Statistiques non paramétriques

I - From histogram to Kernel density estimation

What is a proba density ?

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B dP_X$$

thm des accroissements finis. $= \int_B f(x)\, d\lambda(x) \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$

$$\simeq f(x)\,\mathrm{vol}(B).$$

Hence, for $B_j = (x_0 + jh,\ x_0 + (j+1)h]$

$$\mathbb{P}(X \in B_j) = f(x) \times h$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\mathbb{P}(X \in B_j)}{h}.$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \frac{1}{h} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \in B_j\}} \qquad \forall x \in B_j.$$

$$= \frac{1}{nh} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_j}(X_i)\, \mathbb{1}_{B_j}(x)$$

$$\mathrm{MISE}(h) \triangleq \mathbb{E}\left[\int (\tilde{f}_n(x) - f(x))^2\, dx\right]$$

Fubini

$$= \int \mathbb{E}[(\tilde{f}_n(x) - f(x))^2] \cdot dx$$

$$= \int \mathrm{MSE}[\tilde{f}_n(x)]\, dx$$

$$= \int B^2(\tilde{f}_n(x)) + \mathrm{Var}(\tilde{f}_n(x))\, dx$$

Or $B(\tilde{f}_n(x)) = \mathbb{E}[\tilde{f}_n(x)] - f(x)$.

$\sum 1_{B_j}(X_i) \sim B(n, p_j)$

$$G = \frac{1}{h} p_j - f(x)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{B_j} f(t)\,dt - f(x).$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} f(t)\,dt - f(x)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} \cancel{f(x)} + (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2} f''(x_t)\,dt - \cancel{f(x)}.$$

$f(x_t) = f(x - \tau t)$

$\tau \in [0,1]$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2} f''(x_t)\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} (t-x)f'(x)\,dt + \underbrace{\frac{1}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} \frac{(t-x)^2}{2} f''(x-\tau t)\,dt}_{O(h^3)}$$

$$= \frac{f'(x)}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} t\,dt - \frac{x f'(x)}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} dt + O(h^2)$$

$x f'(x) \frac{1}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} dt = \frac{1}{h} h = 1 \times f'(x) \times x$

$f'(x)\frac{1}{h}\int_{x_0+jh}^{x_0+(j+1)h} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{jh}^{(j+1)h} = \frac{1}{h}\left(\frac{(j+1)^2h^2}{2} - \frac{(jh)^2}{2}\right) = \left(\frac{(j+1)^2}{2}h - \frac{j^2 h}{2}\right) f'$

$= \frac{h}{2}\left((j+1)^2 - j^2\right) = \frac{h}{2}\left(j^2+2j+1-j^2\right)(f'(x))$

$= h\left(j+\frac{1}{2}\right) f'(x)$

$$= f'(x)\left(h\left\{j+\frac{1}{2}\right\}\right) - f'(x)x + O(h^2)$$

$$= f'(x)\left(h\left(j+\frac{1}{2}\right) - x\right) + O(h^2),$$

$O(h) \doteq O(h^2)$?

$\frac{h}{h^2} = \frac{1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$ faux.

$$= O(h) + O(h^2)$$

mais $O(h^2) = O(h)$.

$\frac{h^2}{h} \to 0$ vrai

$$= O(h)$$

$$V(\tilde{f}_n(x)) = \frac{1}{nh^2} p_j(1-p_j) \qquad (1)$$

Comme $B(\tilde{f}_n(x)) = \frac{1}{h} p_j - f(x) = O(h)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h} p_j = f(x) + O(h).$$

$$(1) = \frac{1}{nh}\left(\frac{p_j}{h}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{p_j}{h}\right)^2$$

$$= \frac{1}{nh}\left(f(x) + O(h)\right) - \frac{1}{n}\left(f(x) + O(h)\right)^2$$

$$= \frac{1}{nh} f(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} f^2(x) - O\left(\frac{h}{n}\right).$$

$O\left(\frac{h}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$

car $\frac{\frac{h}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{h}{n} \times n \to 0$

$$= \frac{1}{nh} f(x) - \frac{1}{n} f^2(x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

car cela ne dépend pas de h.

$$= \frac{1}{nh} f(x) - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{nh}\right)$

car $\frac{1/n}{1/nh} = \frac{1}{n} \times nh = h \to 0$

$$= O\left(\frac{1}{nh}\right).$$

$$\Rightarrow O\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{nh}\right) = O\left(\frac{1}{nh}\right).$$

