{4}\epsilon_{t-1}$

**Exercice 2** – Pour chacun des processus suivants, donner l'écriture explicite :

(2.1) $(X_t)_t \sim$ ARIMA$(1, 1, 1)$

(2.2) $(X_t)_t \sim$ ARI$(2, 1)$

(2.3) $(X_t)_t \sim$ I$(2)$

(2.4) $(X_t)_t \sim$ SARIMA$(2, 0, 1) \times (1, 1, 0)_7$

(2.5) $(X_t)_t \sim$ SARMA$(2, 0) \times (1, 2)_{12}$

**Exercice 3 (Partiel 2017)** – On considère la moyenne mobile $M = (I - B)(I - B^2)$ et le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, défini par

$$X_t = a + bt + ct^2 + \cos(\pi t) + \epsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

où $a, b$ et $c$ sont des réels non nuls et $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2$.

(3.1) Montrer que $M(a + bt + ct^2) = 4c$, *i.e.* $M$ transforme les polynômes de degré 2 en une constante.

(3.2) Montrer que $M$ absorbe la saisonnalité $s(t) = \cos(\pi t)$.

(3.3) Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il faiblement stationnaire ? Justifier.

(3.4) On note $Y_t = M(X_t)$, le processus obtenu en appliquant la moyenne mobile $M$ au processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Montrer que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ s'écrit comme un processus MA(3) dont on précisera les coefficients.

*Bonus :*

(i) En déduire la moyenne de $(Y_t)_t$ et sa fonction d'autocovariance $\gamma_Y$.

(ii) Sachant que $(Y_t)_t \sim$ MA(3). Pourriez-vous dire quel est le type de processus $(X_t)_t$ ?

**Exercice 4 (Examen 2015)** – On considère le processus ARMA$(1,1)$ :

$$X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \epsilon_t - \frac{1}{4}\epsilon_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est una bruit blanc de variance $\sigma^2$.

(4.1) La représenation ARMA est-elle minimale ?

(4.2) Montrer que $X_t = \epsilon_t + \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^{j+1}}\epsilon_{t-j}$.

(4.3) Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma$ du processus.

(4.4) Lorsque $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien, déterminer la loi du couple $(X_t, X_{t+1})$.

(4.5) Donner une expression de la projection orthogonale de $X_t$ sur le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{L}^2$ engendré par $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$ .

**Exercice 5** – On considère $(\nu_t)_t$ un bruit blanc de variance $\sigma_\nu^2 = 5/18$ et le processus $(Y_t)_t$ défini par

$$(I - 2B)Y_t = \nu_t.$$

On suppose que l'observation de $Y_t$ est entachée d'une erreur et que l'on observe en réalité le processus $X_t = Y_t + \eta_t$, où $(\eta_t)_t$ est un autre bruit blanc décorrélé du précédent, de variance $\sigma_\eta^2 = 1/6$.

(5.1) Montrer, en raisonnant sur la fonction d'autocovariance, que le processus $(\omega_t)_t$ défini par $\omega_t = \nu_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}$ admet une représentation MA inversible.

(5.2) En déduire que $(X_t)_t$ admet une représentation ARMA dont on précisera les ordres. Donner sa forme minimale et son processus innovation dont on calculera la variance $\sigma^2$.

(5.3) Déterminer l'écriture AR$(\infty)$ du processus en fonction de son innovation.

**Exercice 6 (Lissage exponentiel)** – Les méthodes de lissages exponentielles, dont il existe plusieurs variantes, sont des méthodes empiriques de prévision de série temporelle. Elles présentent l'intérêt d'être facilement compréhensibles et leur implémentation récursive en font un outil efficace pour le traitement de gros volumes de données ou dans des systèmes embarqués disposant de peu de mémoire. Il faut noter que, bien que largement utilisées, ces méthodes souffrent d'un manque de bases théoriques solides comme celles des ARMA, ARIMA et SARIMA.

Dans cet exercice, nous allons traiter le *lissage exponentiel simple et double.*
Pour une série temporelle $X = (X_t)_t$, son *lissage exponentiel simple* de paramètre $\alpha \in [0, 1]$ est le processus $(\hat{X}_t(1))_t$ défini par la récurrence :

$$\hat{X}_t(1) = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_{t-1}(1).$$

Afin de simplifier la notation, vous pouvez écrire $\hat{X}_{t+1}$ au lieu de $\hat{X}_t(1)$. Sauf mention contraire, $\hat{X}_{t+1}$ notera la prévision (par lissage exponentiel et conditionnellement à $(X_1, \ldots, X_t)$ ) de $X_{t+1}$.

(6.1) Soient les observations $X_1, \ldots, X_t$ de la série temporelle $X$. Montrer que

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=0}^{t-1} \alpha(1 - \alpha)^j X_{t-j}.$$

(6.2) Que remarquez-vous lorsque $\alpha \approx 0$ et lorsque $\alpha \approx 1$ ?

(6.3) Montrer que $\hat{X}_{t+1}$ est la prévision précédente corrigée proportionnellement à l'erreur, *i.e.*,

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t)$$

(6.4) Montrer que $\hat{X}_{t+1}$ est la constante qui approxime le mieux la série au voisinage de $t$, *i.e.*,

$$\hat{X}_{t+1} \approx \text{argmin}_a \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j (X_{t-j} - a)^2,$$

lorsque $t$ est grand.

(6.5) Comment pourriez-vous estimer $\alpha$ ?

(6.6) On va étendre le lissage au cas du *lissage exponentiel linéaire* (appelé aussi *lissage exponentiel double ou de Holt*). L'idée est d'ajuster une droite au lieu d'une constante dans l'approximation locale de la série.
Pour une série temporelle $X = (X_t)_t$, son *lissage exponentiel double (ou de Holt)* de paramètre $\alpha \in [0, 1]$ est le processus $(\hat{X}_t(h))_t$ défini par

$$\hat{X}_t(h) = l_t + b_t h$$

où $l_t$ et $b_t$ minimise à chaque instant la fonction

$$H_t(l, b) = \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j \left(X_{t-j} - (l - bj)\right)^2 .$$

$\star$ Trouver les estimateurs $\hat{l}_t$ et $\hat{b}_t$, solution du problème d'optimisation

$$(\hat{l}_t, \hat{b}_t) = \text{argmin}_{l,b} H_t(l, b)$$

et en déduire la récurrence

$$\begin{cases} l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \left(1 - (1 - \alpha)^2\right)(X_t - \hat{X}_t) \\ b_t = b_{t-1} + \alpha^2(X_t - \hat{X}_t) \end{cases}$$

avec comme intialisation $l_0 = X_1$ et $b_0 = X_2 - X_1$.