



MODELES DE COURBE DE TAUX

Projet

Auteurs :

Cheryl KOUADIO
Mariyam OUYASSIN

Encadrant :

Nicolas MOUSIS

Année Universitaire 2024/2025

Contents

I	Reconstitution de la courbe de taux	4
I.1	Formules de valorisation des taux de marché	4
I.2	Construction de la courbe des taux zéro-coupon	5
I.2.1	Extraction du taux zero coupon sur le segment Money Market	6
I.2.2	Extraction du taux zero coupon sur le segment Future	7
I.2.3	Extraction du taux zero coupon sur le segment Swap	7
I.2.4	Courbe de taux zéro-coupon	7
I.3	Construction de la courbe des taux forward	8
II	Valorisation de swaptions et de caplets	9
III	Modèle de Hull-White	11
III.1	Du modèle HJM vers le modèle Hull&White	11
III.2	Hypothèses du modèle Hull&White	11
III.3	Construction de la formule zéro-coupon	12
III.4	Dynamique des taux forwards	13
III.5	Valorisation des instruments de calibration	14
III.6	Calibration du modèle	15
III.7	Valorisation d'un produit structuré	16

List of Figures

1	Résultats de l'interpolation par spline sur la courbe des taux de marché	6
2	Courbe de taux zéro coupon discrétisée	7
3	Courbe de taux forward avec interpolation linéaire (Avant shiftage)	8
4	Courbe de taux forward avec interpolation par spline (Avant shiftage)	8
5	Courbe de taux forward avec interpolation linéaire (Après shiftage)	9
6	Courbe de taux forward avec interpolation par spline (Après shiftage)	9
7	Comparaison de la volatilité par le modèle HW et la volatilité de marché	16
8	Payoff de l'option	17
9	Payoff d'une option binaire/digitale	17
10	Payoff d'une option vanille	17
11	Sensibilité du prix à la mean reversion(λ)	19
12	Probabilité de toucher la barrière en fonction de la mean reversion (λ)	19

List of Tables

1	Volatilités et prix de marché des caplets	10
2	Volatilités, Prix de Marché, Prix Hull-White et Volatilités Implicites des Caplets . .	16

Abstract

Que ce soit pour les banques, les assureurs ou les fonds de pension, la courbe de taux zéro-coupon constitue la brique de base pour la valorisation de nombreux instruments financiers, de la détermination du prix des obligations aux produits dérivés plus complexes tels que les swaps de taux, les caplets, les swaptions ou encore les produits structurés de taux. De ce fait, la construction fiable, cohérente et régulièrement mise à jour d'une courbe de taux zéro-coupon représente un enjeu majeur.

Dans ce contexte, ce projet propose une méthodologie complète de reconstitution de la courbe de taux zéro-coupon implicite, élaborée à partir des cotations de marché disponibles sur différents segments : Money Market (marché monétaire), Futures et Swaps. L'approche adoptée repose sur une combinaison de bootstrapping, permettant d'extraire les taux zéro-coupon pour chaque maturité observable, et d'interpolations par spline cubique, afin d'assurer la lissité et la continuité de la courbe sur l'ensemble de l'échéancier, y compris sur les maturités non directement observées.

La courbe obtenue sert ensuite de référence pour la valorisation de produits dérivés de taux, en particulier les caplets et les swaptions, via le modèle classique de Black, largement utilisé sur les marchés. Toutefois, afin de mieux capturer la dynamique temporelle des taux d'intérêt et de prendre en compte la structure temporelle de la volatilité implicite, la seconde partie du projet repose sur la calibration d'un modèle de Hull-White, un modèle de taux affine avec retour à la moyenne. La calibration est réalisée à partir des cotations de caplets at-the-money (ATM), à l'aide d'une procédure de recherche numérique par dichotomie.

Le projet met également en évidence la sensibilité de la courbe de taux forward et des prix d'options aux paramètres de marché, notamment la volatilité et le paramètre de mean reversion du modèle Hull-White. Cette analyse de sensibilité illustre comment la structure de la courbe de taux et son évolution future sont influencées par les hypothèses de modélisation, ce qui est particulièrement crucial pour les desks de trading, les gestionnaires d'actifs ou les équipes de gestion actif-passif (ALM).

Enfin, le projet se prolonge par une extension appliquée aux produits structurés : la valorisation de caplets à barrière désactivante (knock-out caplets), qui nécessite une approche par simulation Monte-Carlo. Cette extension illustre comment la dynamique du taux court, simulée sous la mesure forward neutre, peut être exploitée pour évaluer des produits de plus en plus complexes, répondant à des besoins spécifiques d'investisseurs ou de gestionnaires de risques.

En conclusion, ce projet fournit un cadre méthodologique intégré, allant de la construction de la courbe de taux zéro-coupon à la valorisation de produits standards et structurés, en passant par la calibration de modèles stochastiques de taux. Il offre ainsi une vision complète des outils nécessaires à la gestion des risques de taux, à la valorisation prudente et à la mise en place de stratégies de couverture adaptées aux conditions de marché actuelles. Les codes utilisés sont accessibles via ce lien.

I Reconstitution de la courbe de taux

I.1 Formules de valorisation des taux de marché

La courbe interbancaire est une courbe de taux qui représente les taux d'intérêt auxquels les banques se prêtent de l'argent entre elles. Elle est utilisée pour déterminer les taux d'intérêt des prêts et des emprunts à court terme. Elle est construite sur le court terme (maturité < 6M) à partir des taux du marché monétaire (Money Market) basés sur les dépôts non garantis entre banques. Sur le moyen terme (6m - 3y) elle est construite à partir des contrats futures, i.e. des forwards sur un marché OTC (Over The Counter) et sur le long terme (> 3y) elle est construite à partir des contrats de swap euribor (Euro Interbank Offered Rate) 3M ou 6M.

Nous disposons de ces données de taux de marché cotés sur le marché interbancaire. Nous allons donc essayer de reconstituer la courbe de taux zero coupon implicite, qui ne cote pas directement sur le marché.

Le jeu de données contient ainsi trois variables :

- Type d'instruments (Money Market, Futures, Swap)
- Maturité (en années)
- Taux d'intérêt

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, les valorisations des instruments de marché s'expriment en fonction des taux zero coupon implicites suivantes :

- Sur le segment Money Market, on cote en taux monétaires :

$$L_0(T, T + \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(0, T)}{B(0, T + \delta)} - 1 \right),$$

avec t le temps courant, T la maturité et δ la période de capitalisation.