Rappel : $MISE(h) = \int B^2(\tilde{f_n}(x)) + Var(f_n(x))\,dx.$

avec $B(\tilde{f_n}(x)) = f'(x)\left(h\left[j+\frac{1}{2}\right]-x\right) + O(h^2).$

$\Rightarrow B^2(\tilde{f_n}(x)) = f'^2(x)\left(h(j+\tfrac{1}{2})-x\right)^2 + O(h^3).$

m subdivision de B_j sur $[0,1]$ y $\Omega = \bigcup_{j=0}^{m-1} B_j \Rightarrow \int_\Omega f\,dP = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{B_j} f\,dP$
avec $B_j = (jh, (j+1)h]$

$$\Rightarrow \int_0^1 B^2(\tilde{f_n}(x))\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{B_j} B^2(\tilde{f_n}(x))\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{jh}^{(j+1)h} f'(x)^2\left(h(j+\tfrac{1}{2})-x\right)^2 + O(h^3)$$

$h \to 0 \Rightarrow x \simeq jh, jh+h$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{jh}^{(j+1)h} f'^2(jh)\left(h(j+\tfrac{1}{2})-x\right)^2 + O(h^3)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} f'^2(jh) \int_{jh}^{(j+1)h} (\underbrace{h(j+\tfrac{1}{2})-x}_{y \text{ chgt de var}})^2 + O(h^3)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} f'^2(jh) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\,dx + O(h^3)$$

$$= \frac{h^3}{12} \sum_{j=0}^{m-1} f'^2(jh) + O(h^3)$$

$$= \frac{h^2}{12} \sum_{j=0}^{m-1} h\,f'^2(jh) + O(h^3)$$

$h = \int_{jh}^{(j+1)h} dx.$

$$= \frac{h^2}{12} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{jh}^{(j+1)h} f'^2(jh) + O(h^3)$$

$$= \frac{h^2}{12} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{jh}^{(j+1)h} f'^2(x)\,dx + O(h^3)$$

On ne va pas plus loin car on a un polynome de degré 2.

$$= \frac{h^2}{12} \int_0^1 f'^2(x)\,dx + O(h^2)$$

De même, $\mathrm{Var}(\tilde{f}_n(x)) = \frac{f(x)}{nh} + O(\frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \int_0^1 \mathrm{Var}(\tilde{f}_n(x))\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{nh} + O(\frac{1}{n})\,dx$$

f une densité $\;\; = \frac{1}{nh} + O(\frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \mathrm{MISE}(h) = \frac{h^2}{12}\int_0^1 f'^2(x)\,dx + \frac{1}{nh} + O\left(\frac{1}{n}\right) + O(h^2)$$

Le terme dominant du biais provient de :

$$\frac{f'(x)}{h}\int_{jh}^{(j+1)h} (t-x)\,dt .$$

Il est toutefois possible de réduire le biais en modifiant B_j par un intervalle centré en x.

$$t : X_i \in [jh, (j+1)h] \longrightarrow t : X_i \in [x-h, x+h] .$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\int_{jh}^{(j+1)h} (t-x)\,dt \longrightarrow \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} (t-x)\,dt \quad u = t-x .$$

$$= h \int u \underbrace{\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(u)}_{K(u) \to \text{Box Kernel}}\,du$$

How to choose h in practice ?

$$\mathrm{MISE}(h) = \mathbb{E}[\,\|\tilde{f}_n - f\|^2]$$

$\mathbb{E}[\langle\,,\,\rangle] = \int \tilde{f}_n f\,dx$

$$= \mathbb{E}[\,\|\tilde{f}_n\|^2] - 2\,\mathbb{E}[\langle \tilde{f}_n, f\rangle] + \mathbb{E}[\|f\|^2]$$

$$= \mathbb{E}[\,\|\tilde{f}_n\|^2] - 2\,\mathbb{E}[\tilde{f}_n] + \|f\|^2 .$$

$$\arg\min \mathrm{MISE}(h) \Rightarrow \arg\min \underbrace{\mathbb{E}[\,\|\tilde{f}_n\|^2] - 2\,\mathbb{E}[\tilde{f}_n]}_{\mathrm{MISE}(h) - \|f\|^2 .}$$

