



---

# Gestion des Risques Multiples

## Projet

---

**Auteurs :**

Cheryl KOUADIO

Mariyam OUYASSIN

**Encadrant :**

Ali ZERRAD

Année Universitaire 2024/2025

# Contents

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>I Données</b>	<b>5</b>
<b>II Méthodes</b>	<b>5</b>
II.1 Caractérisation des lois des taux de recouvrement . . . . .	6
II.2 Caractérisation des lois de défauts . . . . .	6
II.2.1 Lois marginales . . . . .	6
II.2.2 Structure de dépendance . . . . .	7
<b>III Résultats</b>	<b>10</b>
III.1 Extraction des probabilités de défauts . . . . .	10
III.2 Caractérisation les distributions des taux de recouvrement de chacune des deux créances . . . . .	11
III.3 Etude de la structure de dépendance . . . . .	11
III.3.1 Analyse exploratoire univariée des données actions de ces deux entreprises. . . . .	12
III.3.2 Modélisation des distributions univariées des facteurs de risques . . . . .	12
III.3.3 Étude de la structure de dépendance . . . . .	13
III.4 Modélisation la structure de dépendance au moyen des copules paramétriques . . . . .	14
III.4.1 Test d'ajustement . . . . .	14
III.4.2 Test d'adéquation . . . . .	16
III.5 Estimation de la CreditVaR . . . . .	16
<b>Conclusion</b>	<b>17</b>
<b>IV Annexes</b>	<b>18</b>

## List of Figures

1	Densité de probabilité des taux de recouvrement . . . . .	11
2	Évolution du prix des actions . . . . .	12
3	Rendements BNP vs SG . . . . .	12
4	Dépendogramme représentant la structure de dépendance entre les rendements de BNP et SG . . . . .	14
5	Comparaison des dépendogrammes des différentes copules . . . . .	15
6	Copule Gaussienne . . . . .	15
7	Copule de Student . . . . .	15
8	Copule de Clayton . . . . .	15
9	Copule de Gumbel . . . . .	15
10	Copule de Frank . . . . .	15
11	Comparaison des kendall plot des différentes copules . . . . .	15
12	Copule Gaussienne . . . . .	15
13	Copule de Student . . . . .	15
14	Copule de Clayton . . . . .	15
15	Copule de Gumbel . . . . .	15
16	Copule de Frank . . . . .	15
17	Distribution de la creditVaR par Monte Carlo avec niveau de confiance de 99% . . .	16
18	Ajustements de différentes lois aux rendements BNP . . . . .	18
19	Ajustements de différentes lois aux rendements SG . . . . .	19

## List of Tables

1	Copules archimédiennes bivariées les plus courantes. . . . .	8
2	Probabilités de défaut en % pour différentes maturités . . . . .	10
3	Estimation des paramètres du taux de recouvrement . . . . .	11
4	Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov pour l'ajustement des rendements . . . . .	13
5	Corrélation entre les rendements de BNP et SG . . . . .	13
6	Estimation des paramètres des différentes copules par la méthode IFM . . . . .	14
7	Résultats du test d'adéquation . . . . .	16
8	Résumé statistique des rendements . . . . .	18

## Introduction

Les banques jouent un rôle central dans l'économie nationale et internationale. En effet, elles assurent l'intermédiation entre les agents disposant d'un excédent de financement et ceux ayant un besoin de financement, facilitant ainsi les transactions et soutenant l'investissement, et donc la croissance économique. Toutefois, cette activité les expose à divers risques majeurs, notamment le risque de crédit, le risque de liquidité et le risque de marché. La quantification de ces risques est essentielle pour permettre aux institutions bancaires de s'en prémunir et de les surveiller efficacement. Dans ce cadre, la *Value-at-Risk* (VaR) s'impose comme une mesure de référence. Elle permet d'évaluer la perte potentielle maximale qu'une institution pourrait subir, avec un certain niveau de confiance, sur un horizon temporel donné et pour un portefeuille spécifique.

Dans l'analyse de la VaR, un portefeuille est souvent composé d'au moins deux créances. Il est donc indispensable de prendre en compte les dépendances entre les facteurs de risque. Une approche classique consiste à supposer que le vecteur des risques individuels suit une distribution normale multivariée et à utiliser le coefficient de corrélation linéaire de Pearson comme mesure de dépendance. Cependant, cette hypothèse est souvent trop restrictive en finance : les distributions des facteurs de risque ne sont pas nécessairement gaussiennes et le coefficient de Pearson ne permet pas toujours de capturer les structures de dépendance non linéaires. De plus, cette mesure de corrélation est pertinente uniquement dans un cadre gaussien, qui représente rarement les dynamiques financières réelles.

Dans ce contexte, la **théorie des copules** constitue un outil statistique puissant permettant de modéliser la dépendance entre les risques sans se limiter à l'hypothèse de normalité. Une copule est une fonction qui caractérise la structure de dépendance entre plusieurs variables aléatoires indépendamment de leurs distributions marginales. En séparant la modélisation des distributions marginales et celle de la dépendance conjointe, les copules offrent une flexibilité accrue pour l'analyse du risque et permettent de mieux représenter les interactions entre les actifs financiers.

L'objectif de ce projet est d'évaluer le risque de crédit en calculant une *CreditVaR* avec un niveau de confiance de 99% sur un portefeuille composé de deux obligations bancaires. Ces obligations, bien que différentes en termes de subordination et de risque de recouvrement, appartiennent au même secteur, ce qui accroît le risque global du portefeuille. Il est donc essentiel de modéliser adéquatement la dépendance entre ces actifs pour obtenir une estimation réaliste du risque de crédit.

Ce rapport est structuré comme suit : dans un premier temps, nous présentons la description des données utilisées. Nous détaillons ensuite la méthodologie employée pour le calcul de la *CreditVaR*, qui constitue une adaptation de la VaR appliquée au risque de crédit. Enfin, nous analysons les résultats obtenus et discutons leurs implications. Toutes les analyses seront réalisées à l'aide du langage Python et l'ensemble des résultats présentés ici sont disponibles sur ce [lien](#).

