Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тихоокеанский государственный университет»

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы для студентов I курса дневной формы обучения

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2008

УДК 512.8 (076)

Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений : методические указания по выполнению самостоятельной работы для студентов I курса дневной формы обучения / сост. И. М. Степанова. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2008. – 63 с.

Методические указания составлены на кафедре прикладной математики и информатики. Включают основные понятия и определения части раздела линейной алгебры, примеры решения задач и задания к самостоятельной работе.

Печатается в соответствии с решениями кафедры прикладной математики и информатики и методического совета факультета математического моделирования и процессов управления.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы для студентов I курса дневной формы обучения

Степанова Ирина Михайловна

Главный редактор *Л. А. Суевалова*
Редактор *Н. Г. Петряева*

Подписано в печать 07.12.07. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая. Усл. печ. л. 3,72.
Тираж 150 экз. Заказ

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

1. Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений. Общие сведения.

1.1. Определители матриц второго и третьего порядка

Определителем матрицы второго порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

П р и м е р . Вычислить определители матриц: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3(-4) = 10 + 12 = 22.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 5 = 15 + 8 + 36 - 18 - 8 - 30 = 3.$$

1.2. Разложение определителя матрицы по элементам строки или столбца

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, который получается в результате вычеркивания в определителе n -го порядка строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемент a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Каждый определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

где $i = 1,2,\ldots..,n$;

Это равенство называется разложением определителя матрицы по элементам i-й строки.

П р и м е р . Вычислить определитель, разлагая его по элементам третьего столбца: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} =$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 9 - 1 \cdot (-3) = -24.$$

1.3. Свойства определителей n-го порядка

1. При замене каждой строки определителя столбцом с тем же самым номером значение определителя не изменяется, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Если каждый элемент k-го столбца определителя представлен в виде двух слагаемых $a_{i\,k} = b_{i\,k} + c_{i\,k}$, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы кроме k-го, те же самые, что и в исходном определителе, k-й столбец в первом слагаемом состоит из элементов $b_{i\,k}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а во втором слагаемом – из элементов $c_{i\,k}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогичное утверждение справедливо и для строк.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k}+c_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2k}+c_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk}+c_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

5. Определитель не изменится, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

6. Определитель, у которого какая-либо строка (столбец) состоит из нулей, равен нулю.

7. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

8. При перестановке двух строк (столбцов) определитель умножается на -1.

1.4. Вычисление определителей

Если в определителе порядка n имеется столбец (строка), все элементы которого равны нулю, кроме одного, то, разложив этот определитель по этому столбцу (строке), сведем вычисление определителя n-го порядка к вычислению единственного определителя порядка (n-1).

Если же в определителе n-го порядка нет столбца (строки), все элементы которого равны нулю, кроме одного, то, используя свойство 5 определителей, можно, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранном столбце (строке) все элементы, кроме одного, обратились в нуль.

П р и м е р 1 . Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е

1) к третьей строке прибавим первую;

2) прибавляя к первой строке удвоенную третью, ко второй – третью, умноженную на –2, а к четвертой строке – третью, умноженную на –2, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & -17 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 10 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$$

3) прибавляя к первой строке, умноженной на 5, вторую, а затем, прибавляя к первой строке, умноженной на –2, третью, получим

$$3\cdot\begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ -78 & 36 & 0 \\ 44 & -19 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -78 & 36 \\ 44 & -19 \end{vmatrix} = -3\cdot 6\begin{vmatrix} -13 & 6 \\ 44 & -19 \end{vmatrix} = -18(247-264) = 306.$$

1.5. Действия с матрицами

Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы снабжается двумя индексами: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Две матрицы называются *равными*, если числа их строк и столбцов равны и если равны элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц.

Если число столбцов матрицы n равно числу ее строк, то матрицу называют *квадратной матрицей порядка* n.

