

Cosmologia

Luca Pezzini

Laurea Magistrale in Astrofisica
Università degli Studi di Torino, Italy

October 14, 2020

Contents

1 Universo omogeneo ed isotropo	5
1.1 Risolvo equazioni di Einstein	5
1.2 Risolvo equazioni di Friedmann: Einstein - de Sitter	6
1.3 Risolvo equazioni di Friedmann: caso generico	6
1.4 Redshift cosmologico	7
1.5 Soluzioni eq. di Friedmann:	8
1.5.1 Soluzione in EdS	8
1.5.2 Soluzione a cost. cosm. Nulla	8
1.5.3 Parametro di Accelerazione	9
1.5.4 Soluzione a Parametri Arbitrari	9
1.5.5 Instabilitá del Modello di Einstein	10
1.5.6 Redshift per Modello di Universo senza Big Bang	11
1.6 Distanza in cosmologia	11
1.7 Relazione tipi distanza: coomovente vs angolare	11
1.8 Flusso	12
1.9 Brillanza superficiale	12
1.9.1 Paradosso di Olbers	12
1.10 Misura della distanza di luminositá	13
1.10.1 Energia Oscura	13
2 Storia termica dell'universo	14
2.1 Asimmetria tra materia e antimateria	14
2.2 Dipendenza delle grandezze termodinamiche delle specie	14
2.2.1 Caso relativistico:	15
2.2.2 Caso non relativistico:	15
2.3 Disaccoppiamento	15
2.3.1 Disaccoppiamento di neutrini	15
2.4 Densitá energetica del fluido relativistico	16
2.5 Epoca dell'equivalenza	16
2.6 Nucleosintesi cosmologica	16
2.6.1 Premesse	16
2.6.2 Aspetti quantitativi	17
2.7 Abbondanza di elio	18
2.8 Abbondanza elementi leggeri	18
2.9 Misura delle abbondanze degli elementi leggeri	19
2.9.1 Stima dell'abbondanza di He4 primordiale	19
2.9.2 Stima dell'abbondanza di D primordiale	19
2.9.3 Stima dell'abbondanza di He3 primordiale	20
2.9.4 Conclusioni	20
2.10 Epoca della ricombinazione	20
2.11 Disaccoppiamento radiazione-materia	22
2.12 Epoca inflattiva	23
2.13 Problemi del modello HBB	23
2.13.1 Problema dell'orizzonte	24
2.13.2 Problema dei monopoli magnetici	24
2.13.3 Problema della piattezza	25
2.14 Modello inflattivo	25
2.15 Risoluzione dei problemi di HBB	26

2.15.1	Risoluzione Monopoli	26
2.15.2	Risoluzione l'orizzonte	27
2.15.3	Risoluzione della Piattezza	27
2.16	Problema della costante cosmologica	27
2.17	Risoluzione del problema della costante Cosmologica	28
2.18	Big Bang nucleosynthesis	28
2.19	Stages of the early universe	28
2.20	Abundance of light elements depending on the density of baryons	29
3	Formazione di strutture cosmiche	30
3.1	Problemi della formazione di strutture	30
3.2	Crescita delle perturbazioni in un universo in espansione	30
3.2.1	Instabilitá di RJ Classica	31
3.2.2	Instabilitá di RJ in un mezzo in espansione	31
3.2.3	Soluzione generale per instabilitá di RJ	32
3.2.4	Fluido relativistico	33
3.2.5	Evoluzione delle velocitá peculiari	34
3.2.6	Stima della densitá della velocitá peculiare	34
3.2.7	Evoluzione delle perturbazioni di densitá adiabatiche	35
3.2.8	Processi dissipativi nell'epoca pre-ricombinazione: Silk damping delle perturbazioni adiabatiche	36
3.2.9	Evoluzione delle perturbazioni adiabatiche in un universo di DM	37
3.2.10	Fluttuazioni barioniche in presenza di DM	37
3.3	Modi per quantificare la struttura su larga scala: spettro delle perturbazioni	39
3.3.1	Spettro instabile delle perturbazioni	40
3.3.2	Spettro di potenza di Harrison-Zel'dovich	40
3.3.3	Evoluzione delle perturbazioni adiabatiche nei modelli HDM e CDM	41
3.3.4	Crescita non lineare delle perturbazioni di densitá	43
3.3.5	Soluzioni numeriche	44
3.3.6	Problemi numerici	44
4	Cosmologia osservativa	45
4.1	Funzione di correlazione a due punti	45
4.1.1	Recap sull'evoluzione delle perturbazioni	46
4.1.2	Misura della funzione di correlazione	46
4.1.3	Collasso di una perturbazione a simmetria sferica	47
4.2	Teoria di Press-Schechter e funzione di massa	48
4.2.1	Anisotropie del CMB	50
4.2.2	Effetto Sachs-Wolfe	52
4.3	Onde gravitazionali primordiali	53
4.4	Scale fisiche e angolari delle fluttuazioni	53
4.4.1	Scala dell'orizzonte cosmologico	53
4.4.2	Scala di Jeans: collasso delle perturbazioni di densitá	54
4.4.3	Scala delle perturbazioni acustiche	54
4.4.4	Strato di ultimo scattering	54
4.4.5	Scala di Silk damping	55
4.5	Lo spettro di potenza delle fluttuazioni della CMB: lo spettro di potenza osservato	55
4.6	Approccio statistico	56
4.7	Mezzo intergalattico post-ricombinazione	59
4.7.1	Sistema di assorbimento della serie di Lyman	59

4.7.2	Depressione di Gunn-Peterson	60
4.7.3	Ray Tacking Experiment	61
4.7.4	Scale dinamiche e termiche	61

1 Universo omogeneo ed isotropo

L'equazione di Einstein contiene al suo interno 10 eq. diff. non lin. al second'ordine funzione del tensore metrico; data la complessità ci si mette in condizione di semplificare il sistema.

Principio Cosmologico: L'universo a larga scala (100 Mpc) omogeneo ed isotropo, quindi abbiamo invarianza per traslazioni e rotazioni spaziali (confermato da CMB), ma non per traslazioni temporali sennò avremmo il principio cosmologico perfetto con **universo statico**.

1.1 Risolvo equazioni di Einstein

Risolviamo l'equazione di Einstein sotto queste prop., ricavo dunque il tensore metrico.

- **Metrica O-I 4D:** superficie sferica immersa in \mathbb{R}^3 .
- **Coordinate Coomoventi:** la coord. spaziale varia in funzione del tempo risp. ad un arbitrario SR **uniformemente**, dunque una volta nota la variazione temporale del **fattore di scala** $a(t)$ e la posizione della griglia a t_0 la conosco ad ogni t .
- **Metrica di F-R-W:** metrica di un fluido O-I in espansione uniforme. Funzione della curvatura dello spazio tempo $k(t) = R(t)^{-1}$, che espandendosi varia mantenendo costante il segno.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)[dr^2 - k^{-1}S_k^2(\tau\sqrt{|k|})(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (1)$$

In dipendenza da k avremo differenti geometrie dell'universo:

- $k = 0$: Metrica di Minkowsky (parte spaziale Euclidea) ($k^{-1}S_k^2(\tau\sqrt{|k|}) \rightarrow r^2$)
- $k = 1$: Geometria Sferica ($k^{-1}S_k^2(\tau\sqrt{|k|}) \rightarrow \sin^2 r$)
- $k = -1$: Geometria iperbolica ($k^{-1}S_k^2(\tau\sqrt{|k|}) \rightarrow \sinh^2 r$)

Dunque otteniamo una metrica diagonale: $g_{ii} = -a(t)^2 G_{ii}$ con 4 termini non nulli, dunque l'equazione di Einstein si riduce a due equazioni con incognita il **fattore di scala** derivato che prendono il nome di **eq. di Friedmann**:

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3}{c^2 p})a + \frac{1}{3}\Lambda a \\ \dot{a} = -\frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - kc^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \end{cases} \quad (2)$$

Quindi nel caso di universo O-I risolvere le eq. di Friedmann corrispondere a riolvere le eq. di Einstein. Per risolvere completamente il sistema serve aggiungere l'**eq. di Stato** per legare densità e pressione:

$$p = w\rho c^2, \quad 0 \leq w \leq 1 \quad (3)$$

- $w = 0$: Universo dom. da **Polvere**, radiaz. trascurab, non relat.
- $w = \frac{1}{3}$: Universo dom. da **Radiazione**, fluido ultra rel.
- $w = -1$: Universo dom. da **Costante Cosmologica**, fluido non ordinario a pressione negativa

Abbiamo Bisogno di una quarta equazione che ricaviamo dalla **Conservazione del tensore Energia Impulso**:

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{g} \\ T^{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \end{cases} \quad (5)$$

Sotto queste ipotesi la componente spaziale non ci dà informazioni mentre da quella temporale otteniamo:

$$a^3(t) \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3(t)(p + \rho c^2)] \quad (6)$$

Passo alla notazione tilde di p e ρ quindi tengo conto di Λ ottenendo

$$\rho \propto a^{-3(w+1)} \quad (7)$$

- $w = 0$: conservazione materia
- $w = \frac{1}{3}$: conservazione densità di energia

1.2 Risolvo equazioni di Friedmann: Einstein - de Sitter

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - k c^2 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \quad (8)$$

Mi metto nel caso più semplice quindi:

- Metrica Euclidea ($k = 0$)
- Costante Cosmologica nulla ($\Lambda = 0$)

Esplicito la densità e metto in evidenza la costante di Hubble ($H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$), ottengo la **densità critica** che l'equazione di Friedmann per universo di EdS:

$$\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (9)$$

In cosmologia la densità si misura rispetto a ρ_c , dunque si definisce la **Densità in massa dell'universo**:

$$\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \quad \Omega_0 = 1 \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Omega_0(t) > 1 \rightarrow k > 0 \\ \Omega_0(t) = 1 \rightarrow k = 0 \\ \Omega_0(t) < 1 \rightarrow k < 0 \end{cases} \quad (11)$$

1.3 Risolvo equazioni di Friedmann: caso generico

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - k c^2 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \quad (12)$$

Inserisco le relazioni della densità trovate in precedenza ed esplicito $k c^2$:

- Tempo attuale $t = t_0$ dunque $a_0 = 1$
- Densità critica: $\frac{8\pi G}{3} = \frac{H_0^2 \Omega^2}{\rho_0}$ (possiamo prendere al tempo attuale poiché una costante)
- Tensore E-I: $\rho = \rho_0 a^{-3(w+1)}$

Ottengo:

$$kc^2 = H_0^2(\Omega - 1) - \frac{\Lambda}{3} \quad (13)$$

Definisco $\Omega_\lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$ adimensionale, e dividendo per a^2 ottengo una nuova forma per l'**Equazione di Friedmann**:

$$H^2(t) = \frac{H_0^2}{a^{3(w+1)}} E(a, w, \Omega_0, \Omega_{\lambda_0}), \quad E = \Omega_0 + (1 - \Omega_0 - \Omega_{\lambda_0})a^{3w+1} + \Omega_{\lambda_0}a^{3(w+1)} \quad (14)$$

Definendo $\Omega_k(t) = \Omega_{\lambda_0} + \Omega_0 - 1 = \Omega_{k_0} = \frac{kc^2}{H_0^2}$ curvatura della parte spaziale dell'universo, ho tre casi:

$$\begin{cases} \Omega_k(t) > 0 \rightarrow k > 0 \\ \Omega_k(t) = 0 \rightarrow k = 0 \\ \Omega_k(t) < 0 \rightarrow k < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Osservo che ho $M4$ non solo con $\Omega_0 = 0$ ma anche con $\Omega_0 + \Omega_{\lambda_0} = 1$.

1.4 Redshift cosmologico

In un universo **omogeneo** e **isotropo**¹ con **espansione uniforme** ho una relazione biunivoca tra $a(t)$ e t (e dunque tra z e t) che può essere ottenuta risolvendo l'equazione di Friedmann. Definisco la relazione tra **a** e **z** attraverso il moto di un quanto di luce (coordinate coomoventi).

$$ds^2 = 0 \rightarrow \frac{c}{a(t)} dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}} \quad (16)$$

La parte **spaziale** mi da $f_k(r)$:

$$\begin{cases} \arcsin r \rightarrow k = 1 \\ r \rightarrow k = 0 \\ \arcsin r \rightarrow k = -1 \end{cases} \quad (17)$$

La parte **temporale** mi da:

$$a(t) = \frac{1}{1+z} \quad (18)$$

Se l'universo si espande c'è una dilatazione temporale dovuta all'espansione della metrica di conseguenza abbiamo che la lunghezza d'onda aumenta dello stesso fattore con cui aumenta $\frac{a_0}{a_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$. Misurare il red shift vuole dire:

- Misurare il rapporto dei fattori di scala all'epoca in cui viene emesso e poi rivelato il fotone.
- Misurare a quale epoca stato emesso il fotone (**fotone come orologio**).

È sbagliato pensare alla legge di Hubble come **effetto doppler** in quanto RG non esiste uno spazio in cui le galassie si muovono ma solo perché alcuni oggetti mi permettono di def. un SR, si parla dunque di espansione della metrica.

¹Considerare l'universo om. e isotr. una approssimazione valida solo su larga scala che implica che il tempo lo stesso in tutto l'universo (tutta la metrica) **tempo cosmologico** che diverso dal tempo che misura un orologio in un generico punto nell'universo su piccola scala, in quanto lo scorrere del tempo influenzato dalla curvatura dello spazio-tempo.

1.5 Soluzioni eq. di Friedmann:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{H_0^2}{a^{3w+1}} \left\{ \Omega_0 + (1 - \Omega_0 - \Omega_{\lambda_0}) a^{3w+1} + \Omega_{\lambda_0} a^{3(w+1)} \right\} \quad (19)$$

1.5.1 Soluzione in EdS

Le condizioni:

$$\begin{cases} k = 0 \rightarrow \Omega_0 = 1 \\ \Lambda = 0 \rightarrow \Omega_{\lambda_0} = 0 \\ w \neq -1 \end{cases} \quad (20)$$

L'ultima condizione evita di ottenere $\Lambda > 0$.

Risolvo l'equazione imponendo la condizione che al tempo iniziale l'espansione era nulla:

$$a(t) = \left\{ \frac{3(w+1)}{2} H_0 t \right\}^{\frac{2}{3(w+1)}} \quad (21)$$

Da cui posso ricavare il valore del tempo dell'universo nella metrica $t_0 = \frac{2}{3(w+1)} H_0^{-1}$ (dato da $a(t_0) = 1$).

$$\begin{cases} a(t) = \left\{ \frac{t}{t_0} \right\}^{\frac{2}{3(w+1)}} \\ H(t) = \frac{2}{3(w+1)} t^{-1} \\ \rho(t) = \frac{1}{6\pi G(w+1)^2} t^{-2} \end{cases} \quad (22)$$

Controllo per i vari casi che ci sia consistenza con $\rho \propto a^{-3(w+1)}$.

Universo di Polvere ($w = 0$):

$$\begin{cases} a \propto t^{\frac{2}{3}} \\ t \propto (1+z)^{-\frac{3}{2}} \\ H \propto t^{-1} \end{cases} \quad (23)$$

Universo di Radiazione ($w = \frac{1}{3}$):

$$\begin{cases} a \propto t^{\frac{1}{2}} \\ t \propto (1+z)^{-2} \\ H \propto t^{-1} \end{cases} \quad (24)$$

1.5.2 Soluzione a cost. cosm. Nulla

Universo di Polvere ($\Omega_{\lambda_0} = 0$, $\Omega_0 < 1$, $w = 0$)²:

$$\begin{cases} t = \frac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}} (\sinh \theta - \theta) \\ a = \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)} (\cosh \theta - 1) \end{cases} \quad (25)$$

Universo di Radiazione ($\Omega_{\lambda_0} = 0$, $\Omega_0 > 1$, $w = 0$)³:

$$\begin{cases} t = \frac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}} (\sin \theta - \theta) \\ a = \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)} (\cos \theta - 1) \end{cases} \quad (26)$$

²Geom. iperbolica aperta a espansione infinita.

³Geom. sferica chiusa a espansione finita. Basta sostituire $\theta \rightarrow i\theta$.

1.5.3 Parametro di Accelerazione

Dopo che Baade scopr l'esistenza di due categorie di stelle differenti (POP I e POP II), che portó a correggere la costante di Hubble e dunque la stima dell'età dell'universo, non era piú necessario porre la costante cosmologica a zero per avere universo piatto. Infatti posso l'ipotesi di universo piatto contenuta sia in $\Omega_0 = 1$ e sia in $\Omega_0 + \Omega_{\lambda_0} = 1$ che fa crescere l'età dell'universo in funzione di Ω_{λ_0} .

- Poiché oggi misuriamo $\dot{a} > 0$ siamo nella parte di curva crescente.
- Quando $\Lambda < 0$ allora la concavità è verso il basso $\ddot{a} < 0$

Adimensionale e $q > 0$

$$q = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}a = (1 + 3w)\frac{\Omega}{2} - \Omega_\lambda \quad (27)$$

- **Espansione Decelerata:** $q_0 < 0$
- **Espansione Accelerata:** $q_0 > 0$

1.5.4 Soluzione a Parametri Arbitrari

Il modello di **Lemetre** (1927) la generalizzazione dell'equazione di Friedmann che considerava solo il caso particolare a $P = 0$, quindi universo di polvere.

$$\begin{cases} \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - kc^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2 \\ \dot{\rho} = -3(\rho + \frac{P}{c^2})\frac{\dot{a}}{a} \end{cases} \quad (28)$$

Studio i vari casi dell'equazione seguente:

$$\dot{a}^2 = \frac{H_0^2}{2}(\Omega - \Omega_{k0}a - \Omega_{\lambda0}a^3) = \frac{H_0^2}{2}g(a) \quad (29)$$

Per $a = 0$ allora $g(a) = \Omega_0$.

Caso $\Lambda < 0$:

$$\begin{cases} \Delta = (\frac{\Omega_0}{2\Omega_{\lambda0}})^2 - (\frac{\Omega_{k0}}{3\Omega_{\lambda0}})^3 \\ a_c = 2(\frac{\Omega_{k0}}{3\Omega_{\lambda0}})^2 \cos \left\{ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-\frac{\Omega_0}{2\Omega_{\lambda0}} \left| \frac{3\Omega_{\lambda0}}{\Omega_{k0}} \right|^{\frac{3}{2}} \right) \right\} \end{cases} \quad (30)$$

L'universo si espande in modo decelerato: a raggiunge il massimo e poi collassa **indipendentemente** da Ω_0 , non ha bisogno dunque di una densità sovra critica per avere il collasso.

Caso $\Lambda > 0$ (Universo Statico di E.):

L'universo di E. è **statico** quindi $\ddot{a} = \dot{a} = 0$. Imponendo tali proprietà otteniamo:

$$\begin{cases} \rho_E = \frac{\Lambda}{4\pi G} \\ a_E = \left(\frac{kc^2}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (31)$$

Per l'universo vuoto di de Sitter ($P = \rho = k = 0$) in espansione esponenziale: $a \propto \exp \left\{ \left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}} t \right\}$. Genericamente abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{a}^2 = \frac{H_0^2}{a}(\alpha\beta - \Omega_{k0}a + \Omega_{\Lambda0}) \\ \ddot{a}^2 = \frac{H_0^2}{2} \left(-\frac{\alpha\beta}{a^2} + 2\Omega_{\Lambda0}a \right) \end{cases} \quad (32)$$

Troviamo α dalla conservazione della massa: $\alpha = \left(-\frac{3\Omega_0}{2} \frac{3\Omega_{\Lambda0}}{2\Omega_{k0}}^{\frac{1}{2}} \right)$ tale che:

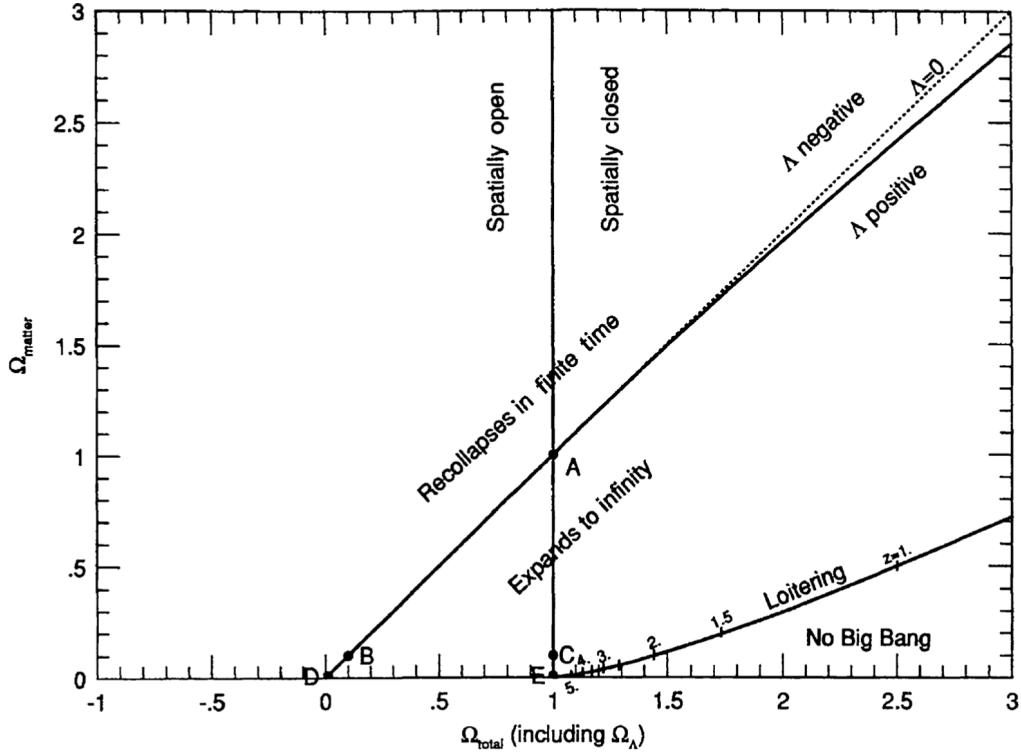


Figure 1: Modelli di Friedmann

- $\alpha > 0$: espansione infinita
- $\alpha = 0$: (EdS) il flesso si allunga indefinitamente
- $\alpha < 0$: collassa o rimbalza

Nel ramo A l'universo si espande a partire da un origine (big bang) nel passato e raggiungerà (eventualmente) uno stato stazionario nel futuro infinito. Nel ramo B l'universo si espande a partire da un valore definito di a nel passato infinito. Lo stato stazionario del modello di Eddington-Lemaitre è indicato da C ed è instabile perché l'universo, se perturbato, si muove sul ramo B o A. Un modello quasi stazionario può essere quello in cui siamo nella fase asintotica $a(t)$ costante e quindi siamo partiti da un big bang ad un tempo infinito nel passato, ovvero il ramo A.