- Sur le segment Future, on cote en 1 - le taux forward :

$$future(T, T + \delta) = 1 - L_0(T, T + \delta).$$

Dans notre cas, $\delta = 3m$.

- Sur le segment Swap, on cote en taux swap :

$$Swap(t, T_0, T_n) = B(t, T_0) - B(t, T_n) - K \times lvl(t),$$

avec K le taux fixe du swap qui égalise la PV du swap vaut 0 et $lvl(t) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)$ le taux de marché à la maturité T_n . Dans notre cas, la date de départ est le spot, i.e. $T_0 = 0$ et T_n est la maturité du swap, et $t=0$ (vu d'aujourd'hui).

De ce fait, les données ne sont pas homogènes en taux du fait de la différente cotation des instruments. Il est donc nécessaire de transformer le taux de marché sur le segment future en taux monétaires pour les homogénéiser.

Distinction entre contrat forward et contrat future

Il nous apparaît important de faire la distinction entre contrat forward et future. En effet, la convention de cotation des contrats futures permet d'afficher la valeur du contrat sur une échelle où une hausse du taux implique une baisse du prix du future, ce qui est plus intuitif pour des opérateurs habitués à raisonner en termes de prix d'obligations (où prix et taux évoluent en sens inverse). Cependant, elle ne doit pas masquer le fait que le prix forward et le prix futures sont fondamentalement différents en présence de volatilité.

Le contrat forward est un contrat à terme de gré à gré (OTC), négocié bilatéralement entre deux parties, pour acheter ou vendre un actif à une date future et à un prix convenu aujourd'hui. Le règlement se fait à l'échéance, où un seul flux à la date de maturité (livraison physique ou règlement en espèces). Le contrat future, quant à lui, est un contrat à terme standardisé, négocié sur un marché organisé (ex : CME, Euronext), avec une chambre de compensation qui joue le rôle d'intermédiaire. Le règlement se fait par marquage à marché quotidien : les gains et pertes sont réglés chaque jour via un mécanisme d'appels de marge.

Bien que les forwards et les futures portent sur le même sous-jacent et peuvent avoir la même maturité, leurs prix ne sont pas forcément identiques à cause de l'impact des appels de marge et des flux intermédiaires dans les contrats futures.

Méthodes de bootstrapping :

Pour extraire les taux zéro coupon implicites, nous allons utiliser la méthode de bootstrapping. Cette méthode consiste à calculer les taux zéro coupon implicites à partir des taux de marché. Pour cela, nous allons utiliser les formules des taux monétaires présentées ci-dessus, qui sont vu comme des fonctions de taux zéro coupon implicites.

I.2 Construction de la courbe des taux zéro-coupon

Remarques préliminaires : En zone EURO, les swaps standards cotés sur le marché ont une fréquence de paiement semestrielle pour la patte variable et annuelle pour la patte fixe. Ainsi pour le calcul du level du swap, $\delta = 1$ et on ajoute progressivement les taux de marché. Pour simplifier les calculs, nous supposons que les dates de départ des taux monétaires et des taux de swap sont spot (i.e. $T_0 = 0$ et non 1 ou 2 jours).

Comme les taux de swap ne sont pas nécessairement disponibles pour toutes les maturités annuelles, il faut interpoler les taux intermédiaires. Cela permettra de simplifier la méthode de bootstrapping. Nous avons utilisé une interpolation par spline cubique afin d'avoir des taux swap par an. Une interpolation par spline permet d'avoir des bonnes propriétés en terme de dérivabilité et de continuité de la courbe de taux.

Nous avons donc de construire une nouvelle courbe de taux de marché discrète (figure 1) avec des cotations annuelles de taux swap à l'aide d'une méthode d'interpolation par spline, en plus des autres instruments.

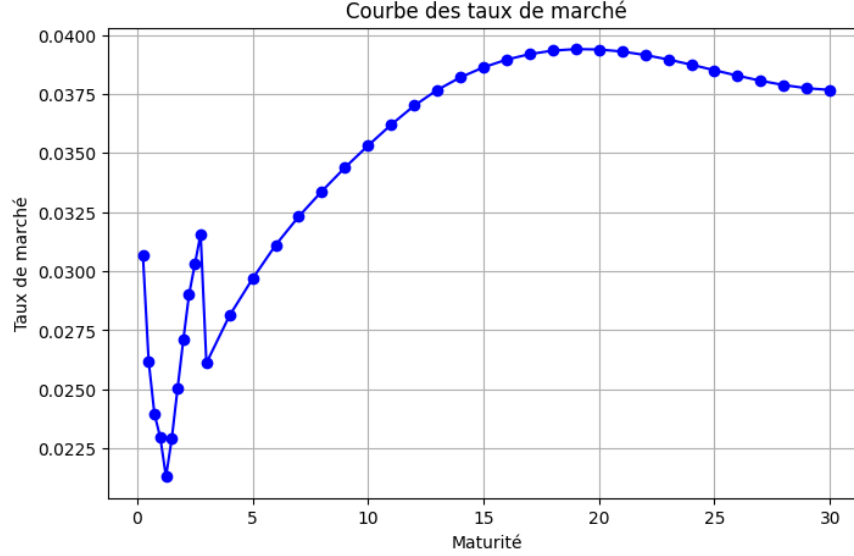


Figure 1: Résultats de l'interpolation par spline sur la courbe des taux de marché

Par la suite, on supposera que cette nouvelle courbe est la courbe de marché de référence, i.e. la courbe utilisée pour impliquer les taux zéro coupon à l'aide du bootstrapping. Enfin, nous allons faire du stripping afin de reconstituer une courbe de taux zéro coupon implicite plus lisse à l'aide de différentes méthodes d'interpolations (linéaire, spline, etc).

Les taux zéro-coupon continus sont définis par la formule suivante :

$$r(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T),$$

où $B(t, T)$ est le facteur d'actualisation ($B(t, T) = \exp(-r(t, T) \times T)$), i.e. le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T à la date t .

Ils sont la brique de base pour la valorisation des produits dérivés et des obligations. De ce fait, nous allons essayer de reconstituer la courbe des taux zéro-coupon implicite à partir de la courbe des taux de marché à l'aide de la méthode du bootstrapping. Cette méthode consiste à calculer les taux zéro-coupon implicites à partir des taux de marché en utilisant les formules adéquates pour chaque segment.