Элементы $a_{1\,1}, a_{2\,2}, \ldots\ldots, a_{n\,n}$ квадратной матрицы порядка n образуют ее *главную диагональ*.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица называется *единичной*, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

Суммой матриц **A** и **B** одинаковых размерностей называется матрица, элементы которой равны суммам элементов матриц **A** и **B**, расположенных на соответствующих местах:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы *умножить матрицу на число*, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Матрицу **A** можно *умножить на матрицу* **B** только в том случае, когда число столбцов матрицы **A** равно числу строк матрицы **B.** В результате умножения получится матрица **C**, у которой столько же строк, сколько их в матрице **A**, и столько же столбцов, сколько их в матрице **B**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

А элементы c_{ij} матрицы **C** вычисляются по формуле
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$, т. е. для получения элемента c_{ij}, расположенного в i-й строке и j-м столбце матрицы **C**, надо элементы i-й строки матрицы **A** умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы **B** и полученные результаты сложить.

П р и м е р 1 . Выполнить следующие действия:

$$2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

$$2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -2 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 2 **.** Вычислить произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

Так как сомножители имеют размерности 3×4 и 4×3, то их произведение определено и имеет размерность 3×3.

Р е ш е н и е

$$\grave{A}\cdot\hat{A}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1-5\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3-5\cdot0 & 2\cdot1-3\cdot1+4\cdot2-5\cdot1\\ 1\cdot3+2\cdot4-3\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1-3\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot1-2\cdot1-3\cdot2+4\cdot1\\ -1\cdot3-2\cdot4+3\cdot1+1\cdot2 & -1\cdot2-2\cdot1+3\cdot3+1\cdot0 & -1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 19 & 2\\ 16 & -5 & -3\\ -6 & 5 & 8\end{pmatrix}.$$

П р и м е р 3 . Вычислить произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

Так как сомножители имеют размерности 3×2 и 2×2, то их произведение определено и имеет размерность 3×2.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 41\\ 11 & 30\\ -3 & 19\end{pmatrix}.$$

1.6. Обратная матрица

Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратной для квадратной матрицы **A**, если $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Квадратная матрица **A** имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. Квадратная матрица А, определитель которой не равен нулю, имеет единственную обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы **A**;

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы **A**.

Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы называют следующие преобразования:
а) умножение i-й строки (столбца) матрицы на число $k\neq0$;
б) прибавление к i-й строке (столбцу) j-й строки (столбца), умноженной на число k;
в) перестановка i-й и j-й строк (столбцов) матрицы.

Обратная матрица позволяет найти решения следующих матричных уравнений:
AX = C, XB = C, AXB = C.
Решением этих уравнений являются соответственно матрицы
$\mathbf{X = A^{-1}C}$, $\mathbf{X = CB^{-1}}$, $\mathbf{X = A^{-1}CB^{-1}}$,
если **A** и **B** имеют обратные матрицы.

П р и м е р 1 . Найти матрицу обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е

Определитель матрицы А:
$\Delta=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14-12=2.$ Алгебраические дополнения ее элементов:

$A_{11}=2; A_{12}=-4; A_{21}=-3; A_{22}=7$. Следовательно, $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3/2\\ -2 & 7/2\end{pmatrix}$.

П р и м е р 2 . Найти матрицу обратную к матрице
$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е

Определитель матрицы А: $\Delta = 1$. Алгебраические дополнения ее элементов: $A_{11} = -1$; $A_{12} = 1$; $A_{13} = 0$; $A_{21} = 1$; $A_{22} = -5$; $A_{23} = 3$; $A_{31} = 0$; $A_{32} = 3$; $A_{33} = -2$. Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

1.7. Ранг матрицы

Выберем в матрице **А** размерности $m\times n$ произвольные k строк и k столбцов, $k \le \min(m,n)$. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы **A**. Элементы матрицы являются минорами первого порядка.

Если в матрице **A** имеется минор k-го порядка, не равный нулю, а все ее миноры (k+1)-го порядка, окаймляющие этот минор (т. е. содержащие минор k-го порядка целиком внутри себя), равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров

1. Найти ненулевой элемент матрицы (если такого нет, то ранг матрицы равен нулю).
2. Вычислить миноры второго порядка, которые окаймляют выбранный элемент.
3. Если среди вычисленных миноров второго порядка имеется отличный от нуля, рассмотреть все миноры третьего порядка, окаймляющие какой-нибудь минор второго порядка, не равный нулю. Продолжить так до тех пор, пока все миноры, окаймляющие ненулевой минор l-го порядка, не будут равны нулю. В этом случае ранг матрицы равен l.