Parametri attuali:

$$\begin{cases} q_0 < 0 \\ \Omega_0 = 0.3 \\ \Omega_{\Lambda 0} = 0.7 \end{cases} \quad (33)$$

1.5.5 Instabilità del Modello di Einstein

La regione piatta può essere simulata da un universo che rimbalza o da uno che si espande e poi collassa. Non è possibile sapere se ci si trova in un universo statico perché potremmo essere in tutti quei punti. Gli stati stazionari appena visti sono instabili e richiedono un preciso fine tuning: cioè piccole variazioni di Ω_0 e Ω_Λ portano alle soluzioni $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 0$.

1.5.6 Redshift per Modello di Universo senza Big Bang

Se vivessimo in un universo che rimbalza non dovremmo vedere oggetti a $z > 1.2$ ma dato che vediamo a $z = 10$ allora non siamo in questa situazione.

1.6 Distanza in cosmologia

Riprendiamo il discorso fatto nella sezione "Redshift Cosmologico". Passo dalla variabile temporale a z derivando la def. $1 + z = \frac{1}{a}$. Sotto le ipotesi:

- $w = 0$
- $\Omega_{\Lambda 0} = 0$ ($\forall \Omega_0$ per ogni modello di Friedmann)

Ottengo:

$$\int_z^0 \frac{cdz'}{H_0 E^{\frac{1}{2}}} = f_k(r) \quad (34)$$

Quindi dalla misura di z posso stimare r e viceversa dalla misura di r posso stimare le costanti cosmologiche Ω_0 e $\Omega_{\Lambda 0}$.

Facendo le dovute sostituzioni ottengo la **formula di Mattig**⁴:

$$r = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2 (1+z)} \left\{ \Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)[(\Omega_0 z + 1)^{\frac{1}{2}} - 1] \right\} \quad (35)$$

Per determinare le costanti cosmologiche bisogna avere un indicatore di distanza e stare su grandi z .

1.7 Relazione tipi distanza: coomovente vs angolare

Voglio misurare la distanza coomovente r (che non cambia), al tempo attuale t_0 , di una sorgente a redshift z . L'emissione corrisponderà ad un tempo precedente t , di conseguenza d sarà cambiata.

$$\begin{cases} D_A = \frac{r}{1+z} = ar \\ D_A = \frac{d}{\theta} \end{cases} \quad (36)$$

Dunque devo trovare una classe di oggetti di cui conosco le dimensioni d . Furono proposte le **Radiogalassie** poiché si pensava che la d non variasse (Sbagliato!). Un altro problema è che D_A a grandi z varia da col modello di Friedmann utilizzato (**decresce all'aumentare del parametro di densità, dunque l'oggetto avrà un'apertura angolare maggiore**). Posso ricavare una misura di distanza da:

- **CMB**: $D_A \sim \Omega_{k0}$ (err 1%)⁵
- **BAO**⁶
- **Flusso**

⁴Che la Legge di Hubble su larga scala, sono delle correzioni relativistiche

⁵All'epoca del disaccoppiamento tra radiazione e materia le perturbazioni di densità tendono ad oscillare (sotto la pressione di radiazione e l'instabilità grav.), si congelano creando la mappa della CMB, le anisotropie hanno dimensioni diverse a seconda del momento in cui si sono formate. Dallo studio delle anisotropie si stima $\Omega_{k0} \sim 0$

⁶Lo stesso fenomeno fisico del CMB provoca una distribuzione disomogenea delle galassie su scale molto grandi, la Barionic Acoustic Oscillation

1.8 Flusso

Ipotizzando **sorgente isotropa e universo in espansione**, la definizione di flusso deve cambiare, definiamo la **distanza di luminosità**:

$$\begin{cases} f = \frac{L(\nu_1)}{4\pi D_L^2} \\ D_L = (1+z)r = \frac{r}{a} \end{cases} \quad (37)$$

L'andamento di $D_L(z)$ dipende dal modello di Friedmann che utilizziamo: diminuisce all'aumentare di Ω_0 . Osservo che con misure di D_A e D_L riusciamo ad avere una stima di Ω_0 e Ω_Λ .

1.9 Brillanza buperficiale

Ipotizzando **sorgente isotropa e universo in espansione**, la definizione di **Brillanza Superficiale** diventa:

$$S_{oss} = \frac{S_{sorg}}{(1+z)^4} \quad (38)$$

Ho dunque una diminuzione della Brillanza superficiale a causa dell'espansione dell'universo. In magnitudini abbiamo invece l'opposto.

$$\begin{cases} \mu = -2.5 \log_{10} S + k \\ \mu_{oss} = \mu_{sorg} + 10 \log_{10} 1+z \end{cases} \quad (39)$$

1.9.1 Paradosso di Olbers

Presupposti:

- Universo infinito spazialmente e temporalmente
- Stelle disposte omogeneamente

Ipotesi che risolvono il paradosso:

- L'universo esiste da un tempo finito
- L'universo in espansione

Il fatto che il flusso sia $f \propto D^{-2}$ compensato dal fatto che la densità numerica di stelle cresca con $L = h\nu nV \propto D^2$, quindi il flusso osservato costante. Perché vediamo il cielo nero? La soluzione fu proposta da Edgar A. Poe che ipotizzò che sia finito, dunque ho delle los in cui posso non intercettare stelle, e in espansione, quindi la brillanza diminuisce in funzione di z. Definiamo la **Correzione k**:

$$f(\nu_0)\Delta\nu_0 = \frac{L(\nu_1)\Delta\nu_1}{4\pi D_L^2} = \frac{L(\nu_0)\Delta\nu_0}{4\pi D_L^2} \frac{L(\nu_1)\Delta\nu_1}{L(\nu_0)\Delta\nu_0} \Delta_0 \quad (40)$$

Passando alle **Magnitudini Apparenti**:

$$m_{\nu_0} = -2.5 \log_{10} \left\{ \frac{L(\nu_1)\Delta\nu_1}{4\pi D_L^2} \Delta\nu_0 \right\} - 2.5 \log_{10} \left\{ \frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right\} \quad (41)$$

Definisco $k = \log_{10} \left\{ \frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right\}$.

1.10 Misura della distanza di luminosità

$$\begin{cases} D_L = r(z)(1+z) = \frac{cz}{H_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1-q_0)z \right\} \\ m - M = 5 \log \left\{ \frac{D_L}{10^{-6}} \right\} - 5 \end{cases} \quad (42)$$

La variabile r la trovo dal calcolo di redshift con $ds^2 = 0$ sotituendo si ottiene il **Modulo di Distanza** in funzione di z . Osservo che aumentando la distanza della **candela standard** aumenta m quindi è più debole il flusso, in modo opposto se sono in un universo con densità critica minore allora il flusso diventa maggiore. A grandi z entra in gioco il fattore q_0 che fa separare le curve:

- $m - M$ e Ω_0 sono inversamente proporzionali
- $m - M$ d al crescere di $\Omega_{\Lambda}0$ sono direttamente proporzionali

Il parametro q_0 allora lo stimo dalle SNIac⁷ misurando z dagli spettri m misurato da terra. Ho due problemi:

- Vedere la SN al picco: monitoro il cielo a frequenza della settimana cerco le diff. di L.
- Non sono candele standard.

Tali oggetti non sono candele standard in quanto la luminosità di picco dipende dalla metallicità (quindi dal colore: rosse e metalliche, blu e poco metalliche) secondo la **relazione di Philips**. Risolvo il problema statisticamente attraverso **rinormalizzazione**, che mi porta ad avere le **curve di luce** sovrapponibili.

1.10.1 Energia Oscura

Alcuni cosmologi non credono che $q_0 < 0 \rightarrow \Omega_{\Lambda}0 > 0$, ma credono che esista un fluido chiamato **Energia Oscura** con densità di energia positiva ma pressione negativa .

$$\begin{cases} \rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{4\pi G} \\ P_{\Lambda} = w\rho_{\Lambda}c^2; \quad w = -1 \end{cases} \quad (43)$$

⁷Stelle appartenenti a sistemi binari che esplodono con la massa costante di Chandrasekar ($M_{CH} = 1.44M_S$) raggiungendo il picco massimo di luminosità a $10^{10}L_S$, la luminosità equivalente ad una galassia.

2 Storia termica dell'universo

L'universo primordiale approssimabile ad un plasma di particelle⁸ libere⁹ estremamente caldo; dunque per $t = 0$ equazione di Einstein é singolare: temp. e densitá sono infinite. Ipotizzo valga il **limite termodinamico**¹⁰. Definisco una **funzione di distribuzione**¹¹ che all'**equilibrio cinetico** sará una Fermi-Dirac o Bose-Einstein in base alle particelle in questione.

$$\begin{cases} f(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{E-\mu}{T}\right\}+1} \\ \rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \\ P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E} f(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \end{cases} \quad (44)$$

2.1 Asimmetria tra materia e antimateria

Considero il **limite relativistico** $T \gg m$, dunque i fotoni della CMB.

$$\begin{cases} \rho_{BE} = \frac{\pi^2}{30} g T^4 \\ \rho_{FD} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 \end{cases} \quad (45)$$

$$P = \frac{\rho}{3} \quad (46)$$

Teoricamente: abbiamo un miliardo di fotoni per ogni barione ($\eta = \frac{n_{b,0}}{n_{\gamma,0}} \sim 10^{-8}$). Dunque nell'universo primordiale é avvenuta la **rottura di simmetria**, di carica o paritá¹², si ha quindi materia in surplus rispetto ad antimateria. Dunque queste si annullano formando la CMB, ma rimane un po' di materia che costituisce l'univ. che vediamo.

Osservativamente: il rapporto tra barioni e fotoni non rispecchia i calcoli, infatti $\eta^{-1} \sim 10^{18}$. Lo possiamo anche vedere dall'entropia per barione. Questo é un problema aperto della cosmologia.

2.2 Dipendenza delle grandezze termodinamiche delle specie

Tramite normalizzazione per la T_i delle grandezze termodinamiche, posso esprimere le variabili di riferimento attraverso una funzione della temperatura contenente il contributo di tutte le specie di particelle.

- $u = \frac{E}{T_i}$
- $x_i = \frac{m_i}{T_i}$
- $y_i = \frac{\mu_i}{T_i}$

$$g_*(T) = \sum_i \left\{ \frac{T_i}{T} \right\}^4 g_i + \frac{7}{8} \sum_i \left\{ \frac{T_i}{T} \right\}^4 g_i \quad (47)$$

⁸Protoni, elettroni, neutrini e fotoni.

⁹Trascuro le interazioni perché l'Univ. non é cosí caldo.

¹⁰Considero additive le quantitá estensive, in quanto cioé la densitá non é cosí alta

¹¹Non ho dip. dalla posizione perché considero U. omogeneo e isotropo

¹²Si studia attraverso la teoria dei campi

2.2.1 Caso relativistico:

$$\begin{cases} \rho_R = \frac{\pi^2}{30} T^4 g_*(T) \\ P_R = \frac{\rho_R}{3} \\ S_R = \frac{4\pi^2}{3} \frac{T^3}{30} g_*^S(T) \end{cases} \quad (48)$$

$$g_*^S(T) = \sum_i \left\{ \frac{T_i}{T} \right\}^3 g_i + \frac{7}{8} \sum_i \left\{ \frac{T_i}{T} \right\}^3 g_i \quad (49)$$

Ipotizzando il sist. univ. **chiuso**

footnoteIn quanto non scambia energia e materia con l'esterno. dunque tale espansione é **adiabatica** allora l'entropia é conservata e scala con il fattore di scala $S \propto a^3$ che implica $T \propto (1+z)$.

2.2.2 Caso non relativistico:

Sfruttando il 1º **Principio della termodinamica** e la conservazione del tensore E-I si ha $T \propto (1+z)^2$.

2.3 Disaccoppiamento

La condizione per avere disaccoppiamento tra due specie di particelle ¹³ si ha quanto il tempo scala di espansione supera quello di collisione $\tau_H < \tau_{coll}$.

$$\begin{cases} \tau_{coll} \sim \Gamma^{-1}, & \Gamma = n\sigma|\mathbf{v}| \\ \tau_H \sim H^{-1} \end{cases} \quad (50)$$

2.3.1 Disaccoppiamento di neutrini

(É di aiuto pensare al disaccoppiamento come all'istante in cui non ho piú interazione tra alcune specie di particelle.)

$$\begin{cases} e^+ + e^- \rightleftharpoons \bar{\nu}_e + \nu_e \\ \nu_e + e^- \rightleftharpoons \nu_e + e^- \\ \nu_e + e^+ \rightleftharpoons \nu_\mu + \mu^+ \end{cases} \quad (51)$$

I neutrini interagiscono **debolmente** con particelle relativistiche ad alte energie. Usiamo la **sezione d'urto di Fermi** ($\sigma \sim G_F^2 T^2$) per determinare il **rappporto tra tasso di collisione ed espansione**. Siccome $n \propto T^3$ e $H \propto T^{2/3}$ allora ottengo $\frac{\Gamma}{H} \propto \left\{ \frac{T}{1MeV} \right\}^3$. Nel momento in cui $T < 1MeV$ allora i neutrini si disaccoppiano dalla materia relativistica iniziando una **fase di espansione libera** in cui $T \propto a^{-1}$, sono i **neutrini rielici** che costituiscono il **CNB** (Cosmic Neutrino Background¹⁵).

Stimo ora la $T_{\nu 0}$ in funzione di $T_{\gamma 0}$. I fotoni raffreddandosi arrivano a $E < MeV$ non riusciranno piú a creare coppie. Si perde l'equilibrio cinematico e la reazione sarà spostata verso l'**annichilazione** delle coppie e per conservazione dell'entropia¹⁶ questa si trasferirà ai fotoni incrementandone la temperatura. Dalla conservazione dell'entropia si ottiene $T_{\nu 0} = 1.95K$. Tale risultato spiega perché i neutrini rielici non siano ancora stati osservati, gli esperimenti sui neutrini astrofisici sono settati sul MeV . La densità numerica $n_\nu \simeq 110 N_\nu cm^{-3}$ dove $N_\nu = 3$ sono i tipi di neutrini.

¹³Ovvero quando non hanno l'energia sufficiente per interagire.

¹⁴Considerando il modello EdS in cui impongo conservazione del T. E-I.

¹⁵Come la CMB ora la loro energia é del ordine di eV .

¹⁶Poiché l'univ. si espande adiabaticamente.

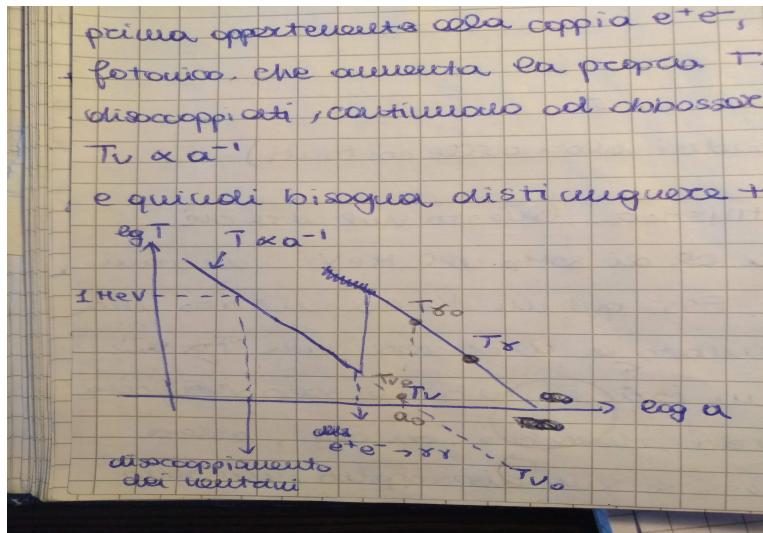


Figure 2: Disaccoppiamento dei Neutrini.

2.4 Densitá energetica del fluido relativistico

Dalle relazioni precedentemente trovate si ottiene che $\rho_\nu = 68\% \rho_\gamma$ dunque non trascurabile nel parametro di densitá che risulta essere $\Omega_{\nu,0} \sim 10^{-1}$ stimando $m_\nu = 10\text{eV}$. Ma essendo la massa del neutrino $m_\nu = 0.05\text{eV}$ risulta che non sia possibile che questi costituiscano la **materia oscura**.

2.5 Epoca dell'equivalenza

Questa fase é l'istante in cui la densitá della materia ordinaria egualia quella relativistica. Prima dominava la radiazione e poi da materia. Dalla cons. del T. E-I avevamo:

- M. Ordinaria: $\rho a^3 = k$
- M. Relativistica: $\rho a^4 = k$

2.6 Nucleosintesi cosmologica

Uno dei motivi per cui il Big Bang é universalmente accettato come modello dominante é perché riesce a spiegare le abbondanze di **elementi leggeri** con un elevata precisione.

2.6.1 Premesse

- Osservazioni evidenziano che le abbondanze relative sono costanti per tutti gli oggetti astrofisici
- '20 Composizione solare: 74%H, 23%He
- '30 Scopro che le reazioni termonucleari producono elementi chimici.
- '40 Gamov-Bethe-Alpher ipotizzano che il Big Bang produce elementi leggeri e le stelle quelli pesanti.
- '50 Scopro che le stelle producono elementi pesanti attraverso le reazione termonucleari.
- PB: Mancanza di elio e deuterio.

2.6.2 Aspetti quantitativi

Per descrivere la Nucleosintesi è necessario capire l'accoppiamento tra radiazione e materia in presenza di interazioni che variano il numero di particelle che ne prendono parte. Considero l'epoca in cui $1\text{MeV} < E < 1\text{GeV}$ (limite non relativistico) in cui abbiamo processi di **interazione debole**:

$$\begin{cases} n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e \\ \nu_e + n \rightleftharpoons p + e^- \\ e^+ + n \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e \end{cases} \quad (52)$$

E i processi di scattering:

$$\begin{cases} e^- + \gamma \rightleftharpoons e^- + \gamma \\ e^+ + \gamma \rightleftharpoons e^+ + \gamma \end{cases} \quad (53)$$

Stiamo considerando queste reazioni all'**eq. cinematico e termodinamico** quindi a densità e temperature tali da garantire reversibilità. Considerando particelle non relativistiche la loro funzione di distribuzione sarà una Maxwell-Boltzmann. Dalla prima interazione debole si ottiene $\frac{n_n}{n_p} = \exp\left\{-\frac{Q+\mu_n-\mu_p}{T}\right\}$ tale che:

$$\begin{cases} T \sim 1\text{MeV} \rightarrow \frac{n}{p} = 1 \\ T < 1\text{MeV} \rightarrow \frac{n}{p} < 1 \end{cases} \quad (54)$$

Per $T < 1\text{MeV}$ abbiamo il disaccoppiamento dei neutrini allora l'interazione sarà spostata verso la protonizzazione. Considerando la seconda interazione debole avremo $\frac{n}{p} \simeq \exp\left\{-\frac{Q}{T}\right\}$. All'epoca in cui i neutrini si disaccoppia anche i protoni e i neutroni escono dall'equilibrio, la frazione si congela a $\frac{n}{p} \simeq 0.27$, dunque si hanno 4 neutroni per protone. La maggior parte dei neutroni si lega formando elio mentre gli altri decadono ($\tau_n \sim 15$ min.) diminuendo il rapporto $\frac{n}{p}$.

Per arrivare alla sintesi dell'elio bisogna passare dalla sintesi del deuterio $E_D = 2.23$ che a

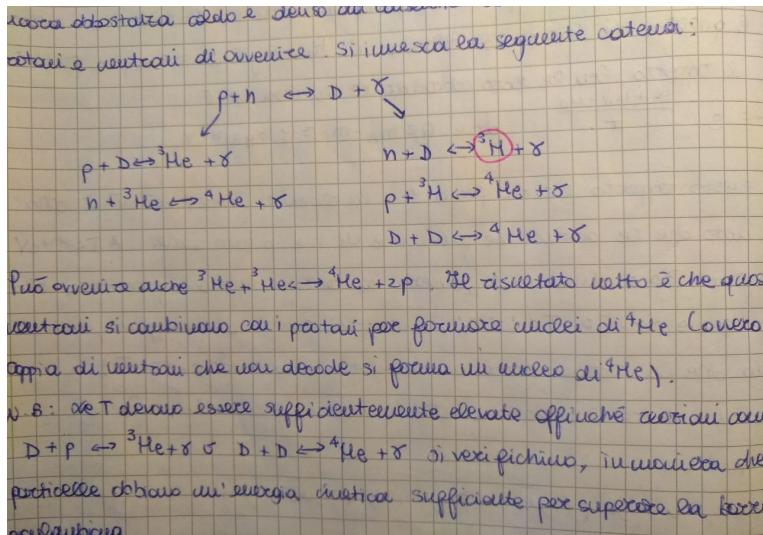


Figure 3: Catena di Interazioni.

$T \sim 1\text{MeV} \sim 10^9\text{K}$ per il gas di fotoni viene completamente distrutto¹⁷; dunque per avere elio bisogna aspettare che la temperatura dell'universo si abbassi di un fattore 10^9 per permettere al deuterio di sopravvivere. Sfruttando le relazioni $t \propto a^2 \propto T^2$, in ipotesi di EdS in universo

¹⁷La Planckiana associata alla $T \sim 1\text{MeV}$ ha una coda che contiene fotoni a temperatura sufficiente per scindere tutta la popolazione di deuterio presente.

dominato dalla radiazione, stimiamo l'istante di tempo in cui si verificano queste interazioni $t \simeq 100s$. Mentre la durata della nucleosintesi è $\Delta_{BBN} \sim 15min$, si nota che nel tempo la temperatura e il numero di neutroni scendono progressivamente¹⁸.

2.7 Abbondanza di elio

Considerando che:

- Il tempo di inizio della BBN $t_s \simeq 400s$ ¹⁹
- All'inizio della nucleosintesi $\frac{n}{p} = 0.1265$.
- Il $\tau_n = 614s$ ²⁰

Allora stimiamo l'abbondanza di elio essere $Y = \frac{m_{He}}{m_H + m_{He}} = 0.23$. La fisica che determina l'abbondanza di elio è diversa dagli altri elementi in quanto è termodinamica e determinata da $\frac{n}{p}$ al tempo del disaccoppiamento dei ν . In aggiunta all'elio vengono prodotti altri elementi leggeri come He3 H3 e Li7, le cui abbondanze dipendono dalla rapidità delle reazioni di interazione per formare i nuclei.

Differenze tra BBN:

- BBN: esplosiva e rapida
- SN: a eq. termodinamico su tempi scala molto lunghi

2.8 Abbondanza elementi leggeri

Grafico le abbondanze di elementi leggeri in funzione di η densità numerica barionica per unità di densità numerica fotonica.