## I Données

Nous disposons des prix des actions des composantes d'un portefeuille constitué de deux créances issues du secteur bancaire, ayant un même notionnel de  $N = 1000$  € et une maturité de  $T = 4$  ans. En l'absence de lignes de crédit, l'exposition en cas de défaut de ces banques est égale au notionnel, soit  $EAD = N = 1000$  €.

La première obligation, de type senior, est émise par BNP et présente un taux de recouvrement moyen de 60% ainsi qu'une volatilité de 15%. La seconde, de type junior (ou subordonnée), est émise par la Société Générale et se caractérise par un taux de recouvrement moyen de 30% et une volatilité de 25%. On suppose qu'il n'existe aucune dépendance entre les taux de recouvrement.

Par ailleurs, nous disposons d'informations sur les spreads des *Credit Default Swaps* (CDS) des deux banques, qui permettent d'évaluer le risque de crédit en fonction de la maturité des actifs. En effet, les CDS sont des contrats d'assurance contre le défaut d'une entreprise. Le spread d'un CDS représente le coût de cette assurance : plus ce spread est élevé, plus le marché perçoit l'entreprise comme risquée.

On considère que les spreads de CDS de BNP et de Société Générale pour une maturité de  $T = 4$  ans sont respectivement de 100 bps et 120 bps, tandis que pour une maturité de  $T = 5$  ans, ils s'élèvent à 120 bps et 150 bps. Ces CDS ont été évalués avec un taux de recouvrement  $R$  fixé à 40%.

Puisque les spreads de Société Générale sont systématiquement plus élevés, quelle que soit la maturité, on en déduit que l'obligation émise par SG est plus risquée que celle émise par BNP. Cette observation est ainsi cohérente avec la hiérarchie des obligations considérées.

Dans la hiérarchie des dettes, une obligation peut être classée comme senior ou junior (subordonnée) en fonction de la priorité de remboursement en cas de faillite de l'émetteur. Cette distinction est essentielle pour évaluer le risque de crédit et le taux de recouvrement attendu. Une obligation senior est moins risquée qu'une obligation junior, car elle est remboursée en priorité en cas de défaut de l'émetteur. En contrepartie, son rendement attendu est généralement plus faible. Ainsi, les obligations senior ont un taux de recouvrement plus élevé et plus stable que les obligations junior.

## II Méthodes

La *CreditVaR* au niveau  $\alpha$  est une adaptation de la *Value-at-Risk* (VaR) appliquée spécifiquement au risque de crédit. Elle permet d'estimer la perte potentielle liée aux défauts de crédit sur un portefeuille donné. Elle est définie comme suit :

$$CVaR_\alpha = \inf\{x \mid P(L < x) \geq \alpha\},$$

où  $L$  représente la perte associée au portefeuille.

Pour évaluer le risque de crédit d'un portefeuille composé de deux obligations, nous utiliserons une *CreditVaR* à 99% ( $\alpha = 99\%$ ). Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer la distribution de la perte  $L$ , définie comme suit :

$$L = EAD_1 \times (1 - R_1) \cdot 1_{\tau_1 \leq T} + EAD_2 \times (1 - R_2) \cdot 1_{\tau_2 \leq T}.$$

Étant donné que la distribution de la perte  $L$  est inconnue, nous procéderons par simulation. Cette approche nécessite de caractériser les distributions des taux de recouvrement  $(R_1, R_2)$  ainsi que celles des temps de défaut  $(\tau_1, \tau_2)$ .

## II.1 Caractérisation des lois des taux de recouvrement

Pour modéliser les distributions des taux de recouvrement, la loi  $\beta(a, b)$  est fréquemment utilisée, car ces taux prennent des valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  et suivent souvent une distribution en forme de U. La loi  $\beta$  est une loi de probabilité continue définie sur cet intervalle, dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{x^{a-1} \times (1-x)^{b-1}}{B(a, b)} 1_{[0,1]}(x).$$

Puisque nous disposons des taux de recouvrement moyens  $\hat{\mu}$  et des volatilités  $\hat{\sigma}$  associés aux composantes de notre portefeuille, il est possible d'estimer les paramètres  $a$  et  $b$  en utilisant la méthode des moments :

$$\hat{a} = \frac{\hat{\mu}^2 \times (1 - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} - \hat{\mu}; \quad \hat{b} = \frac{\hat{\mu}^2 \times (1 - \hat{\mu})}{\hat{\mu} \times \hat{\sigma}^2} - (1 - \hat{\mu}).$$

Par ailleurs, nous supposons qu'il n'existe pas de dépendance entre les taux de recouvrement. Par conséquent, la modélisation explicite d'une structure de dépendance n'est pas nécessaire.

## II.2 Caractérisation des lois de défauts

Pour modéliser les lois des défauts  $(\tau_1, \tau_2)$ , il est essentiel d'analyser à la fois leurs lois marginales et leur structure de dépendance.

### II.2.1 Lois marginales

L'apparition d'un défaut est généralement modélisée à l'aide d'un processus de Poisson standard d'intensité  $\lambda$ , un processus de comptage défini par :

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t},$$

où  $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ , avec  $(\tau_i)_{i=1, \dots, n}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Le défaut est alors défini comme le premier saut du processus de Poisson, soit  $1_{\tau \leq t}$ . Ainsi, le temps de défaut  $\tau$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Pour estimer le paramètre  $\lambda$ , nous utilisons les informations issues des *Credit Default Swaps* (CDS). Un CDS est un contrat financier conclu de gré à gré pour une durée déterminée et un montant notionnel spécifique, référencé sur un emprunteur donné. Dans ce contrat, l'acheteur de protection

verse périodiquement une prime (également appelée spread ou marge  $s$ ) à des dates prédéfinies. En contrepartie, le vendeur de protection s'engage, en cas de défaut de l'emprunteur, à indemniser la perte subie à hauteur du montant notionnel.