Матрица размерности $m \times n$ называется *трапецеидальной*, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{11,}\, a_{22\, \ldots,} a_{rr}$ отличны от нуля.

Каждую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно превратить в трапецеидальную.

Так как элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы и ранг трапецеидальной матрицы равен числу ненулевых строк, то для отыскания ранга матрицы надо:

1) элементарными преобразованиями превратить матрицу в трапецеидальную;
2) подсчитать число ненулевых строк в трапецеидальной матрице.

П р и м е р . Вычислить методом окаймления миноров ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

Так как матрица содержит ненулевые элементы, то ее ранг не меньше 1. Минор второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}$ отличен от нуля и, значит, ранг матрицы не меньше 2. Вычислим окаймляющие Δ миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 15 & 1 \\ 2 & 17 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все миноры, окаймляющие минор Δ, равны нулю. Следовательно, ранг данной матрицы равен 2.

П р и м е р . Найти с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е

Превратим данную матрицу в трапецеидальную с помощью элементарных преобразований:

1) *Умножим первую строку на -1 и прибавим к второй;*
2) *Умножим первую стоку на -4 и прибавим к третьей;*
3) *Умножим первую строку на -1 и прибавим к четвертой, получим*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) *Умножим вторую строку на -2 и прибавим к третьей;*
5) *Умножим вторую строку на -1 и прибавим к четвертой, получим*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы равен 3.

1.8. Решение систем линейных уравнений

Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты при неизвестных; b_{ij} – свободные члены ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы.*

Расширенной называется матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$

которая получается приписыванием к матрице системы столбца свободных членов.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы равен рангу ее расширенной матрицы (теорема Кронекера-Капелли). Совместная система уравнений имеет либо одно, либо бесконечно много решений. В первом случае она называется *определенной*, а во втором – *неопределенной*.

Система уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной*. Если система уравнений содержит уравнение

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n = b, \quad b \neq 0,$$

называемое противоречивым, то она *несовместна*.

Две системы уравнений называются равносильными, если они имеют одни и те же решения. Если в системе вычеркнуть одно или несколько уравнений

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n = 0,$$

называемых *тривиальными*, то получим систему уравнений, равносильную исходной.

Следующие преобразования системы линейных уравнений, называемые элементарными, не изменяют множества решений системы:

1) умножение какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число;

2) прибавление к обеим частям i-го уравнения соответствующих частей j-го уравнения, умноженных на число k.

1.9. Формулы Крамера

Система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы системы; Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

П р и м е р . Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x + 3y - 2z = 8 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Р е ш е н и е

Вычислим определитель матрицы системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

Следовательно, система имеет единственное решение, которое можно найти с помощью формул Крамера.

Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 5 & 20 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

По формулам Крамера находим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1; \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

1.10. Общее решение системы линейных уравнений

Неизвестное x_k называется *разрешенным*, если какое–нибудь уравнение системы содержит x_k с коэффициентом единица, а во всех остальных уравнениях системы неизвестное x_k не содержится, т. е. содержится с коэффициентом нуль.

Система уравнений называется *разрешенной*, если каждое ее уравнение содержит разрешенное неизвестное. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

является разрешенной, так как неизвестные $x_{1,}\, x_3$ и x_5 – разрешенные.

Если из каждого уравнения разрешенной системы уравнений выбрать по одному разрешенному неизвестному, то получим *набор разрешенных неизвестных*. Все неизвестные, не входящие в набор разрешенных неизвестных, называются *свободными*. В приведенной выше разрешенной системе x_2 и x_4 – свободные неизвестные.