Oss1: L'abbondanza di **elio** può aumentare²¹ due motivi:

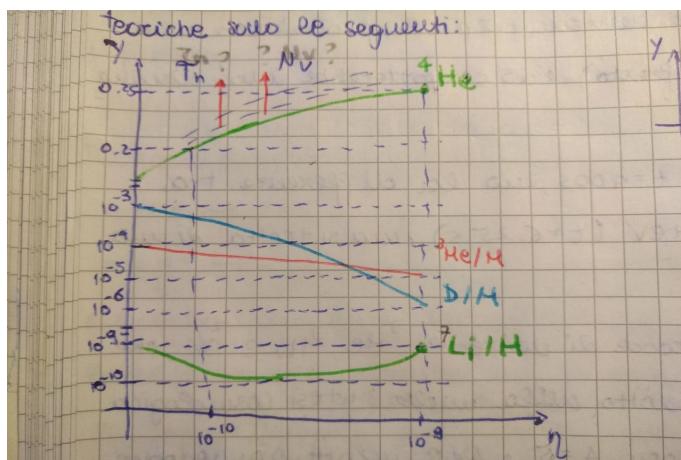


Figure 4: Abbondanza di Elementi Leggeri.

1. Aumentando i ν aumenta la densità di energia dell'universo dunque rallentiamo l'espansione.

¹⁸La BBN è influenzata dall'espansione e dalla densità dell'universo.

¹⁹Che corrisponde a $T \sim 0.1MeV$ mentre dovremmo utilizzare $t \sim 6.25s$ che corrisponde a $T \sim 0.8MeV$, ma va bene perché è una differenza trascurabile.

²⁰Fosse minore si avrebbero meno neutroni e dunque elio.

²¹L'aumento è esiguo dell'ordine del 5%

2. Aumentando il tempo di decadimento τ_n .

Oss2: L'abbondanza di **deuterio** decresce di 3 ordini di grandezza.

Oss3: L'abbondanza di **litio** decresce nella prima parte perché funge da catalizzatore per la sintesi di elio e poi aumenta poiché viene sintetizzato.

Fissando degli estremi per il parametro η fisso un intervallo per Ω_b da cui ricavo il limite superiore $\Omega_b < 0.03$: dunque la densità di barioni è circa il 3% della densità critica. Il risultato è coerente con la stima di Ω_0 ottenuta attraverso metodo dinamico sugli ammassi di galassie²², quindi se la stima è corretta, allora il modello di Big Bang caldo è valido e dobbiamo ammettere l'esistenza di una materia non barionica non luminosa. L'unica particella nota che potrebbe costituire la materia oscura sarebbe il **neutrino**²³, ma in tal caso le strutture cosmiche avrebbero un'altra forma rispetto a quella attuale.

2.9 Misura delle abbondanze degli elementi leggeri

Le abbondanze dei leggeri dipendono dal parametro cosmologico Ω_b , per stimarlo correttamente devo eliminare la contaminazione da processi astrofisici.

2.9.1 Stima dell'abbondanza di He4 primordiale

- L'elio è prodotto nel nucleo di stelle nella MS
- Attraverso gli spettri possiamo determinare l'elio presente nella fotosfera che però deriva dall'inquinamento della nube protostellare da stelle ormai morte

Dall'analisi delle **fotosfere di stelle di Pop II** ($Z \propto 10^{-4} - 10^{-3}$) si studia l'andamento di Y in funzione di Z, e successivamente facendo l'estrapolazione a $Z = 0$.²⁴

2.9.2 Stima dell'abbondanza di D primordiale

- L'abbondanza di deuterio è estremamente sensibile alla variazione di Ω_b
- Viene distrutto nella nucleosintesi stellare in quanto catalizzatore per elio, dunque quello che vediamo ha origine primordiale

Esistono due modi per stimare l'abbondanza di deuterio:

1. **ISM:** da cui misuriamo $\frac{D}{H} \sim (3 - 4)10^{-5}$ ²⁵
2. **IGM:** dallo studio l'intensità degli spettri dei quasar²⁶ (la cui densità picca $z \sim 2$) determino, in base alla profondità della riga di assorbimento ($\text{Ly}\alpha$), l'abbondanza di deuterio.

I due metodi presentano risultati in accordo e inoltre la distribuzione di deuterio ha un alto grado di isotropia, questo fa pensare che sia di origine cosmologica.

²² 3% materia ordinari, 15% plasma e il restante è materia non luminosa

²³ Dato che si è disaccoppiato non viene considerato come materia barionica.

²⁴ Sarebbe più preciso studiare direttamente le stelle di PopIII ($Z = 0$) ma essendo già morte non è possibile.

²⁵ Non è detto che il mezzo interstellare non sia stato affatto inquinato.

²⁶ Li scelgo perché sono lontani quindi attraversano molto IGM.

2.9.3 Stima dell'abbondanza di He3 primordiale

Anche He3 é prodotto e distrutto nelle stelle dunque meno affidabile per la stima di Ω_b . Puó essere misurato nelle regioni HII (idrogeno ionizzato) $\frac{He3}{H} \sim (1 - 2)10^{-5}$. **Stima dell'abbondanza di Li7 primordiale** Il Li7 é un elemento fragile sintetizzato nelle stelle e distrutto da molto fenomeni astrofisici:

- Dalle stelle in quanto **catalizzatore** di He4
- Per **spallazione** : collisione coi raggi cosmici
- Per collisione col **ISM freddo**

L'abbondanza di Li7 primordiale si stima dalle stelle di **Pop II massicce**²⁷ e risulta essere $\frac{Li7}{H} \sim 1.10 \cdot 10^{-10}$. Risulta non essere completamente in accordo con le previsioni del modello HBB: é circa 3 volte piú basso. Questo si pensa essere dovuto a ragioni astrofisiche:

1. Difficolta delle misure sperimentalni
2. Parte del Li7 potrebbe essere stato distrutto dalle **nova**e in sistemi binari dalle **reazioni picnonucleari**²⁸ causate dall' aumento repentino della densitá nel violento scambio di materia tra le compagne

Una ragione cosmologica invece:

1. Il modello di Universo usato é omogeneo e isotropo mentre le piccole disomogeneitá potrebbero spiegare questa discrepanza

2.9.4 Conclusioni

Le abbondanze osservate di elementi leggeri primordiali risultano essere in buon accordo con le previsioni della nucleosintesi cosmologica. Questo fornisce un limite a $\Omega_b = 0.03$ contro $\Omega_0 = 0.3$; quindi gran parte della materia deve essere non barionica.

2.10 Epoca della ricombinazione

Siamo in un ambiente dove $\frac{H}{He} \sim 12$ ($X \sim 74\%$, $Y \sim 25\%$) a $T = (0.04 - 0.05)MeV$, per cui é possibile che avrei la seguente interaz.:

$$e^- + p \rightleftharpoons H + \gamma \quad (55)$$

La reazioine é all'equilibrio per $E_\gamma = 13.6eV$, l'energia di prima ionizzazione di H, mentre per $E_\gamma < 13.6eV$ si ha **ricombinazione**. L'**eq. di Saha** determina il grado di ionizzazione dell'epoca di ricombinazione:

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta \left\{ \frac{T}{m_e} \right\}^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ \frac{B}{T} \right\} \quad (56)$$

Dove $B = m_p + m_e - m_H$ energia di legame e $X_e = \frac{n_p}{n_b}$: se $X_e = 0$ ho **ric. totale**, se $X_e = 1$ ho **ionizzaz. totale**. Siccome $T \propto 1 + z$ anche $X_e \propto z$. Considero la distrib. di **MB non collisionale**. Osservazioni:

²⁷Non uso stelle di massa inferiore a quella del sole perché hanno inviluppo convettivo che porta il Li7 in profondità ad alimentare le reazioni del nucleo alterandone le quantita.

²⁸La temperatura non é cosi alta da far avvenire reazioni termonucleari.

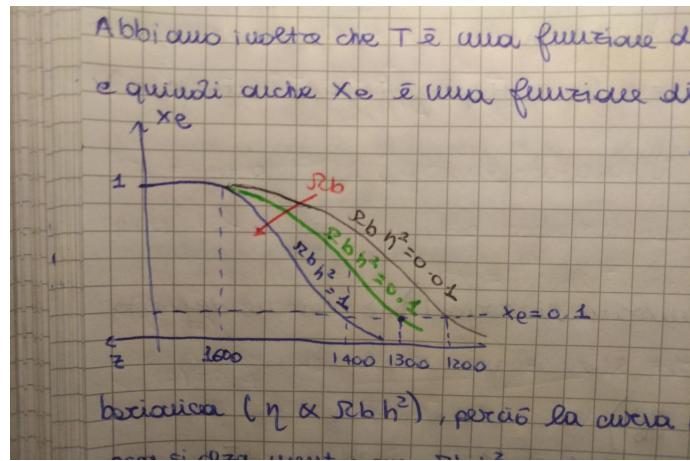


Figure 5: Saha Non Collisionale

1. $z \uparrow \rightarrow X_e = 1; z \downarrow \rightarrow X_e = 0$
2. X_e e Ω_b sono inversamente prop. ($\eta \propto \Omega_b h^2$): la quantità di materia decelera l'espansione favorendo la ricombinaz.
3. Se per $X_e < 0.1$ H è totalmente ric. allora $T_{ric} = 3276K$

Invece, considerando lo **scattering Thomson**²⁹, che porterebbe a ionizzaz. di H, avrei una **distrib. MB collisionale**: Osservazioni:

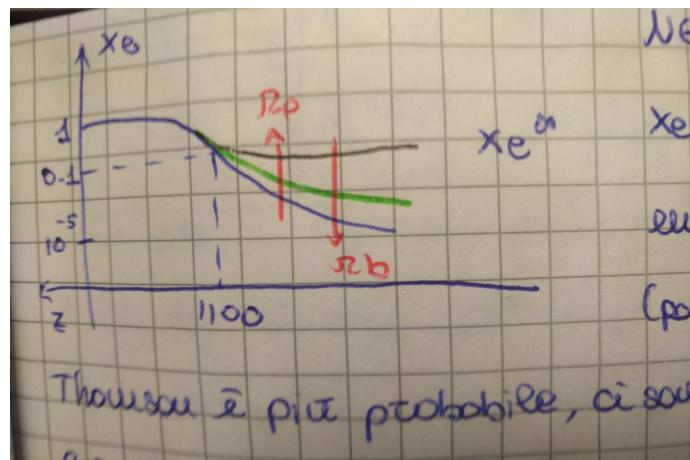


Figure 6: Saha Collisionale.

1. **Freeze-Out**: congelamento della Fraz. di Ioniz., le curve non vanno a zero a causa dell'espansione il fmp diverge., la probabilità di ricomb. diminuisce
2. Nella regione asintotica X_e e Ω_0 sono direttamente pro. in quanto l'espansione lenta aumenta la prob. di avere scattering T.

Calcoli più approssimati ci danno la X_e di **freeze-out**: $X_e^\infty = 2.7 \cdot 10^{-5} \frac{(\Omega_0 h^2)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_0 h^2}$.

²⁹Lo scattering T. diminuisce coll'espansione dell'univ., fino ad arrivare al disaccoppiamento tra radiazione e materia.

2.11 Disaccoppiamento radiazione-materia

A grandi z l'universo è **otticamente spesso** $\tau \simeq 0.37(\frac{z}{1000})^{14.25}$ dunque non lo possiamo indagare attraverso onde EM in quanto elettroni e fotoni fanno scattering Thomson. L'interazione diminuisce con l'espandersi dell'univ. e a $z = 1070$ abbiamo la **superficie di ultimo scatterning** che libera i fotoni delle CMB: abbiamo una **barriera di fotoni** che non ci permette di vedere a z più grandi.

Considerando l'univ. come fluido relat. $T \propto a^{-1}$ definiamo le seguenti epoche:

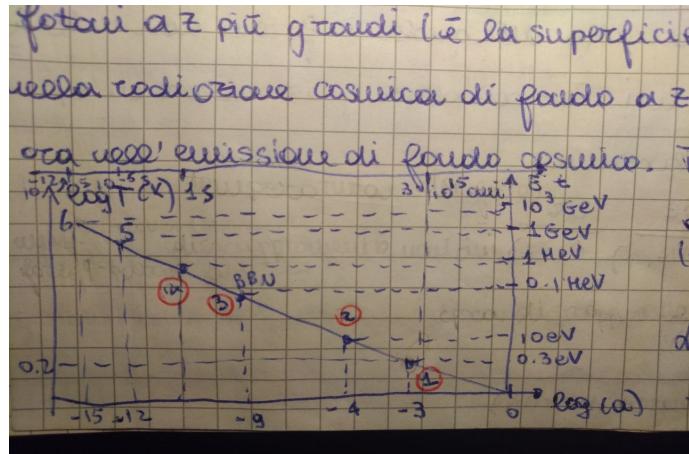


Figure 7: Storia termica dell'universo primordiale.

1. Disaccoppiamento radiazione-materia ($T = 0.3\text{eV}$)
2. Eq. radiazione materia ($T = 10\text{eV}$)
3. BBN ($T = 0.1\text{MeV}$)
4. Annichilazione positroni-elettroni ($T = 0.5\text{MeV}$)
5. Disaccoppiamento neutrini ($T = 1\text{MeV}$)
6. Transizione quark-adroni ($T = 1\text{GeV}$)
7. Unificazione forse elettrodeboli ($T = 10^3\text{GeV}$)
8. GUT: **periodo del deserto** le forze elettrodeboli e forti si unificano ($T = 10^{14} - 10^{15}\text{GeV}$)
9. Inflazione ($t < t_P = 10^{-43}s^{30}$, $T_P \approx 10^{32}$, $E_P \sim 10^{19}\text{GeV}$)

Osservazioni:

- Per $E = 1 - 10\text{TeV}$ studio la fisica con LHC
- Per $E > 10\text{TeV}$ non esistono esperimenti, ma ho la QFT come teoria
- Se voglio studiare l'inflazione necessito di una teoria quantistica della gravità
- Da 1 a 4 **era radiativo**
- Da 6 e 7 **era leptonica**

³⁰Le particelle iniziano ad auto gravitare. Per calcolare il tempo di Planck metto insieme il collasso in caduta libera e il principio di indeterminazione.

2.12 Epoca inflattiva

Dopo il **periodo del deserto cosmico**, in cui non identifichiamo particelle note, abbiamo l'epoca inflattiva che si estende per un arco di tempo $10^{-34}s < t < 10^{-32}s$. Nella suddetta si introducono delle **transizione di fase** con cui possiamo risolvere i problemi del modello HBB. Basta traslare il concetto di energia libera dalla termodinamica alla QFT: qui si ha il potenziale di interazione in funzione del campo scalare³¹. Teniamo sempre presente che il sistema fisico tende alla configurazione a energia minima. Il potenziale effettivo varia in funzione

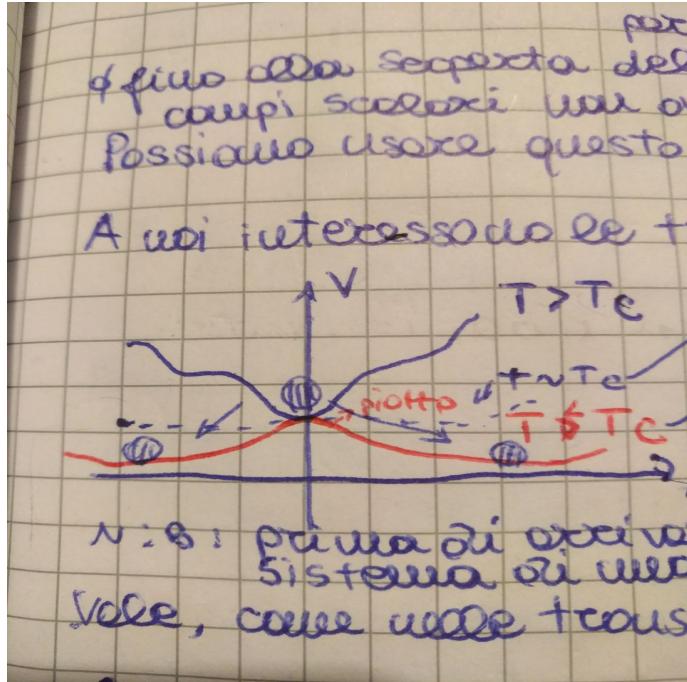


Figure 8: Potenziale di interazione a sombrero.

della temperatura. Dunque analizziamo i casi:

1. $T > T_c$ il potenziale ha un minimo assoluto in $\phi = 0$
2. $T \sim T_c$ il sistema permette di assumere valori di ϕ piú grandi (transizione di fase del 1 ordine)
3. $T < T_c$ in cui il minimo iniziale si trasforma in un massimo relativo, il sistema tende a due nuovi minimi (transizione di fase del 2 ordine)

Si verifica una **rottura di simmetria** che in QFT si esprime tramite una transizione di fase del 2 ordine (GUT). Durante la transizione di fase abbiamo una perdita di energia che puó interpretarsi come **calore latente** che fluisce nel sistema circostante.

2.13 Problemi del modello HBB

Il modello di big Bang caldo risultava avere delle criticitá prima del tempo di Planck, che verranno risolte dall'introduzione delle transizioni di fase nell'epoca inflattiva negli inizi degli anni '80.

³¹Che ha come componente fisica il bosone di Higgs.

2.13.1 Problema dell'orizzonte

Confrontando gli spettri di regioni dell'universo, sulle scale del CMB, si nota che regioni dell'universo che non dovrebbero essere mai entrate in contatto, causalmente non connesse³², hanno la stessa temperatura $T = 2.7K$. Anche se l'universo non ha avuto il tempo di **termalizzare**.

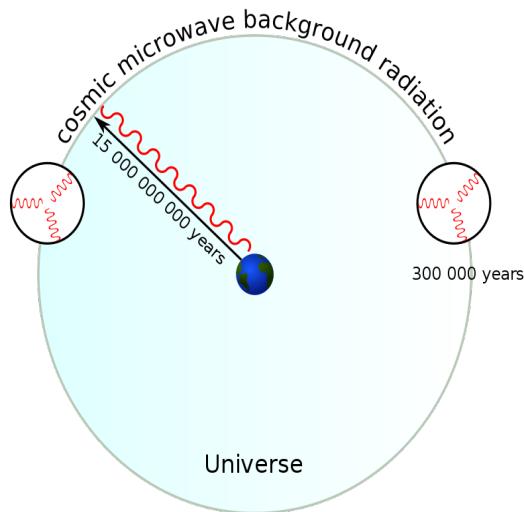


Figure 9: Problema dell'orizzonte cosmologico.

$$\begin{cases} r_H \sim \frac{2c}{H_0 \Omega_0^{\frac{1}{2}} (1+z)^{\frac{1}{3}}} \\ \theta_H = \frac{r_H}{1+z} \end{cases} \quad (57)$$

Stimo l'angolo sotteso dell'orizzonte cosmologico, all'epoca del disaccoppiamento, essere $\theta_H \sim 2$ che significa che gli unici punti che si possono "parlare" al tempo del disaccoppiamento erano racchiusi in un angolo di apertura θ_H . Questo é in contraddizione con le misurazioni che rivelano equilibrio termodinamico.

2.13.2 Problema dei monopoli magnetici

La GUT negli anni '70 prevedeva che all'epoca del disaccoppiamento di forza forte e forza elettrodebole venissero prodotti dei difetti topologici:

1. 0-d **monopoli magnetici**
2. 1-d stringhe
3. 2-d pareti

La massa dei monopoli é enorme $m_M \simeq 10^{16} m_p$ e la densitá numerica $n_M \gtrsim n_b$. Calcolando la densitá in monopoli nell'universo abbiamo un assurdo $\Omega_M \simeq 10^{14}$, quindi o la GUT é sbagliata o c'é qualcosa che fa sparire i monopoli nell'universo.

³²A causa di una distanza tra esse superiore a quella che ha potuto percorrere la luce nel tempo stimato dall'evento iniziale del Big Bang.

2.13.3 Problema della piattezza

$$(\Omega^{-1} - 1) = (\Omega_0^{-1} - 1)10^{-60} \left\{ \frac{T_P}{T} \right\}^2 \quad (58)$$

Dunque per $\Omega_0 \sim 0.3$ allora Ω_P sarà diverso da 1 per una parte su 10^{60} per $z \gg 1$. Pertanto, all'epoca di Planck il "tuning" del valore di Ω^{-1} rispetto a 1 deve essere stato fatto con una precisione di 10^{60} . È problematico avere un numero calibrato così bene vicino ad 1, in quanto si parla di densità critica. In conclusione, ad altissimi z , Ω_P deve essere estremamente prossimo ad 1, richiedendo un fine tuning molto forte.

2.14 Modello inflattivo

Nel 1981 Alan Guth ha cercato di risolvere questi problemi proponendo che ci sia stata una fase nell'universo primordiale in cui la densità di energia fosse dominata da una componente di energia del vuoto con pressione negativa, in modo del tutto analogo alla dark energy che abbiamo già visto. Pertanto in quella fase, in cui la dinamica era guidata da una componente con proprietà simili a quelle della dark energy, si è avuta una espansione di tipo esponenziale, ovvero durante quella fase $a \sim \exp\left\{\frac{t}{\tau}\right\}$. Linizio e la durata della fase inflattiva dipendono dalle proprietà del potenziale del campo scalare ϕ ³³ che da origine alla componente di energia del vuoto che guida l'inflazione; perciò esistono vari modelli inflazionari.

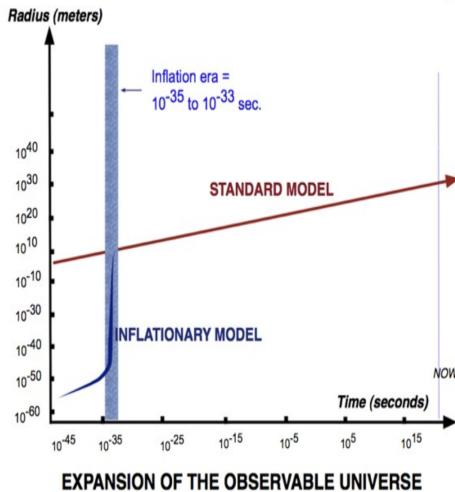


Figure 10: Modelli a confronto.

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi, T) \quad (59)$$

$$\begin{cases} \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi, T) \\ P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi, T) \end{cases} \quad (60)$$

Per studiare la transizione di fase è utile studiare l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (61)$$

Inoltre l'equazione di Friedmann si modifica tenendo conto anche di ρ_ϕ che è anch'esso funzione di $V(\phi, T)$ e sotto l'ipotesi $\rho_\phi \gg \frac{k c^2}{a^2}$ abbiamo $(\frac{\dot{a}}{a})^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi$.

³³Inflatone.