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, le spread du CDS est fixé de manière à équilibrer les flux fixes et les flux variables associés au contrat. Il en résulte l'équation suivante :

$$s = (1 - R) \times \lambda,$$

où  $R$  représente le taux de recouvrement et  $\lambda$  l'intensité de défaut, que l'on peut ainsi isoler.

La probabilité de défaut peut alors être obtenue à partir de la fonction de répartition de la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  :

$$PD = P(\tau \leq T) = 1 - e^{-\lambda \times T}.$$

## II.2.2 Structure de dépendance

Pour étudier la structure de dépendance entre les défauts, nous utiliserons le prix des actions des entreprises. En effet, les actions constituent un produit dont le prix dépend de la dépendance entre les défauts. De fait, modéliser le facteur de risque, i.e. le rendement, permettra de bien capter la dépendance entre les défauts.

### II.2.2.1 Évaluation de la dépendance.

L'évaluation de la dépendance entre les facteurs de risque sera réalisée en utilisant des outils graphiques basés sur des critères non paramétriques, tels que les nuages de points, les ajustements linéaires et le dépendogramme.

Ces méthodes, choisies pour leur capacité à traiter des données sans présupposer une distribution spécifique, offrent une approche flexible et visuelle pour identifier et analyser les relations entre les variables de risque. Par exemple, les nuages de points permettent de visualiser la dispersion et la relation potentielle entre deux variables, tandis que les ajustements linéaires cherchent à modéliser la relation par une ligne droite, facilitant ainsi la compréhension des tendances générales.

Le dépendogramme, quant à lui, représente la structure de dépendance sous la forme du nuage de points des marges uniformes extraites de l'échantillon  $n$  couples de données  $((x_{1,1}; x_{2,1}), \dots, (x_{1,n}; x_{2,n}))$ , i.e. :

$$u_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{x_{j,k} \leq x_{j,i}\}}, \quad i \in [1, n], \quad \forall j \in [1, 2]$$

Le dépendogramme de l'échantillon est donc la représentation de  $n$  couples  $((u_{1,1}; u_{2,1}), \dots, (u_{1,n}; u_{2,n}))$ . Il permet d'observer le caractère plus ou moins simultané des réalisations issues de l'échantillon.

### II.2.2.2 Modélisation de la dépendance

Pour modéliser la structure de dépendance entre les défauts, de manière précise, nous utiliserons les copules. Une copule est une fonction de répartition multivariée de marginales uniformes sur  $[0, 1]$ . Dans le cas bivarié, on a:



$$C(u_1, u_2) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2]$$

Dans le cadre de ce projet, nous allons étudier deux principales familles de copules présentés dans le tableau 1 :

- Copules elliptiques : gaussienne, Student
- Copules archimédiennes : Clayton, Gumbel, Frank

Famille	Nom	Copule $C(u, v)$	Paramètres
Elliptique	Gaussien	$\Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$\rho$
	Student	$T_{\Sigma}(T_{\nu}^{-1}(u), T_{\nu}^{-1}(v))$	$\rho, \nu$
Archimédienne	Frank	$\frac{1}{\theta} \left( -\ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \right)$	$\theta \neq 0$
	Gumbel	$\exp \left( - \left( (-\ln(u))^{\theta} + (-\ln(v))^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right)$	$\theta \geq 1$
	Clayton	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta > 0$

\* $\Sigma$  est la matrice de variance covariance.

Table 1: Copules archimédiennes bivariées les plus courantes.

Il s'agira après estimation des paramètres et des tests d'ajustement, la copule la plus adéquate pour modéliser au mieux la dépendance entre les variables étudiées.

### Méthodes d'inférence statistique

Pour l'estimation des paramètres des copules sélectionnées, plusieurs approches méthodologiques s'offrent à nous: la méthode des moments, la méthode du maximum de vraisemblance et l'approche IFM. Nous privilégierons l'approche IFM (Inference Functions for Margins) présenté ci dessous (algo 1). Cet algorithme a l'avantage d'être plus rapide que la méthode du maximum de vraisemblance.

---

#### Algorithm 1 Méthode IFM

---

- 1: **Entrée** : Échantillon de données  $\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,i}$  pour  $i = 1, \dots, n$
  - 2: **Sortie** : Estimations des paramètres  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_c$
  - 3: **Étape 1 : Estimation des distributions marginales**
  - 4: **for**  $j = 1, 2$  **do**
  - 5:     Calculer  $\hat{\theta}_j = \arg \max_{\theta_j} \sum_{i=1}^n \ln f_j(x_{j,i}; \theta_j)$
  - 6: **end for**
  - 7: **Étape 2 : Estimation des paramètres de la copule**
  - 8: Estimer  $\hat{\theta}_c = \arg \max_{\theta_c} \sum_{i=1}^n \ln c \left( F_1(\mathbf{x}_{1,i}, \hat{\theta}_1); F_2(\mathbf{x}_{2,i}, \hat{\theta}_2), \theta_c \right)$
- 

### Critères d'ajustement

Pour l'évaluation de l'ajustement des copules à la structure de dépendance d'un échantillon, nous utiliserons des outils graphiques tels que le *dépendogramme*, présenté précédemment, et le *Kendall plot*.

Le Kendall plot permet une comparaison directe entre la copule empirique et la copule théorique. Plus le Kendall plot se rapproche d'une droite, plus l'ajustement entre la structure de dépendance de l'échantillon et la copule estimée sur ce même échantillon est bon.