$(\|f\|^2 = \int f^2\,dx)$

Un estimateur de $MISE(h) - \|f\|^2$

$CV(h) =$ $= \mathbb{E}[\|\tilde{f}_n\|^2] - 2\mathbb{E}[\tilde{f}_n(x)]$

est $\hat{\mathbb{E}}[\|\tilde{f}_n\|^2] - 2\hat{\mathbb{E}}(\tilde{f}_n(x)) = \|\tilde{f}_n\|^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_n^{(-i)}(x_i)$

avec $\tilde{f}_n^{(-i)}(x) = \frac{1}{(n-1)h}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{l=1\neq i}^{n} \mathbb{1}_{B_j}(x)\,\mathbb{1}_{B_j}(X_l)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{E}[\tilde{f}_n(X)] = \mathbb{E}[\tilde{f}_n^{(-i)}(X_i)] = \frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j^2 \\ &\mathbb{E}[CV(h)] = MISE(h) - \|f\|^2 \\ &CV(h) = \frac{2}{(n-1)h} - \frac{n+1}{(n-1)h}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{p}_j^2 \\ &\text{avec } \hat{p}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_j}(X_i). \end{aligned}}$$

Si f est continue, $h_n \to 0$ and $nh_n \to \infty$, alors $\tilde{f}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f(x)$.

$$\begin{cases} h_n \to 0 \Rightarrow B(\tilde{f}_n(x)) \to 0 \\ nh_n \to \infty \Rightarrow V(\tilde{f}_n(x)) \to 0 \end{cases}$$

II- Kernel Density Estimator

1/ Cas univarié

Convolution product : $\gamma(z) = f * g(z)$

$= \int_{\mathbb{R}} f(z-u)\,g(u)\,du$

$= \int_{\mathbb{R}} f(u)\,g(z-u)\,du$

Parzen-Rosenblatt (KDE)

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x-X_i)$$

avec $K_h(x-X) = \frac{1}{h}K\left(\frac{x-X}{h}\right)$.

$$\mathbb{E}[\hat{f}_n(x)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n K_h(x-X_i)\right]$$

$$= \mathbb{E}[K_h(x-X)]$$

$$= \int K_h(x-X) f(x)\,dx$$

$$= (K_h * f)(x)$$

$$V(\hat{f}_n(x)) = V\left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2h^2}\sum_{i=1}^n V\left(K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{nh^2} V\left(K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{nh^2}\left\{\mathbb{E}\left[K^2\left(\frac{x-X}{h}\right)\right] - \mathbb{E}\left[K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right]^2\right\}$$

$l(\cdot) = K^2(\cdot)$

$$= \frac{1}{nh}\mathbb{E}[K_h^2(x-X)] - \frac{1}{n}\mathbb{E}[K(x-X)]^2$$

$\Rightarrow l_h(\cdot) = K_h^2(\cdot)$

$= \frac{1}{h}K^2\left(\frac{x-x}{h}\right)$

$$= \frac{1}{nh}(l_h * f)(x) - \frac{1}{n}(K_h * f)^2(x)$$

Lemme Bochner, attention aux bornes.

Si f continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, K intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors,

$$\lim_{h\to 0}(K_h * f)(x) = f(x)\int K(u)\,du.$$

Preuve $(K_h * f)(x) = \int K_h(x-u) f(u)\,du = \int \frac{1}{h}K\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u)\,du$

$y = \frac{x-u}{h}$. changement de variable $= \int \frac{1}{h}K(u) f(x-hu)|-h|\,du = \int K(u) f(x-hu)\,du$

Conv. dominée :

$$\left.\begin{array}{l} f(x-hu) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x) \\ |K(u) f(x-hu)| \leq \sup K(u) \end{array}\right\} \int K(u) f(x+hu)\,du \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)\int K(u)\,du$$

$$\to (K_h * f)(x) = \int K(u) f(x+hu)\,du = f(x)\int K(u)\,du + o(1)$$

le biais de $\hat{f}_n(x)$ est :

si $f \in C^2$, f'' borné & et K noyau symétrique.

$$B(\hat{f}_n(x)) = E[\hat{f}_n(x)] - f(x)$$

Bochner $\quad = (K_h * f)(x) - f(x).$

Si $\int K(u)\,du = 1$ et $h \to 0$ $\quad = f(x)\int K(u)\,du + o(1) - f(x)$

$$= o(1)$$

$(\Rightarrow \hat{f}_n(x)$ est asymptotiquement sans biais$)$

$$= \int K_h(x-u) f(u)\,du - f(x)$$

$y = \frac{x-u}{h}$. $\quad = \int \frac{1}{h} K\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u)\,du - f(x)$

$$= \int K(u) f(x-uh)\,du - f(x)$$

$$= \int K(u)\left\{ f(x) + (-uh) f'(x) + \frac{(-uh)^2}{2} f''(x) + o(h^2)\right\} du - f(x)$$

