

ANNÉE 2024/2025



PROJET THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

Stress testing du CAC 40 à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes

Auteurs :

**Cheryl Kouadio
Mountaga Wane**

Professeur :

Mathieu Ribatet

1 Introduction

La Value at Risk (VaR) est une mesure clé utilisée pour évaluer le risque de pertes d'un portefeuille sur un horizon donné avec un niveau de confiance spécifique. Cependant, lors de perturbations extrêmes du marché, la VaR peut être insuffisante, ce qui justifie les simulations de crise exigées par les régulateurs bancaires. Ces stress tests visent à estimer les pertes potentielles en cas de fluctuations majeures, complétant ainsi la VaR.

Dans ce cadre, la théorie des valeurs extrêmes est un outil pertinent pour élaborer des scénarios de crise. Cette étude applique cette théorie aux variations à la baisse du CAC 40, en présentant les données, la méthodologie employée, et une analyse des résultats obtenus.

2 Données

Le CAC 40 est le principal indice boursier de la Bourse de Paris. Il reflète la performance des 40 actions les plus importantes et les plus activement négociées sur Euronext Paris. Dans le cadre de cette étude, nous disposons d'un échantillon de taille $n = 5879$ de l'évolution du prix de cet indice entre janvier 2000 et décembre 2022 (fig. 8, en annexe), collectée sur Yahoo Finance. Puisque la série brute des prix du CAC 40 n'est pas stationnaire (p-valeur dicker fuller = 0,42), nous nous sommes intéressé au rendement logarithmique $r(t, t-1)^1$ du portefeuille (et plus particulièrement $-r(t, t-1)$ pour cibler les pertes maximales de rendement) défini par la formule suivante :

$$r(t, t-1) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

où P_t représente le prix de l'indice à la date t .

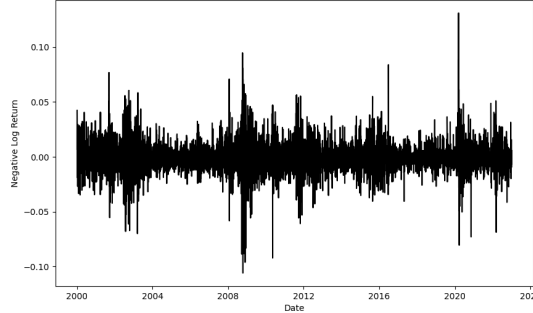


FIGURE 1 – Évolution des pertes de rendements $-r(t, t-1)$ du cours CAC40

L'analyse visuelle des rendements logarithmiques négatifs et le test de Dicker-Fuller (p-valeur = 0,01) confirment la stationnarité de la série, malgré des variations significatives d'amplitude et une volatilité accrue en période de crise (exemple Covid-19). Par ailleurs, 95% de l'échantillon présente une perte en rendement inférieure à 2,26% lorsque pour seulement 1% des données, une perte supérieure à 4,10% est observée. La perte maximale est 13,10%. Ce comportement, avec un grand nombre de petites observations et une petite fraction d'observations extrêmement importantes, est typique des données à queue lourde, ce qui justifie l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes.

3 Méthodes

Pour la modélisation des rendements minimaux extrêmes, nous utiliserons 2 approches en théorie de valeurs extrêmes discutées en cours :

- **L'approche par blocs (Blocs maxima)** : il s'agira de modéliser la loi du maximum ou du minimum de la série sur plusieurs blocs de taille s par une distribution généralisée des extrêmes (GEV - Generalized Extreme Values). Dans notre cas, il s'agira de modéliser la loi du maximum

1. Le rendement logarithmique est une approximation du rendement linéaire obtenue à partir d'un développement limité. En effet, on peut écrire : $\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_t}$

de $-r(t, t - 1)$ sur des blocs de taille $s = 21$ jours ouvrés (en considérant qu'un mois contient 21 jours ouvrés).

- **L'approche par seuil (Peaks over threshold)** : elle consiste à sélectionner les pertes de rendements qui dépassent un certain seuil u prédéfini, afin d'obtenir des estimateurs de bonne qualité. Généralement, u est déterminé graphiquement en exploitant le Mean Residual Life, (MRL) et le Threshold Choice Plot (TCL). Ces excès sont ensuite modélisés par une distribution généralisée de Pareto (GPD - Generalized Pareto Distribution).