### Critères d'adéquation

Les tests d'adéquation pour les copules consistent à tester l'appartenance à une famille paramétrique de copules notée  $\{C_\theta, \theta \in \Theta\}$  :

$$\mathcal{H}_0 : C \in \{C_\theta, \theta \in \Theta\} \quad \text{vs} \quad \mathcal{H}_1 : C \notin \{C_\theta, \theta \in \Theta\}$$

Ces tests d'adéquation se fondent sur les pseudo-observations déduites des statistiques de rang, qui sont assimilables à un échantillon,  $\widehat{U}_i = (\widehat{U}_{1,i}, \widehat{U}_{2,i})$ , de la copule sous-jacente  $C$  :

$$\widehat{U}_{j,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{x_{j,k} \leq x_{j,i}\}}, \quad i \in [1, n], \quad j \in [1, 2]$$

À partir d'une estimation  $C_{\theta_n}$  de  $C$  obtenue sous  $\mathcal{H}_0$ , on établit la statistique de test suivante :

$$T_n = \sum_{i=1}^n \left( \widehat{C}_n(\widehat{U}_i) - C_{\theta_n}(\widehat{U}_i) \right)^2,$$

où  $\widehat{C}_n$  est la copule empirique définie par  $\widehat{C}_n(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\widehat{O}_{1,i} \leq u_1; \widehat{O}_{2,i} \leq u_2\}}, \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ .

Sur la base de ce test, on choisira donc la copule pour laquelle la p-value est la plus grande, c'est-à-dire, pour laquelle  $\mathcal{H}_0$  est la plus plausible. Puisque la distribution de  $T_n$  sous  $\mathcal{H}_0$  est inconnue, la p-value pour  $T_n$  sera calculé à l'aide d'une procédure de bootstrap paramétrique.

---

**Algorithm 2** Procédure de bootstrap paramétrique pour l'estimation de la p-value

---

- 1: **Entrée** : Échantillon de données  $\{(X_{1,i}, X_{2,i})\}_{i=1}^n$ , nombre d'itérations  $S$
- 2: **Sortie** : Estimation de la p-value
- 3: **Étape 1 : Estimation initiale**
- 4: Calculer la copule empirique  $\hat{C}_n$  et estimer  $\theta_n$  à partir des pseudo-observations  $\{\hat{U}_i\}_{i=1}^n$
- 5: **Étape 2 : Calcul de la statistique de test**
- 6: Calculer la statistique  $T_n$
- 7: **Étape 3 : Bootstrap paramétrique**
- 8: **for**  $s = 1, \dots, S$  **do**
- 9:   Générer un échantillon bootstrap  $\{(X_{1,i}^{(s)}, X_{2,i}^{(s)})\}_{i=1}^n$  à partir de la copule  $C_{\theta_n}$
- 10:   Calculer les pseudo-observations associées  $\{U_i^{(s)}\}_{i=1}^n$
- 11:   Estimer  $\theta_n^{(s)}$  à partir des pseudo-observations  $\{U_i^{(s)}\}_{i=1}^n$
- 12:   Calculer  $\hat{C}_n^{(s)}(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\hat{U}_{1,i}^{(s)} \leq u_1, \hat{U}_{2,i}^{(s)} \leq u_2\}}$
- 13:   Calculer la statistique de test bootstrap :
- $$T_n^{(s)} = \sum_{i=1}^n \left( \hat{C}_n^{(s)}(\hat{U}_i^{(s)}) - C_{\theta_n^{(s)}}(\hat{U}_i^{(s)}) \right)^2$$
- 14: **end for**
- 15: **Étape 4 : Estimation de la p-value**
- 16: Calculer la p-value estimée :

$$p\text{-value} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S 1_{\{T_n^{(s)} \geq T_n\}}$$

---

### III Résultats

#### III.1 Extraction des probabilités de défauts

A l'aide des CDS spreads, nous pouvons estimer les paramètres de la survenue de défaut pour les deux entreprises, i.e. BNP et Société Générale et de fait calculer les probabilités de défaut. Nous constatons, sans surprise, que les probabilités de défaut pour les deux entreprises pour une même maturité sont généralement plus élevés pour la Société Générale que pour BNP Paribas. Par exemple, pour une maturité de 4 ans, la probabilité de défaut de la SG vaut 7.69% tandis que celle de BNP vaut 6.45% (tableau 2).

	4 ans	5 ans
BNP	6.4493	9.5163
SG	7.6884	11.7503

Table 2: Probabilités de défaut en % pour différentes maturités

### III.2 Caractérisation les distributions des taux de recouvrement de chacune des deux créances

En ce qui concerne les taux de recouvrement, nous estimons les paramètres de la loi  $\beta$  avec la méthode des moments et obtenons les résultats présentés dans le tableau ci-dessous :

	BNP	SG
$\hat{\mu}$	0.60	0.30
$\hat{\sigma}$	0.15	0.25
$\hat{a}$	5.80	0.71
$\hat{b}$	3.87	1.65

Table 3: Estimation des paramètres du taux de recouvrement

L'obligation émise par BNP a un taux de recouvrement en moyenne plus élevé et plus stable, i.e. moins volatile, que l'obligation émise par la SG.

De plus, nous constatons que la distribution des taux de recouvrement de BNP est légèrement asymétrique à droite (figure 1). En effet, le paramètre  $a$ , contrôle la concentration des valeurs proches de 1, est supérieur au paramètre  $b$ , contrôle la concentration des valeurs proches de 0. De ce fait, la distribution est asymétrique à gauche. Cependant que la majorité des valeurs sont concentrées autour de la moyenne et il y a une faible probabilité de recouvrement très bas ou très élevé. En ce qui concerne la distribution des taux de recouvrement de la Société Générale, nous constatons une asymétrie à gauche également. La densité est très asymétrique, décroissant fortement à partir de 0. On constate une forte concentration des valeurs proches de 0 indique un risque élevé de faible recouvrement. La longue traîne vers la droite signifie que, bien que des recouvrements plus élevés soient possibles, ils sont peu probables.