I.2.1 Extraction du taux zero coupon sur le segment Money Market

Sur le segment Money Market, le taux de marché s'écrit de la manière suivante :

$$L_0(0, \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{B(0, \delta)} - 1 \right)$$

De ce fait, le facteur d'actualisation est :

$$B(0, \delta) = \frac{1}{1 + \delta L_0(0, \delta)}$$

I.2.2 Extraction du taux zero coupon sur le segment Future

Sur le segment Future, le taux de marché s'écrit de la manière suivante :

$$Future = 1 - L_0(T, T + \delta) = 1 - \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(0, T)}{B(0, T + \delta)} - 1 \right)$$

De ce fait, le facteur d'actualisation est :

$$B(0, T + \delta) = \frac{B(0, T)}{1 + \delta(1 - Future)}$$

I.2.3 Extraction du taux zero coupon sur le segment Swap

Sur le segment swap payeur, le taux de marché s'écrit de la manière suivante :

$$Swap(t, T_0, T_n) = B(t, T_0) - B(t, T_n) - K l_{vl}(t) = 0,$$

avec K le taux fixe du swap qui fait que la PV du swap vaut 0 et $l_{vl}(t) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)$ le taux de marché à la maturité T_n . De ce fait, le facteur d'actualisation est :

$$B(0, T_n) = \frac{1 - K \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i B(0, T_i)}{1 + K}$$

I.2.4 Courbe de taux zéro-coupon

Le résultat de la courbe de taux zéro-coupon est présenté dans la figure 2. Comme on peut le constater, le mode d'interpolation a un impact significatif sur le calcul des taux de marché car il affecte la forme de la courbe des taux et donc la valorisation des instruments financiers. De ce fait, l'interpolation est une étape à prendre au sérieux.

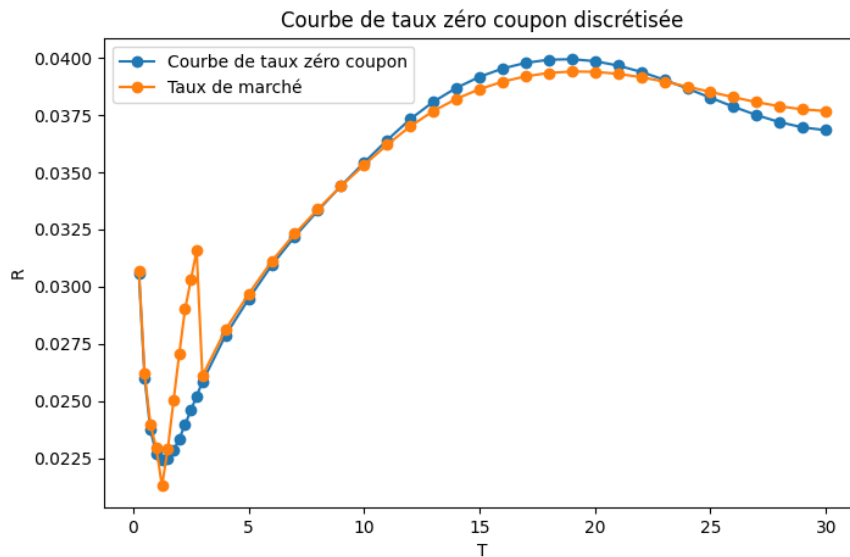


Figure 2: Courbe de taux zéro coupon discrétisée

I.3 Construction de la courbe des taux forward

A partir de la courbe des taux zéro-coupon issue de la méthode de bootstrapping, nous souhaitons tracer la courbe des taux forwards de tenor 3M en fonction de la maturité à l'aide des méthodes d'interpolation linéaire et par spline, avec une discrétisation de 0.1 an.

Pour tracer la courbe taux forward, on utilisera la formule suivante pour calculer les taux forward:

$$L_0(T, T + \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(0, T)}{B(0, T + \delta)} - 1 \right),$$

avec $\delta = 0.25$.

Pour le segment swap, il s'agira d'interpoler les taux zéro-coupon implicites pour avoir des tx forwards 3M.

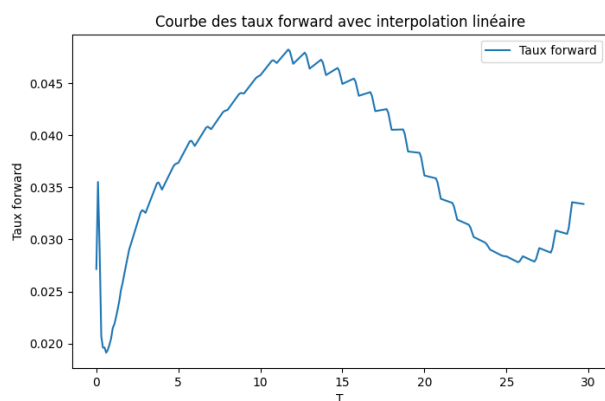


Figure 3: Courbe de taux forward avec interpolation linéaire (Avant shiftage)

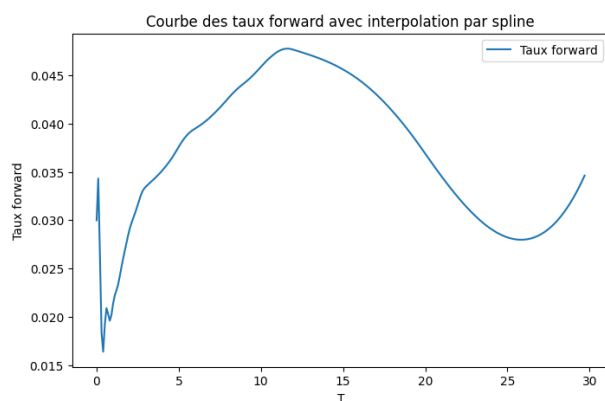


Figure 4: Courbe de taux forward avec interpolation par spline (Avant shiftage)

Lorsqu'on utilise une interpolation linéaire (figure 3), on obtient une courbe plus discontinue. La courbe a une structure en marches d'escalier. Il y a des sauts brusques lorsque l'on passe d'un intervalle à un autre. En effet, par nature, l'interpolation linéaire qui ne prend pas en compte les points intermédiaires. En interpolant avec une fonction spline (figure 4), on obtient une courbe plus lisse et continue. Elle est plus cohérente avec l'évolution naturelle des taux d'intérêt. En effet, la fonction spline est une fonction polynomiale qui passe par tous les points de la courbe. Elle est plus flexible et permet de mieux capturer les variations des taux d'intérêt.