Nous allons utiliser la théorie des extrêmes pour établir les scénarios de crise sur la variation à la baisse du cours de CAC 40, dans lesquels on fait face à des événements rares, i.e. des événements dont la probabilité d'occurrence est très petite. Pour caractériser ces événements rares, nous utiliserons la notion de temps de retour abordée en cours. Pour construire nos scénarios, on se donne des temps de retour élevés de 5 ans, 10 ans, 25 ans, 50 ans, 75 ans et 100 ans et on calcule la variation maximale négative du cours sur une journée. Les analyses ont été réalisées conjointement sur Python et R.

4 Résultats

4.1 Approche par blocs

4.1.1 Estimation de la distribution des pertes maximales en rendement

En utilisant la distribution de la série entière, il est possible d'avoir une idée sur la distribution GEV à laquelle va appartenir la série transformée des maximums par blocs 2.

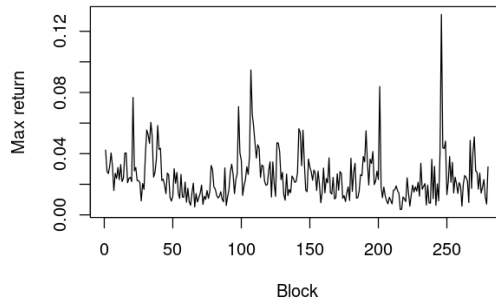


FIGURE 2 – Évolution de la série des pertes maximales en rendement

De ce fait, il est pertinent d'étudier la distribution des pertes en rendements. En analysant celle-ci, nous constatons qu'elle est pratiquement centrée autour de 0, ce qui indique des rendements faibles en moyenne, avec une variance modérée. Par ailleurs, le kurtosis est de 9,3, soit bien supérieur à celui d'une distribution normale (i.e. 3). Cela suggère que la distribution des rendements présente des queues beaucoup plus épaisses que celles d'une distribution normale. De plus, le skewness est positif, indiquant une asymétrie vers la droite, bien que légère. De fait, la loi normale ne semble pas adaptée aux données, ce qui est confirmé par le test de Kolmogorov-Smirnov (p-valeur $< 2,2 \times 10^{-16}$).

Moyenne	Variance	Skewness	Kurtosis
-1.41×10^{-05}	2.03×10^{-04}	0.196	9.30

TABLE 1 – Résumé descriptif de la série des pertes en rendements

Pour pallier cela, nous avons ajusté la distribution des données par une loi de Student généralisée à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. La qualité de l'ajustement a été évaluée avec des analyses graphiques (annexe fig. 11) et le test de Kolmogorov-Smirnov (p-valeur = 0.03) qui permettent de déduire que la distribution des rendements suit une loi de Student généralisée. Comme la loi de la série des rendements est une student généralisée, on s'attend à ce que la famille de lois du maximum par blocs suivent une GEV de type Fréchet.

4.1.2 Ajustement d'une GEV et construction des scénarios de crise

Bien que les données semblent s'accorder avec une loi de Student généralisée, nous optons pour un ajustement selon une loi GEV dont le paramètre de forme est estimé par maximum de vraisemblance, en plus des paramètres d'échelle (σ) et de position (μ).

En ajustant une GEV aux données présentées précédemment, nous obtenons les résultats ci-dessous. La GEV ajustée appartient à la famille de loi Fréchet (car $\varepsilon = 0,159 > 0$) de moyenne $\mu = 0,017$ et d'échelle $\sigma = 0,009$. De plus, le paramètre de forme ε est significativement différent de 0, avec un intervalle de confiance profilé à 95% égale à (0,016 - 0,018). De fait, notre intuition sur la famille de loi exposée plus haut était correcte.

TABLE 2 – Résultats de l'ajustement d'une GEV

Modèle	Paramètres estimés (IC95 profilé)		
	μ	σ	ε
GEV	0,017 (0,016 - 0,018)	0,009 (0,009 - 0,011)	0,159 (0,069 - 0,273)

De plus, en examinant la qualité de l'ajustement de la distribution GEV de Fréchet à l'aide d'analyses visuelles, notamment à travers le PP-plot ci-dessous et le graphique de densité, on constate que la distribution de Fréchet correspond bien aux observations empiriques.