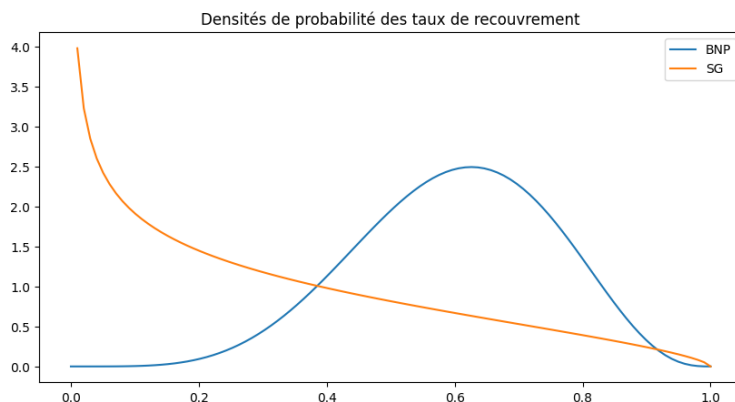


Figure 1: Densité de probabilité des taux de recouvrement

### III.3 Etude de la structure de dépendance

Pour caractériser les lois de défaut, nous avons besoin de prendre en compte la structure de dépendance en plus des lois marginales présentées dans la section I. Pour ce faire, nous devons utiliser un produit dont le prix dépendant de la dépendance entre les défauts des deux entreprises. Dans notre cas, nous utiliserons le prix des actions des deux entreprises pour déterminer la dépendance entre les défauts.

### III.3.1 Analyse exploratoire univariée des données actions de ces deux entreprises.

En observant le prix des actions BNP et SG, nous constatons que les actions BNP ont un prix plus élevés que les actions SG. De plus, nous constatons que les rendements de BNP sont semblables à ceux de SG. Cela est cohérent avec le fait que les deux entreprises sont des banques françaises et sont donc exposées aux mêmes risques macroéconomiques. Néanmoins, les actions de BNP présentent une volatilité légèrement plus élevée que celles de SG (tableau 8 en annexe).

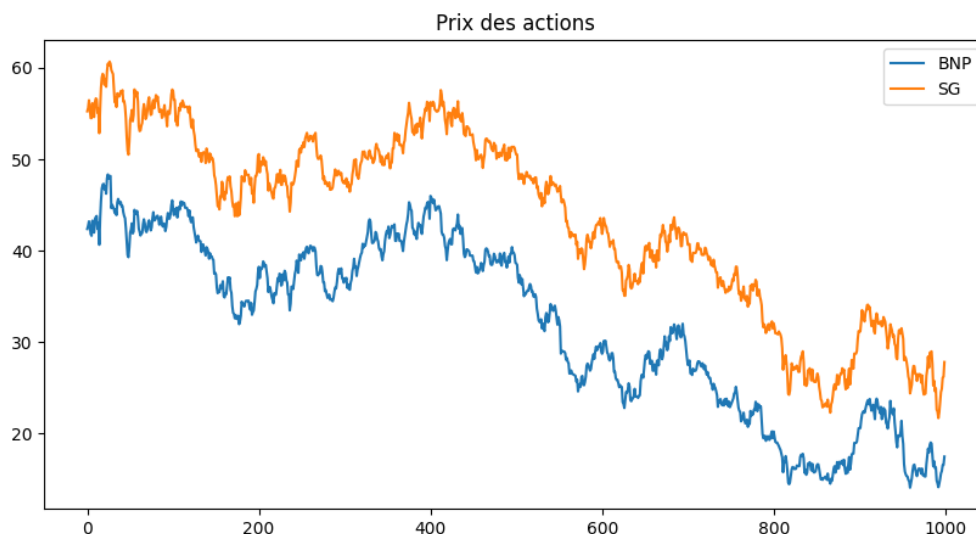


Figure 2: Évolution du prix des actions

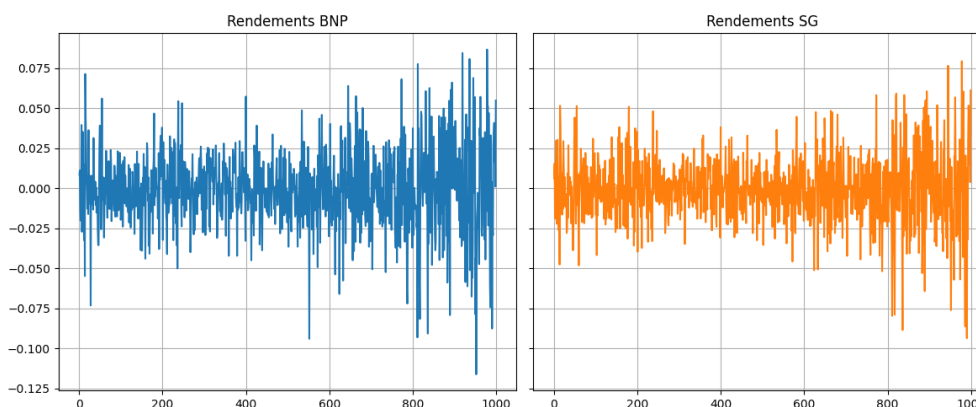


Figure 3: Rendements BNP vs SG

### III.3.2 Modélisation des distributions univariées des facteurs de risques

Dans le cadre de l'analyse des prix des actions, le seul facteur de risque étudié est le rendement. Nous allons donc ajuster les rendements des actions de BNP et de Société Générale (SG) à différentes distributions : loi normale, loi de Student et loi *Normal Inverse Gaussian* (NIG), afin de déterminer le modèle le plus approprié.

En ce qui concerne les rendements de BNP, nous constatons que la loi de Student et la loi *Normal*

*Inverse Gaussian* sont les plus adaptées. En effet, en comparant les QQ-plots des rendements de BNP avec ces distributions (Figure 18 en annexe), nous observons que les quantiles empiriques des rendements sont plus proches des quantiles théoriques de ces distributions. De plus, les densités ajustées montrent une meilleure adéquation aux données.

Si nous devons choisir une loi pour modéliser les rendements de BNP, nous privilégierions la loi *Normal Inverse Gaussian*. Bien qu'elle soit plus complexe à estimer, elle présente une p-value plus élevée au test de Kolmogorov-Smirnov que la loi de Student, ce qui indique une meilleure adéquation.

De même, pour les rendements de SG, les lois de Student et *Normal Inverse Gaussian* s'ajustent mieux que la loi normale. Toutefois, la loi *Normal Inverse Gaussian* offre également la meilleure p-value au test de Kolmogorov-Smirnov, ce qui en fait le choix optimal pour modéliser les rendements de SG.