Nous sommes intéressés à ce qui pourrait se passer lorsque nous augmentons le taux de swap 5Y de 10bps. Cela permet de déterminer la sensibilité de la courbe des taux forward aux variations des taux de swap et donc donner des indications sur comment hedger ce risque.

Nous avons donc calculer le taux forward 3M pour les deux courbes de taux forward et comparer les résultats.

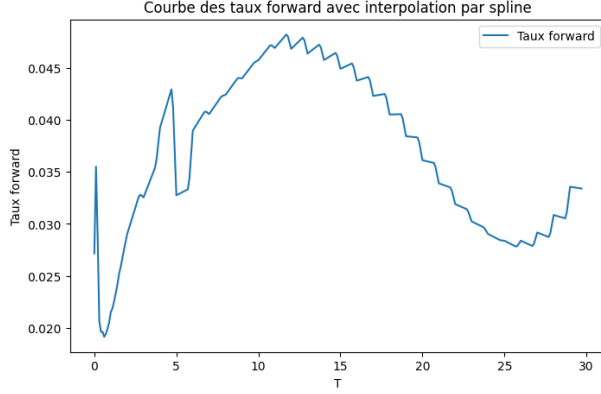


Figure 5: Courbe de taux forward avec interpolation linéaire (Après shifrage)

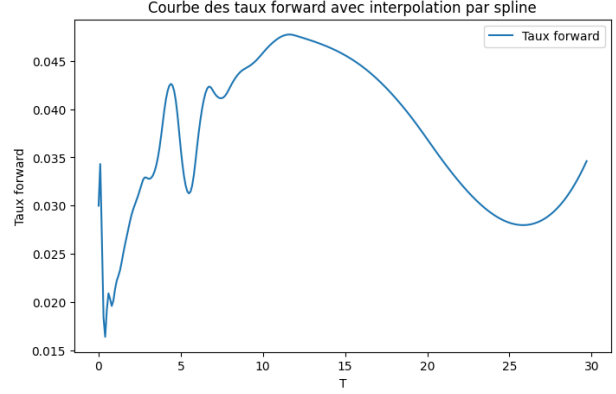


Figure 6: Courbe de taux forward avec interpolation par spline (Après shifrage)

En shiftant le taux de swap 5Y, la courbe de forward baisse brusquement pour $T=5Y$. Il y a une déformation locale de la courbe des taux forward. Cela signifie que la courbe des taux forward est sensible aux variations des taux de swap. En effet, les taux swap sont des instruments financiers qui permettent de se couvrir contre les variations des taux d'intérêt.

II Valorisation de swaptions et de caplets

Pour coter les caplets/floorlets et swaptions, le modèle de Black est souvent utilisé. Ce modèle est basé sur l'hypothèse que les taux d'intérêt sont log-normalement distribués. Il permet de calculer le prix d'un caplet/floorlet et d'un swaption en fonction des taux d'intérêt et de la volatilité implicite.

L'EDS (Equation Différentielle Stochastique) de Black est donnée par :

$$dL(t) = \sigma L(t) dW(t)$$

avec $L(t)$ le taux, σ la volatilité du taux et $W(t)$ un mouvement brownien. En utilisant le changement de numéraire, ce taux est une martingale sous la mesure du numéraire (probabilité risque neutre). Cela permet de calculer le prix d'un caplet/floorlet ou d'une swaption.

Caplets et Floorlets :

Pour un caplet, le prix est donné par la formule suivante :

$$Caplet(t, T_{i-1}, T_i) = N \delta_i B(t, T_i) \left[L_i(t) \phi(d) - K \phi(d - \sigma_i \sqrt{T_{i-1} - t}) \right],$$

avec $d = \frac{1}{\sigma \sqrt{T_{i-1} - t}} \left(\ln \left(\frac{L_i(t)}{K} \right) + \frac{\sigma^2 (T_{i-1} - t)}{2} \right)$, $L_i(t)$ le taux forward 3M à la date t , K le strike du caplet, N le nominal, δ_i la période de capitalisation, $B(t, T_i)$ le facteur d'actualisation à la maturité T_i , σ_i la volatilité du taux forward 3M à la maturité T_i et ϕ la fonction de répartition de la loi normale standard.

Pour un floorlet, le prix est donné par la formule suivante :

$$Floorlet(t, T_{i-1}, T_i) = N\delta_i B(t, T_i) \left[K\phi(d - \sigma_i \sqrt{(T_{i-1} - t)}) - L_i(t)\phi(d) \right]$$

Swaptions :

Pour un swaption payeur, le prix est donné par la formule suivante :

$$Swaption_t = \left(\sum_{j=1}^n N\delta B(t, T_j) \right) \left[F_S(t)\Phi(d) - K\Phi(d - \sigma_S \sqrt{T_0 - t}) \right],$$

avec $F_S(t)$ le taux swap à la date t , K le strike du swaption, N le nominal, δ la période de capitalisation, $B(t, T_j)$ le facteur d'actualisation à la maturité T_j , σ_S la volatilité du taux swap et Φ la fonction de répartition de la loi normale standard.

d est donné par la formule suivante :

$$d = \frac{1}{\sigma_S \sqrt{T_0 - t}} \left(\ln \left(\frac{F_S(t)}{K} \right) + \frac{\sigma_S^2 (T_0 - t)}{2} \right)$$

Pour un swaption receveur, le prix est donné par la formule suivante :

$$Swaption_t = \left(\sum_{j=1}^n N\delta B(t, T_j) \right) \left[K\Phi(d - \sigma_S \sqrt{T_0 - t}) - F_S(t)\Phi(d) \right]$$

A partir des cotations décrites dans le tableau ci-dessous et de la courbe des taux zéro-coupon construite précédemment, nous avons donc calculé les prix de marché de caplets sur euribor12M, ce qui implique une période de capitalisation annuelle $\delta = 1Y$, de maturité $T = 5Y$, i.e. payé à 6Y, et de strikes égaux à $L_0(T, T + \delta) \pm \Delta$ associés au tableau 1. Dans notre cas, $L_0(5Y, 6Y) = 3.9032\%$ et nous obtenons, par exemple, à la monnaie un prix de marché égale à 0.007137, pour un nominal $N = 1$.

