

ANNÉE 2024/2025



---

PROJET THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

**Implémentation de la VaR à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes et comparaison des méthodes d'implémentation**

---

*Auteurs :*

**Kouadio Cheryl**

**Kougoum Moko Mani Marilene**

**Ouyassin Mariyam**

*Professeur :*

**Mathieu Ribatet**

# 1 Introduction

Les banques occupent une place centrale dans la vie économique nationale et internationale. En effet, elles jouent le rôle d'intermédiaires entre les agents à capacité de financement et ceux à besoin de financement, facilitant ainsi les transactions et soutenant l'investissement, et donc la croissance économique. Cependant, leur activité les expose à divers risques majeurs notamment le risque de crédit, le risque de liquidité, le risque de marché, etc.

Quantifier ces risques est crucial pour permettre aux institutions bancaires de s'en prémunir et de les monitorer efficacement. Dans ce cadre, la Value-at-Risk (VaR) s'impose comme une mesure de risque de référence. Elle permet d'évaluer la perte potentielle maximale qu'une institution pourrait subir, avec un certain niveau de confiance, sur un horizon donné.

Plusieurs méthodes permettent d'estimer la VaR, et la théorie des valeurs extrêmes est particulièrement pertinente en raison de sa capacité à modéliser efficacement les événements rares, souvent responsables des pertes les plus importantes.

Ce rapport explore donc l'application de la théorie des valeurs extrêmes dans le calcul de la VaR, en comparant ses performances à celles d'autres approches largement retrouvées dans la littérature, notamment les approches historiques, paramétriques et Monte Carlo

## 2 Données et méthodes utilisées

### 2.1 Présentation des données

Dans ce projet, nous analysons les données de l'indice boursier<sup>1</sup> S&P 500, un indice de référence qui regroupe les 500 plus grandes entreprises cotées aux États-Unis, incluant un large éventail de banques et d'autres institutions financières. Cet indice est utilisé comme un indicateur clé de la santé économique américaine et pour évaluer la performance de son système bancaire. Une baisse de sa valeur ou de ses rendements reflète ainsi les pertes potentielles des institutions financières américaines.

Pour cette étude, nous adopterons une approche axée sur les rendements, afin d'évaluer la Value-at-Risk (VaR). Nous utiliserons les rendements logarithmiques journaliers du S&P 500, une mesure couramment employée pour analyser les variations relatives des prix des actifs financiers. Ces rendements sont calculés comme suit :

$$r_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right),$$

où  $P_t$  représente le prix de clôture à la date  $t$ .

Puisque nous voulons estimer les pertes maximales, nous étudierons en particulier  $-r_t$  (cf figure 5).

Nous disposons de données couvrant la période du 1<sup>er</sup> janvier 2000 au 31 décembre 2023. L'ensemble des données compte, de ce fait, 6037 jours ouvrés, sans valeurs manquantes, ni aberrantes. Les données historiques ont été extraites à l'aide de la bibliothèque `quantmod` en langage R.

Pour les besoins de la modélisation statistique, nous divisons les données en deux échantillons :

- Un échantillon d'entraînement du 1<sup>er</sup> janvier 2000 au 31 décembre 2019,
- Un échantillon de test du 1<sup>er</sup> janvier 2020 au 31 décembre 2023.

#### 2.1.1 Description des rendements du S&P 500

Les rendements logarithmiques journaliers négatifs du S&P 500, notés  $-r_t$ , présentent les propriétés suivantes :

- **Stationnarité** : Les rendements logarithmiques sont stationnaires, une propriété essentielle pour l'application de modèles statistiques robustes. Cette stationnarité est mise en évidence par leur évolution temporelle stable autour de zéro (cf figure 5). Cette observation est confirmée par le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF au seuil de 5%), dont la p-valeur est de 0.01, indiquant le rejet de l'hypothèse nulle de non-stationnarité.
- **Distribution dépendante** En outre, en examinant le tracé de l'ACF du rendement au carré, nous pouvons voir que l'autocorrélation est persistante et qu'elle diminue lentement à mesure que le décalage augmente. De fait, la série n'est pas indépendante car l'autocorrélation est significative pour la série des rendements.
- **Présence de valeurs extrêmes** : La distribution des rendements présente des queues épaisses, caractéristique typique des données financières. Cela peut s'observer à travers le tracé de la boîte à moustache des rendements. Par ailleurs, le kurtosis empirique des rendements est largement supérieur à 3, i.e.  $kurtosis = 11.64$ , justifiant l'application de la théorie des valeurs extrêmes.