Общим решением совместной системы уравнений называется равносильная ей разрешенная система, в которой разрешенные неизвестные выражены через свободные. Если в общем решении свободным неизвестным придать какие-нибудь числовые значения, то получим решение данной системы, называемое *частным*. Придавая свободным неизвестным всевозможные числовые значения, можно получить все решения данной системы линейных уравнений.

Общее решение системы уравнений можно получить с помощью формул Крамера и методом Гаусса.

Построение общего решения с помощью формул Крамера

1. Выяснить совместность данной системы уравнений, т. е. выяснить, совпадают ли ранги матрицы и расширенной матрицы системы уравнений.

2. Найти один из миноров матрицы **A** системы уравнений, порядок которого равен рангу **A**.

3. Выписать все уравнения данной системы, которые содержат строки минора **M**. В этих уравнениях оставить в левых частях только те неизвестные, коэффициенты при которых являются столбцами минора **M**, а остальные неизвестные перенести в правую часть.

4. Решить систему уравнений, полученную в пункте 3, по формулам Крамера.

Метод Гаусса состоит из ряда шагов. При выполнении очередного шага используют следующий алгоритм.

Построение общего решения методом Гаусса

1. Проверить, имеется ли в системе противоречивое уравнение. Если такое уравнение в системе есть, то она несовместна и не имеет общего решения.
2. Вычеркнуть все тривиальные уравнения в системе, если они есть.
3. Выяснить, является ли система уравнений разрешенной. Если она разрешенная, то построить общее решение, выражая разрешенные неизвестные через свободные.
4. Найти уравнение в системе, не содержащее разрешенного неизвестного. С помощью элементарных преобразований получить в этом уравнении неизвестное с коэффициентом единица, а затем исключить это неизвестное из остальных уравнений системы.
5. Выполнить следующий шаг, т. е. перейти к выполнению пункта 1. Через конечное число шагов процесс остановится и будет установлена несовместность системы или получено общее решение системы линейных уравнений.

Пример. Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}.$$

Решение

Так как ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы и равен 2, то система совместна.

Выберем минор $\mathrm{M} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 первого и третьего уравнений. Этот минор отличен от нуля и его порядок равен рангу матрицы системы.

Выпишем первое, третье уравнения данной системы, которые содержат строки минора M:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}.$$

В этих уравнениях оставим в левой части неизвестные x_1 и x_2, коэффициенты при которых являются столбцами минора M, а остальные неизвестные перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 - 5x_3 - 5x_4 \\ x_1 + 2x_2 = 4 - 3x_3 - 4x_4 \end{cases}.$$

Решим полученную систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5-5x_3-5x_4 & 3 \\ 4-3x_3-4x_4 & 2 \end{vmatrix} = -2 - x_3 + 2x_4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5-5x_3-5x_4 \\ 1 & 4-3x_3-4x_4 \end{vmatrix} = -1 + 2x_3 + x_4.$$

Теперь имеем

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 \end{cases}$$ – общее решение данной системы.

Неизвестные x_3 и x_4 – свободные неизвестные. Если положить $x_3 = 1, x_4 = 0$, то из общего решения находим $x_1 = 3, x_2 = -1$.

Следовательно, $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 0$ – частное решение исходной системы уравнений.

2. Задания для выполнения расчетно-графической работы.

Вариант 1

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 11y + 10z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_2 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}.$$

Вариант 2

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) $A \cdot B$; б) $2A \cdot B$; в) $2A - E$; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица А. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ x-y+5z=0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 2x + 3z = -2 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2 \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -13 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 9 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}.$$

Вариант 3

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 6 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}2x-3y+z=0\\ x+2y+z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A\cdot X=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}x+3y+2z=0\\ 2x-y+3z=0\\ 3x-5y+4z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}2x-y+4z=15\\ 3x-y+z=8\\ 5x-2y+5z=0\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-y+z=12\\ x+2y+4z=6\\ 5x+y+2z=3\end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=6 \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=2 \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=7 \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=2 \end{cases}.$$

Вариант 4

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^{т}$ и $B^{т}$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$X\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 4x-y-2z=0 \end{cases}$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 21 & -15 & 5 \\ 12 & 28 & -20 & 7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4x - y + 10z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23 \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 + -2x_4 + 6x_5 = -8 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1 \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}.$$