	BNP		SG	
	Statistique	p-value	Statistique	p-value
Normale	0.0519	0.0089	0.0473	0.0219
Student	0.0272	0.4417	0.0256	0.5192
Normal Inverse Gaussian	0.0265	0.4780	0.0225	0.6859

Table 4: Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov pour l'ajustement des rendements

### III.3.3 Étude de la structure de dépendance

Pour analyser la dépendance entre les défauts des deux entreprises, nous avons testé trois mesures de corrélation : Pearson, Spearman et Kendall. Étant donné que la corrélation de Pearson ne capture que les relations linéaires, tandis que les coefficients de Spearman et de Kendall mesurent la concordance entre les variables, nous avons évalué leur significativité.

Table 5: Corrélation entre les rendements de BNP et SG

	Pearson	Spearman	Kendall
Coefficient	0.8647	0.8096	0.6691
p-value	$2.83 \times 10^{-300}$	$3.61 \times 10^{-268}$	$9.88 \times 10^{-220}$

Ces résultats indiquent une forte corrélation positive entre les rendements des deux entreprises, quelle que soit la mesure utilisée. La corrélation de Spearman et celle de Pearson dépassent 80 %, ce qui suggère une forte relation monotone et linéaire. Quant au coefficient de Kendall, il indique également une dépendance positive significative de 67 %.

En complément de ces résultats numériques, nous avons représenté la structure de dépendance à l'aide d'un dépendogramme (Figure 4). Ce graphique met en évidence la corrélation positive entre les rendements des deux entreprises. Il montre également que si l'une d'elles fait défaut, l'autre a une probabilité accrue de faire défaut à son tour, ce qui confirme l'intuition fournie par les coefficients de corrélation.

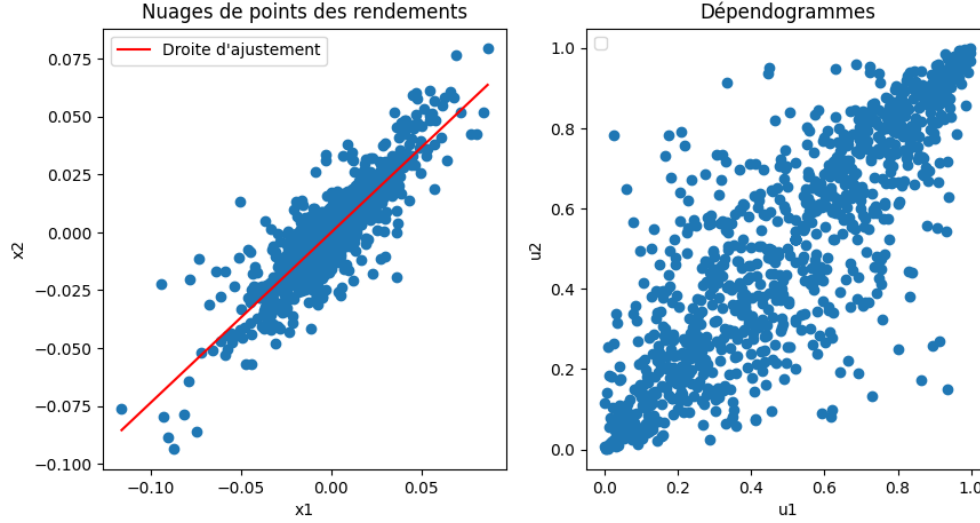


Figure 4: Dépendogramme représentant la structure de dépendance entre les rendements de BNP et SG

En observant le dépendogramme, nous constatons également une dépendance aux queues à gauche et à droite. De ce fait, nous testerons l'ensemble des copules définies à la section 1 afin de déterminer celle qui s'ajuste le mieux à nos données.

### III.4 Modélisation la structure de dépendance au moyen des copules paramétriques

En estimant les paramètres des copules archimédiennes et elliptiques à l'aide de la méthode IFM, nous obtenons les résultats suivants :

Copule	Paramètres estimés
Gaussienne	$\rho = 0.86097656$
Student	$\rho = 0.84961434, \nu = 2.0$
Clayton	$\theta = 2.47683105$
Gumbel	$\theta = 2.9939209$
Frank	$\theta = 10.0$

Table 6: Estimation des paramètres des différentes copules par la méthode IFM

#### III.4.1 Test d'ajustement

Nous avons représenté ci-dessous les dépendogrammes de l'échantillon en rouge et celui des différentes copules théoriques, pour nous forger une première idée sur la pertinence de la modélisation envisagée. Graphiquement, toutes les copules semblent adaptées pour modéliser la structure de dépendance de notre portefeuille. En effet, les points rouges et bleus semblent se superposer.

Figure 5: Comparaison des dépendogrammes des différentes copules

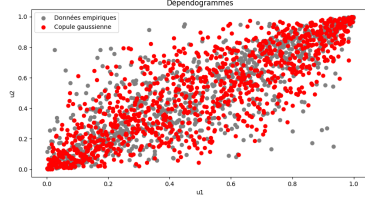


Figure 6: Copule Gaussienne

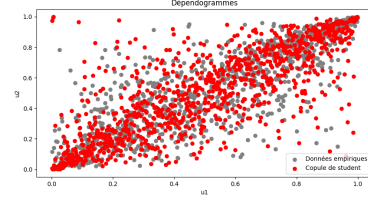


Figure 7: Copule de Student

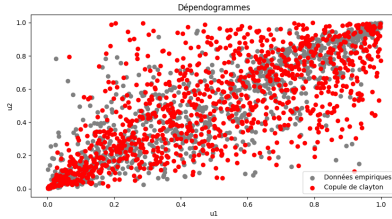


Figure 8: Copule de Clayton

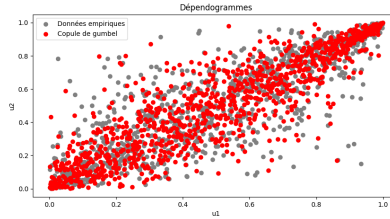


Figure 9: Copule de Gumbel

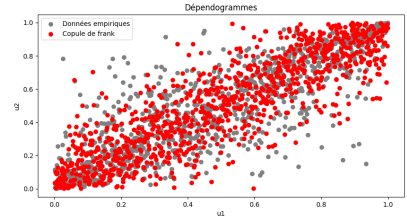


Figure 10: Copule de Frank

De plus, en utilisant le kendall plot, nous constatons que toutes les copules semblent être les plus alignées sur la première bissectrice, sauf la copule de Clayton qui s'y écarte de manière flagrante. Ces graphiques nous donnent une première idée sur l'adéquation des copules choisies à la structure de dépendance de nos données.