---

1. Un **indice boursier** est un indicateur statistique qui mesure la performance globale d'un ensemble d'actions ou d'actifs financiers en bourse.

## 2.2 Méthodes

Dans le cadre de la gestion des risques, la Value-at-Risk (VaR) est une mesure de risque largement utilisée. Elle quantifie la perte potentielle maximale d'un portefeuille pour un seuil de confiance  $\alpha$  sur un horizon temporel  $h$ . Mathématiquement, la VaR correspond au quantile  $\alpha$  de la distribution  $F$  des pertes, c'est-à-dire :

$$\text{VaR} = \inf\{x \in \mathbb{R}, P(-r \leq x) \geq \alpha\} = F_{-r_t}^{-1}(\alpha).$$

Comme mentionné précédemment, nous étudions, dans ce rapport, les pertes de rendement de l'indice boursier S&P 500, notées  $-r_t$ . Pour estimer la VaR, nous utilisons trois méthodes traditionnelles (historique, paramétrique et Monte Carlo) et deux méthodes basées sur la théorie des valeurs extrêmes (GEV et GPD) :

### — Méthodes classiques

- **VaR historique** : Cette méthode estime la VaR en calculant le quantile  $\alpha$  directement à partir des données historiques des rendements. Elle ne fait aucune hypothèse sur la distribution des rendements, mais repose entièrement sur les observations passées.
- **VaR paramétrique** : Cette méthode suppose que les rendements suivent une distribution spécifique. Dans le cadre de ce projet, nous avons opté pour une loi de student généralisée. La représentation de la densité des rendements logarithmiques négatifs (cf fig.6) montre une courbe en cloche centrée autour de zéro, avec des queues qui diminuent rapidement. Les statistiques descriptives indiquent également un kurtosis proche de 11, suggérant une distribution leptokurtique (des queues lourdes). La VaR est alors calculée en estimant les paramètres de cette distribution et en déterminant le quantile correspondant.
- **VaR Monte Carlo** : Cette méthode génère un grand nombre de scénarios de rendements futurs en simulant des trajectoires aléatoires basées sur un modèle stochastique. La VaR est ensuite estimée comme le quantile  $\alpha$  de la distribution simulée des pertes.

### — Méthodes basées sur la théorie de la valeurs extrêmes

- **VaR GEV (Generalized Extreme Value)** : Cette méthode modélise les maxima des rendements sur des blocs de taille fixe  $\phi$  en utilisant la distribution GEV. Le seuil de confiance  $\alpha_{\text{GEV}}$  est ajusté pour correspondre à l'horizon temporel de la VaR via la relation :

$$\frac{1}{1 - \alpha_{\text{VaR}}} = \phi \times \frac{1}{1 - \alpha_{\text{GEV}}}.$$

En considérant une taille de blocs  $\phi = 21$  jours ouvrés, nous avons, dans notre cas, 240 blocs, dont un ne comporte que 12 jours en raison de la disponibilité des données. De fait, la Value-at-Risk sur un horizon 1 et pour un niveau de confiance  $\alpha_{\text{VaR}}$  est :

$$\text{VaR}_h(\alpha_{\text{VaR}}) = G_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}^{-1}(\alpha_{\text{GEV}}),$$

où  $G$  est la fonction de répartition de la GEV( $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ ) estimée.