Table 1: Volatilités et prix de marché des caplets

Strike en bps et en rel. / fwd	Vol Caplet	Vol Swaption	Caplet Price MKT
-100	0.311859	0.311859	0.012511
-50	0.283274	0.283274	0.009788
-25	0.265921	0.265921	0.008419
0	0.250000	0.250000	0.007137
25	0.243451	0.243451	0.006185
50	0.249019	0.249019	0.005661
100	0.271828	0.271828	0.005167

III Modèle de Hull-White

III.1 Du modèle HJM vers le modèle Hull&White

Pour une maturité T fixée, Heath, Jarrow et Morton ont supposé que le taux forward instantané évolue selon la dynamique suivante :

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t \quad (1)$$

La dynamique (1) ne se place pas forcément dans un cadre sans opportunité d'arbitrage. Les auteurs ont montré que le processus α ne pouvait pas être choisi arbitrairement et que, pour qu'il existe une unique mesure martingale équivalente, α devait être lié à la volatilité du zéro coupon.

Supposons donc l'existence d'une unique mesure martingale équivalente \mathbb{Q} (mesure risque-neutre) dont le numéraire est l'actif sans risque.

On suppose que le prix du zéro coupon (payant une unité de devise en date T) évolue sous \mathbb{Q} selon l'EDS :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T)dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2)$$

Par définition, on sait que $B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s)ds}$ et que $f(t, T) = -\partial_T \ln(B(t, T))$.

En appliquant le lemme d'Itô, on obtient : $df(t, T) = \Gamma(t, T)dW_t^{\mathbb{Q}} + \partial_T \Gamma(t, T)dt - \frac{1}{2}\Gamma(t, T)^2 dt$.

En posant $-\partial_T \Gamma(t, T) = \gamma(t, T)$, nous obtenons :

$$df(t, T) = \gamma(t, T) \int_t^T \gamma(t, u)du dt + \gamma(t, T)dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (3)$$

Après intégration, on retrouve finalement :

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \gamma(s, T) \left(\int_s^T \gamma(s, u)du \right) ds + \int_0^t \gamma(s, T)dW_s^{\mathbb{Q}} \quad (4)$$

III.2 Hypothèses du modèle Hull&White

On suppose que le modèle HJM est gaussien, linéaire et calibrable. Ces hypothèses permettent d'écrire :

$$\gamma(t, T) = \sigma(t)e^{-\lambda(T-t)} \quad \text{et} \quad \Gamma(t, T) = \frac{\sigma(t)}{\lambda} \left(e^{-\lambda(T-t)} - 1 \right) \quad (5)$$

où la fonction de volatilité instantanée $\sigma(t)$ est constante par morceaux.

III.3 Construction de la formule zéro-coupon

Dans le cadre du modèle Hull&White, la dynamique du taux court instantané r_t s'écrit :

$$dr_t = \left[\lambda(f(0, t) - r_t) + \partial_t f(0, t) + \int_0^t \sigma^2(s) e^{-2\lambda(t-s)} ds \right] dt + \sigma(t) dW_t^Q \quad (6)$$

On introduit alors une nouvelle variable d'état : $X_t = r_t - f(0, t)$

La dynamique de X_t devient :

$$dX_t = [\varphi(t) - \lambda X_t] dt + \sigma(t) dW_t^Q, \quad (7)$$

avec $\varphi(t) = \int_0^t \sigma^2(s) e^{-2\lambda(t-s)} ds$.

La formule du prix du zéro coupon s'exprime alors comme une fonction déterministe de X_t :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta^2(t, T)} \varphi(t) - \beta(t, T) X_t \right\}, \quad (8)$$

où $\beta(t, T) = \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}$.

La catégorie de modèle appartient le modèle Hull&White :

Le modèle Hull & White est un modèle à structure à terme affine, i.e. un modèle de taux d'intérêt pour lequel le taux zéro-coupon continu $R(t, T)$ est une fonction affine du taux court $r(t)$.

Il ressemble à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ou mean reversing process, qui est un processus gaussien défini de la manière suivante :

$$dY_t = -\theta [Y_t - \mu] dt + \sigma dW_t,$$

où θ, μ, σ sont des paramètres déterministes et W_t est le processus de Wiener.

Dans notre cas, on a $\theta = \lambda$, $\mu = \frac{\phi(t)}{\lambda}$ et $\sigma = \sigma(t)$. De ce fait, la moyenne et la variance dépend du temps et le paramètre de vitesse de retour à la moyenne est constant.

La loi du processus $X_t|X_s$:

Sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , le processus X_t s'écrit :

$$dX_t = (\phi(t) - \lambda X_t) dt + \sigma(t) dW_t^Q,$$

avec $\phi(t) = \int_0^t \sigma^2(s) e^{-2\lambda(t-s)} ds$.

Posons $K_t = e^{\lambda t} X_t = f(X_t, t) \implies X_t = e^{-\lambda t} K_t$, par la formule d'Itô, on a :

$$\begin{aligned}
df(X_t, t) &= e^{\lambda t} dX_t + de^{\lambda t} X_t \\
&= e^{\lambda t} (\phi(t) - \lambda X_t) dt + e^{\lambda t} \sigma(t) dW_t^Q + e^{\lambda t} X_t dt \\
&= e^{\lambda t} \phi(t) dt + e^{\lambda t} \sigma(t) dW_t^Q \\
\implies f(X_t, t) &= K_t = e^{-\lambda t} K_s + \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} \phi(u) du + \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} \sigma(u) dW_u^Q \\
\Leftrightarrow X_t &= X_s e^{-\lambda(t-s)} + \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} \phi(u) du + \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} \sigma(u) dW_u^T
\end{aligned}$$

De ce fait, on en déduit que :

$$X_t | X_s \sim \mathcal{N} \left(X_s e^{-\lambda(t-s)} + \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} \phi(u) du, \int_s^t e^{-2\lambda(t-u)} \sigma(u)^2 du \right)$$

III.4 Dynamique des taux forwards

On note ensuite $L_i(t)$ le taux LIBOR forward à la date t qui fixe en T_i et paie en T_{i+1} . Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, ce taux s'exprime à partir de la courbe de taux :

$$L_i(t) = \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} - 1 \right) = \frac{1}{\delta_i} (Z_t - 1),$$