$\int K(u)\,du = 1$ $\quad = -h f'(x) \int u K(u)\,du + \frac{h^2}{2} f''(x) \int u^2 K(u)\,du + o(h^2)$

K a kernel of order 2.

$$= \frac{h^2}{2} f''(x) \int u^2 K(u)\,du + \underbrace{o(h^2)}_{= O(h^2)}$$

De même, (si f est borné et continue au vois. de x)

$$V(\hat{f}_n(x)) = \frac{1}{nh}(\lambda_n * f)(x) - \frac{1}{n}(K_h * f)^2(x)$$

Bochner

si K^2 est intégrable ⇕ K est de carré intégrable

$$= \frac{1}{nh}\left[f(x)\int K^2(u)\,du + o(1)\right] - \frac{1}{n}\left[f(x) + o(1)\right]$$

$$= \frac{1}{nh} f(x)\int K^2(u)\,du + o\left(\frac{1}{nh}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{nh} f(x)\int K^2(u)\,du + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

si $nh \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$= O\left(\frac{1}{nh}\right) = o(1) \qquad ; \quad \frac{\frac{1}{nh}}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow O\left(\frac{1}{nh}\right) = o(1) = O(1)$$

Ainsi si $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $nh \longrightarrow +\infty$ et $\int K^2(u)\,du < \infty$

alors $\hat{f}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(x)$. Consistent estimateur

si $h_n \to 0$, $B(\hat{f}_n(x)) = o(1)$
$nh_n \to \infty$, $V(\hat{f}_n(x)) = o(1)$ } asymptotiquement sans biais

MSE.

(A) K un noyau symétrique tq $\int |K^2(u)|\,du < +\infty$

$\int u^2 K(u)\,du \neq 0$

$f \in \mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) > 0$, $f''(x)$ bornée $\neq 0$ sur $\mathbb{R}$

Alors, $MSE = \mathbb{E}\left[(\hat{f}_n(x) - f(x))^2\right] = B^2(\hat{f}_n(x)) + V(\hat{f}_n(x))$

$$= \frac{f(x)}{nh}\int K^2(u)\,du + \frac{h^4}{4} f''(x)\int u^2 K(u)\,du + o(h^2) + o(1/nh)$$

$$= \left(\frac{f(x)}{nh}\int K^2(u)\,du + \frac{h^4}{4} f''(x)\int u^2 K(u)\,du\right)(1 + o(1))$$

$\Rightarrow$ MSE $\to 0$ when $h \to 0$, $nh \to \infty$

MISE

Si (A) et f' existe et est absolument continue sur $\mathbb{R}$ et $\int (f''(x))^2 dx < +\infty$. ($f''^2$ intégrable)

Alors,

$$MISE(h) = \mathbb{E}\left[\int (\hat{f}_n(x) - f(x))^2 dx\right] = \int \mathbb{E}\left[(\hat{f}_n(x) - f(x))^2\right] dx$$

$$= \left(\frac{1}{nh} \int K^2(u)\, du + \frac{h^4}{4} \int u^2 K(u)\, du \int f''(x)^2 dx\right)(1 + o(1))$$

3/ Cas multivarié.

si K^* un noyau d'ordre r, alors $K = \prod_{i=1}^{d} K^*$ est un noyau d'ordre r sur $\mathbb{R}^d$.

$K : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ un noyau borné et intégrable tq

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(u)\, du = 1.$$

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right),$$

K est un noyau d'ordre r sur $\mathbb{R}^d$ si

* $\int_{\mathbb{R}^d} |u^\alpha K(u)|\, du < +\infty \quad \forall \alpha = r$
* $\int u^\alpha K(u)\, du = 0 \quad \forall \alpha < r-1$
* $\int u^\alpha K(u)\, du \neq 0 \quad \forall \alpha = r$

Sous des conditions de régularité sur K et f, ainsi que de hypothèses convenable ($h \to 0$, $nh^d \to \infty$), on a :

* $\hat{f}_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} f(x)$
* $\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} (\hat{f}_n(x) - f(x))^2 dx\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
* $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\hat{f}_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
* $\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_n(x) - f(x)|\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