Figure 11: Comparaison des kendall plot des différentes copules

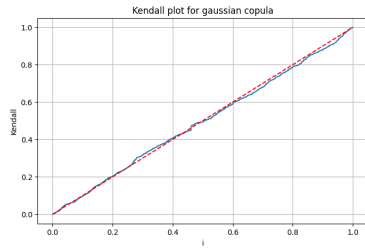


Figure 12: Copule Gaussienne

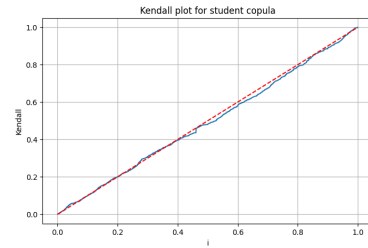


Figure 13: Copule de Student

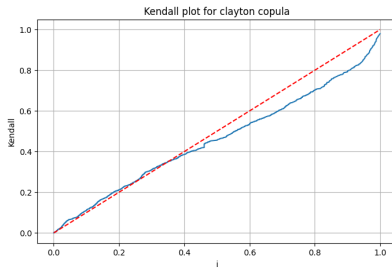


Figure 14: Copule de Clayton

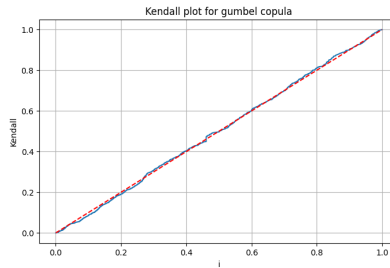


Figure 15: Copule de Gumbel

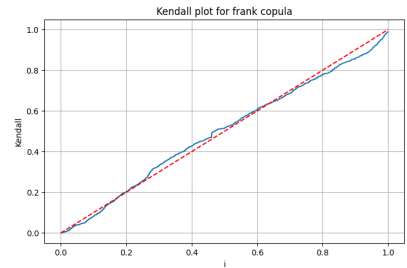


Figure 16: Copule de Frank



### III.4.2 Test d'adéquation

En testant de manière statistique les copules choisies à la procédure du test d'adéquation, nous obtenons les p-values suivantes:

Copule	P-value
Gaussienne	0.904
Student	0.854
Clayton	0.004
<b>Gumbel</b>	<b>0.986</b>
Frank	0.456

Table 7: Résultats du test d'adéquation

En analysant ces p-values, nous constatons que la copule de Clayton n'est pas adaptée pour modéliser la dépendance entre ces facteurs de risque, au seuil de 5% et même à des seuils plus bas. Toutes les autres copules semblent, quant à elles, être statistiquement significatives pour modéliser les facteurs de risque de BNP et de la SG.

Sur la base de ces p-values, nous sélectionnons la copule de Gumbel pour modéliser la structure de dépendance de nos données et ainsi estimer la CreditVaR. En effet, ayant la p-value la plus élevée, cette copule est celle pour laquelle l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est la plus plausible.

### III.5 Estimation de la CreditVaR

Pour déterminer la distribution de la perte du portefeuille, nous allons procéder par simulations de Monte Carlo. Pour déterminer le nombre de simulations nécessaire, nous faisons varier le nombre de simulations de 100 à 100 000, par incréments de 100, puis nous estimons la CreditVaR de niveau 99%. L'idée est de choisir le nombre de simulations  $S$  à partir duquel la CreditVaR semble converger. Le graphique ci-dessous (voir 17) représente les différentes valeurs de la créditVar.

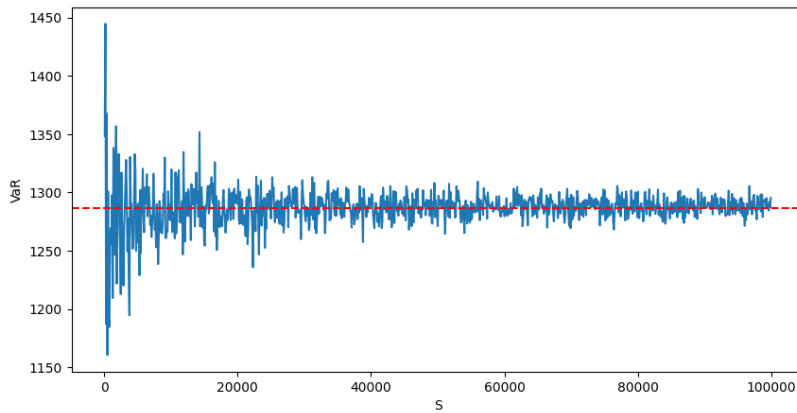


Figure 17: Distribution de la creditVaR par Monte Carlo avec niveau de confiance de 99%

En faisant la moyenne des VaR estimés, nous estimons la CreditVaR de niveau 99% à **1286,61**.

## Conclusion

Dans ce projet, nous avons analysé le risque de crédit d'un portefeuille composé de deux obligations bancaires à travers la *Credit VaR*. L'approche adoptée repose sur l'estimation des probabilités de défaut à partir des spreads de *Credit Default Swaps* (CDS), la modélisation des taux de recouvrement à l'aide d'une distribution Beta, ainsi que la prise en compte des dépendances entre les défauts au moyen des copules.