Pour connaître la dynamique des taux forwards, on applique le lemme d'Itô au processus :

$$Z_t = \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})}.$$

Rappel du lemme d'Itô : Considérons deux actifs X et Y et posons $Z = \frac{X}{Y}$ (la valeur de X exprimée en numéraire Y). Le lemme d'Itô nous donne l'évolution de Z par :

$$\frac{dZ}{Z} = \left(\frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y} \right) - \left\langle \frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y}, \frac{dY}{Y} \right\rangle.$$

En appliquant le lemme d'Itô à Z_t , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_t}{Z_t} &= \frac{dB(t, T_i)}{B(t, T_i)} - \frac{dB(t, T_{i+1})}{B(t, T_{i+1})} \\
&\quad - \frac{1}{B(t, T_{i+1})^2} B(t, T_{i+1})^2 \Gamma(t, T_i, T_{i+1})^2 dt \\
&\quad - \frac{-1}{B(t, T_i) B(t, T_{i+1})} B(t, T_i) B(t, T_{i+1}) \Gamma(t, T_i) \Gamma(t, T_{i+1}) dt \\
&= \Gamma(t, T_i, T_{i+1}) (\Gamma(t, T_{i+1}) - \Gamma(t, T_i)) dt + (\Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_{i+1})) dW_t^Q \\
\implies \frac{dZ_t}{Z_t} &= \mu(t, T_i, T_{i+1}) dt + \sigma(t, T_i, T_{i+1}) dW_t^Q
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma(t, T_i, T_{i+1}) = \Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_{i+1}) \\ \mu(t, T_i, T_{i+1}) = \Gamma(t, T_i) (\Gamma(t, T_{i+1}) - \Gamma(t, T_i)) = -\Gamma(t, T_i) \sigma(t, T_i, T_{i+1}) \end{cases}$$

De ce fait, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t}{Z_t} &= -\Gamma(t, T_i) \sigma(t, T_i, T_{i+1}) dt + \sigma(t, T_i, T_{i+1}) dW_t^Q \\ &= \sigma(t, T_i, T_{i+1}) \underbrace{\left(-\Gamma(t, T_i) dt + dW_t^Q \right)}_{d\tilde{W}_t} \\ &= \sigma(t, T_i, T_{i+1}) d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

où $d\tilde{W}_t$ est un mouvement brownien selon le théorème de Girsanov.

La diffusion de Z_t suit une loi log-normale, sans drift sous la probabilité risque forward. De ce fait, il suit le modèle de Black pour la valorisation des options.

On peut écrire ainsi la dynamique du taux forward $L_i(t)$ sous la probabilité risque forward :

$$\begin{aligned} dL_i(t) &= \frac{Z_t}{\delta_i} \sigma(t, T_i, T_{i+1}) d\tilde{W}_t \\ &= \left(L_i(t) + \frac{1}{\delta_i} \right) \sigma(t, T_i, T_{i+1}) d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

III.5 Valorisation des instruments de calibration

Payoff d'un caplet vanille :

Le payoff d'un caplet sur le taux LIBOR $L_i(T_i)$, de maturité T_i , avec paiement en T_{i+1} et de strike K est donné par :

$$\text{Payoff} = \delta_i \max\left(L_i(T_i) - K, 0\right).$$

Formule de valorisation dans le cadre du modèle H&W :

Il peut être démontré que la formule de valorisation de ce caplet s'exprime de la manière suivante :

$$C\left(Z_t, \tilde{K}, T_i, \sigma_i^*, B(t, T_{i+1})\right)$$

avec :

- $Z_t = \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})}$,
- $(\sigma_i^*)^2 = \frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} (\Gamma(s, T_i) - \Gamma(s, T_{i+1}))^2 ds = \frac{1}{T_i} \beta^2(T_i, T_{i+1}), \varphi(T_i)$,
- $\tilde{K} = 1 + \delta_i K$,

- $C(\cdot)$ désigne le prix d'un Call selon le cadre Black, en fonction du forward, du strike, de la maturité, de la volatilité et du facteur d'actualisation.

En effet, on peut réécrire le payoff d'un caplet sous la forme d'un Call sur Z_t qui suit un modèle de Black :

$$\begin{aligned}
\text{Payoff} &= \delta_i \max\left(L_i(T_i) - K, 0\right) \\
&= \delta_i \max\left(\frac{Z_t}{\delta_i} - 1 - K; 0\right) \\
&= \delta_i \max\left(\frac{Z_t - 1 - \delta_i K}{\delta_i}; 0\right) \\
&= \max\left(Z_t - 1 - \delta_i K; 0\right) \\
\text{Payoff} &= \max\left(Z_t - \tilde{K}, 0\right)
\end{aligned}$$

III.6 Calibration du modèle

Le modèle de Hull White permet d'avoir une formule fermée pour le prix des caplets. De fait, puisqu'on a calculé les prix de marché de caplets sur euribor12M, ce qui implique une période de capitalisation annuelle, de maturité $T = 5Y$, nous pouvons désormais calibrer le paramètre de volatilité σ_i^* avec la méthode de dichotomie et aussi extraire de manière analytique la volatilité instantanée $\sigma(t)$ du modèle Hull&White, qu'on supposera constante, i.e. $\sigma(t) = \sigma$.

On pose également, pour la calibration, $\lambda = 5\%$.

Pour extraire la volatilité spot, nous utiliserons uniquement le prix de marche ATM, $L_0(5Y, 6Y) = 0.007137$, calculé précédemment. Cela nous permet d'avoir une volatilité implicite égale à $\sigma_i = 0.9271\%$ et une volatilité instantanée égale à $\sigma = 1.0714\%$.

	Volatilité en %
σ_i^*	0.9271045541763303
σ	1.071446257025021

Cette volatilité spot nous permet de valoriser les caplets pour des strikes différents de l'ATM à l'aide de la formule de valorisation fermée du modèle Hull et White. Par exemple, le prix modèles issus de cette calibration du caplet de strike $K = FWD \pm 25bps$ est 0.006156, et celui d'un caplet de strike $K = FWD \pm 50bps$ est 0.005269 et $K = FWD \pm 100bps$ est 0.003771.

Pour constater la forme de la volatilité implicite par le modèle de Hull et White, nous inversons la formule de Black pour les caplets et nous en déduisons la volatilité implicite pour chaque strike. Nous avons utilisé toujours la méthode de dichotomie pour trouver la volatilité implicite. Nous pouvons constater que la volatilité implicite extraite par Hull et White est un skew (figure 7). Cela constitue l'une des faiblesses du modèle de Hull et White, puisqu'il n'arrive pas à capter le smile de volatilité.