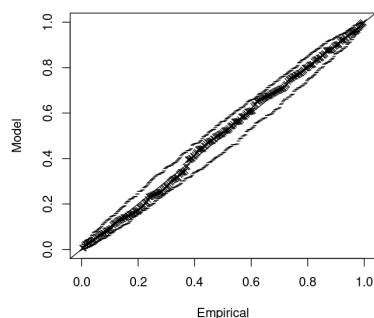


FIGURE 3 – PP-plot de $-r(t, t-1)$

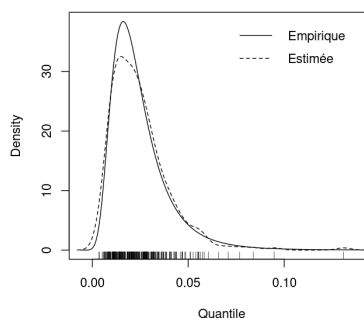


FIGURE 4 – Densité empirique vs. Densité estimée

Cela est confirmé par un test de Kolmogorov-Smirnov, qui évalue la similarité entre la distribution GEV ajustée et la répartition empirique des pertes extrêmes en rendements, avec une p-valeur de 0,90. De plus, en utilisant un test d'Anderson-Darling², qui est théoriquement adapté pour évaluer la qualité d'ajustement d'une loi GEV, nous obtenons un p-valeur de 0,91. Cela signifie que les données par blocs suivent de manière significative une GEV Fréchet avec les paramètres obtenus.

De ce fait, la distribution GEV Fréchet paraît pertinente pour construire les scénarios de retour dont les résultats sont, en considérant 255 jours ouvrés de bourses par an :

TABLE 3 – Scénarios de crise avec un ajustement GEV

	Temps de retour (en années)					
	5	10	25	50	75	100
CAC 40	-7.25	-8.58	-10.55	-12.24	-13.32	-14.11

Grâce à ce tableau, le risk manager peut évaluer les temps de retour implicites d'un scénario de crise unidimensionnel. On s'attend, par exemple, à une baisse de rendement de 7,22% une fois tous les 5 ans.

Par ailleurs, avec ce modèle, la value at risk pour un horizon de 1 jour et un seuil fixé à 99%³ est estimée à 3,31%. Cela signifie que la banque peut s'attendre à une perte maximale de 3,31% en rendement sur le cours du CAC 40 dans 99% des cas. Il y a donc 1% de probabilité que cette perte soit dépassée.

2. Pour plus de détails, lire "Derivation of the Modified Anderson-Darling Test Statistics for the Generalized Extreme Value and Generalized Logistic Distributions, Hongjoon Shin" et visiter (Anderson-Darling-test)

3. $VaR = \inf(x, P(loss < x) \geq 0.99)$

De plus, en ce qui concerne l'expected shortfall, il est estimé à 4,59%, c'est-à-dire que, dans le cas où la perte dépasse le seuil fixé par le VaR, la perte moyenne attendue est de 4,59%.

4.2 Approche par seuil

4.2.1 Ajustement d'une GPD

Dans un premier temps, simplement pour voir ce que cela donnerait, nous fixons le seuil sans utiliser de méthodes avancées. Nous choisissons simplement le 95ème percentile qui fait sens a priori. Le problème avec ce seuil, c'est que la distribution qui va en résulter va très mal modéliser la queue, comme nous pouvons nous en rendre compte sur le qqplot suivant :

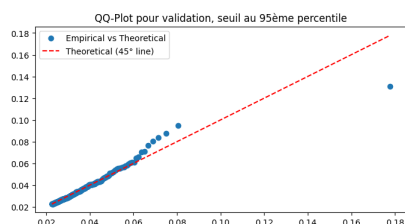


FIGURE 5 – QQplot pour Validation, seuil au 95ème percentile

Dans un deuxième temps, le choix du seuil se fera donc en utilisant des méthodes adaptées, notamment l'observation du MRLplot (Empirical Mean Residual Life Plot) et du TCPlot (Threshold Choice Plot).