En dimension 1 $(d=1)$,

$$MISE(h) = \frac{C_1}{nh} + C_2 (h^r)^2 \int \frac{f^{(r)\,2}(x)}{r!}\, dx.$$

En dimension d,

$$MISE(h) = \underbrace{\frac{C_1}{nh^d} + C_2 h^{2r}}_{AMISE} + O\left(h^{2r} + \frac{1}{nh^d}\right)$$

$$f(x-hu) = f(x) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) (-hu)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x-\tau hu)(-hu)^\alpha$$

$\tau \in [0,1]$

Nous supposons que :

- $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^r(\mathbb{R}^d)$ et les dérivés partielles d'ordre r bornées et de carrés intégrables.
- K est un produit de noyau d'ordre r sur $\mathbb{R}^d$ à support compact : $K(t) = \prod_{i=1}^{d} K(t_i)$.

How to choose h ?

$$h_{cv} = \underset{h}{\operatorname{argmin}} \left[\underbrace{\int \hat{f}_n^2(x)\,dx - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{f}^{(-i)}(x_i)}_{\text{unbiased estimator of } MISE(h) - \int f^2(x)dx} \right]$$

These estimations suffer of the curse of dimensionality.

III- Kernel regression estimator.

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2$, iid

we want to estimate $m(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x]$.

$$= \underset{g \in L^2(X)}{\arg\min}\ \mathbb{E}\{[Y - g(X)]^2\}$$

En supposant que le support de X est inclus dans $[0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) = 1$, nous définissons :

$$p \in \mathbb{N}^*, \quad h = \frac{1}{p}, \quad B_j = (jh, (j+1)h], \quad 0 \leq j \leq p-1.$$

$$S_p = \text{vect}\{ \mathbb{1}_{B_j} : 0 \leq j \leq p-1 \}$$

Ainsi $m_p(X) = \underset{g \in S_p}{\arg\min}\ \mathbb{E}\{[Y - g(X)]^2\}$

$$= \underset{\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}}{\arg\min}\ \mathbb{E}\{\underbrace{[Y - \textstyle\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X)]^2}_{\Psi(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1})}\}$$

CPO : Pour j fixé

$$\frac{\partial \mathbb{E}\{[Y - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X)]^2\}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \mathbb{E}\{[Y - \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X)]^2\}}{\partial \alpha_j}$$

f intégrable, dérivable, ∂f intégrable

$$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial (Y - \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X))^2}{\partial \alpha_j}\right]$$

or $(Y - \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X))^2 = Y^2 - 2\alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X) Y + \alpha_j^2 \mathbb{1}_{B_j}(X)$

$$\Rightarrow \frac{\partial (Y - \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X))^2}{\partial \alpha_j} = -2\mathbb{1}_{B_j}(X) Y + 2\alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X).$$

$$= -2\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_j}(X) Y] + 2\,\mathbb{E}[\alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X)]$$

Ainsi $E\left[\dfrac{\partial (Y-\alpha_j \mathbb{1}_{B_j}(X))^2}{\partial \alpha_j}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_j}(X)Y] = \alpha_j \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_j}(X)]$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_j^* = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_j}(X)Y]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_j}(X)]}$$

Donc $\tilde{m}_n(x) = \dfrac{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{1}_{B_j}(X_i)}{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_j}(X_i)} = \dfrac{\tilde{\ell}_n(x)}{\tilde{f}_n(x)} \quad \forall x \in B_j$

* $E[(\tilde{f}_n(x)-f(x))^2] = B^2(\tilde{f}_n(x)) + \mathrm{var}(\tilde{f}_n(x))$

or $B(\tilde{f}_n(x)) = f'(x)\left(h(j+\frac{1}{2})-x\right) + O(h^2)$

$\mathrm{Var}(\tilde{f}_n(x)) = \dfrac{f(x)}{nh} + O(\frac{1}{n})$

* $E[(\tilde{\ell}_n(x)-\ell(x))^2] = B^2(\tilde{\ell}_n(x)) + \mathrm{var}(\tilde{\ell}_n(x))$

or $B(\tilde{\ell}_n(x)) = E[\tilde{\ell}_n(x)] - \ell(x).$

$$= E\left[\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{1}_{B_j}(X_i)\right] - \ell(x)$$

$$= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n E[Y_i \mathbb{1}_{B_j}(X_i)] - \ell(x)$$

$$= \frac{1}{h} E[Y \mathbb{1}_{B_j}(X)] - \ell(x)$$

$$= \frac{1}{h}\int y \mathbb{1}_{B_j}(x) f_{X,Y}(x,y)\, d(x,y) - \ell(x)$$

???