Вариант 5

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\2&3&4&5\\1&3&2&5\\3&2&4&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&3&3\\-2&4&-2\\1&3&2\end{pmatrix}$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$X\begin{pmatrix}-3&2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}3x-5y+z=0\\x+2y-z=0\end{cases}$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A\cdot X=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2\\4&-2&5&1\\2&-1&1&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}2x+5y+z=0\\4x+6y+3z=0\\x-y-2z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}3x+2y-4z=8\\2x+4y-5z=1\\5x+6y-9z=2\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 13x_1-4x_2-x_3-4x_4-6x_5=8 \\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=7 \\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4+6x_5=4 \\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4+3x_5=5 \end{cases}.$$

Вариант 6

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) $A\cdot B$; б) $2A\cdot B$; в) $2A-E$; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 5x-3y-z=0 \end{cases}$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x-y-3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 3x+y+2z=-3 \\ 2x+2y+5z=5 \\ 5x+3y+7z=1 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=6 \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=7 \\ x_1-3x_3-5x_3-7x_5=-4 \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5=6 \end{cases}.$$

Вариант 7

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -2\end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E г) $A^{т}$ и $B^{т}$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}8 & -6\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+5y+z=0\\ 3x+7y-2z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}x-y+2z=0\\ 2x+y-3z=0\\ 3x+2z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 4x-7y-2z=0 \\ 2x-3y-4z=6 \\ 2x-4y+2z=2 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=7 \\ 6x_1+2x_2+2x_3-x_4=-2 \\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=5 \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=-5 \end{cases}.$$

Вариант 8

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$X\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 7x + 8y + z = 0 \\ x + y + 8z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + y + 4z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 5x - 9y - 4z = 6 \\ x - 7y - 5z = 1 \\ 4x - 2y + z = 2 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33 \\ 7x - 5y = 24 \\ 4x + 11z = 39 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}.$$

Вариант 9

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) $A \cdot B$; б) $2A \cdot B$; в) $2A\text{-}E$; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 27 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5x-5y+4z=0 \\ 3x+y+3z=0 \\ x+7y-z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} x-5y+z=3 \\ 3x+2y-z=7 \\ 4x-3y=1 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4 \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5 \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11 \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}.$$

Вариант 10

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & -3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}14 & 3\\ -5 & 7\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -3 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}$=E, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+y-3z=0\\ x+6y-5z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 8\\ 5 & 9 & -11 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}x+3y-z=0\\ 2x+5y-2z=0\\ x+y+5z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}5x-5y-4z=-3\\ x-y+5z=1\\ 4x-4y-9z=0\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 5y+4z=-20 \\ 3x-2y+5z=-22 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+6x_5=10 \\ 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=5 \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=4 \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=7 \end{cases}.$$

Вариант 11

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица А. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 7y + 6z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & -7 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 7x - 2y - z = 2 \\ 6x - 4y - 5z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}.$$

Вариант 12

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$X\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 7x - 2y - z = 2 \\ 6x - 4y - 5z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 12 & 10 & 41 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ 3x-2y+5z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 4x-3y+z=3 \\ x+y-z=4 \\ 3x-4y+2z=2 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-4z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4-3x_5=-3 \\ x_1+7x_2+6x_3-2x_4+6x_5=2 \\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4+9x_5=-7 \\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5=-6 \end{cases}.$$

Вариант 13

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 0 \\ 8x - y + 7z = 0 \\ 2x + 4y - 5z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \\ x - y + z = 2 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x + y + 4z = 19 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}.$$

Вариант 14

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$ если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 7\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 18\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+4y+2z=0\\ 2x+2y+3z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 12 & 3\\ 13 & 2 & 1 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9\\ -2\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}2x+y-z=0\\ 3x-2y+4z=0\\ x-5y+3z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}6x+3y-5z=0\\ 9x+4y-7z=3\\ 3x+y-2z=5\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 6 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7 \end{cases}.$$