Table 2: Volatilités, Prix de Marché, Prix Hull-White et Volatilités Implicites des Caplets

Strike (bps)	Vol Caplet	Vol Swaption	Caplet Price MKT	Caplet Price HW	σ_i^* HW
-100	0.311859	0.311859	0.012511	0.012015	0.288669
-50	0.283274	0.283274	0.009788	0.009389	0.267386
-25	0.265921	0.265921	0.008419	0.008215	0.258287
0	0.250000	0.250000	0.007137	0.007137	0.250009
25	0.243451	0.243451	0.006185	0.006156	0.242433
50	0.249019	0.249019	0.005661	0.005269	0.235466
100	0.271828	0.271828	0.005167	0.003771	0.223060

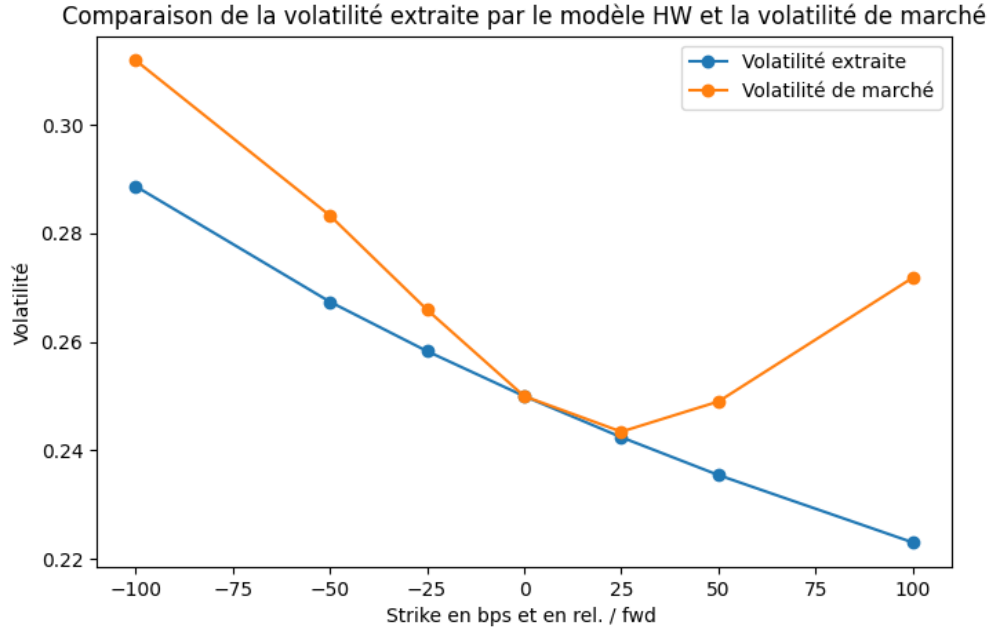


Figure 7: Comparaison de la volatilité par le modèle HW et la volatilité de marché

III.7 Valorisation d'un produit structuré

Remarques préliminaires :

Nous garderons dans un premier temps la calibration ATM effectuée avec $\lambda = 5\%$. Pour la partie Monte-Carlo, nous admettrons que l'EDS pour le processus X_t sous la probabilité forward neutre Q^T associée au numéraire $B(t, T)$ s'écrit comme :

$$dX_t = [\phi(t) + \sigma(t)\Gamma(t, T) - \lambda X_t] dt + \sigma(t)dW_t^T$$

Où W_t^T est un brownien sous Q^T .

Nous souhaitons valoriser un caplet de strike K , de dates de fixing $T_i = 5Y$ et de paiement $T_{i+1} = 6Y$ et de barrière désactivante B (avec $B > K$).

1. Écrire le payoff de l'option et tracer la fonction de payoff en fonction de $L_i(T_i)$. Cette option est-elle plus ou moins chère qu'un simple caplet de strike K ?

Le payoff de l'option est donné par :

$$\text{Payoff} = \delta_i \max(L_i(T_i) - K, 0) \mathbb{1}_{L_i(T_i) < B}$$

Cette option est moins chère qu'une option vanille puisqu'il y a une condition supplémentaire pour réaliser un gain. De plus, ce type d'option est très sensible à la volatilité.

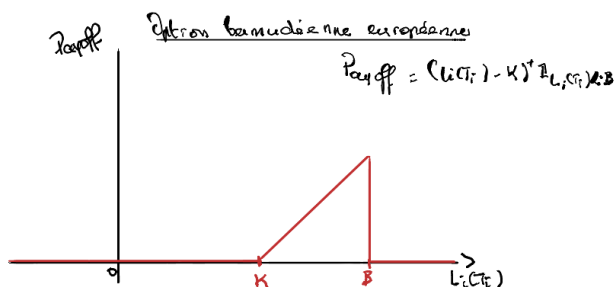


Figure 8: Payoff de l'option

Il est possible de décomposer le payoff à partir d'options vanilles et digitales :

$$\text{Payoff} = C_K - CB - (B - K) \times D_B$$

Une option digitale est une option qui paie 1 si le sous-jacent est au-dessus d'un certain seuil et 0 sinon. De ce fait, le payoff de l'option est donné par :

$$D_B = \delta_i \max(L_i(T_i) - K, 0) \mathbb{1}_{L_i(T_i) > K}$$

Une option vanille est un contrat financier standardisé qui donne le droit, mais non l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé (strike) à une date donnée (maturité). De ce fait, dans le cas d'un call, le payoff de l'option est donné par :

$$C_K = \delta_i \max(L_i(T_i) - K, 0)$$

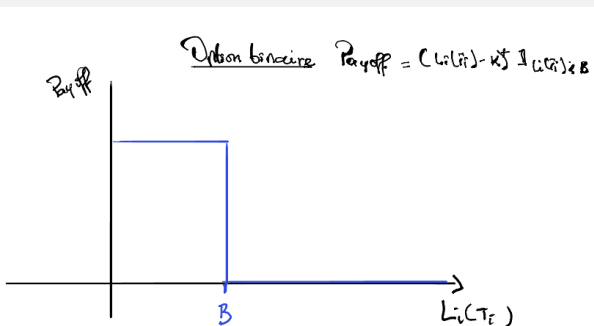


Figure 9: Payoff d'une option binaire/digitale

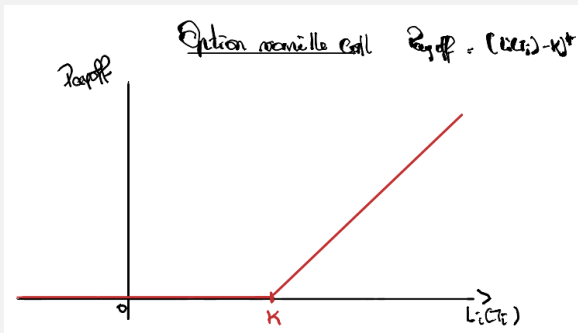


Figure 10: Payoff d'une option vanille

Pour pricer cette option, nous ne disposons pas d'une formule analytique. De ce fait, nous utiliserons la méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte-Carlo est une méthode numérique qui permet de pricer des produits financiers complexes lorsque les formules fermées ne sont pas disponibles. Elle consiste à simuler un grand nombre N de trajectoires du processus stochastique et à calculer la moyenne empirique des payoffs actualisés pour obtenir le prix de l'option.