$\int Y \mathbb{1}_{B_j}(X_i) f_{(X,Y)}(x,y)\, d(x,y)$

(1

$$K(u) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{|u| < 1}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \frac{1}{2} \mathbb{1}\left\{\left|\frac{x - x_i}{h}\right| < 1\right\}$$

$$\left|\frac{x - x_i}{h}\right| < 1 \iff \frac{x - x_i}{h} < 1 \text{ et } \frac{x - x_i}{h} > -1.$$

$$\iff -x_i < h - x \quad \text{et} \quad -\cancel{x_i} > -h - x$$

$$\iff x_i > x - h \quad \text{et} \quad x_i < x + h.$$

$$\iff x - h < x_i < x + h.$$

Donc $K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \frac{1}{2} \mathbb{1}\{x - h < x_i < x + h\}.$

$$\Rightarrow \tilde{\ell}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} Y_j \times \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{1}\{X_j \in (x - h, x + h)\}}_{K\left(\frac{x - X_j}{h}\right)}.$$

$m = \frac{\ell}{f}$

$\to \ell = m.f.$

$$\hat{\ell}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} Y_j K\left(\frac{x - X_j}{h}\right)$$

$$\ell_h = K_h * \ell = E[\hat{\ell}_h]$$

$$E[\hat{\ell}_h(x) - \ell(x)] = E[\hat{\ell}_h(x)] - \ell(x)$$

$$= (K_h * \ell)(x) - \ell(x)$$

$$= \int K_h(x - u)\, \ell(u)\, du - \ell(x)$$

$$= \int K(y)\, \ell(x - yh)\, dy - \ell(x)$$

$$\int K(y)\, \ell(x-hy)\, dy - \ell(x)$$ Taylor young

$$= \int K(y) \left[\ell(x) + (-hy)\,\ell'(x) + \frac{(-hy)^2}{2} \ell''(x) + o(h^2) \right] dy$$
$$- \ell(x)$$

$$= \int K(y) \left[-hy\, \ell'(x) + \frac{(hy)^2}{2} \ell''(x) + o(h^2) \right] dy$$

$$= h\,\ell'(x) \underbrace{\int y K(y)\, dy}_{0} + \frac{h^2}{2} \ell''(x) \int y^2 K(y)\, dy + o(h^2)$$

noyau d'ordre 2

$$= \frac{h^2}{2} \ell''(x) \int y^2 K(y)\, dy + O(h^2)$$ avec $\ell = m.f$.

$\Rightarrow \int \ell(u) K_h(x-u)\, du$
$= \int m(u) f(u) K_h(x-u)\, du$

De même,

$$V(\ell_h(x)) = V\left(\frac{1}{nh} \sum Y_i K\left(\frac{x - x_i}{h} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{nh^2} V\left(Y K\left(\frac{x-X}{h} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{nh^2} \left\{ E\left[\left(Y K\left(\frac{x-X}{h} \right) \right)^2 \right] - E\left[Y K\left(\frac{x-X}{h} \right) \right]^2 \right]$$

avec $L(\cdot) = K^2(\cdot)$

$$= \frac{1}{nh} (L_h * \ell)(x) - \frac{1}{n} (K_h * \ell)^2(x)$$

$$\hat{m} - m = \frac{\hat{\ell}}{\hat{f}} - \frac{\ell}{f} = \hat{\ell}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f^2}(\hat{f} - f) + \frac{2}{f^3}(\hat{f} - f)^2 \right) - \frac{\ell}{f}$$

$\pm \frac{\ell}{f^2}(\hat{f} - f)$

$$= \frac{1}{f}(\hat{\ell} - \ell) - \frac{\hat{\ell}}{f^2}(\hat{f} - f) + \frac{2}{f^3}\hat{\ell}\,(\hat{f} - f)^2$$

$$= \frac{1}{f}(\hat{\ell} - \ell) - \frac{\ell}{f^2}(\hat{f} - f) - \frac{1}{f^2}(\hat{\ell} - \ell)(\hat{f} - f) + \frac{2}{f^3}\hat{\ell}(\hat{f} - f)^2$$

$$\Rightarrow E[\|\hat{m} - m\|^2] = E\left[\left\| \frac{1}{f}(\hat{\ell} - \ell) - \frac{\ell}{f^2}(\hat{f} - f) \right\|^2 \right] (1 + o(1))$$