Pour le MRLplot, il s'agit de considérer dans une fourchette que nous allons définir chaque niveau de seuil et de calculer pour celui-ci la moyenne des excès observés. Ces informations sont stockées puis nous traçons l'évolution de cette moyenne d'excès en fonction du seuil. Il faut choisir la valeur à partir de laquelle le graphique cesse d'être linéaire. Après observation du graphique, des estimations seront faites pour u prenant les valeurs 0.02, 0.03 et 0.04 puis nous sélectionnerons celui faisant les meilleures performances. Le MRLplot est présenté ci-dessous :

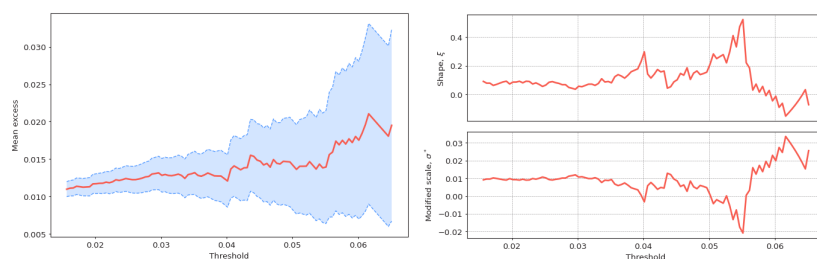


FIGURE 6 – MRLplot

Nous traçons également le TCPlot pour voir si des différences de choix de seuil sont notées (cf figure ci-dessus fig. 6). Il s'agit du graphique qui représente la valeur du paramètre de forme pour une Pareto, en fonction du seuil choisi pour la modélisation. Il permet notamment d'observer son évolution et d'évaluer sa stabilité en fonction du seuil choisi.

Ci-après, les qqplot pour les GPD modélisées avec les 3 seuils cités précédemment :

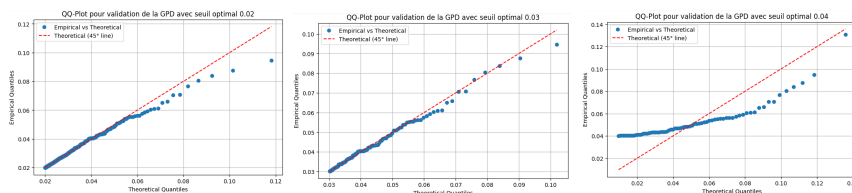


FIGURE 7 – QQplots pour Validation avec MRLPlot

Pour le seuil 0.02, les distributions empirique et théorique s'écartent assez vite, notamment pour les valeurs élevées. Le seuil 0.04 quant à lui semble ne pas du tout convenir à la distribution, ce qui sera confirmé par un test KS.

C'est donc finalement le seuil 0.03 que nous retiendrons.

Paramètres du modèle : shape $\xi = 0.074$, loc $\mu = 0.030$, scale $\sigma = 0.012$

L'écart entre les distributions empirique et théorique semble être le plus réduit dans l'absolu, mais aussi et surtout dans la queue de distribution, donc pour les valeurs extrêmes. Par ailleurs, le TCPlot semble suggérer que c'est à partir de 0.03 que l'on perd en stabilité des paramètres.

Notons par ailleurs que la modélisation est très sensible au seuil choisi. En effet, en faisant varier celui-ci même très légèrement autour de la valeur que nous définissons comme optimale (0.03), la forme du qqplot change de façon relativement significative.

La queue de distribution semble bien représentée (cf fig. 10), ce qui en réalité est le plus important puisqu'il s'agit des événements les plus extrêmes, donc les plus à risque et pouvant causer le plus de pertes.

Avec ce modèle, la VaR à 99% estime la perte à horizon journalier à 4.36% et l'Expected Shortfall associé à 4.88%. Ainsi, il y a 1% de chances que la perte enregistrée dépasse 4.36%; et dans les cas où elle dépasse ce seuil, elle sera en moyenne estimée à 4.88%.

Enfin, on réalise un test de Kolmogorov-Smirnov à 5% afin de comparer la distribution ajustée de Pareto avec la distribution empirique de notre jeu de données. La p-value est de 0.89, ce qui est largement supérieur à 5%. Nous concluons donc que la distribution de Pareto choisie convient.

Ci-après, les niveaux de retour associés à la modélisation que nous venons de réaliser. Pour faire les calculs, il sera admis qu'il y a 255 jours de bourse par an :

TABLE 4 – Scénarios de crise avec un ajustement GPD

	Temps de retour (en années)					
	5	10	25	50	75	100
CAC 40	-7.70	-8.79	-10.32	-11.55	-12.30	-12.84

5 Discussion

La théorie des valeurs extrêmes n'est peut-être pas la méthode la plus robuste pour créer des simulations de crise. Cependant, elle permet de quantifier ces scénarios, c'est-à-dire de leur attribuer une probabilité et un temps de retour implicite. Elle permet ainsi, dans une certaine mesure, d'associer un degré de sévérité ou de gravité à chaque scénario et de les comparer d'un point de vue probabiliste.