Nos résultats mettent en évidence l'importance de la structure de dépendance dans l'évaluation du risque de crédit. Après avoir testé plusieurs copules paramétriques, nous avons retenu la **copule de Gumbel** comme la plus appropriée, en raison de son bon ajustement aux données et de sa capacité à capturer les asymétries et les queues de distribution lourdes, essentielles dans un contexte de crise financière.

La simulation Monte Carlo nous a permis d'estimer la distribution des pertes du portefeuille et de déterminer une *Credit VaR* à 99% de **1286,61€**. L'analyse de la convergence des résultats confirme la robustesse de cette estimation, qui reste stable malgré les variations de taille d'échantillon.

Ainsi, cette étude illustre la pertinence des copules pour modéliser de manière plus réaliste la dépendance entre les actifs financiers, là où les approches classiques fondées sur la corrélation linéaire sont insuffisantes. Une perspective d'amélioration pourrait consister à explorer des copules dynamiques ou à affiner l'estimation des paramètres via des méthodes bayésiennes.

## IV Annexes

Table 8: Résumé statistique des rendements

	BNP	SG
mean	-0.000590	-0.000473
std	0.024340	0.020690
min	-0.161990	-0.093616
25%	-0.013771	-0.011760
50%	-0.000358	-0.000547
75%	0.012605	0.011286
max	0.086786	0.079479

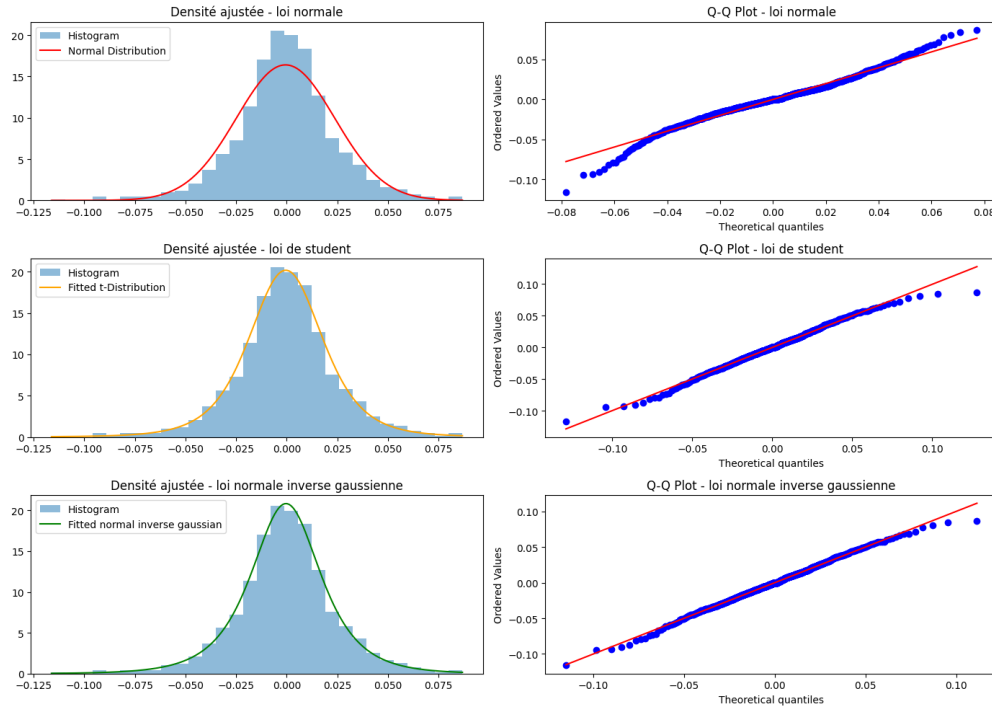


Figure 18: Ajustements de différentes lois aux rendements BNP

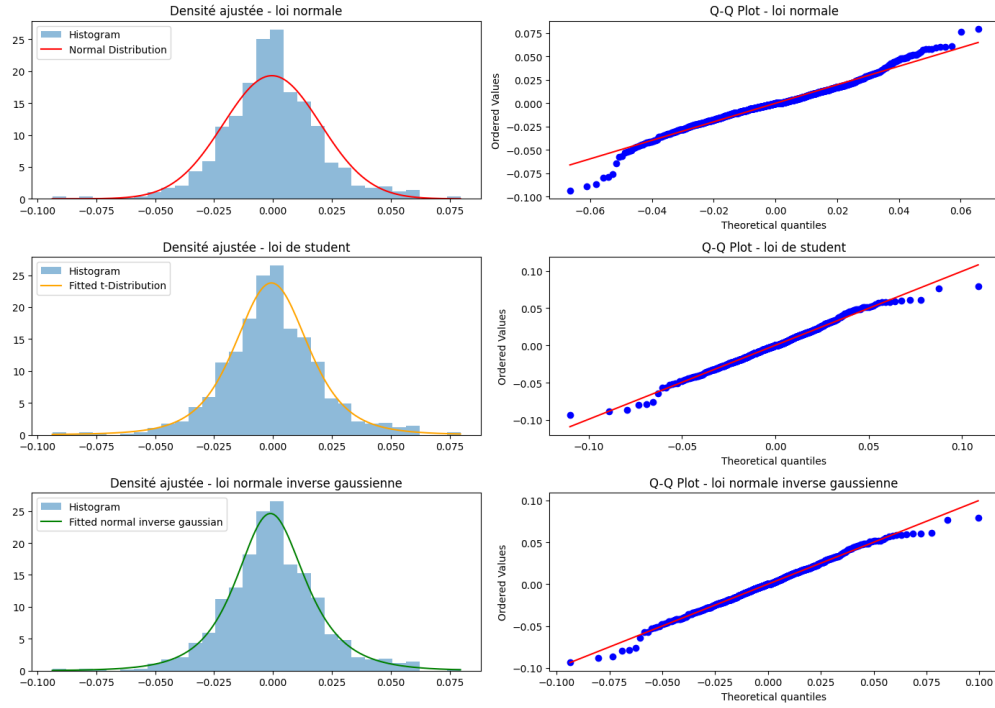


Figure 19: Ajustements de différentes lois aux rendements SG