Вариант 15

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица А. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x+9y+z=0 \\ x-3y+z=0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 13 & 23 & 33 \\ 2 & -3 & 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ 2x+5y+z=0 \\ x-7y+2z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 8x-y+3z=2 \\ 4x+y+6z=1 \\ 4x-2y-3z=7 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2 \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1 \end{cases}.$$

Вариант 16

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) А·В; б) 2А·В; в) 2А-Е г) $А^т$ и $В^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ -1 & 7 & 3\\ -2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица А. Найти $А^{-1}$ и установить, что $А\cdot А^{-1}$=Е, если

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}7x+4y+z=0\\ x-y+4z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы А·Х=В, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 7 & -4 & 11\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}x-2y+z=0\\ 3x+y+2z=0\\ 2x-3y+5z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}2x+3y+4z=5\\ x+y+5z=6\\ 3x+4y+9z=0\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -9 \\ x + 5y + z = 20 \\ 3x + 4y + 2z = 15 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}.$$

Вариант 17

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;

б) разложив по элементам первого столбца;

в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) $A \cdot B$; б) $2A \cdot B$; в) $2A - E$; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 10x - y - 2z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 1 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}x+2y+3z=0\\ 2x-y-z=0\\ 3x+3y+2z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}2x-3y-4z=1\\ 7x-9y-z=3\\ 5x-6y+3z=7\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x-y-3z=0\\ 3x+4y+2z=1\\ x+5y+z=-3\end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3\end{cases}.$$

Вариант 18

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;

б) разложив по элементам первого столбца;

в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, есл

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 3\\ -2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ 2x+3y+z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}3x+2y=0\\ x-y+2z=0\\ 4x-2y+5z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}5x+6y-2z=2\\ 2x+3y-z=9\\ 3x+3y-z=1\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} -3x+5y+6z=-8 \\ 3x+y+z=-4 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=1 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=-2 \end{cases}.$$

Вариант 19

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^{т}$ и $B^{т}$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & -11 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y+5z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 3x+y-2z=6 \\ 5x-3y+2z=4 \\ -2x+5y-4z=0 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ x-4y-2z=-19 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4+4x_5=1 \\ 13x_1+8x_2+4x_3-3x_4+6x_5=9 \\ 5x_1+4x_2+2x_3-3x_4+6x_5=3 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=2 \end{cases}.$$

Вариант 20

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;

б) разложив по элементам первого столбца;

в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) $A \cdot B$; б) $2A \cdot B$; в) $2A - E$; г) $A^{т}$ и $B^{т}$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x + y + 9z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$, где

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + 4z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 4 \\ 7x + 2y + 4z = 1 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - y + z = -11 \\ 5x + y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 16 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}.$$

Вариант 21

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x - 3y - 4z = 0 \\ 5x - 8y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ 2x + y - 8z = 4 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 9 \\ 5x + y + 2z = 11 \\ x + 2y + 4z = 19 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}.$$

Вариант 22

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) А·В; б) 2А·В; в) 2А-Е; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ -2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица А. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}5x+4y-3z=0\\ 2x+y+6z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы А·Х=В, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 5 & -2\\ 4 & -1 & 3 & -8\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}3x+5y-z=0\\ 2x+4y-3z=0\\ x-3y+z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}x-4y-2z=0\\ 3x-5y-6z=2\\ 4x-9y-8z=1\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=-1 \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=1 \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-4x_5=-4 \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=-2 \end{cases}.$$

Вариант 23

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:

а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x-6y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & 2 & 0 \\ -9 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 4x+y-4z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 4x+y-3z=1 \\ 3x+y-z=2 \\ x-2z=5 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=4 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=6 \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=2 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=5 \end{cases}.$$

Вариант 24

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ -1 & 4 & 3\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}$=E, если

$$A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+5y-z=0\\ -3x-2y+3z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 4 & 2 & -4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}7x+y-3z=0\\ 3x-2y+3z=0\\ x-y+2z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}3x-5y+3z=4\\ x+2y+z=8\\ 2x-7y+2z=1\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_5=2 \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=-4 \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=1 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=-7 \end{cases}.$$