1. $T > T_c$
2. $T \sim T_c \Rightarrow \dot{\phi} \ll V_\phi$ "rotolamento lento" $\Rightarrow \rho_\phi \sim V_\phi \sim k$ inizia la transizione di fase dell'inflatone
3. $T < T_c$ l'inflatone oscilla attorno al suo nuovo equilibrio e si conclude la transizione

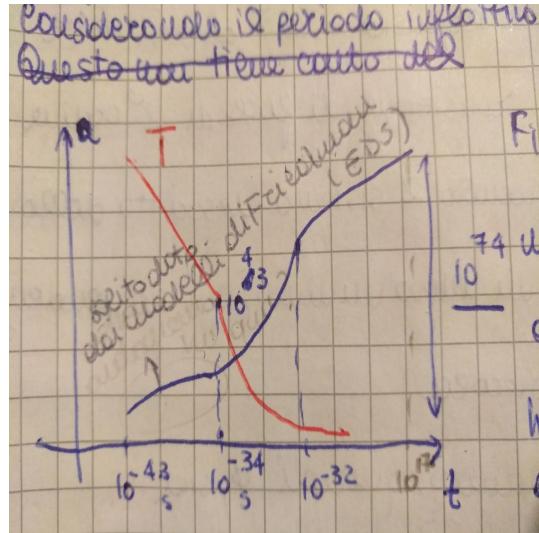


Figure 11: Andamento del fattore di scala.

1. $t < 10^{-34}$ a segue l'andamento del modello standard del BB
2. $10^{-34} < t < 10^{-32}$ si ha un'espansione esponenziale, $a(t) \propto \exp\left\{\frac{t}{\tau}\right\}$ con $\tau = 10^{-34}$, l'universo aumenta di 43 ordini di grandezza $\frac{a_f}{a_i} = 10^{43}$.
3. $t > 10^{-32}$ si conclude la transizione di fase

In conseguenza ad una espansione adiabatica la T dovrebbe diminuire di 43 ordini di grandezza come la T_{CMB} , ma così non è in quanto la transizione di fase rilasci il **calore latente**³⁴ nell'universo, rappresentato dal termine di smorzamento $3\dot{a}\dot{\phi}$, la temperatura risale di 43 ordini di grandezza questo fenomeno prende il nome di **re-heating**.

2.15 Risoluzione dei problemi di HBB

2.15.1 Risoluzione Monopoli

Si fa partire l'inflazione dopo la formazione dei monopoli magnetici che vengono prodotti a $t = 10^{-35} s$ (con una transizione di fase del periodo di GUT), si ha dunque un solo monopolio per universo visibile che ha probabilità trascurabile di essere osservato da terra.

³⁴L'energia del calore latente viene usata per produrre nuove particelle durante tutta la fase del rotolamento lento.

2.15.2 Risoluzione l'orizzonte

Prima dell'inflazione le regioni che ora consideriamo separate causalmente erano connesse.

$$\begin{cases} \rho_\phi = k \\ P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi, T), \quad \phi \ll V(\phi) \end{cases} \quad (62)$$

Dalla conservazione del tensore energia impulso ottengo una condizione sugli orizzonti cosmologici $(\frac{a_f}{a_i})^{-3(w+1)} >> \frac{T_f}{T_i} \cdot 10^{59}$ da cui conseguono:

1. Universo vuoto dominato da una costante cosmologica quindi $w = -1$
2. $\frac{a_f}{a_i} >> \frac{T_f}{T_i} \cdot 10^{30}$ in cui T_f dipendendo dal **re-heating**³⁵
3. $\frac{T_f}{T_i} \in [10^{-5}, 1]$ considerando il limite inferiore produce $T_f > 10^{14} GeV$ che è concorde con un modello di inflazione con $10^{-34} < t < 10^{-32}$ che implica $\frac{a_f}{a_i} \sim 10^{43}$

2.15.3 Risoluzione della Piattezza

L'universo all'epoca di Planck può avere un valore di Ω_0 arbitrario, ma poi questo verrà spinto a $\Omega_0 = 1$ dall'inflazione, indipendentemente dal valore iniziale di questo. Dalla conservazione del tensore E-I otteniamo $\frac{a_f}{a_i} >> (\frac{\Omega_i^{-1}-1}{\Omega_0^{-1}-1})^{\frac{1}{2}} \frac{T_f}{T_i} \cdot 10^{30}$ che per mette a $\Omega_0 \rightarrow 1$.

2.16 Problema della costante cosmologica

Il modello standard del Big Bang non riesce a spiegare il problema di **fine tuning** della costante cosmologica, inserita nei modelli di Friedmann come componente aggiuntiva. Secondo QFT l'universo nasce con una certa energia iniziale Λ interpretata come l'energia del livello fondamentale, a cui è associato il campo scalare ϕ_Λ con il suo potenziale $V(\phi, T)$. Durante le **transizione di fase** parte di questa energia viene liberata tramite calore specifico, può essere stimata come $\Delta\rho_{V,i} \sim m_i^4$:

1. GUT: $m \sim 10^{15} GeV$
2. SUSY: $m \sim 10^3 GeV$
3. E-W: $m \sim 10^2 GeV$
4. Q-H: $m \sim 10^{-1} GeV$

Poiché l'energia del vuoto si conserva si stima essere $\rho_V(t_P) = \Delta\rho_V + \rho_V(t_0)$ con $\Delta\rho_V \sim \sum_i \Delta\rho_{V,i} \sim 10^{60} GeV$ somma dell'energia liberata durante le transizioni e la densità oggi a cui è associata la costante cosmologica. Stiamo mettendo insieme QFT e GR, allora $\rho_V(t_0)c^2 = \Omega_{\Lambda 0}\rho_{c0}c^2$ che troviamo mettendo assieme informazioni sull'espansione dell'universo (SNIa) e la piattezza (CMB):

- $\Omega_0 - \Omega_{\Lambda 0} = -0.53$ (SNIa)
- $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_0 = 1$ (CMB)
- $\Omega_0 = 0.3$ (LSS)

Da cui $\rho_V(t_0) \simeq 10^{-46} GeV^4$ e quindi $\rho_V(t_P) = \Delta\rho_V(1 + 10^{-106})$, quindi la densità di energia del livello fondamentale associata al vuoto deve coincidere con la somma della densità di energia di tutte le transizioni di fase che sarebbero avvenute successivamente a meno di una parte su 10^{106} . Quindi o scopriremo una nuova transizione con $\Delta\rho_V \sim 10^{-46} GeV^4$ oppure resteremo con una costante cosmologica problematica.

³⁵Dunque dal modello inflazionario usato ha un possibile fluttuazione.

2.17 Risoluzione del problema della costante Cosmologica

Facciamo un breve escursus sulle identitá delle costanti in fisica:

- Costanti di **accoppiamento**: si determinano sperimentalmente (ex. **G**)
- Costanti **additive**: associate a quantitá di cui mi interessa la differenza (ex. ddp)

Mentre la Λ é una costante anomala in quanto non riconducibile a nessuna delle due categorie.

- GR: assume un ruolo geometrico o di sorgente a seconda di dove compare nell'equazione di E.
- QFT: assume significato di **densitá di energia del vuoto** produce un problema di fine tuning.

L'ipotetica soluzione sarebbe quella di associare ad essa un campo scalare indicato come **energia oscura**³⁶. Se si dimostrasse che $w = w(z)$, da osservazioni sull'evoluzione temporale delle strutture cosmiche, potremmo dimostrare l'esistenza del campo scalare energia oscura. Ma questo ci riporterebbe ad una visione Aristotelica dell'universo costituito prevalentemente dalla **quinta essenza**, che non posso vedere³⁷.

In conclusione ci comportiamo come se l'universo oggi avesse costante cosmologica, che introduciamo ad Hoc in modo da riporre i dati osservativi. Questo approccio ci da informazioni sulla validitá del modello.

2.18 Big Bang nucleosynthesis

Gamow, Alpher and Herman proposed the hot Big Bang as a means to produce all of the elements. However, the lack of stable nuclei with atomic weights of 5 or 8 limited the Big Bang to producing hydrogen and helium. Burbidge, Burbidge, Fowler and Hoyle worked out the nucleosynthesis processes that go on in stars, where the much greater density and longer time scales allow the triple-alpha process ($\text{He} + \text{He} + \text{He} = \text{C}$) to proceed and make the elements heavier than helium. But BBFH could not produce enough helium. Now we know that both processes occur: most helium is produced in the Big Bang but carbon and everything heavier is produced in stars. Most lithium and beryllium is produced by cosmic ray collisions breaking up some of the carbon produced in stars.

2.19 Stages of the early universe

The following stages occur during the first few minutes of the Universe:

- Less than 1 second after the Big Bang, the reactions shown at right maintain the neutron:proton ratio in thermal equilibrium. About 1 second after the Big Bang, the temperature is slightly less than the neutron-proton mass difference, these weak reactions become slower than the expansion rate of the Universe, and the neutron:proton ratio freezes out at about 1:6.
- After 1 second, the only reaction that appreciably changes the number of neutrons is neutron decay, shown at right. The half-life of the neutron is 615 seconds. Without further reactions to preserve neutrons within stable nuclei, the Universe would be pure hydrogen.

³⁶A pressione negativa e contenente il 70% della densitá dell'universo ($\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 0.7$).

³⁷Modelli di quinta essenza.

- The reaction that preserves the neutrons is deuteron formation. The deuteron is the nucleus of deuterium, which is the heavy form of hydrogen (H_2). This reaction is exothermic with an energy difference of 2.2 MeV, but since photons are a billion times more numerous than protons, the reaction does not proceed until the temperature of the Universe falls to 1 billion K or $kT = 0.1$ MeV, about 100 seconds after the Big Bang. At this time, the neutron:proton ratio is about 1:7.
- Once deuteron formation has occurred, further reactions proceed to make helium nuclei. Both light helium (He_3) and normal helium (He_4) are made, along with the radioactive form of hydrogen (H_3). These reactions can be photoreactions as shown here. Because the helium nucleus is 28 MeV more bound than the deuterons, and the temperature has already fallen so far that $kT = 0.1$ MeV, these reactions only go one way.
- The reactions at right also produce helium and usually go faster since they do not involve the relatively slow process of photon emission.
- The net effect is shown at right. Eventually the temperature gets so low that the electrostatic repulsion of the deuterons causes the reaction to stop. The deuteron:proton ratio when the reactions stop is quite small, and essentially inversely proportional to the total density in protons and neutrons. Almost all the neutrons in the Universe end up in normal helium nuclei. For a neutron:proton ratio of 1:7 at the time of deuteron formation, 25% of the mass ends up in helium.

2.20 Abundance of light elements depending on the density of baryons

The deuterium, He_3 , He_4 and Li_7 abundances depend on the single parameter of the current density of ordinary matter made out of protons and neutrons: baryonic matter. The graph above shows the predicted abundance vs. baryon density for these light isotopes as curves, the observed abundances as horizontal stripes, and the derived baryon density as the vertical stripe. A single value of the baryon density fits 4 abundances simultaneously. The fit is good but not perfect. There has been a dispute about the actual primordial helium abundance in the Universe: either 23.4 or 24.4 percent by mass, with both groups claiming 0.2 percent accuracy so this is 5 sigma discrepancy between the different observational camps. And a new measurement of the free neutron lifetime is 6 sigma smaller than the previous world average, giving a new prediction of the helium abundance of 24.6 percent. The observed lithium abundance in stars is less than the predicted lithium abundance, by a factor of about 2. But stars destroy lithium so it is hard to assess the significance of this difference.

3 Formazione di strutture cosmiche

3.1 Problemi della formazione di strutture

L'universo é omogeneo e isotropo su larga scala ovvero per $L > 100Mpc$, mentre non é cosí su piccola scala in quanto abbiamo strutture come galassie e ammassi. Definendo il **contrasto di densitá** come $\delta_{struct} = \frac{\rho_{struct} - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ con $\bar{\rho} \sim \rho_c$ si ha uno strumento che identifica quanto la struttura in considerazione é piú densa della densitá critica. Vediamo che quando consideriamo i super ammassi ($R \sim 10Mpc$ e $M \sim 10^{15} - 10^{16} M_\odot$) $\delta_{sup} \sim 1 - 10$.

Le strutture cosmiche si pensa si siano originate dalle perturbazioni del campo di densitá, che attraverso l'instabilitá gravitazionale hanno aggregato materia ed evolvendo nel tempo hanno formato la struttura su larga scala. Due problemi sono:

1. Condizioni iniziali delle fluttuazioni: il modello inflattivo considera il **principio di indeterminazione** di Heisenberg come fenomeno alla base delle **fluttuazioni quantistiche pre-inflattive**
2. Il tempo necessario all'instabilitá per evolvere³⁸: devo studiare il campo di velocitá della materia.

3.2 Crescita delle perturbazioni in un universo in espansione

Trattiamo il campo di densitá come un **fluido auto-gravitante**, le cui condizioni iniziali sono determinate dal periodo preinflattivo. Le equazioni che lo descrivono sono 4:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \\ P = P(\rho) \end{cases} \quad (63)$$

Le equazioni 63 é fornisco un approccio classico al problema, ovvero é un approccio newtoniano in quanto in limite di campo debole. ($a = a_{bkg} + a_1$, $a_1 \ll a_{bkg}$) trovó una soluzione .

- Per universo **statico** esistono solo soluzioni triviali a $\rho = 0$
- Per universo in **espansione** esistono soluzioni a $\rho \neq 0$

Di questo se ne occupó **Jeans**, da cui l'instabilitá gravitazionale prende il nome, il quale facendo uno sviluppo perturbativo al primo ordine dei campi in gioco trovó l'equazione che regola lo sviluppo temporale delle **perturbazioni di densitá** δ in presenza di forze autograv., di pressione e variazione di coordinate proprie in ragione del fattore di scala:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \frac{1}{\rho_b a^2} \nabla_x^2 P_1 + \frac{1}{a^2} \nabla_x^2 \phi_1 \quad (64)$$

In coordinate **proprie** avremo $\dot{\delta} = -\nabla_r \cdot \mathbf{v}_1$; mentre in coordinate **comoving** $\dot{\delta} = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}$. Inserendo l'equazione di stato nell'ipotesi di **trasformazione adiabatica** per piccole perturbazioni ($\frac{dP}{d\rho} \sim \frac{P_1}{\rho_1} \sim c_s^2$) ottengo :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \frac{c_s^2}{a^2} \nabla_x^2 \delta + 4\pi G \rho_b \delta \quad (65)$$

Equazione diff. in δ spazialmente omogenea, osservo che é simile all'equazione delle onde. Allora cerco soluzioni della forma di onda piana $\delta \propto \exp\{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x} - \omega t)\}$ dove \mathbf{x} e k_c sono vettori comovingi.

³⁸Se l'età dell'universo é sufficiente per far sviluppare queste strutture?

3.2.1 Instabilitá di RJ Classica

La soluzione sarà una sovrapposizione di onde piane, per un **fluido statico e omogeneo** da $\mathbf{v}_b = \dot{a}\mathbf{x}$ imponendo staticità $\mathbf{v}_{bkg} \Rightarrow \dot{a} = 0$ ottengo una relazione di dispersione:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_b \quad (66)$$

Con $\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. La soluzione varia in funzione di ω :

- $\omega^2 < 0 \Rightarrow \delta \propto \exp\{-i\omega t\}$ (Oscilla a freq. Reale)
- $\omega^2 > 0 \Rightarrow \delta \propto \exp\{\omega t\}$ (Esponenziale a freq. Im.)

Definiamo il numero d'onda di Jeans é $k_J^2 = \frac{4\pi G \rho}{c_s^2}$ di conseguenza la **lunghezza d'onda di Jeans** $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s (\frac{\pi}{G \rho_b})^{\frac{1}{2}}$ ci permette di esprimere $\Gamma = \pm \omega = \pm \sqrt{4\pi G \rho_b (1 - \frac{\lambda_J}{\lambda})^2}$ inverso del tempo scala del processo $\tau \propto (G \rho_b)^{-\frac{1}{2}}$:

- $\lambda < \lambda_J$ ($\Gamma \in \text{Re}$): la perturbazione si **disperde** con un tempo scala τ in maniera esponenziale ($\exp\{-\frac{t}{\tau}\}$), i campi di velocitá sono spostati verso l'esterno.
- $\lambda > \lambda_J$ ($\Gamma \in \text{Im}$): la perturbazione fa **collassare** il sistema i cui campi di velocitá sono diretti verso il centro.

3.2.2 Instabilitá di RJ in un mezzo in espansione

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = -\omega^2 \delta \quad (67)$$

Equazione di RJ classica. Impongo:

- Univ. polvere : $c_s^2 k^2 \ll 4\pi G \rho_b$
- EdS: $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$, $4\pi G \rho_b = \frac{2}{3t^2}$

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} + \frac{2}{3t^2}\delta = 0 \quad (68)$$

La soluzione é del tipo $\delta \propto t^n$, sostituendo otteniamo l'equazione secolare che mi da i valori di $n = \frac{2}{3}, -1$, di cui ci interessa la soluzione crescente in quanto un EdS $\delta_+ \propto a \propto (1+z)^{-1}$ qui la crescita della perturbazione é algebrica e non esponenziale come nella RJ classica. Per avere piccole perturbazioni si deve considerare un grande z, ci si aspetterebbe che le anisotropie della S³⁹ del CMB siano comparabili con il contrasto di densitá dei super ammassi in quanto risalenti allo stesso z circa.

- $\delta_{SA}(z \sim 1000) \sim 10^{-3}$
- $\delta_{CMB} \sim 10^{-5}$

I dati osservativi differiscono di alcuni ordini di grandezza. Se partiamo dalle anisotropie della CMB le faccio evolvere a $z \sim 1000$ troverei $\delta_{SA} \sim 10^{-2}$ che é piú grande di quello che calcolo, ho due ipotetiche soluzioni:

- le perturbazioni di densitá si sono evolute piú **rapidamente** di quello che calcoliamo
- Oppure le perturbazioni del CMB **non sono connesse** con quelle della materia

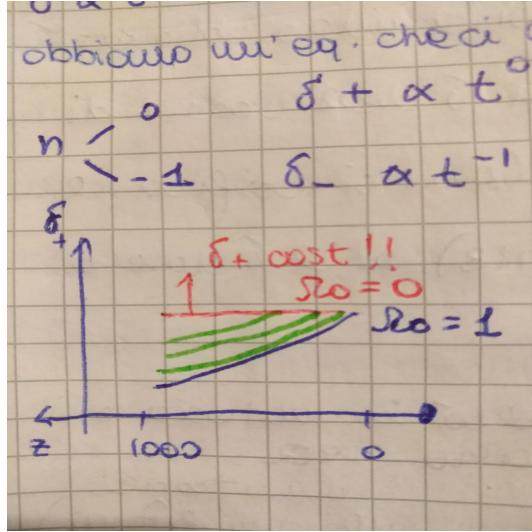


Figure 12: RJ in universo in espansione.

Introducendo un ulteriore ipotesi, $\Omega_0 = 0 \Rightarrow \rho_b = 0$ (**Universo di Milne**) si ha:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} = 0 \quad (69)$$

La soluzione crescente $\delta_+ \propto k$ è consistente, in quanto non essendoci materia la perturbazione non cresce; la soluzione negativa $\delta_- \propto t^{-1}$ fa disperdere la perturbazione. In definitiva le anisotropie del CMB sono connesse con le perturbazioni di densità della materia ordinaria dal disaccoppiamento. Tuttavia la materia oscura costituisce 80% della materia dell'universo e dunque domina gravitazionalmente sulla materia ordinaria, le sue perturbazioni di densità sono $\delta_{DM} \sim 10^{-3}$ non sono connesse alle anisotropie del CMB, in quanto disaccoppiate. La GR e l'instabilità di Jeans sono valide e spiegano la formazione di strutture cosmiche a patto che esista una nuova forma di materia non barionica. La formazione di strutture cosmiche e l'abbondanza di elementi leggeri implicano la presenza di DM indipendentemente.

3.2.3 Soluzione generale per instabilità di RJ

Patendo dall'equazione 67 e risolvendola nel caso più generale possibile:

- $0 < \Omega < 1$
- $w = 0$ (Polvere)
- $c_s^2 k^2 \ll 4\pi G \rho_b$ con $\rho_b \propto a^{-3}$

$$\delta_+ = \frac{5}{2}\Omega_0 \frac{\dot{a}}{a} \int_0^a \frac{da'}{(\dot{a}')^3} = D(a) \quad (70)$$

Si def. $D(a)$ **fattore di crescita**⁴⁰. Questo integrale è analogo a quello che ho trovato nel caso della risoluzione all'eq. di Friedmann:

$$\begin{cases} t = \frac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}} (\sinh \theta - \theta) \\ a = \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)} (\cosh \theta - 1) \end{cases} \quad (71)$$

³⁹Brillanza superficiale.

⁴⁰Come crescono le perturbazioni in teoria lineare.

Il fattore di scala in un universo in espansione cresce con una potenza del tempo e non in maniera esponenziale, dipende da $\Omega(a)$ e $\Omega_\Lambda(a)$; questo é normalizzato all'universo di EdS in quanto $D(a) = 1$.

$$D(a) = \frac{\frac{5}{2}\Omega(a)}{\Omega^{\frac{4}{7}} - \Omega_\Lambda(a) + (1 + \frac{\Omega(a)}{2})(1 + \frac{\Omega_\Lambda(a)}{2})} \quad (72)$$

Un'altra funzione per il fattore di crescita é:

$$f(a) = \frac{d \ln D(a)}{d \ln(a)} \simeq \Omega(a)^{0.6} + \frac{\Omega_{\Lambda 0}(a)}{70} \left\{ 1 + \frac{\Omega(a)}{2} \right\} \quad (73)$$

Si nota che il termine Ω_Λ non é da trascurare in quanto ha un ruolo nella formazione di strutture: se $\Lambda > 0$ allora é un termine **repulsivo** (negativo), che va aggiungersi al fattore di **attrito di Hubble**, questo comporta che le strutture cosmiche tendano a **congelarsi** prima rispetto ad un universo con $\Lambda < 0$.

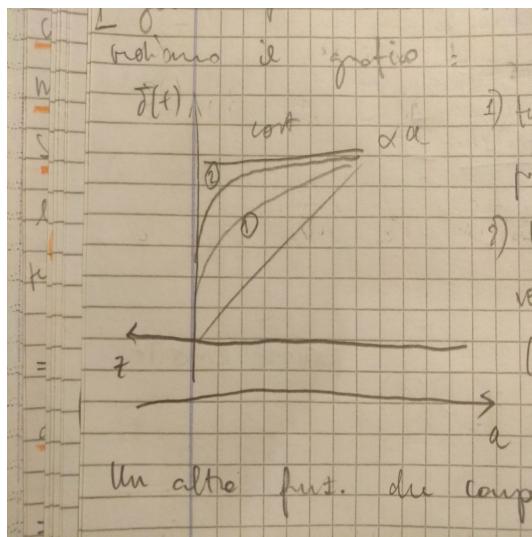


Figure 13: Perturbazioni di densitá.