- **VaR GPD (Generalized Pareto Distribution)** : Cette méthode est basée sur la modélisation de la distribution des excès au-dessus d'un seuil élevé de log-rendement négatif ( $u$ ), seuil déterminé de manière subjective à partir de l'analyse du **mean residual life plot** et des **stability parameters plot** et, en ajustant une distribution de Pareto généralisée (GPD). La Value-at-Risk sur un horizon 1 jour et pour un niveau de confiance  $\alpha$  est alors obtenue par la formule :

$$\text{VaR}_h(\alpha) = \hat{H}_{(\hat{\sigma}, \hat{\xi})}(\alpha_{\text{POT}})^{-1} + u,$$

où  $\hat{H}(\hat{\sigma}, \hat{\xi})$  est la fonction de répartition de la GPD( $\hat{\sigma}, \hat{\xi}$ ) estimée,  $\alpha_{\text{POT}}$  est le quantile ajusté, nécessaire pour adapter le calcul de la VaR dans le cadre de la distribution GPD.

Comme on ne se concentre que sur l'échantillon des excès dans cette modélisation, l'estimation de la VaR à partir de la GPD ne doit pas se faire au niveau  $\alpha$ , mais à un niveau ajusté  $\alpha_{\text{POT}}$  défini par la relation suivante :

$$1 - \alpha_{\text{POT}} = \frac{n}{N_u} \times (1 - \alpha),$$

où  $n$  représente le nombre total d'observations,  $N_u$  correspond au nombre d'excès au-delà du seuil  $u$ ,

Les méthodes paramétriques, notamment celles basées sur la théorie des valeurs extrêmes nécessitent donc une estimation préalable des paramètres des distributions correspondantes. Pour évaluer la performance des méthodes sus-mentionnées, nous utilisons une technique de *backtesting*. Le backtesting consiste à comparer les prévisions de la VaR avec les pertes observées sur une période de test.

### 3 Résultats

#### 3.1 Estimation des distributions GEV et GPD

##### 3.1.1 Ajustement GEV

Lorsque nous ajustons une distribution GEV aux blocs correspondant au maximum des log-returns négatifs sur 21 jours, nous obtenons une distribution GEV avec un paramètre de forme  $\xi \approx 0.157$ , indiquant qu'elle appartient au domaine de Fréchet. Les estimations des paramètres et leurs intervalles de confiance (IC), calculés à l'aide des méthodes de Wald (95%) et des intervalles profilés, sont résumés dans le tableau 2. Les intervalles de confiance des paramètres de position et d'échelle sont similaires entre les deux méthodes, mais une incertitude plus marquée apparaît sur l'extrémité droite pour le paramètre de forme. L'intervalle profilé est préféré pour sa flexibilité. De plus, le paramètre de forme  $\xi$ , significativement différent de 0, confirme l'appartenance au domaine de Fréchet.

TABLE 1 – Estimations des paramètres GEV avec leurs intervalles de confiance (IC) de Wald et profilés à 95%

Paramètres	Estimations	IC Wald	IC profilé
$\mu$	0.014	[0,013 ; 0,015]	[0,012 ; 0,015]
$\sigma$	0.008	[0,007 ; 0,009]	[0,007 ; 0,009]
$\xi$	0.157	[0,053 ; 0,261]	[0,097 ; 0,367]

Pour vérifier l'adéquation du modèle GEV, on peut examiner le PP-plot présenté ci-dessous (Figure 1). Ce dernier montre clairement que la distribution de Fréchet s'ajuste bien aux observations empiriques. Par ailleurs, le graphique des niveaux de retour (cf figure 2) confirme que le modèle ajusté est cohérent, les points observés s'alignant de manière satisfaisante avec ceux prédits par le modèle. Cela est confirmé par le test de Kolmogorov Smirnov où l'on obtient un p-valeur égale à 0,42.