Pour ce faire, il est nécessaire de connaître la loi de $X_t|X_s$ qui est une loi normale. Pour simuler une variable aléatoire suivant une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$ à partir d'une variable uniforme U sur $[0, 1]$, on applique l'inverse de la fonction de répartition de la loi gaussienne standard (aussi appelée la fonction quantile de la loi normale) :

$$X = F^{-1}(U)$$

où F est la fonction de répartition de la loi normale standard.

On considère un caplet sur euribor12M à barrière désactivante de strike $K = ATM - 100bps$, de barrière $B = ATM + 100bps$ et de maturité $T_i = 5Y$. Pour valoriser cette option, nous allons utiliser une méthode numérique de type Monte-Carlo. Pour cela, il est nécessaire de connaître la loi de $X_t|X_s$. En nous aidant du résultat à la section III.3, on peut déduire que la loi de $X_t|X_s$ est une loi normale de paramètres :

$$X_t|X_s \sim \mathcal{N}\left(X_s e^{-\lambda(t-s)} + \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} (\phi(u) - \sigma \Gamma(u, T)) du, \int_s^t e^{-2\lambda(t-u)} \sigma^2 du\right)$$

Pour valoriser cette option, nous pouvons directement utiliser la loi de $X_5|X_0 \sim N(0, 0.000452)$ pour simuler les trajectoires du taux court. Ensuite, il s'agira de calculer le payoff de l'option à chaque date, en faire la moyenne et l'actualiser pour obtenir le prix de l'option. Avec cette méthode, nous prions cette option à 0.003013. Une autre méthode consiste à diffuser progressivement le taux court en utilisant la loi de $X_t|X_s$ pour chaque pas de temps. Avec cette méthode, nous prions cette option à 0.003021.

Nous constatons qu'avec les deux méthodes, nous obtenons des prix d'options similaires (différent de 0.2bps). Cela confirme que les deux méthodes convergent vers le même résultat.

Pour savoir si nous avons bien pricer, nous avons dégénéré le produit en faisant tendre la barrière vers 0 et $+\infty$. En dégénérant le produit en faisant tendre la barrière à $+\infty$, nous constatons que le prix de l'option call est égal à 0.007334. Ce résultat est à peu près au prix de marché du forward égal à 0.007137 (différence d'environ 2bps). En dégénérant le produit en faisant tendre la barrière à 0, nous constatons que le prix de l'option call est égal à 0.

Cela est cohérent car lorsque la barrière est très élevée, le produit est équivalent à un forward et lorsque la barrière est nulle, le produit est équivalent à un call classique.

Nous rendons la barrière 'bermudéenne' en étendant la condition de désactivation aux dates 1Y, 2Y, 3Y, 4Y et 5Y. De ce fait, le payoff de cette option s'écrit :

$$\text{Payoff} = \delta_i \max\left(L_i(T_i) - K, 0\right) \mathbb{1}_{\max_{i=1,\dots,5}(L_i(T_i) < B)}$$

En valorisant cette nouvelle option, nous obtenons un prix égal à 0.003095.

L'un des paramètres important du modèle de Hull et White est la mean reversion λ , qui caractérise la force de rappel à la moyenne du processus. Ce paramètre a un impact positif sur la valorisation de l'option, comme nous pouvons l'observer dans la figure 11.

De plus, plus le paramètre de mean reversion λ est élevé, plus la probabilité de toucher la barrière est faible (figure 12). Inversement, une faible mean reversion laisse plus de liberté au processus pour explorer des valeurs extrêmes, augmentant ainsi la probabilité de franchir la barrière.

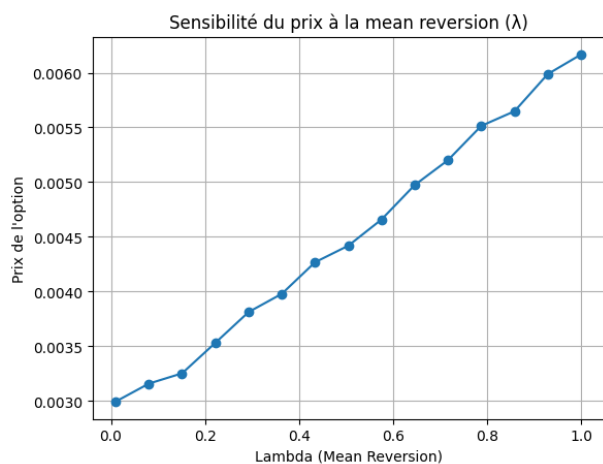


Figure 11: Sensibilité du prix à la mean reversion(λ)

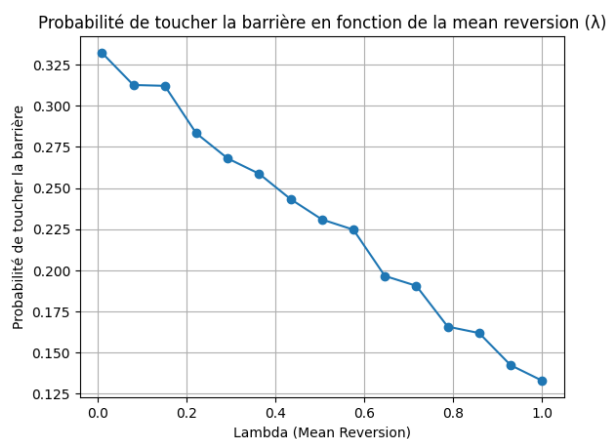


Figure 12: Probabilité de toucher la barrière en fonction de la mean reversion (λ)