1. Le perturbazioni da piccole crescono progressivamente fino a congelarsi
2. In un universo con $\Lambda \neq 0$ succede la stessa cosa ma piú rapidamente

Osserviamo che $\Omega_\Lambda(a)$ é trascurabile rispetto a $\Omega(a)$

3.2.4 Fluido relativistico

Studiamo l'evoluzione delle perturbazioni di densitá per un fluido relativistico. Si aggiunge una sorgente di energia legata alla $P = \frac{1}{3}\rho c^2$, dunque sostituiamo $\rho \rightarrow \rho + \frac{3P}{c^2}$. Siccome l'equazione cambia abbiamo che $\lambda_J = c_s(\frac{3\pi}{8G\rho_b})^{\frac{1}{2}}$ che porta ad uno sviluppo delle perturbazioni differente. Se $z \rightarrow \infty$ allora $\Omega \sim 0$ siamo in EdS⁴¹ con $\delta_+ \propto t$ e $\delta_- \propto t^{-1}$:

- $t < t_{eq}$ (U. di radiaz.): $a \propto t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \delta_+ \propto a^2$
- $t > t_{eq}$ (U. di polvere): $a \propto t^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \delta_+ \propto a$

⁴¹L'universo primordiale, dominato da radiazione, é ben approssimabile da EdS.

3.2.5 Evoluzione delle velocit peculiari

Le perturbazioni del campo di densit sono accoppiate al campo di velocit. Considerando l'equazione di Eulero con incognita la velocit comovente (in U. polvere) posso dividerla in componenti rispetto al potenziale. **Moti Rotazionali:** $\dot{\mathbf{u}}_{\perp} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u}_{\perp} = 0 \Rightarrow u_{\perp} \propto a^{-2}$ quindi $v_{1\perp} = au_{\perp} \propto a^{-1}$. Le componenti rotazionali delle perturbazioni di densit vengono spazzate via a causa dello **smorzamento** che subisce la componente rotazionale del campo di velocit con l'espansione dell'universo. Le strutture cosmiche hanno per un momento angolare che non  legato alle condizioni iniziali della velocit, bens generato dalle interazioni mareali durante l'evoluzione delle strutture stesse. Gli effetti del momento angolare iniziale  trascurabile in teoria lineare. **Moti Potenziali:** $\dot{\mathbf{u}}_{\parallel} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u}_{\parallel} = -\frac{1}{a^2}\nabla\phi_1$. Sviluppo in onde piane:

$$\begin{cases} \phi_1 \propto \exp\{i(k_c x - \omega t)\} \\ u_1 \parallel \nabla\phi_1 \propto ik_c \exp\{i(k_c x - \omega t)\} \end{cases} \quad (74)$$

Considerando EdSin U. di polvere, sappiamo che $\delta \propto t^{\frac{2}{3}}$ dunque $v_{1\parallel} = \frac{\dot{\delta}}{k_c} \propto \frac{t^{\frac{1}{3}}}{k_c} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{k_c}$.

Pert. Densit: cresce qualora la perturbazione  sovradensa.

Campo di Velocit: le velocit peculiari ($v_{1\parallel} \propto \frac{1}{k_c}$) non possono essere studiate localmente in quanto ho contributi derivanti dalle perturbazioni di densit su larga scala. Le velocit peculiari dipendono dalla scala spaziale delle perturbazioni che le generano ($\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$).

Se vogliamo giustificare la formazione di strutture cosmiche per instabilit gravitazionale nel framework della GR troviamo che l'evoluzione di queste in un universo in espansione  lenta rispetto ad un universo statico.

3.2.6 Stima della densit della velocit peculiare

Metodo 1:

$$\begin{cases} |v_{1\parallel}| = \frac{a\dot{\delta}}{k_c} \\ \delta(a, \mathbf{x}) = D(a)\delta_i(\mathbf{x}) \\ f(a) \simeq \Omega^{0.6} \end{cases} \quad (75)$$

Da cui facendo le dovute sostituzioni, e considerando larga scala ($k_c \sim r$), ottengo la velocit propria che coincide con la velocit peculiare comovente $|v_{1\parallel}(t_0)| = rH_0\Omega_0^{0.6}\delta_0$. Ipotizzando che la massa  tutta contenuta nelle galassie δ lo stimo dalle galassie essere $\delta_g \simeq b\delta$ dove il bias  $b = b(t, z)$ che indica il rapporto tra il contrasto di densit in galassie e quello totale.

$$|v_{1\parallel}(t_0)| = rH_0\frac{\Omega_0^{0.6}}{b}\delta_{g0} \quad (76)$$

- δ_{g0} lo misuro dalla distrib. di materia nello spazio
- $v_{1\parallel}(t_0) \equiv v_{pec}$ allora da Hubble $v_{1\parallel}(t_0) = cz - H_0d$ dalla TF e $D_n - \sigma_0$ prendo d
- b dalle anisotropie del CMB

Ho un errore anche del 100%.

Metodo 2:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = -\nabla_r \mathbf{v}_1 \\ \dot{\delta} = -\delta f(a)H(a) \end{cases} \quad (77)$$

Ricavo δ la inserisco nell'equazione di Poisson da cui esplicitando la velocit si ha $\mathbf{v}_{1\parallel} = -\frac{2}{3}f(a)\frac{\nabla_r\phi_1}{H(a)\Omega(a)}$ e infine $\Omega^{-1} = \frac{3H^2}{8\pi G\rho_b}$.

3.2.7 Evoluzione delle perturbazioni di densità adiabatiche

Consideriamo la visione semplificata che i cosmologi avevano negli anni 70 in cui le galassie si formano per evoluzione delle perturbazioni di densità di materia ordinaria e vanno a sormare i Super Ammassi, le strutture più grandi conosciute al tempo. Studio l'evoluzione delle perturbazioni di densità *adiabatiche* (quelle che ho visto fino ad ora) in un universo in espansione costituito da materia ordinaria.

Scale di spazio: abbiamo *l'orizzonte cosmologico* r_H (tutto ciò che è dentro ha avuto tempo di comunicare con la coordinata in cui mi trovo) ; *scala di perturbazione* λ_J . La perturbazione evolve se $\lambda < r_H \wedge \lambda > \lambda_J$.

Scale di massa: $M_J \propto \rho_B \lambda_J^3$ e $M_H \propto \rho_B r_H^3$.

$t < t_{eq}$ (U. radiazione):

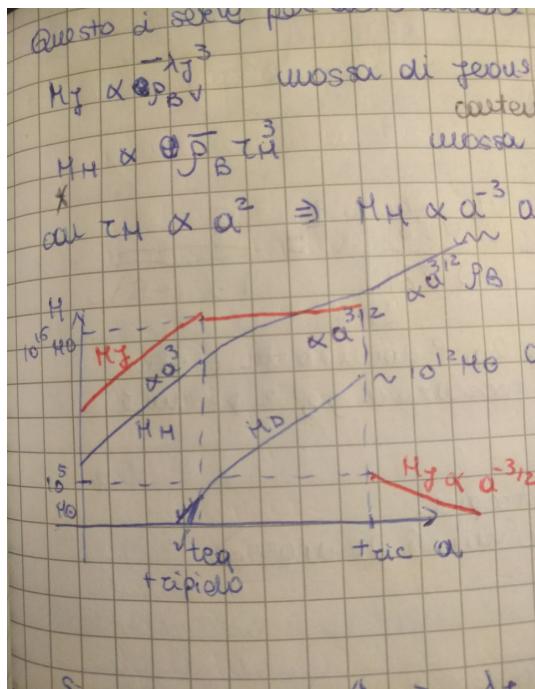


Figure 14: Evoluzione masse (Diaferio).

- $r_H \propto a^2$ e $\lambda_J \propto a^2$
- $\rho_{rad} \propto a^{-4}$ e $\rho_B \propto a^{-3}$
- $M_J \propto a^3$ e $M_H \propto a^3$

Il rapporto $\frac{M_J}{M_H} \simeq 26$ ci dice che M_J sovrasta M_H però hanno la stessa dipendenza da a . Le perturbazioni che hanno $\lambda > r_H$, poiché $M_J > M_H$, crescono con $\delta \propto t$. Queste sono fuori dall'orizzonte cosmologico, quindi dovrei trattarle usando la GR, ma all'ordine zero possiamo pensare che queste siano **congelate** alle condizioni iniziali. $t_{eq} < t < t_{ric}$ (U. materia):

- $M_J \propto 10^{16} M_\odot$ e $M_H \propto a^{\frac{3}{2}}$

Le perturbazioni entrano nell'orizzonte cosmologico nella fase "matter dominant". La $M_J \sim 10^{15} M_\odot$ è costante poiché è proporzionale alla densità di radiazione e a quella di materia in una certa potenza tale che si bilancino (funzione di c_s che dipende da ρ). Le perturbazioni a

$M < M_J$ sono in eq. stabile, in oscillano tra collasso grav. e P_{rad} , diventano onde sonore che nel tempo si smorzano a causa della perdita di energia adiabatica nell'esp. dell'U.; mentre le pert. con $M > M_J$ continuano a crescere con $\delta \propto a$.

$t > t_{ric}$:

- $M_J \propto a^{-\frac{3}{2}}$

Dopo la ricombinazione M_J decresce col fattore di scala. Quando viene a mancare la P_{rad} (che manteneva M_J costante) a causa del disaccoppiamento (che supongo essere istantaneo) $M_J = 10^5 M_\odot$, successivamente continua a decrescere come potenza di a. Quindi in questa fase le perturbazioni che prima erano stabili diventa instabili, le perturbazioni che possono collassare diventan $10^5 M_\odot$ piú grandi.

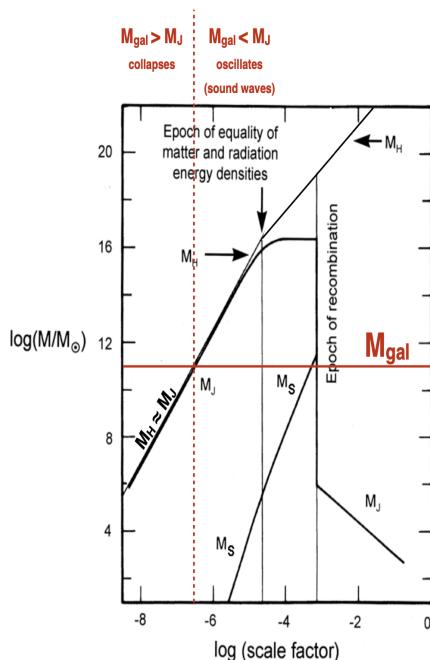


Figure 15: Evoluzione della massa di Jeans M_J , della massa racchiusa entro lorizzonte M_H e della massa di Silk M_S in funzione del fattore di scala a . La massa di una perturbazione galattica, dell'ordine di $10^{11} M_\odot$ é rappresentata da una retta orizzontale in quel diagramma. La riga verticale tratteggiata separa il caso in cui la perturbazione collassa ($M_{gal} > M_J$) o oscilla generando onde sonore ($M_{gal} < M_J$). Si noti come le scale non corrispondano esattamente ai valori citati nel testo per cui la figura é da considerarsi come uno schema qualitativo.

3.2.8 Processi dissipativi nell'epoca pre-ricombinazione: Silk damping delle perturbazioni adiabatiche

Per concludere l'evoluzione delle perturbazioni adiabatiche dobbiamo considerare i processi dissipativi che avvengono nell'epoca pre-ricombinazione. Se δ è su scale $\lambda < \lambda_J = 2R_H$ allora siamo in presenza di onde sonore adiabatiche dove la forza di richiamo per ogni oscillazione é data dalla pressione di radiazione; se i fotoni diffondono fuori dalla perturbazione δ allora le oscillazioni vengono smorzate poiché viene a mancare la forza di richiamo. Questo fenomeno di smorzamento prende il nome di **Silk Damping**. Considerando la teoria cinetica si ottiene che la lunghezza di diffusione dei fotoni al tempo t cioè il raggio massimo della perturbazione da

cui sono in grado di uscire $r_D \propto \sqrt{lct}$ ha una massa di **Silk** $M_D \propto r_D^3 \bar{\rho}_B = a^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}$ da valutare nellepoca pre-ricombinazione:

$$\begin{cases} t < t_{eq} & M_D \propto a^{\frac{9}{2}} \\ t > t_{eq} & M_D \propto a^{\frac{15}{4}} \end{cases} \quad (78)$$

La massa di Silk rappresenta la massa massima delle perturbazioni che vengono smorzate a seguito del processo di diffusione dei fotoni; lo smorzamento interessa tutte perturbazioni stabili ovvero che oscillano come onde sonore visto che si ha sempre $M_D < M_J$. (Dal momento in cui la massa della perturbazione diventa $M_{gal} < M_D$ la perturbazione viene smorzata e la sua ampiezza va rapidamente a 0.)

Nel momento della ricombinazione il valore di $M_J \sim 10^{16} M_\odot$ crolla istantaneamente⁴² a $M_J \sim 10^5 M_\odot$ continuando poi a decrescere con $\propto a^{-\frac{3}{2}}$. Dopo la ricombinazione $M_D \sim 10^{12} M_\odot$, Questo implica che tutte le perturbazioni di tutte le masse, tranne quelle delle galassie piú massicce, sono state smorzate all'epoca della ricombinazione. Solo le perturbazioni su scale $M > M_{D,rec}$ sopravvivono dopo la ricombinazione. Le strutture su scale piú piccole devono essersi necessariamente formate per frammentazione di queste grandi perturbazioni dopo la ricombinazione. Nel momento della ricombinazione il valore di $M_J \sim 10^{16} M_\odot$ crolla istantaneamente⁴³ a $M_J \sim 10^5 M_\odot$ continuando poi a decrescere con $\propto a^{-\frac{3}{2}}$.

3.2.9 Evoluzione delle perturbazioni adiabatiche in un universo di DM

Consideriamo un fluido di materia oscura non collisionale a $t_{infl} < t < t_{eq}$, in quanto le perturbazioni di materia oscura si disaccoppiano prima di quelle di materia ordinaria. In questo caso abbiamo **smorzamento di Landau**, le velocitá peculiari relativistiche⁴⁴ delle particelle sono tali da vincere la velocitá di fuga dalla buca di potenziale ($v_{pec} > v_{fuga}$), dunque a certe scale (**free streaming**) la perturbazione viene spazzata via.

$$\begin{cases} r_{fs} = \int_0^{t_{nr}} \frac{v(t)}{a(t)} dt + \int_{t_{nr}}^{t_{eq}} \frac{v(t)}{a(t)} dt \\ M_{fs} \propto r_{fs}^3 \bar{\rho}_\nu \end{cases} \quad (79)$$

Stiamo considerando i neutrini come DM. Spezzo l'integrale in quanto abbiamo un periodo il periodo in cui sono relativistici e quello in cui sono non relativistici. Sotituendo $v \propto t^{-\frac{1}{2}}$ e $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ approssimando $t_{eq} \sim t_{nr}$ ottengo $M_{fs} \sim 10^{14} - 10^{15} M_\odot$. La materia oscura, sotto queste ipotesi, domina l'evoluzione delle pert. di densitá. Tutte le perturbazioni a $M < M_{fs}$ vengono smorzate (spazzate via) appena queste entrano nell'orizzonte, la distribuzione di materia é sostanzialmente omogenea.

In questo scenario le strutture si formano per frammentazione di perturbazioni piú grandi **Top-Down**. Le osservazioni sono però in accordo con uno scenario **Bottom-Up** in cui le strutture si formano per aggregazione di perturbazioni. In sostanza i neutrini non sono la componente domine della DM, in quanto non influenzano la dinamica delle strutture a larga scala⁴⁵. Siccome $m_\nu \neq 0$ questi comunque costituiscono la DM, poniamo un limite alla massa del neutrino $\Omega_\nu < \Omega_{lim}$.

3.2.10 Fluttuazioni barioniche in presenza di DM

Immaginiamo di avere due fluidi, uno per la materia ordinaria **barionica** ed uno per la **materia oscura**. L'evoluzione delle perturbazioni dei due fluidi sarà descritta da $\ddot{\delta}_i + 2\dot{a}\dot{\delta}_i =$

⁴²Se consideriamo ricombinazione istantanea.

⁴³Se consideriamo ricombinazione istantanea.

⁴⁴Rispetto ad un sistema di riferimento comovente, si comportano come un fluido di fotoni.

⁴⁵Infatti produrrebbero delle strutture diverse da quello che noi conosciamo dalle osservazioni.

$4\pi G\rho_i\delta_i + 4\pi G\rho_j\delta_j$, in cui a sinistra troviamo i termini si sorgente del campo gravitazionale. Dal momento però che la materia oscura è dominante rispetto a quella barionica ($\rho_D \gg \rho_B$) il nostro sistema di equazioni **accoppiate** diventa:

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_B + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_B = 4\pi G\rho_D\delta_D \\ \ddot{\delta}_D + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_D = 4\pi G\rho_D\delta_D \end{cases} \quad (80)$$

Della seconda equaz. abbiamo già la soluzione. Concentriamoci sulla prima ipotizziamo EdS ($\Omega_0 = 1$, $\rho_D = \rho_C = \frac{3H^2}{8\pi G}$):

$$\begin{cases} \delta_D \propto a \\ a \propto t^{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad (81)$$

quindi la soluzione è $\delta_B = B(a - a_1)$.

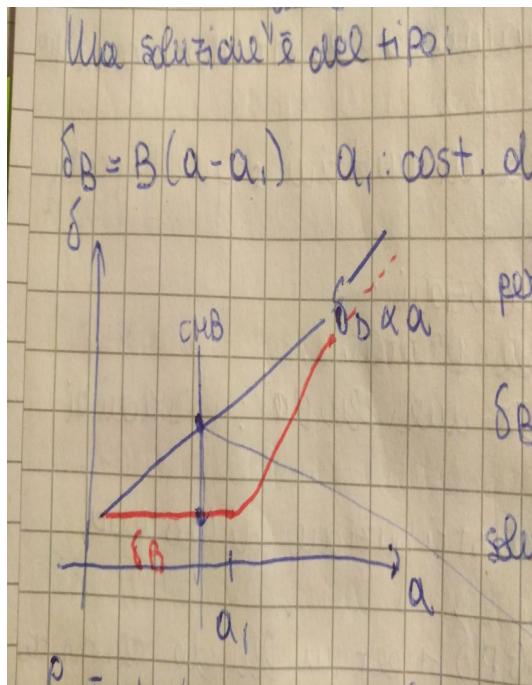


Figure 16: Andamento delle perturbazioni di materia barionica ed esotica a confronto.

- $a < a_1$ le perturbazioni δ_B non evolvono.
- $a >> a_1$ le perturbazioni δ_B evolvono come δ_D fino a ricongiungersi

Così risolviamo il problema del CMB, le perturbazioni di materia barionica possono essere molto più piccole delle perturbazioni di materia oscura.

Considerando perturbazioni di $M \sim 10^{15} - 10^{16} M_\odot$

- $t < t_{eq}$: materia oscura e barionica sono **accoppiate**, dunque le perturbazioni crescono allo stesso modo.
- $t_{eq} < t < t_{ric}$: ho il **disaccoppiamento**, quindi δ_D inizia a crescere. La materia barionica è ancora accoppiata ai fotoni ed oscilla poiché ancora al di sotto di M_J .
- $t > t_{ric}$: avviene il disaccoppiamento tra barioni e fotoni, mancando la forza di richiamo data da P_{rad} la M_J crolla e le perturbazioni di materia barionica collassano. Trovandosi in universo con perturbazioni di DM evolute, le perturbazioni barioniche collassano per autogravità ed a causa della DM, fino a tendere asintoticamente al suo andamento.

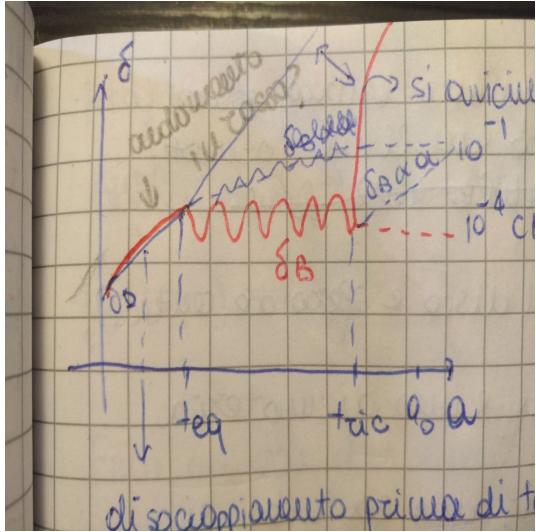


Figure 17: Andamento delle perturbazioni di materia barionica ed esotica in funzione di t .

Uno scenario con la DM é in accordo con i dati osservativi, senza avremmo dei contrasti di densitá di materia ordinaria molto piú piccoli a queste scale (10^2 vs 10^{-1}).

Non considerando l'argomento degli **elementi leggeri** che proverebbero la necessitá di una materia oscura non barionica⁴⁶, ipotizziamo una materia oscura barionica **MACHOs**⁴⁷. Si teorizzarono essere micro BH ($M \sim 1M_{\odot}$) formatisi nell'universo primordiale a $t < t_{eq}$, disaccoppiati da fotoni e dal resto della materia barionica esistente. In quanto oggetti massicci non luminosi dovrebbero essere responsabili dell'effetto di **lente gravitazionale**⁴⁸. Negli anni '90 si avvió una campagna osservativa di ricerca di questi oggetti nella nostra galassia, tuttavia non vennero osservati. La DM deve essere non barionica e **diffusa**.

3.3 Modi per quantificare la struttura su larga scala: spettro delle perturbazioni

Usando un approccio inverso rispetto al precedente, consideriamo la perturbazione di densitá funzione dello spazio e fissa nel tempo. Notiamo che su un volume abbastanza grande $\delta(\mathbf{x})$ diventa periodico e quindi posso svilupparlo in **serie di Fourier**.

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{x}\} \quad (82)$$

Integrando sul volume $\int \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{k} = 0$ poiché l'universo a larga scala é omogeneo e isotropo. Dalla teoria sulla TF abbiamo che $\langle \sigma^2 \rangle = \sigma^2 = \sum_{\mathbf{k}} |\delta_{\mathbf{k}}|^2$ in versione integrale $\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\delta_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k}$ fornisce l'ordine di grandezza delle perturbazioni; $|\delta_{\mathbf{k}}|^2 = P(\mathbf{k})$ é definito **Spettro di Potenza** mi da l'ampiezza delle componenti corrispondenti ai diversi vettori d'onda, e quindi mi dice cosa domina nella serie. Anche se noi abbiamo visto che c'è dipendenza anche da t e dunque $\delta(t) = D(t)\delta_i$ e dunque $P(\mathbf{k}, t) = D(t)P_i(\mathbf{k})$, ipotizzando campo di densitá iniziale gaussiano $P(\delta_i)d\delta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\delta_i^2}{2\sigma^2}\right\} d\delta_i$. La perturbazione di densitá iniziale δ_i é una variabile aleatoria gaussiana, quindi una fluttuazione attorno al valor medio. La gaussiana é una densitá di probabilitá che ha due momenti non nulli: il valor medio che é nullo in caso universo omogeneo e isotropo, e la varianza che prendiamo come riferimento. Questo vale solo se $\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \ll 1$

⁴⁶Come sottolinea il grafico che mostra che le due forme di materia si disaccoppiano.