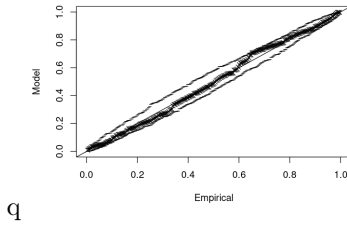


FIGURE 1 – PP-plot de  $-r(t, t-1)$

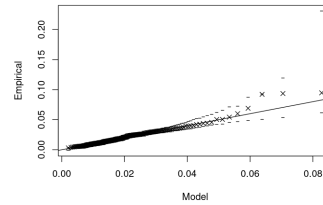


FIGURE 2 – Return level plot

##### 3.1.2 Ajustement GPD

L'analyse des **stability parameters plot** n'étant pas concluante, nous nous sommes basés sur le **mean residual plot** (7) et avons choisi un seuil de **0.02**. L'ajustement d'une GPD pour les excès associés à ce seuil nous donne une estimation des paramètres d'échelle et de forme, respectivement données par  $\sigma = 0.0105$  et  $\xi \approx 1.99 \times 10^{-14}$ . Les intervalles de confiance de Wald et ceux profilés associés sont résumés dans le tableau ci-après :

TABLE 2 – Estimations des paramètres GPD avec leurs intervalles de confiance (IC) de Wald et profilés à 95%

Paramètres	Estimations	IC Wald	IC profilé
$\sigma$	0.0105	[0,008 ; 0,012]	[0,006 ; 0,012]
$\xi$	$1.99 \times 10^{-14}$	[-0,09 ; 0,09]	[-0,034 ; 0,49]

On peut observer que, pour le paramètre de forme en particulier, l'intervalle de confiance profilé suggère une incertitude plus grande du côté droit relativement à celui de Wald. Cependant, il reste évident que, dans les deux cas, l'intervalle de confiance indique que le paramètre de forme n'est pas significatif.

Pour évaluer l'adéquation du modèle à nos données, nous avons utilisé, comme précédemment, le PP-plot et le return level plot en tant qu'outils de diagnostic. Ces analyses montrent que ce modèle s'ajuste moins bien aux données en comparaison avec le modèle GEV.

De plus, le test de Kolmogorov-Smirnov indique que la distribution théorique fournie par la GPD diffère statistiquement de la distribution empirique. Cette divergence pourrait être attribuée à l'absence d'indépendance dans la série, étant donné que l'autocorrélation reste **persistante** pour la série des rendements. En effet, comparativement à la GEV (qui est plus robuste à la dépendance des observations grâce à l'agregation des observations par blocs), la GPD est plus sensible à la violation de l'hypothèse de dépendance.

Nous présenterons donc ci après les résultats pour les méthodes d'estimation historique, analytique, Monte-Carlo et GEV.

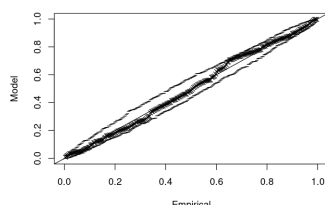


FIGURE 3 – PP-plot de  $-r(t, t - 1)$

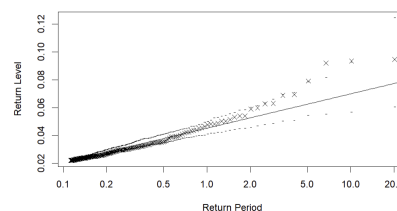


FIGURE 4 – Return level plot

### 3.2 Application des différentes méthodes de calcul de la VaR

Les résultats des différentes méthodes de calcul de la VaR sont présentés dans le tableau 5. La VaR analytique et la VaR Monte Carlo ont été estimées en supposant que les rendements logarithmiques négatifs suivent une loi de Student. Les méthodes basées sur la théorie des valeurs extrêmes (GEV et GPD) ont également été appliquées pour comparer leur performance.

Les VaR estimées correspondent aux pertes potentielles de rendement de l'indice S&P 500 pour des niveaux de confiance de 90%, 95%, 99,0%, 99,6% et 99,9%. La VaR historique, basée sur les données passées, est généralement plus élevée que la VaR Monte Carlo, sauf pour un niveau de confiance de 99,9%. Cela s'explique par la prise en compte des événements extrêmes dans les données historiques, qui ne sont pas toujours capturés par les simulations Monte Carlo.