Dans le cadre de l'utilisation d'une approche par blocs, une GEV de type Fréchet semble bien adaptée à la série des blocs maximaux. Cependant, une reparamétrisation aurait été nécessaire, car la série n'est pas indépendante. En effet, bien que la série soit stationnaire, les observations ne sont pas indépendantes. En effet, en observant l'ACF des rendements au carré (annexe fig. 9), on note une autocorrélation persistante, indiquant la non indépendance de la série temporelle.

L'approche par seuil a la particularité de se baser principalement sur une analyse visuelle de graphiques tels que le MRLplot et le TCPlot afin de déterminer le bon seuil, ou en tout cas une plage de seuils raisonnables, ce qui peut sembler subjectif comme procédé. C'est pourquoi il a été important de comparer les ajustements par la suite puis de les confirmer avec des tests. Par ailleurs, bien que la queue de distribution soit bien représentée, il faut également noter que l'écart entre les distributions empirique et théorique paraît important lorsqu'on se rapproche du seuil.

Finalement, nous remarquons que les niveaux de retour calculés avec les 2 méthodes sont assez proches. Cela peut indiquer que les 2 approches, bien que basées sur des cadres de modélisation différents, restent cohérentes dans leur représentation des données extrêmes.

A Annexes

FIGURE 8 – Évolution des prix de clôture de l'indice CAC40

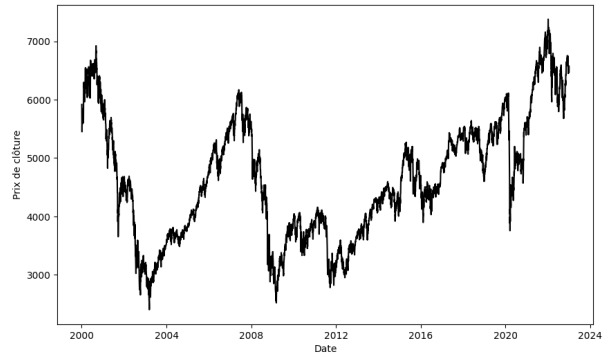


FIGURE 9 – ACF du carré des pertes de rendements

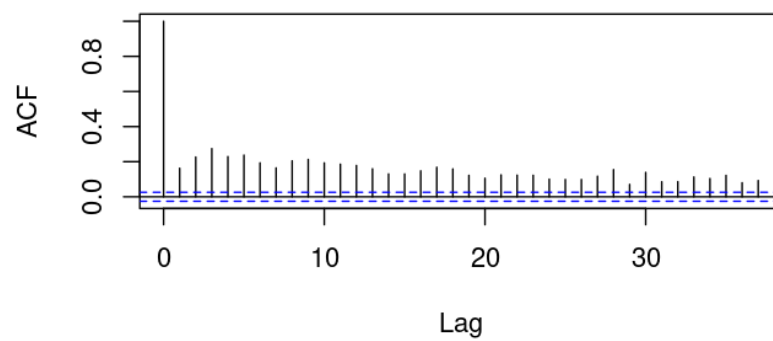


FIGURE 10 – Distribution des excès avec ajustement de la GPD

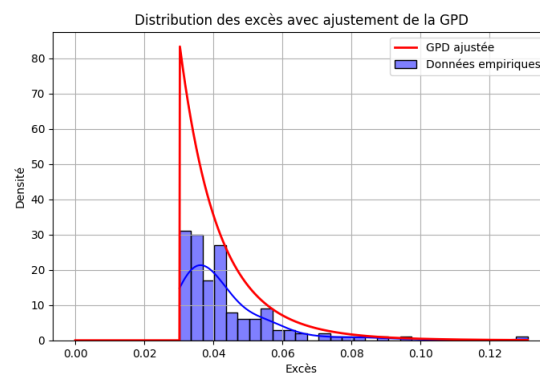


FIGURE 11 – Analyse de la qualité de l’ajustement d’une loi de Student généralisée aux données pertes de rendements