⁴⁷Massive Astrophysical Halo Object: BH, NS, BD.

⁴⁸Deformazione immagine; aumento della luminositá (fotoni convergono) in tutte le frequenze.

ma deve valere per $\bar{\rho}$ abbastanza grande da calcolare la massa dell'universo e abbastanza piccolo per identificare $\rho(\mathbf{x})$ quindi devo definire una scala $\delta(\mathbf{x}, R)$.

$$\begin{cases} \sigma(R)^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 w(kR)^2 d\mathbf{k} \\ w(kR) = 3 \frac{\sin kR - \cos kR}{(kR)^3} \end{cases} \quad (83)$$

Definisco $w(kR)$ funzione filtro media l'informazione sulla scala a cui mi trovo: seleziona una sfera di raggio R su cui considerare il contrasto.

3.3.1 Spettro instabile delle perturbazioni

Considerando un **filtro gaussiano** e uno **spettro di potenza** per $P(k)$:

$$\begin{cases} \sigma(R)^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 w(kR)^2 d\mathbf{k} \\ w_G(kR) = \exp\left\{2 \frac{k^2 R^2}{2}\right\} \\ P(k) = Ak^n \end{cases} \quad (84)$$

Ottengo $\sigma^2(R) = \frac{A}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) R^{-(n+3)}$: la varianza decresce con la scala, quando $R \gg 1$ l'universo è omogeneo e dunque $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma \rightarrow 0$.

Applicazione: considerando un volume in cui vengono distribuite particelle massive randomicamente, la massa totale $M = mN$. Le fluttuazioni di particelle nei sotto-volumi di quello principale avranno distribuzione **Poissoniana** quindi $\sigma \propto N^{\frac{1}{2}} \propto M^{-\frac{1}{2}}$ siccome m è la stessa. Il raggio e la massa sono legati dalla relazione $R \propto M^{\frac{1}{3}}$ che sostituendo nella legge della varianza in 84 mi alla relazione sugli esponenti $n = 0$. Questo mi da uno spettro di potenza **costante**, cioè **rumore bianco**: tutti i numeri d'onda contribuiscono allo stesso modo alla costruzione del campo di densità iniziale.

3.3.2 Spettro di potenza di Harrison-Zel'dovich

Le fluttuazioni quantistiche nel periodo pre-inflattivo causano perturbazioni nel campo densità che nel periodo post-inflattivo sarà perturbato secondo lo spettro di Harrison-Zel'dovich.

Immagino di essere $t < t_{eq}$ (radiation dominant) a scale cosmiche, quando le perturbazioni di densità varcano l'orizzonte cosmologico:

$$\begin{cases} M_H \propto a^3 \\ \sigma \propto a^2 M_H^{-\frac{n+3}{6}} \end{cases} \quad (85)$$

Quindi otteniamo la seguente relazione di proporzionalità $\sigma \propto M_H^{\frac{1-n}{6}}$.

- $n < 1$: per $r \gg 1$ allora $\sigma \rightarrow \infty$ diverge. **Problema:** è in contrasto con un univ. **omogeneo** ed **isotropo** su larga scala. Si sarebbero creati i micro BH, ciò non succede tuttavia grazie alla radiazione di Hawking, che ritarda la nucleosintesi cosmologica.
- $n > 1$: per $M_H \rightarrow 0$ allora $\sigma \rightarrow \infty$ diverge. **Problema:** mano a mano che entrano le perturbazioni la varianza dovrebbe decresce.
- $n = 1$: Harrison e Zel'dovich deducono che espandendosi l'universo fa entrare perturbazioni sempre con la stessa varianza. Ciò produce uno spettro lineare $P(k) = Ak$.

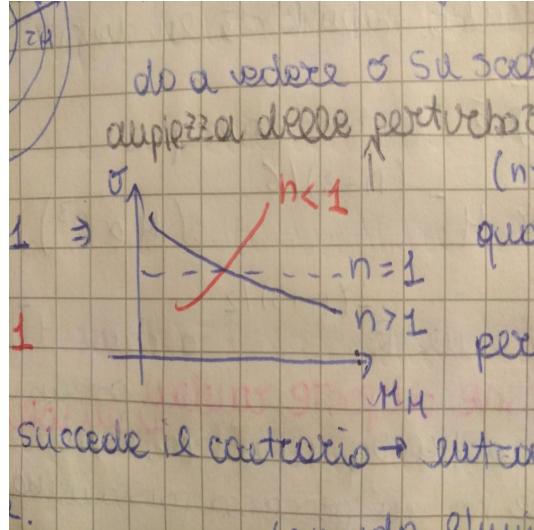


Figure 18: Andamento della varianza in funzione di M_H .

Potremmo descrivere i problemi della divergenza di σ attraverso il potenziale gravitazionale, dal momento che é correlato alle pert. di densitá.

$$\begin{cases} \delta\phi \sim \frac{\delta M}{R} \propto k\delta M \\ \sigma \propto \frac{\delta M}{M} \propto M^{-\frac{n+3}{6}} \end{cases} \quad (86)$$

Ho la relazione $\delta\phi \propto k^{\frac{n-1}{2}}$ (k é la scala):

- $n < 1$: diverge a piccoli k .
- $n > 1$: diverge a grandi k .
- $n = 1$: costante.

Quindi $n = 1$, $n = 0.97$ per essere precisi, diventa una predizione del modello inflattivo. L'inflazione risolve i 3 problemi del modello HBB, ma avendo espanso su scale cosmiche le fluttuazioni su scale quantistiche dell'universo primordiale si crea un campo di densitá perturbato con 2 peculiaritá:

1. I contrasti di densitá δ sono delle variabili aleatorie gaussiane (ci basta σ per descrivere il campo di densitá).
2. Ha lo spettro di potenza di HZ.

Osservo che le perturbazioni su scala maggiore dell'orizzonte c. ($r > r_H$) corrispondono a perturbazioni del potenziale g. ϕ che sono congelate nella metrica stessa.

3.3.3 Evoluzione delle perturbazioni adiabatiche nei modelli HDM e CDM

Come evolve lo spettro di potenza HZ per le perturbazioni di densitá ($P(k) = |\delta_k|^2 \propto k$) all'epoca dell'equivalenza t_{eq} , quando inizia ad agire il collasso per instabilitá gravitazionale? Per un fluido non collisionale di materia oscura ho la scala di lunghezza FS che regola i processi, e dipende dalla velocitá peculiare delle particelle: cioé quando diventano relativistiche. Quando le perturbazioni entrano nell'orizzonte, in un universo in espansione, se $M < M_{FS}$ allora possono crescere per instabilitá gravitazionale. Lo spettro di $P(k)$ sarà cambiato soprattutto su piccole scale, causa della lunghezza d'onda di FS al tempo dell'equivalenza: $\lambda_{eq} = \frac{ct_{eq}}{a_{eq}} = 13(\Omega_0 h^{-2})^{-1} Mpc$. In base al valore di $M_{FS} \propto r_{FS}^3$ ho una materia oscura diversa:

- $r_{FS} \sim \lambda_{eq} (= 100 Mpc) \Rightarrow$ HDM (neutrini): quindi al di sotto di questa scala (ammassi di galassie $M_{FS} \sim 10^{14} - 10^{15} M_\odot$) le perturbazioni vengono spazzate via, perché le strutture su piccola scala si formano per frammentazione delle perturbazioni su larga scala. Lo spettro si smorza su piccola scala ($k >> 1$).
- $r_{FS} \ll \lambda_{eq} (= 1 Mpc) \Rightarrow$ CDM: la potenza delle perturbazioni decrescono a scale ancora più piccole, le particelle diventano non relativistiche molto presto. Il modello non essendo influenzato da r_{FS} permette la crescita di perturbazioni su scale più piccole, permettendo una gerarchia **bottom-up**.
- $r_{FS} \sim \lambda_{eq} (= 1 Mpc) \Rightarrow$ WDM: cade tra i due estremi.

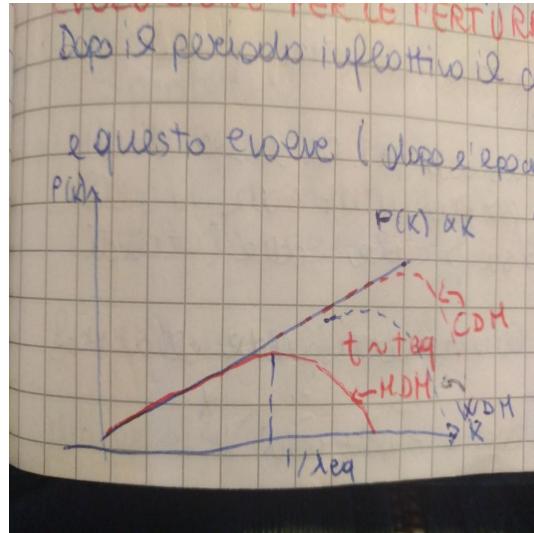


Figure 19: Evoluzione della potenza in funzione della scala per modelli di DM a confronto.

Ricapitolando l'ampiezza delle perturbazioni decrescono più rapidamente alle grandi scale (per tutti i modelli di DM). Secondo la gerarchia **bottom-up** le perturbazioni crescono alle piccole scale, in cui **viralizzano** (dynamical friction in cui lo scambio di energia avviene per interazione gravitazionale) nella fase non lineare evolvono verso configurazioni di equilibrio in cui le masse hanno la stessa distribuzione di velocità. Successivamente comincia il processo di **merging** influenzato dalle perturbazioni su larga scala.

Usando L'equazione cinetica di Boltzmann per un fluido di DM in un universo in espansione (nello spazio delle fasi) deriviamo lo spettro di potenza dell'epoca dell'equivalenza essere:

$$\begin{cases} P_{eq}(k) = T^2(k)P_i(k) \\ T_{CDM} = \left\{ 1 + \left[\frac{ak}{\Gamma} + \left(\frac{bk}{\Gamma} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{ck}{\Gamma} \right)^2 \right]^{\nu} \right\}^{-\frac{1}{\nu}} \end{cases} \quad (87)$$

Con $T^2(k)$ **funzione di trasferimento**, dipendente dal modello di DM che scegliamo quindi da r_{FS} , e $\Gamma = \Omega_0 h$ **parametro di forma**.

Dal campo di densità oggi abbiamo informazioni sul tipo di DM (se misuro $P \rightarrow T \rightarrow \Omega$). Quindi l'universo su larga scala ci da un sacco di informazioni sulla materia presente nell'universo. Conosciamo la relazione $P_0(t, k) = D^2(t)P_{eq}(k, t' < t)$, ma abbiamo 3 problemi:

1. Vale solo su scale lineari cioè dove $\delta \ll 1$ ovvero su larga scala ($> 10 Mpc$).
2. $D(t)$ contiene Ω_0 quindi devo conoscere il modello cosmologico.
3. Ho bisogno di conoscere la distribuzione su larga scala dell'universo, attraverso cataloghi di galassie (time consuming).

3.3.4 Crescita non lineare delle perturbazioni di densità

Zel'dovich propone un approccio analitico per studiare le perturbazioni di densità:

- 1 approx. di Z. ($\delta \ll 1$): teoria lineare
- 2 approx. di Z. ($\delta \gg 1$): teoria non lineare, siamo su scale galattiche a $\delta \sim 10^6$ ⁴⁹.

Consideriamo l'evoluzione lineare delle perturbazioni di densità:

$$\begin{cases} \delta(t) = D(t)\delta_i \\ \dot{\mathbf{u}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = -\frac{1}{a^2}\nabla_x\phi_1 \end{cases} \quad (88)$$

Inserendo la velocità peculiare $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$ e tenendo conto dell'equazione di **Poisson** (riespressa considerando la conservazione del tensore E-I) $\nabla_x^2\phi_1 = \nabla_x^2\phi_0 \frac{D}{a}$ integrando una volta si ottiene:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{a} \left[\int \frac{D}{a} dt \right] \nabla_x\phi_0 + \mathbf{v}_0 \quad (89)$$

Come condizione iniziale sulla velocità consideriamo $v_0 = 0$. Si fa notare che l'approssimazione sta nel considerare la perturbazione del potenziale costante nel tempo. Introducendo il tempo conforme $d\tau = \frac{dt}{a}$ si risale alle coordinate:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \left[\int \frac{d\tau}{a} \int D d\tau \right] \nabla_x\phi_0 \quad (90)$$

Rimaneggiando l'equazione di evoluzione delle perturbazioni notiamo:

$$\int \frac{d\tau}{a} \int D d\tau = \frac{\delta}{4\pi G\rho a^3 \delta_i} \quad (91)$$

In fine abbiamo il set di equazioni definitivo⁵⁰:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \frac{D(\tau)}{4\pi G\rho a^3} \nabla_x\phi_0 \\ \mathbf{v} = -\frac{\frac{dD}{d\tau}}{4\pi G\rho a^3} \nabla_x\phi_0 \end{cases} \quad (92)$$

Quindi data una perturbazione non sferica, immaginando che il campo di accelerazione sia costante nel tempo ($\nabla_x\phi_0 \sim \text{cost}$)⁵¹

- le particelle si muoveranno lungo rette $v \propto \nabla\phi$ verso il contrasto di densità più alto (direzione e velocità costante).
- Esistendo direzioni fissate ne avremo una che apporta materia più velocemente rispetto alle altre, quindi abbiamo una direzione di collasso preferenziale che porta alla formazione di un piano.
- Segue il fenomeno dello **shell crossing**, o più semplicemente attraversamento, ovvero quando le particelle attraversano il piano, la mappatura tra x_0 e x non è più univoca.

Quindi la 1 approx. di Z. non è più valida, siamo nel regime non lineare. Possiamo estendere tale approccio anche al caso non lineare a contrasti di densità molto elevati con risultati abbastanza accurati. Però ora focalizziamoci sull'approccio computazionale usato già a partire dagli anni '80.

⁴⁹Permette di costruire un ponte tra la P_{eq} e P_0 su scale non lineari.

⁵⁰Si nota la dipendenza dalle accelerazioni costanti iniziali.

⁵¹In realtà non è così perché cambiando le posizioni della materia cambia anche il potenziale.

3.3.5 Soluzioni numeriche

Le simulazioni numeriche costituiscono l'unico riscontro sperimentale di cui la cosmologia può avvalersi. Supponiamo ora di avere una scatola piena di un fluido continuo, che rappresenta certamente l'universo. Esistono due differenti approcci con cui studiare il sistema:

1. **Euleriano (pti. densitá)**: vale alle larghe scale ($100Mpc$) e consiste nel rappresentare il campo di densitá attraverso dei punti griglia. Con: bassa risoluzione poiché non vado al di sotto della maglia piú fine. Pro: basso tempo di calcolo.
2. **Lagrangiano (pti. massa)**: vale su piccole scale e consiste nel rappresentare la materia come punti massa. Con: alti tempi di calcolo poiché devo risolvere N equazioni differenziali ($t \sim N^2$). Pro: alta risoluzione nel caso di alta densitá di particelle. Queste si chiamano soluzioni a N -corpi.
3. **Ibridi**: vengono mescolati i due precedenti approcci per ottenere il migliore risultato.
4. **Tree code**: ho delle macro-particelle che aggiorno meno frequentemente.

Chiaramente ognuno dei metodi citati dipende dalle variabili di sistema: N particelle, volume, risoluzione spaziale...

3.3.6 Problemi numerici

Le condizioni iniziali su posizioni e velocitá costituiscono il vero problema delle simulazioni cosmologiche. Le posizioni iniziali devono descrivere il campo di densitá iniziale δ che espanso in serie di Fourier mi da i coefficienti $|\delta_k|^2 = P(k) = T^2(k)P_i(k)$ esprime l'entitá della fluttuazione media. Quindi scelgo le condizioni iniziali in modo che mi riproducano lo spettro CDM $P(k)$. Ricapitolando, la teoria lineare funziona da $z \sim 10^3 - 10^4$ fino a $z \sim 20$ in cui abbiamo i primi fenomeni di attraversamento. Allora facciamo partire da qui la simulazione scegliendo le condizioni iniziali secondo il metodo descritto poc'anzi, e facendo evolvere il sistema fino a $z \sim 0$, quindi avrò delle strutture che comparo con le osservazioni.

Prendiamo ad esempio le simulazioni **ibride**. Dobbiamo modellizzare 3 tipi di fluidi differenti:

- materia barionica stellare
- materia barionica gassosa
- materia non barionica (DM)

di cui ognuna ha delle proprietá fisiche differenti. Quella barionica é collisionale dunque:

- ha un termine di pressione
- si raffredda in modo **termico e radiativo**
- instabilitá gravitazionale: collassa formando degli oggetti stellari non collisionali

La materia oscura é non collisionale e interagisce solo **gravitazionalmente**, dunque non é soggetta a nessun tipo di "cooling", quindi non dissipa energia. Un'altra complicazione di cui si deve tenere conto é per giunta il processo di raffreddamento, che si sviluppa su scale atomiche. Quindi abbiamo un problema di **scala**, infatti passiamo da scale cosmiche a scale nanoscopiche. Le simulazioni a gravitá Newtoniana e CDM sono concordi con le osservazioni, abbiamo dunque delle strutture su larga scala comparabili. I neutrini dunque non potevano costituire la materi oscura dominante.

4 Cosmologia osservativa

4.1 Funzione di correlazione a due punti

Introduciamo questo strumento per confrontare la distribuzione di materia su larga scala con quella prevista dai modelli di DM. Definiamo $dP = \bar{n}^2(1 + \Sigma(r))dV_1dV_2$ come la probabilità di trovare una particella che definisce il volumetto dV_2 ad una distanza r rispetto alla particella che definisce il volumetto dV_2 . Il termine $dP \propto \bar{n}^2$ costituisce una Poissoniana, mentre il termine dipendente dalla scala $dP \propto (1 + \Sigma(r))$ indica la di quanto ci si scosta dalla distribuzione, qui compare la **Funzione di Correlazione** $\Sigma(r)$.

Cerco una correlazione tra δ e Σ partendo dall'approssimazione a **fluido continuo** di una distribuzione di punti un cui la densità è definita $\rho(\bar{x}) = \bar{\rho} + [1 + \delta(\bar{x})]$. Arriviamo ad esplicitare la funzione di correlazione come funzione di coovarianza delle δ come

$$\Sigma(\bar{r}) = \langle \delta(\bar{x})\delta(\bar{x} + \bar{r}) \rangle_{\bar{x}} \quad (93)$$

Sostituendo lo sviluppo di Fourier otteniamo che codesta funzione è la **TF dello spettro di Potenza**.

$$\begin{cases} \Sigma(\bar{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(\mathbf{k}) \exp\{-i\mathbf{k}\bar{r}\} d^3k \\ P(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Sigma(r) \exp\{i\mathbf{k}r\} d^3r \end{cases} \quad (94)$$

Come confronto la distribuzione di galassie su larga scala con i modelli?

Premesse:

- Ho la distribuzione di galassie oggi a $z = 0$, su scale non lineari.
- Il modello CDM ci da la distribuzione all'equivalenza.

Una via è quella delle simulazioni a N-corpi. Si prende la distribuzione di materia alla t_{eq} e la si fa evolvere fino a $z = 0$, tenendo conto quindi dell'evoluzione non lineare delle perturbazioni di densità. Dunque abbiamo uno spettro inflattivo, scegliendo un modello cosmologico, ad esempio CDM, questo ci fornirà una $T_{mod}(k)$ che ci permette di ottenere lo spettro all'equivalenza

$$\begin{cases} P_{eq}(k) = T_{mod}^2(k)P_i(k) \\ P_i(k) = Ak \end{cases} \quad (95)$$

Ora voglio ricavare $P(k, t)$, lo spettro in funzione del tempo, sapendo che $P = |\delta_k|^2 \propto \langle \delta^2 \rangle \propto D^2$:

$$P_{lin}(k, t > t_{eq}) = D^2(t)P_{eq}(k) \quad (96)$$

Attraverso la teoria lineare riesco ad arrivare fino a $z \sim 20$, ma anche a $z = 0$ se considero scale di $100 Mpc$. Lo spettro di potenza nel regime non lineare $P_{nl}(k)$ è legato a quello nel regime lineare attraverso una funzione analitica e si determina attraverso una simulazione ad N corpi, dipendente dal modello usato:

$$P_{nl}(k) = f[P_{lin}(k)] \quad (97)$$

Quindi la procedura è:

1. Trovo i punti attraverso la simulazione.
2. Misuro la funzione di correlazione.
3. TF ottenendo lo spettro di potenza a tutti i tempi.

Dallo spettro di potenza che simulo riesco a risalire alla funzione di correlazione facendo la TF.

$$P_{gal}(k) \longrightarrow \Sigma_{gal}(r) \quad (98)$$

Facendo un'analisi quantitativa, cioè confrontando lo spettro di potenza prodotto dalla simulazione con quello che osservo, riesco a validare il modello di CDM. Il modello CDM è in accordo con le osservazioni, le barre di errore lasciano spazio ad una possibile percentuale non nulla di WDM e HDM: quindi la materia oscura dominante è fredda ma abbiamo anche una bassa percentuale di "warm" e "hot". Confrontando il modello su larga scala con le misurazioni possiamo stimare Ω_0 , che è contenuta infatti nella relazione dello spettro di potenza $T_{CDM} \propto (\Gamma = \Omega_0 h)$. Misurare lo spettro P dalla distribuzione di gal su larga scala vuole dire misurare Γ nel modello di CDM. Nelle galassie si misura $\Gamma \sim 0.21$, $h \sim 0.7$ lo si misura dalle stelle variabili allora si ottiene $\Omega_0 \sim 0.3$ (questo è un metodo che non avevamo ancora usato per la misura di Ω_0).

4.1.1 Recap sull'evoluzione delle perturbazioni

Le strutture crescono linearmente con il tempo, indipendentemente dalla scala. Ma su scale sufficientemente piccole lo spettro di potenza stimato con approssimazione lineare è una sottostima di quello reale. Il processo di formazione delle strutture è altamente non lineare e questi effetti ne aumentano il rate di crescita. Dall'approssimazione di Zel'dovich si evince che le particelle si muovono su linee rette fino all'attraversamento, qui essendo più vicine risentono dell'attrazione gravitazionale che le rallenta nel loro moto e le fa collassare. La non linearità aumenta la rapidità con cui una perturbazione cresce.