La VaR analytique et la VaR Monte Carlo, reposant sur une loi de Student, montrent des résultats similaires et semblent mieux modéliser les queues épaisses de la distribution des rendements, en particulier pour les niveaux de confiance élevés. En revanche, la VaR basée sur la distribution GEV sous-estime les risques pour les niveaux de confiance inférieurs (90% et 95%) mais fournit des estimations plus précises pour les niveaux très élevés (99,6% et 99,9%), ce qui est cohérent avec sa capacité à modéliser les événements extrêmes.

TABLE 3 – Résultats de l'estimation de la value-at-risk à horizon 1 jour

$\alpha_{VaR}$	VaR estimées (en %)			
	Historique	Analytique	Monte-carlo	GEV
95%	1.87	1.61	1.67	-
99,0%	3.36	3.12	3.51	2.78
99,6%	4.65	4.35	5.13	3.74
99,9%	6.88	7.04	8.88	5.59

On peut remarquer qu'il n'y a pas de relation monotone entre les VaR exprimées par les différentes approches. On peut ainsi difficilement donner la préférence à une de ces 4 approches. De fait, le backtesting devient un outil incontournable.

## 4 Evaluation des méthodes d'estimation de la VaR : Backtesting

Le backtesting de la Value-at-Risk (VaR) est un exercice crucial pour évaluer la précision des modèles d'estimation des pertes potentielles. Il est fortement recommandé par le Comité de Bâle dans le cadre des bonnes pratiques de gestion des risques financiers. Il consiste à comparer les prévisions de la VaR avec les pertes réelles observées afin de valider l'exactitude des modèles.

Une Value-at-Risk sera dite cohérente lorsqu'elle satisfait deux conditions principales :

- **Unconditional coverage** : les excédents de la VaR doivent se produire au niveau attendu en fonction du niveau de confiance choisi.
  - **Indépendance** : les excédents de la VaR ne doivent pas être corrélés dans le temps, afin d'éviter des sous-estimations des risques lors de périodes de volatilité accrue.
- Ces conditions peuvent être vérifiées à l'aide de tests statistiques (présentés en annexeB).

Un préalable à ces tests consiste à examiner la proportion de dépassements empiriques pour chaque méthode à des seuils de confiance prédéfinis.

TABLE 4 – Proportion de dépassements empiriques pour les différentes méthodes sur l'échantillon de test

$\alpha_{VaR}$	Proportion de dépassements empiriques (en %)			
	Historique	Analytique	Monte-carlo	GEV
95%	5.86	7.95	7.45	-
99,0%	1.98	2.08	1.39	2.98
99,6%	0.69	0.99	0.49	1.29
99,9%	0.29	0,29	0.19	0.39

Les proportions de dépassements montrent que les différentes méthodes ont des performances variées en fonction des niveaux de confiance. La méthode Monte-Carlo semble la plus prudente. En effet, ses proportions de dépassements sont en moyenne les plus faibles ce qui reflète une estimation plus conservatrice des pertes potentielles. La GEV en revanche, a tendance à sous-estimer les risques. Ces observations soulignent la nécessité d'un backtesting approfondi et d'une combinaison potentielle de plusieurs modèles pour obtenir une estimation robuste de la VaR. Les résultats de nos tests de backtesting sont alors donnés ci après :

TABLE 5 – Résultats des tests UC et Ind pour le backtesting des VaR

$\alpha_{VaR}$	VaR estimées (en %)			
	Historique	Analytique	Monte-carlo	GEV
95%	(Oui, Oui)	(Non, Oui)	(Non, Oui)	-
99,0%	(Non, Oui)	(Non, Oui)	(Oui, Oui)	(Non, Oui)
99,6%	(Oui, Non)	(Non, Oui)	(Oui, Oui)	(Non, Oui)
99,9%	(Oui, Oui)	(Oui, Oui)	(Oui, Oui)	(Non, Oui)