Вариант 25

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=0 \\ 2x-6y+3z=0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 8 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ 2x-y-3z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=2 \\ 3x+y-z=5 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x+4y-2z=11 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=1 \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=-1 \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-1 \end{cases}.$$

Вариант 26

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ x-y-6z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 6\\ 6 & -3 & 7 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5\\ 7\\ 9\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}7x-6y+z=0\\ 4x+5y=0\\ x-2y+3z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases}5x-y-2z=1\\ 3x-4y+z=7\\ 2x+3y-3z=4\end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+5y-6z=-15 \\ 3x+y+4z=13 \\ 2x-3y+z=9 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5=8 \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=-2 \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3 \end{cases}.$$

Вариант 27

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5x-4y+2z=0 \\ 3y-2z=0 \\ 4x+y-3z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 2x+8y-7z=0 \\ 2x-5y+6z=1 \\ 4x+3y-z=7 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x-y=-6 \\ 3x+2y+5z=-14 \\ x-3y+4z=-19 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+8x_5=5 \\ 10x_1-5x_2+5x_3+9x_4+15x_5=10 \\ 4x_1-2x_2+x_3+2x_4+2x_5=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4+11x_5=8 \end{cases}.$$

Вариант 28

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+5y-z=0\\ 7x+2y+z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}6x+5y-4z=0\\ x+y-z=0\\ 3x+4y+3z=0\end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 2 \\ x + 5y - 3z = 4 \\ 2x - y + 4z = 5 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16 \\ x + 3z = -6 \\ 2x - 3y + z = 9 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8 \end{cases}.$$

Вариант 29

1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица А. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$, где

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -6 & 2 \\ 5 & -6 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 8x + y - 3z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ 4x - 7y + 2z = 0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y - 7z = 2 \\ 5x + y - 5z = 9 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 4y - z = -9 \\ 4x - y + 5z = -2 \\ 3y - 7z = -6 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 4x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}.$$

Вариант 30

1. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix},$$

а) разложив по элементам первой строки;
б) разложив по элементам первого столбца;
в) получив предварительно нули в какой-нибудь строке или столбце.

2. Найти:
а) A·B; б) 2A·B; в) 2A-E; г) $A^т$ и $B^т$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 4 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица A. Найти A^{-1} и установить, что $A\cdot A^{-1}=E$, если

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

5. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases}2x-5y+z=0\\ 3x+4y-2z=0\end{cases}.$$

6. Найти общее решение неоднородной системы A·X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & 6 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\\ 4\end{pmatrix}.$$

7. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x+7y-3z=0 \\ 3x-5y+z=0 \\ 3x+4y-2z=0 \end{cases}.$$

8. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 4x-9y+5z=1 \\ 7x-4y+z=11 \\ 3x+5y-4z=5 \end{cases}.$$

9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 7x+4y-z=13 \\ 3x+2y+3z=3 \\ 2x-3y+z=-10 \end{cases}.$$

10. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_2-x_3+5x_4+3x_5=-4 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=4 \\ x_1+x_2+3x_4+2x_5=1 \\ -3x_1+3x_2-2x_3+x_4=-7 \end{cases}.$$

Библиографический список

1. *Ермаков В. И.* Сборник задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие / В. И. Ермаков. – М. : ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

2. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие. В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1996. – Ч. 2. – 416 с.

3. *Матюхина Л. Я.* Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений : методические указания и задания к типовому расчету для студентов I курса факультета автоматики, вычислительной техники и информатики / сост. Л. Я. Матюхина, Л. Ф. Федосеева, Хан Сун Э. – Хабаровск : Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 1994. – 39 с.

4. *Линейные* преобразования : методические указания к практическим занятиям по алгебре и задания к самостоятельной работе для студентов специальности 010200 «Прикладная математика» / сост. Н. А. Ерзакова. – Хабаровск : Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2002. – 24 с.

5. *Рябушко А. П.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 3 ч. / А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 2. – 270 с.

Оглавление

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ.
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хабаровск 2008