4.1.2 Misura della funzione di correlazione

Negli anni '80 l'universo era mappato unicamente a bassi z , si conosceva infatti la **sfera celeste**. Invece di misurare $\Sigma(r)$, funzione di correlazione che corrisponde ad una conoscenza della distribuzione della materia nello spazio, si riusciva a misurare $W(\theta)$ che corrisponde ad una separazione angolare degli oggetti. La relazione tra le due funzioni si ricava imponendo l'Isotropia nella distribuzione di galassie su larga scala: $dP = \bar{n}_\Omega^2 [1 + W(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_1$. Dopo alcuni passaggi si arriva alla definizione di $W(\theta) \propto \theta^{1-\gamma}$ che porta a $\Sigma(r) = (\frac{r}{r_0})^{-\gamma}$ con $\gamma = 1.8$ e $r_0 = 5 \frac{Mpc}{h}$:

- $\Sigma \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$: le galassie hanno distribuzione Poissoniana su larga scala ($100 Mpc$).
- $\Sigma \rightarrow 1$ per $r \rightarrow r_0$: ho una probabilità doppia di trovare due galassie a questa distanza rispetto ad una distribuzione Poissoniana ($10 Mpc$)⁵².

Metodo 1: una possibile stima di Σ su scala galattica ($10 Mpc$) consiste nel sovrapporre ad una distribuzione di galassie 2D reale una casuale, e studiare il rapporto tra il numero di coppie coppie di galassie a distanza r reali e il rispettivo numero nella distribuzione casuale.

$$\begin{cases} 1 + \frac{DD(\theta)}{DR(\theta)} = W(\theta) \\ 1 + \frac{DD(r)}{DR(r)} = \Sigma(r) \end{cases} \quad (99)$$

Metodo 2: quando il numero di galassie su larga ($100 Mpc$) scala diventa sufficientemente ampio, possiamo misurare Σ nello spazio dei red shift, considerandola una velocità, facendo uso della legge di Hubble $cz = H_0 d + v_{pec}$. Considerando due velocità (misurate dallo spostamento verso il rosso dello spettro) di cui considero v_2 diretto lungo la los, si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{s} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \\ \pi = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}}{l} \end{cases} \quad (100)$$

⁵²Questo ultima istanza è a favore della tesi sulla formazione delle strutture per instabilità gravitazionale.

Da cui si puó facilmente calcolare $\mathbf{r}_p = \sqrt{s^2 - \pi^2}$ distanza peculiare delle due galassie **ortogonale** alla los.

$$\int \Sigma(r_p, \pi) d\pi = W(r_p) = W(\theta) \quad (101)$$

La funzione a due variabili $\Sigma(r_p, \pi)$ ha un **eccesso di correlazione**:

- $\pi >> 1 \wedge r_p = 0$
- $r_p >> 1 \wedge \pi = 0$

Tale risultato quantifica un effetto che nello **spazio dei red shift** vediamo chiaramente. Se consideriamo una **red shift survay** di un **ammasso** si nota che assume una forma oblunga nella direzione della los, alcune galassie sono spostate a distanze maggiori. L'ammasso é circondato da galassie che "cadono" nella sua buca di potenziale, queste assumono v_{pec} molto piú basse di quelle dell'ammasso (che calcoliamo attraverso il Teorema del Viriale), poiché hanno $v_{pec} \parallel$ alla los (nel nostro riferimento solidale con l'ammasso) per cui a noi risulterá molto piccola o anche nulla. Quindi la parte centrale é costituita da galassie appartenenti all'ammasso, mentre la parte esterna sono galassie in **inflow**. A distanze proiettate piccole posso avere galassie con $\pi >> 1$ (differenza di velocitá grande). Questo effetto di Σ su piccola scala é dovuto alla presenza di sovradensitá che allunga i contorni abbiamo un **eccesso di correlazione**. Questa distorsione dello spazio dei red shift é un effetto non lineare che possiamo sfruttare per ricavare la densitá dell'universo senza conoscere necessariamente la v_{pec} in quanto ho π :

$$v_{pec} \propto \underbrace{\frac{\Omega^{0.6}}{b}}_{\beta} \delta_{gal} \quad (102)$$

Basta avere una **galaxy red shift survay** e descriverne la sua distorsione per avere informazioni sulla densitá dell'universo, che risulta essere $\Omega \sim 0.3$ per $b \sim 1$.

4.1.3 Collasco di una perturbazione a simmetria sferica

Considero una perturbazione sferica (3 autovalori uguali) con una discontinuitá a gradino **top hat**. Ne considero l'evoluzione temporale della perturbazione come se fosse un universo EdS dal momento che $\Omega(t_i) \sim 1$ e $\Omega_{\Lambda 0}(t_i) \sim 0$ in tempi remoti ($t_i >> 1$), ed essendo omogenea viene descritta dall'equazione di Friedmann.

$$\begin{cases} \delta(t_i) = \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}} + \underbrace{\delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-1}}_{\rightarrow 0} \\ \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_i^2 \left[\frac{a_i}{a} \Omega_p(t_i) + 1 - \Omega_p(t_i) \right] \end{cases} \quad (103)$$

1. La perturbazione si **espande**, come un univ. di F, raggiungendo il suo massimo (sotto condizione: $\dot{a}_{max} = 0, t = t_{max}$):

- $\rho_p(t_{max}) = \frac{3\pi}{32Gt_{max}^2}$
 - $\delta_p(t_{max}) \sim 4.6$ (la pert. ha una sovradensitá 5 volte maggiore alla densitá media dell'universo, la sua espanzione é rallentata dall'attraz. grav.).
2. La perturbazione **collassa** infatti abbiamo $\delta_i > \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0(1+z_i)}$, ma non arriva mai a toccare $a_p = 0$ (questo vale sia per perturbazioni barioniche e non):

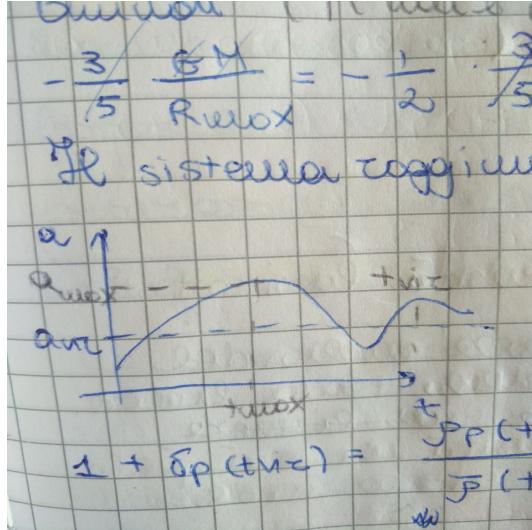


Figure 20: Evoluzione della perturbazione sferica con discontinuitá top hat.

- **materia barionica:** per il teorema del viriale nel momento in cui la materia collassa l'energia del potenziale gravitazionale viene trasformata in energia termica per irraggiamento, in dipendenza delle caratteristiche del potenziale, la pressione di radiazione si opporrà al collasso.
- **materia oscura:** l'energia gravitazionale in questo caso viene trasformata in energia cinetica, non essendo collisionale questa energia si conserva secondo $E + W = \text{cost}$: abbiamo trasformazioni $K \rightleftharpoons W$. Il sistema non riesce a contenere le particelle (come fenomeno di FS), si aggrega in gusci di materia a velocità non omogenee, abbiamo fenomeno di shell crossing.

3. Il sistema **virializza**, si stabilizza, a $t_{\text{vir}} = 2t_{\text{max}}$ tutti i gusci hanno velocità nulla ($K = 0 \Rightarrow E_{\text{vir}} = -\frac{1}{2} |W_{\text{vir}}|$). Si può dimostrare che l'energia potenziale gravitazionale di una sfera omogenea è $W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$. La sovradensità δ_p cresce col tempo poiché $\bar{\rho}$ decresce con l'espansione dell'universo, fino a toccare a t_{vir} il valore di 178: cioè è 200 volte più densa dell'universo. Si è in forte non linearità.

È interessante notare come l'approssimazione lineare avrebbe fallito, infatti avrebbe predetto un $\delta_{\text{lin}} \sim 1.68$ che è un sottostima di 2 ordini di grandezza. Questo ci può tornare utile in quanto potremmo estrapolare i valori di δ_{lin} della perturbazione di densità, le proprietà statistiche restano valide nonostante non sia corretto il campo di densità.

In generale il campo di densità che evolve in un regime non lineare, alcune sovradensità sono più virializzate di altri e le strutture su larga scala le connettono.

4.2 Teoria di Press-Schechter e funzione di massa

Vediamo ora quante oggetti di massa M per unitá di volume sovradensi sono virializzati ad una certa epoca. Consideriamo δ una variabile aleatoria gaussiana che definisce la densità di probabilitá delle perturbazioni di densità:

$$\begin{cases} P(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right\}d\delta \\ F(M) = \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta)d\delta \end{cases} \quad (104)$$

Dove la funzione $F(M)$ definisce la probabilitá che una perturbazione con $\delta > \delta_c$ di massa $M = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}R^3$ sia collassata all'epoca considerata. Il filtro gaussiano riduce l'esponenziale a 1

qualora la massa tenta a zero dunque la varianza esploda. Per mantenere la normalizzazione (risolvendo l'integrale gaussiano) imponiamo un fattore moltiplicativo alla funzione che descrive il numero di oggetti di massa compresa tra M ed $M + dM$ seguente:

$$N(M)dM = \left[2 \frac{\bar{\rho}}{M} \left| \frac{\partial F}{\partial M} \right| \right] dM \quad (105)$$

Facendo le dovute sostituzioni si arriva allo sviluppo dipendente anche da t:

$$N(M, t) dM = \frac{2}{\pi} \frac{\rho \bar{\delta}_c}{M \sigma^2(M, t)} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial M} \right| \exp \left\{ -\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)} \right\} dM \quad (106)$$

La **funzione di massa** contiene una grande quantitá di informazioni:

- sullo spettro di potenza (informazione contenuta in σ)
 - sull'evoluzione lineare delle perturbazioni, ciò mi da informazioni su $D(\Omega_0)$

Si deduce che la funzione di densità permette di vincolare il modello cosmologico (dal punto di vista del modello di universo di F.) sia il modello sulle perturbazioni di densità poiché ne vincola lo spettro di potenza. Mediando con un filtro gaussiano la varianza si ha $\sigma(M, t) = AD(t)M^{-\frac{n+3}{6}}$ da cui:

$$n(M)dM = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{M}{M^\star}\right)^{\frac{n+3}{3}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{M^\star}\right)^{\frac{n+3}{3}}\right\} dM \quad (107)$$

Confronto quantitativamente il modello della funzione di Press-Schechter in funzione del tempo considerando diversi modelli di universo di Friedmann (in figura riporto i valori limite.) con i dati osservativi. Il modello Bottom-Up produce un M^* crescente nel tempo secondo la

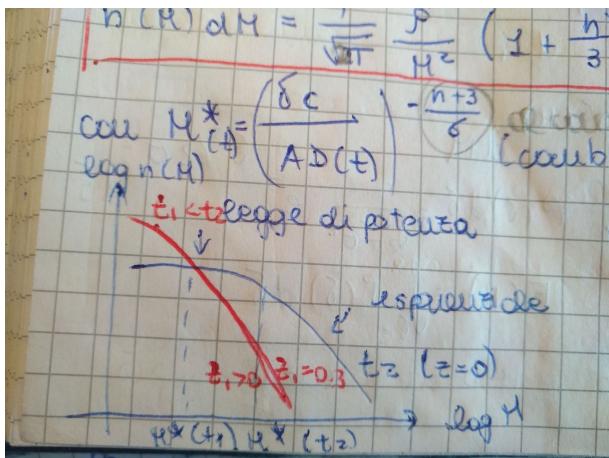


Figure 21: Funzione di massa di Schechter.

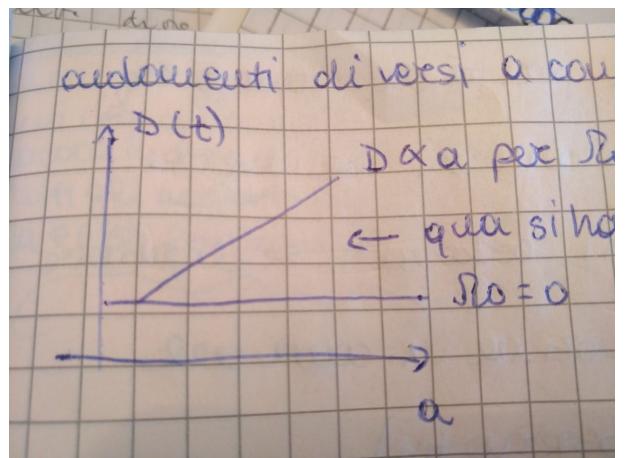


Figure 22: Evoluzione del fattore di scala.

definizione $M^*(t) = \frac{\delta_c}{AD(t)} - \frac{n+3}{6}$; dipende da $D(t)$ che a sua volta dipende dal parametro Ω_0 . Si può misurare la densità dell'universo con la funzione di massa delle strutture cosmiche poiché posso stimare la funzione di massa oggi e ad un'epoca precedente; la misura cambia di poco dunque l'universo ha bassa densità $\Omega_0 = 0.3$ ⁵³. Attenzione perché M^* dipende anche dalla **normalizzazione dello spettro di potenza**, e quindi posso avere A grandi e $D(t)$ piccoli, si dice che si ha **degenerazione** tra i due fattori. La normalizzazione A viene anche indicata nel seguente modo $\sigma_R^2(M) = \int_0^\infty P(k)k^2W^2(k,R)dk$ in cui una volta fissata la scala di massa

⁵³Infatti nel caso di universo vuoto $\Omega_0 = 0 \Rightarrow D(t) = cost \Rightarrow M^* = cost$.

M o quella di lunghezza R (che sono analoghe), $P(k) = Af(k)$ definisce la normalizzazione. Convenzionalmente si sceglie la lunghezza caratteristica $R = 8 \frac{Mpc}{h}$ per gli ammassi di galassie che fissa la normalizzazione a $A \equiv \sigma_8 \simeq 1.7$. Tramite la funzione di massa possiamo misurare σ_8 che è degenere rispetto al fattore di crescita e quindi Ω_0 . Questi coefficienti sono anticorrelati:

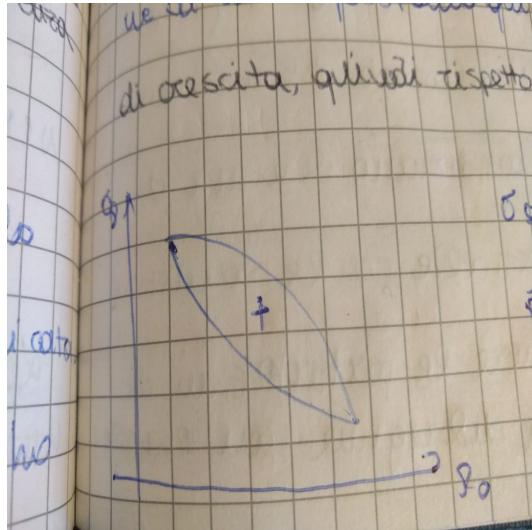


Figure 23: Degenerazione tra parametri σ_8 e D .

- Grandi fluttuazioni $\sigma_8 \uparrow$ e bassa quantità di materia $\Omega_0 \downarrow$
- Molta materia $\Omega_0 \uparrow$ e basse fluttuazioni $\sigma_8 \downarrow$

Quando misuriamo la funzione di massa ne misuro la coppia. Quindi possiamo prendere indicativamente il valore medio per fissare questi parametri.

Devo ancora fissare la sovradensità critica che fissiamo al valore dell'epoca della virializzazione $\delta_c = \delta_{vir} = 1.68$, sto usando parametri estrapolati dalla teoria lineare in regime non lineare. Ora abbiamo tutti i parametri necessari per calcolare la funzione di massa. La confrontiamo con l'andamento calcolato da una simulazione ad N corpi con le condizioni iniziali definite nei paragrafi prima. Abbiamo un buon accordo tra i valori simulati e quelli misurati, ma possiamo ottenere dei miglioramenti. A livello *teorico* δ_c non è esattamente quello previsto, è sottostimato di alcuni ordini di grandezza; anche lo sdoppiamento delle variabili anticorrelate può essere più accurato, possiamo ottenere un miglioramento inferiore al 10%. Dal punto di vista *osservativo* dobbiamo determinare la funzione di massa quindi dobbiamo conoscere la massa degli ammassi di galassie, quindi per prima cosa dobbiamo avere dei cataloghi di ammassi ottenuti dallo studio della distribuzione delle galassie (correggo il Malmquist Bias se misuro da terra nella banda X) e secondariamente stimarne la massa attraverso metodi di **lente gravitazionale**. Con i vari metodi si trova più o meno lo stesso valore di σ_8 e Ω_0 . La funzione di massa è simile a quella di Luminosità in quanto i parametri sono correlati $L \propto M^\gamma$.

Lo spettro di potenza deve essere collegato alle anisotropie del CMB, in quanto anisotropie del bagno di fotoni al disaccoppiamento radiazione materia.

4.2.1 Anisotropie del CMB

Le anisotropie del CMB non sono legate alla materia oscura poiché non ci sarebbe stato tempo di creare le strutture che abbiamo oggi. Invece abbiamo un legame con le perturbazioni di densità della materia ordinaria. Le anisotropie si studiano attraverso il campo di temperatura $T(\theta, \phi)$, poiché possiamo associare ad ogni regione del cielo un corpo nero la cui emissione è una

curva Planckiana. Analogamente alle perturbazioni di densitá, anche qui andiamo a definire la perturbazione del campo T rispetto a T_0 come $\frac{\Delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0}$. Proseguendo sviluppiamo in armoniche sferiche.

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (108)$$

Poiché queste dipendono da Polinomi di Legendre allora soddisfano una relazione di ortogonalitá:

$$\int Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (109)$$

Per misurare le perturbazioni di temperatura ($\frac{\Delta T}{T}$) sulla sfera celeste conviene andare nello spazio (satellite COBE) quindi ri ricavano i coefficienti dello sviluppo e lo spettro di potenza delle anisotropie:

$$\begin{cases} a_{lm} = \int d\Omega \frac{\Delta T}{T} Y_l^{*m}(\theta, \phi) \\ C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} a_{lm}^* = \langle |a_{lm}|^2 \rangle_m \end{cases} \quad (110)$$

Essendo le anisotropie della gaussiane la descrizione completa su di esse é contenuto in C_l , che é l'analogo di $P(k)$. Gli "l" sono come i "k":

- grandi "l" \Rightarrow piccola scala
- piccoli "l" \Rightarrow grande scala

Introduciamo la funzione di **autocorrelazione** a due punti della temperatura in coordinate angolari:

$$C(\theta) = \langle \frac{\Delta T}{T}(n_1) \frac{\Delta T}{T}(n_2) \rangle_\Omega \quad (111)$$

Ho la media sulla sfera celeste di due fluttuazioni in direzioni diverse tali che $n_1 \cdot n_2 = \cos \theta$. Sfruttando l'ortogonalitá delle armoniche sferiche si trova che la funzione di autocorrelazione é collegata allo spettro di potenza, esattamente come nelle perturb. di d.:

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l \underbrace{P_l(\cos \theta)}_{p.\text{Legendre}} \quad (112)$$

All'epoca del disaccoppiamento i γ vengono diffusi dagli elettroni liberi, allora maggiore é la quantitá di elettroni maggiore sar la quantit di γ diffusi. Qui si vede il collegamento tra le fluttuazioni di densit e temperatura:

$$\frac{\Delta T}{T} \propto \frac{\delta \rho_b}{\rho_b} \propto \frac{\delta \phi}{\phi} \quad (113)$$

Una grande concentrazione di materia significa una profonda buca di potenziale nella quale i fotoni diffonderanno molto. Per effetto di **redshift gravitazionale** i fotoni che escono dalla buca perdono energia e ci appaiono pi rossi mentre quelli che cadono ci appariranno pi blu acquisendo energia. La relazione di proporzionalit $\frac{\Delta T}{T} \propto \frac{\delta \phi}{\phi}$ indica appunto la correlazione tra $C_l \leftrightarrow P(k)$ della materia barionica. *Che relazione ce tra fluttuazioni della CMB e materia oscura?* Ce lo dice l'orizzonte cosmologico chee dell'ordine di un paio di gradi, tutto quello a scala maggioree al di fuori di esso. Quindi tutte le perturbazioni di densit in materia barionica su scale pi grandi di qualche grado non sono ancora entrate nell'orizzonte cosmologico e dunque riflettono le perturbazioni dell'epoca inflattiva. Proprio su queste scale allora le perturbazioni di materia barionica devono coincidere con quelle di materia oscura poiché essendo

fuori dall'orizzonte cosmologico a quell'epoca, non hanno avuto il tempo di evolvere e comunicare. Si dimostra che la relazione che lega C_l e $P(k)$ sia

$$C_l = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{H_0}{c} \right)^4 \int_0^\infty P(k) J_l^2 \left(\frac{2ck}{H_0} \right) \frac{dk}{k^2} \quad (114)$$

Misurare C_l su larga scala, ovvero con $l < 100$ seleziono scale più grandi di qualche grado ($\theta \sim \frac{\pi}{l}$), significa misurare $P(k)$ su scale più piccole dell'orizzonte cosmologico all'epoca del disaccoppia-
mento di radiazione e materia ovvero $P_{infl}(k)$ ⁵⁴. Siamo in zone in cui il FS non è avvenuto. Inserendo $P(k) = Ak^n$ spettro di potenza in C_l si ottiene

$$C_l \propto 2^n A \pi \frac{\Gamma(3-n)\Gamma(l + \frac{n-1}{2})}{\Gamma^2(\frac{4-n}{2})\Gamma(l + \frac{5-n}{2})} \quad (115)$$

Dalla quale possiamo ricavare a grandi scale ($l \sim 100$) A ed n abbiamo allora un altro *metodo*. Per $n \sim 1$ spettro di Harrison Zel'dovich $C_l \propto 2A \frac{1}{l(l+1)}$, che per $l \uparrow$ è pressoché piatto, stiamo quindi misurando lo spettro inflattivo⁵⁵. Sapere dove comincia C_l quindi mi da A e quindi σ_8 , che oggi viene misurato dall'esperimento Planck (misura lo spettro di potenza). Si trova essere in accordo con quello misurato dalla funzione di massa degli ammassi di galassie. Questo non è sempre stato vero infatti il σ_8 misurato dagli ammassi era più piccolo di quello misurato dal CMB con COBE. Si ha quindi una possibile **misura diretta** del modello inflattivo, nel caso questo non dovesse corrispondere alla realtà abbiamo due possibili strade:

- trovare un modo per creare delle perturbazioni di densità gaussiane con questo spettro di potenza
- reinterpretare l'andamento delle anisotropie del CMB su queste scale.