## 5 Discussion

La modélisation de la Value-at-Risk (VaR) pour des données financières est une tâche complexe en raison des particularités de ces données. Dans le cadre de notre étude, le backtesting a permis de démontrer que, pour les méthodes historiques et analytiques, les proportions de dépassements observées correspondent généralement aux niveaux théoriques attendus. Cependant, cette observation ne s'applique pas aux méthodes paramétriques. En effet, la GEV sous-estime systématiquement la VaR, tout comme l'approche analytique. Ces modèles semblent incapables de capturer la dynamique des extrêmes dans nos données. En particulier, l'approche analytique, lorsqu'on examine de près les queues de distribution des densités empiriques et théoriques<sup>8</sup>, montre que la loi ajustée sous-estime les extrêmes, ne parvenant pas à saisir les comportements spécifiques de nos données.

Il est toutefois important de souligner que les meilleures performances des méthodes historiques et Monte-Carlo ne sont pas absolues mais dépendent des caractéristiques spécifiques de notre échantillon. En particulier, la méthode historique pourrait offrir de bons résultats grâce à l'inclusion de périodes de stress, comme les crises de 2002 et 2008, dans la période d'entraînement. Cela lui permet de mieux gérer la volatilité des rendements, notamment durant la période COVID, incluse dans notre échantillon test. En revanche, la GEV, en raison de sa façon d'agréger les données, a tendance à minimiser ces effets extrêmes.

## A Annexe A : Distribution des rendements logarithmiques négatifs du S&P 500

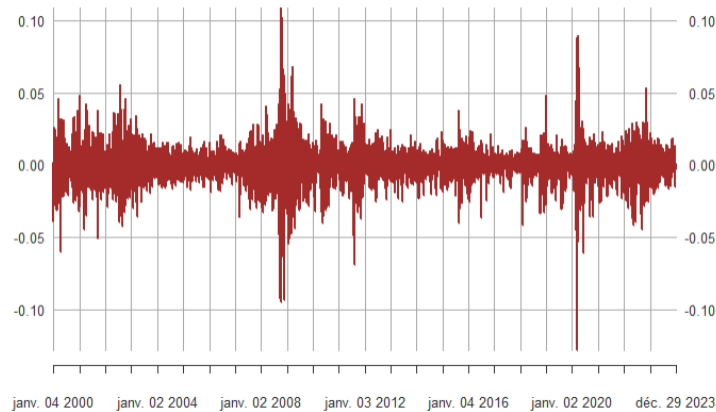


FIGURE 5 – Évolution des rendements logarithmiques négatifs du S&P 500 sur la période 2000–2023.

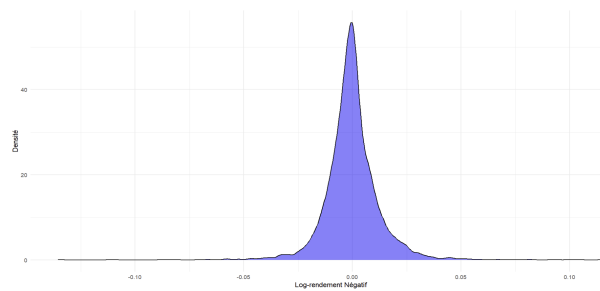


FIGURE 6 – Distribution des rendements logarithmiques négatifs du S&P 500 : courbe de densité

## B Annexe B : Mean residual life plot : choix du seuil

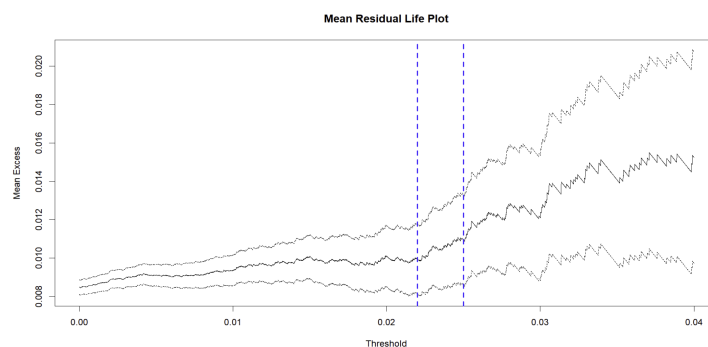


FIGURE 7 – Mean residual life plot : choix du seuil

## Annexe C : Tests de backtesting de la VaR

### 1. Unconditional Coverage Test (Test de couverture inconditionnelle)

- **Hypothèse nulle ( $H_0$ )** : La proportion des dépassements de la VaR est cohérente avec le niveau de confiance choisi ( $p = \alpha$ ).

— **Statistique de test :**

$$LR_{uc} = -2 \ln \left( \frac{(1 - \hat{p})^{T-n} \hat{p}^n}{(1 - \alpha)^{T-n} \alpha^n} \right)$$

où :

- $n$  : nombre de dépassements observés,
- $T$  : nombre total d'observations,
- $\alpha$  : niveau de confiance théorique,
- $\hat{p} = \frac{n}{T}$  : probabilité empirique des dépassements.

— **Distribution :**  $LR_{uc} \sim \chi^2(1)$  sous  $H_0$ .

## 2. Independence Test (Test d'indépendance)

— **Hypothèse nulle ( $H_0$ ) :** Les dépassements de la VaR sont indépendants dans le temps (pas de structure temporelle dans les dépassements).

— **Statistique de test :**

$$LR_{ind} = -2 \ln \left( \frac{(1 - \hat{\pi})^{T_{00}+T_{10}} \hat{\pi}^{T_{01}+T_{11}}}{(1 - \hat{\pi}_0)^{T_{00}} \hat{\pi}_0^{T_{01}} (1 - \hat{\pi}_1)^{T_{10}} \hat{\pi}_1^{T_{11}}} \right)$$

où :

- $\hat{\pi}_0 = \frac{T_{01}}{T_{00}+T_{01}}$ ,
- $\hat{\pi}_1 = \frac{T_{11}}{T_{10}+T_{11}}$ ,
- $\hat{\pi} = \frac{n}{T}$ ,
- $T_{ij}$  : transitions entre les états  $i$  et  $j$  (0 = pas de dépassement, 1 = dépassement).

— **Distribution :**  $LR_{ind} \sim \chi^2(1)$  sous  $H_0$ .

## 3. Test joint (Couverture inconditionnelle et indépendance combinées)

— **Statistique de test :**

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

— **Distribution :**  $LR_{cc} \sim \chi^2(2)$  sous  $H_0$ .

Ces tests permettent de vérifier si la VaR est correctement calibrée et si les dépassements sont indépendants dans le temps.

## C Annexe D : Zoom sur les queues de la distribution empirique et théorique (t-Student)

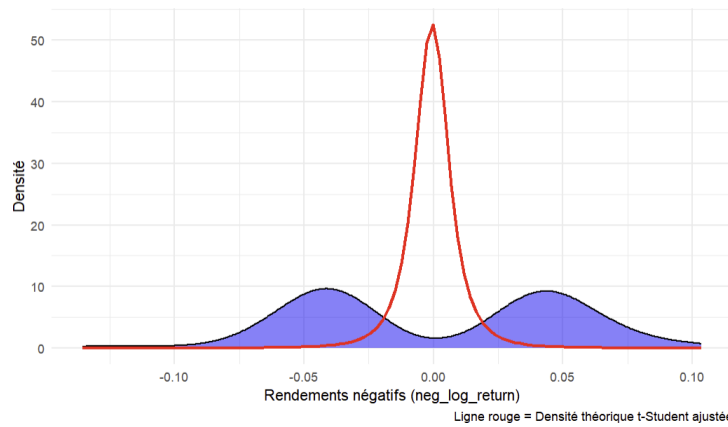


FIGURE 8 – Zoom sur les queues de la distribution empirique et théorique (t-Student)