Nel modello che abbiamo trovato l'andamento di C_l coincide coincide con quello che ci aspettavamo, anzi permette di misurare i parametri. Se cambiisse il modello bisogna giustificare l'andamento di C_l a grandi scale.

4.2.2 Effetto Sachs-Wolfe

Su larga scala, le anisotropie del CMB sono correlate alle fluttuazioni di densità dell'effetto Sachs-Wolfe (1967). Gli effetti gravitazionali delle perturbazioni della densità sul potenziale generano fluttuazioni di temperatura $\frac{\Delta T}{T} \propto \frac{\Delta \phi}{\phi}$. Dalla RG l'energia necessaria per emergere da una buca di potenziale in uno spazio-tempo in espansione è dovuta a due fattori:

- campo gravitazionale
- espansione dell'universo

$$\frac{\Delta T}{T} \propto \frac{\delta \phi}{c^2} - \frac{2}{3} \frac{\delta t}{t} \quad (116)$$

Il primo termine è dovuto al redshift gravitazionale (in uno spazio statico non in espansione), mentre il secondo è il termine ritardo relativistico dovuto al fatto che gli orologi in prossimità della buca scorrono più lentamente (vediamo la regione più giovane, quindi più calda)⁵⁶.

⁵⁴La temperatura T ha fatto cambiare lo spettro di H-Z a quello ad es. di CDM secondo la relazione $P_{eq} = T^2(k)P(k)$, questo avviene in quanto abbiamo una scala di FS.

⁵⁵In realtà $n \sim 0.97$.

⁵⁶Siccome in EdS $T \propto a^{-1} \propto a^{-\frac{2}{3}}$, quindi abbiamo $\frac{\Delta T}{T} \propto \frac{2}{3} \frac{\delta \phi}{c^2}$.

Considerando la perturbazione del potenziale nel caso classico in coordinate coomoventi e EdS vediamo che non dipende da z

$$\delta\phi \sim \frac{\delta\bar{\rho}R^3}{R} \sim \bar{\rho}_0(1+z)^3 \cdot \delta_0(1+z)^{-1} \cdot R_0^2(1+z)^{-2} \sim \bar{\rho}_0\delta_0R_0^2 \quad (117)$$

Siccome $\sigma_0 = \langle \delta_0^2 \rangle^{1/2} \sim \delta_0$ usando un filtro gaussiano $\sigma_0 \propto M_0^{-\frac{n+3}{6}}$

$$\delta_0 \propto R_0^{\frac{1-n}{2}} \quad (118)$$

Che si traduce in coordinate angolari $\theta \propto R_0$ ⁵⁷

$$\delta\phi \propto \frac{\Delta T}{T} \propto \theta^{\frac{1-n}{2}} \quad (119)$$

La fluttuazione in temperatura é indipendente dalla scala in EdS, e riproduce (per $n = 1$) lo spettro di Harrison Zel'dovic, indipendente dalla scala (su larga scala). Oltre all'effetto Sachs-Wolfe che genera le anisotropie primarie del CMB, esiste anche un altro fenomeno che prende il nome di effetto **Rees-Sciama**. Questo genera delle anisotropie secondarie nel CMB in quanto i fotoni partiti dalla superficie di ultimo scattering incontreranno nel loro cammino ottico perturbazione dello spazio tempo dovute alla presenza di materia. É fondamentale considerare l'evoluzione di queste perturbazioni di densitá perché quando esce il fotone avrà una certa buca che sarà diversa alla sua uscita. Nel regime lineare la quantitá di energia che acquista un fotone in inflow é la stessa che perde in out. Nel regime non lineare questo non é piú vero. Si potrebbe affermare che l'effetto di Rees-Sciama é l'analogo di Sachs-Wolfe ma nel caso non lineare. Si deve tenere conto di entrambe dal punto di vista statistico per avere informazioni sul modello inflattivo.

4.3 Onde gravitazionali primordiali

Nell'universo inflattivo si ha anche generazione di onde gravitazionali, con un loro spettro specifico. Ció crea delle perturbazioni aggiuntive su piccola scala, poiché sono sorgenti di campo. Le perturbazioni di cui si é parlato fino ad ora sono perturbazioni di tipo **scalare** dovute alle fluttuazioni di densitá di materia. Quelle dovute alle onde gravitazionali sono variazioni della metrica $\frac{\delta g_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}}$, sono perturbazioni **tensoriali** che si aggiungono alle anisotropie scalari nel CMB. Si misurano nella fluttuazione della polarizzazione dei fotoni del CMB.

4.4 Scale fisiche e angolari delle fluttuazioni

Quando entriamo nell'orizzonte cosmologico r_H é necessario stabilire quali processi fisici hanno determinato eventuali anisotropie, vediamo adesso le varie scale spaziali che ci serviranno per l'analisi dello spettro di potenza della CMB.

4.4.1 Scala dell'orizzonte cosmologico

$$r_H = 3ct \simeq \frac{2c}{H_0\Omega_0^{\frac{1}{2}}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \approx 200(\Omega_0 h^2)^{-\frac{1}{2}} Mpc \quad (120)$$

siamo a $z \rightarrow 1000$ appena dopo l'epoca della ricombinazione (nello spettro di potenza abbiamo considerato $l = 100$). Anche qui entrano in gioco i parametri cosmologici. Su scale piú piccole abbiamo la diffusione di Thomson tra i fotoni e gli elettroni liberi che si stanno ricombinando con i protoni per formare idrogeno neutro.

⁵⁷In quanto $\theta = \frac{R}{D_A} = \frac{R_0 a}{D_A a}$ nella quale $D \sim \frac{2c}{H_0 \Omega_0} = cost$ per $z \rightarrow \infty$.

4.4.2 Scala di Jeans: collasso delle perturbazioni di densità

$$\lambda_J = \left(\frac{M_J}{\bar{\rho}_B} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 50 \left(\Omega_b h^2 \right)^{-\frac{1}{2}} Mpc \quad (121)$$

Se prendiamo come massa di Jeans $M_J \sim 10^{16} M_\odot$. In questo caso λ_J dipenderà dalla densità barionica.

4.4.3 Scala delle perturbazioni acustiche

Lorizzonte acustico rappresenta la lunghezza d'onda massima su cui le onde sonore potevano aver avuto oscillazioni coerenti al momento della ricombinazione; in pratica rappresenta il limite superiore alla λ delle onde acustiche al momento della ricombinazione. Definiamo la scala dell'**orizzonte acustico** nello strato di ultimo scattering come lo spazio percorso durante la vita dell'universo ⁵⁸

$$\lambda_{SH} \simeq c_S t_{eta'} \leq \frac{c}{\sqrt{3}} t_{eta'} \sim 30 \left(\Omega_b h^2 \right)^{-\frac{1}{2}} Mpc \quad (122)$$

l'età dell'universo la calcoliamo con i modelli di Friedmann e dipende da Ω_0 . Tipicamente $\lambda_{SH} < \lambda_J$ ma dipende da $\frac{\Omega_b}{\Omega_0}$. Su scale più piccole di λ_J la perturbazione oscilla con frequenza $\omega^2 = c_S^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}_B \approx c_S^2 k^2$ in cui si trascura la componente di materia ordinaria che viene dall'equazione di Poisson. L'instabilità di Jeans afferma che le perturbazioni con $\lambda < \lambda_J$ sono in equilibrio stabile tra la forza di collasso e la pressione di radiazione, oscillano come onde acustiche. La scala λ_{SH} una scala ben più importante della lunghezza d'onda di Jeans ma è necessario tener conto di quest'ultima per la relazione di dispersione ovvero per capire se si hanno effettivamente onde sonore.

4.4.4 Strato di ultimo scattering

Il lasso di tempo nel quale avviene il disaccoppiamento Δt_{dis} ($z_{dis} = 1070$) corrisponde ad una differenza di redshift $\Delta z \simeq 120$. Cerchiamo adesso lo spessore comovente dello strato di ultimo scattering

$$dr = \frac{cdz}{H_0 \Omega_0^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}}} \quad (123)$$

Stiamo implicitamente definendo un'altra scala, abbiamo che Δz corrisponde a

$$\Delta r_{LS} \simeq 10(\Omega_0 h^2)^{-\frac{1}{2}} Mpc \quad (124)$$

la differenza spaziale che corrisponde alla periodicità di disaccoppiamento radiazione-materia, in sostanza coincide colla superficie di ultima diffusione, in realtà è un guscio spesso Δr appunto, che osserviamo dalle anisotropie del CMB formate a $t \sim \Delta t_{dis}$:

- le perturbazioni con $r > \Delta r_{LS}$, cioè più grandi della spessore di ultimo scattering, rimangono congelate nelle loro fasi di contrazione o espansione (noi vediamo solo quelle corrispondenti alla superficie di ultimo scattering).
- mentre quelle con $r < \Delta r_{LS}$ sono smorzate e non si traducono in anisotropie della T . (Poiché $\lambda_J \sim r_H$, tutte le perturbazioni con $r < r_H$ sono onde acustiche sulla superficie di ultimo scattering.)

⁵⁸La perturbazione si propaga con una velocità c_S di fluido relativistico,

4.4.5 Scala di Silk damping

Smorzamento che al tempo del disaccoppiamento prende il valori di $M_D = 10^{12} M_\odot$, quindi

$$\lambda_D \sim \left(\frac{M_D}{\rho_B^-} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 5(\Omega_b h^2)^{\frac{1}{2}} Mpc. \quad (125)$$

Quindi lo spettro di potenza, corrispondente alle anisotropie, si **smorza** notevolmente fino ad andare a zero.

4.5 Lo spettro di potenza delle fluttuazioni della CMB: lo spettro di potenza osservato

In breve:

1. Le fluttuazioni della CMB associate alle perturbazioni primordiali si sono originate a $z \sim 1090$ quando l'universo era appena entrato nella fase matter dominant.
2. Le regioni con $r > r_H$ quindi con scale angolari $\theta > 1.5^\circ$ non sono causalmente connesse quindi conservano le informazioni sullo spettro primordiale delle perturbazioni; le fluttuazioni sono congelate nella metrica.
3. Su scale $\lambda_{SH} < r < r_H$ ci sono oscillazioni acustiche con smorzamento dovuto al Silk Damping e allo spessore dello strato di ultimo scattering.
4. Le perturbazioni adiabatiche su scale $r < \lambda_{SH}$ vengono completamente smorzate dalla diffusione dei fotoni.
5. L'orizzonte sonoro è la massima scala per avere delle oscillazioni coerenti; questa è anche legata al primo picco acustico.

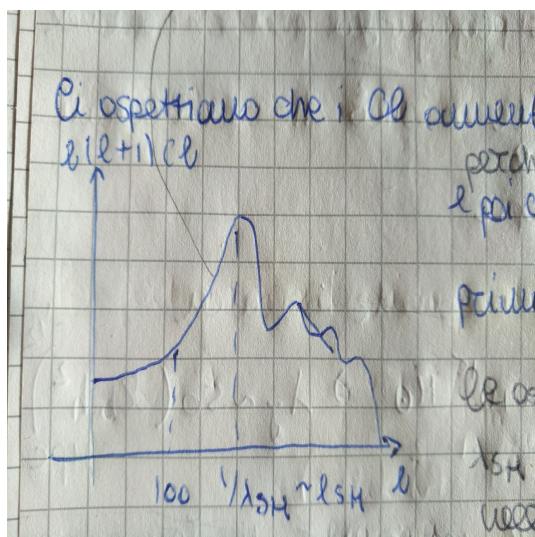


Figure 24: Fluttuazioni della CMB.

Su scale al di sotto dell'orizzonte cosmologico $r < r_H$ e al di sotto della scala di Jeans $\lambda < \lambda_J$ ci aspettiamo che le perturbazioni oscillino e che nel momento del disaccoppiamento radiazione materia, ipotizzando sia istantaneo, restino congelate in quella fase di oscillazione: se la perturbazione in quell'istante collassava allora rimarrà in quella fase, vale in viceversa. Si avranno

una serie di perturbazioni su scale diverse. Quindi per scale comprese tra $\lambda_{SH} < r < r_H$ le anisotropie che ci aspettiamo sono consistenti poiché la distribuzione di materia non è omogenea al di sotto dell'orizzonte cosmologico. Ci saranno delle perturbazioni che si propagano in anisotropie della temperatura e saranno tipicamente correlate alle anisotropie sopra l'orizzonte cosmologico $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{\Delta T}{T}$. Ci aspettiamo che all'aumentare di l , quindi al diminuire della scala, si raggiunga un picco e poi avremo ulteriori oscillazioni perché le perturbazioni sotto l'orizzonte acustico oscillano.

Si hanno 4 caratteristiche nel grafico nella figura24:

1. **Spettro di HZ:** ad angoli $\theta > 2^\circ$ abbiamo spettro costante che contiene informazioni sull'inflazione.
2. **Primo picco:** è una stima molto sensibile della curvatura spaziale dell'universo, che combinata con le osservazioni di Planck sul CMB si ottiene che la geometria spaziale dell'universo è euclidea quindi $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1$ ⁵⁹. Il primo picco si ha in corrispondenza di $l_{SH} \sim \frac{1}{\lambda_{SH}}$ che in termini angolari è $\theta = \frac{\lambda_{SH}^{prop}}{D_A} = \frac{\lambda_{SH}^{com}}{D} \approx 0.3\Omega_0^{\frac{1}{2}} \text{deg}$ ⁶⁰. Il valore $l \sim \frac{1}{\lambda_{SH}}$ corrisponde ad una singola oscillazione tra l'entrata nell'orizzonte e la ricombinazione. Siccome $\theta \sim \frac{\pi}{l}$, l_{SH} corrisponde a questo θ quindi dipenderà da Ω_0 : se il parametro cosmologico $\Omega_0 \uparrow$ è più grande allora il picco si sposta a scale più piccole $l \uparrow$, vale il viceversa. Facendo il conto accurato con $\Lambda \neq 0$ vediamo che $\Omega_{k0} = \Omega_{\Lambda 0} - 1$ quindi la posizione del picco dello spettro delle anisotropie del CMB è sensibile alla geometria dell'universo perché dipende dalla distanza angolare. Quindi possiamo usare la distanza angolare per misurare i parametri cosmologici, se si ha un oggetto di cui conosciamo le dimensioni proprie. Il nostro oggetto di riferimento sarà λ_{SH} di cui conosciamo la distanza coomovente e propria alla ricombinazione.
3. **Secondo picco:** corrisponde alla scala $l_D \sim \frac{1}{\lambda_D}$ che dipende da Ω_b . Al di sotto di questa lo spettro delle anisotropie si annulla per lo smorzamento Silk (siamo a $l \sim 2500 - 3000$).
4. **Terzo picco:** il terzo contiene informazioni sulla densità di materia oscura.

4.6 Approccio statistico

Per ottenere una stima corretta dello spettro delle anisotropie del CMB⁶¹ si devono studiare le soluzioni dell'equazione di Boltzmann per un fluido collisionale in un universo in espansione, in cui si tiene conto del modello CDM

$$\ddot{\delta}_B + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_B = 4\pi G\rho_D\delta_D - \delta_B k^2 c_S^2. \quad (126)$$

Le perturbazioni di densità della DM, disaccoppiate dal resto, hanno iniziato a collassare in epoca dell'equivalenza ora crescono e influenzano gravitazionalmente quelle di materia ordinaria, in quanto questa cade nelle buche di potenziale generate dalla DM. Trascurando il termine di espansione $\dot{a} = 0$, ho un oscillatore armonico forzato, in cui la forzante è data dal potenziale della DM.

$$\ddot{\delta}_B + \delta_B k^2 c_S^2 = 4\pi G\rho_D\delta_D \quad (127)$$

⁵⁹ Combinando le osservazioni della CMB, la struttura a grande scala delle galassie e le supernovae Ia è possibile vincolare i parametri cosmologici con un accuratezza del 1%. Un'altra relazione $\frac{\Omega_0}{2} - \Omega_{\Lambda 0} = -\frac{1}{2}$, ci arriva dallo studio delle Supernovae.

⁶⁰ In cui la D la ricavo dalla formula di Mattig, implicitamente sto considerando grandi z e costante $\Lambda = 0$.

⁶¹ Sono fluttuazioni in T che coincidono con le fluttuazioni di densità in materia barionica.

Consideriamo perturbazioni del campo di radiazione ($\rho_r \sim T^4$) **adiabatiche**, l'entropia viene conservata $\delta S = \delta \left(\frac{T^3}{\rho_m} \right) \Rightarrow 3\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \rho_m}{\rho_m}$. Mettendoci in un istante di tempo precedente al disaccoppiamento $\frac{\delta \rho_m}{\rho_m} = \frac{\delta \rho_B}{\rho_B} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3}\delta_B = \Theta$. con Definiamo $\psi = \delta\phi$ espansione in serie di onde piane del potenziale derivato dall'eq. $\nabla^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}_D\delta_D$, arriviamo ad una relazione alle derivate totali:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta} + k^2 c_S^2 \Theta = -\frac{1}{3}k^2 \psi \\ c_S = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad R = \frac{3\rho_B}{4\rho_r} \end{cases} \quad (128)$$

Considerando un fluido **non relativistico** (il caso relativistico si ha con $R = 0$). La soluzione è la seguente:

$$\Theta(t) = \left[\Theta_0 + \frac{1+R}{c^2} \psi \right] \cos \omega t + \frac{\Theta_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{1+R}{c^2} \psi \quad (129)$$

Abbiamo definito la frequenza come $\omega = kc_S$. Si osservi che questa soluzione è oscillatoria, siamo infatti a $\lambda < \lambda_J$, tuttavia è parziale perché non tiene conto del redshift gravitazionale

$$\frac{\Delta T}{T} = \Theta + \frac{\psi}{c^2}. \quad (130)$$

Andiamo a studiare il comportamento dei picchi ($t = t_{ric}$), in cui sono contenute le informazioni di carattere cosmologico, imponendo le condizioni

$$\begin{cases} \omega t_{ric} = k\lambda_{SH} = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \\ \psi = \delta\phi = cost \Rightarrow \Theta_0 = -\frac{2}{3}\frac{\psi}{c^2} \end{cases} \quad (131)$$

osserviamo che la seconda relazione deriva dall'effetto Sachs-Wolfe in cui vale $\frac{\Delta T}{T} = \Theta_0 + \frac{\psi}{c^2} = \frac{\psi}{3c^2}$ da cui ricavo Θ_0 su scale maggiori dell'orizzonte cosmologico, segue

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\psi}{3c^2} [1 + 3R] \cos \omega t - \frac{R}{c} \psi \quad (132)$$

ed infine considerando i massimi

$$\begin{cases} \frac{\Delta T}{T} = -[1 + 6R]\frac{\psi}{3c^2}, \quad k\lambda_{SH} = \pi \\ \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3}\frac{\psi}{c^2}, \quad k\lambda_{SH} = 2\pi \end{cases} \quad (133)$$

la prima definisce la massima compressione (si ritrova l'effetto Sachs-Wolfe) e la seconda la massima espansione, in quanto si definisce $\psi < 0$ per le buche di potenziale. Quindi $\frac{\Delta T}{T}$ è negativo nel caso della massima espansione e positivo nella massima compressione. Tutto torna in quanto i fotoni perdono più energia all'aumentare della profondità della buca.

In sintesi lo spettro di anisotropie del CMB è correlato allo spettro di potenza delle perturbazioni di densità, quindi ricco di informazioni sull'universo primordiale. Andiamo per punti:

- *i punti di massima espansione corrispondono ai minimi dello spettro*
- *le anisotropie primarie si sommano alle secondarie figlie dell'epoca di ricombinazione, quindi dell'effetto SZ, RS*
- *il fatto che l'universo abbia perturbazioni di densità iniziali di tipo inflattivo gaussiane è in ottimo accordo con lo spettro del CMB, e anche dall'evoluzione dell'instabilità gravitazionale.*

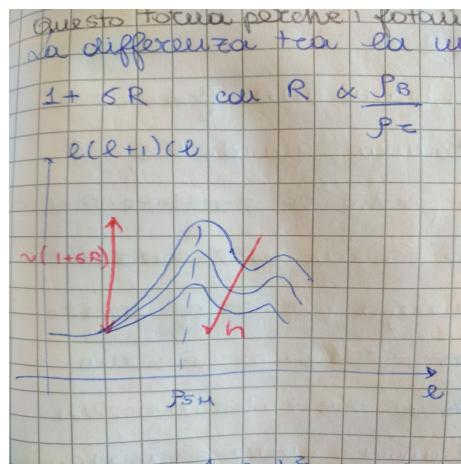


Figure 25: Le fluttuazioni dello spettro della CMB dipendono dal parametro di Hubble "h". È evidente che all'aumentare del parametro si allarga la finestra temporale tra z_{eq} e z_{ric} , in quanto $z_{eq} \simeq 2.6 \cdot 10^4 \Omega_0 h^2$ aumenta portando indietro l'epoca della ricombinazione. Ne consegue un abbassamento dello spettro. Si esprime la differenza tra la massima espansione e compressione attraverso il parametro $1 + \sigma R$, con $R \propto \frac{\rho_B}{\rho_r}$. Quindi all'epoca della ricombinazione più aumento "h" e più ρ_B si abbassa.

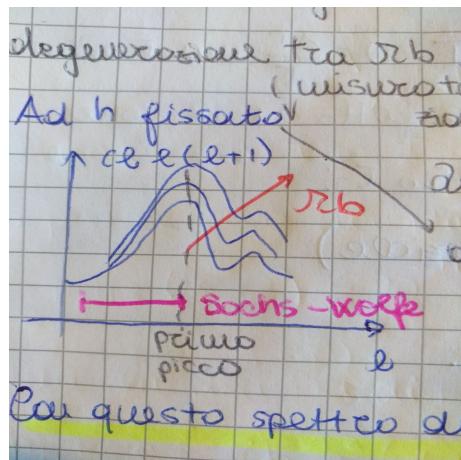


Figure 26: Cosa contraria invece per il parametro Ω_B . Infatti i due parametri sono in anti-correlazione, si parla di degenerazione tra i parametri cosmologici (h , Ω_B e Ω_0), infatti varie combinazioni ci danno lo stesso spettro.

4.7 Mezzo intergalattico post-ricombinazione

Prima della ricombinazione ($t < t_{ric}$) l'universo era opaco a causa dello scattering Thomson, come avevamo visto. Evolvendo diventa sempre più otticamente sottile (trasparente) mano a mano avviene la ricombinazione, quindi i protoni e gli elettroni si legano formando HI. Questo periodo viene definito come **Dark Age** poiché tutta la radiazione era costituita dalla CMB che era impegnata nello scattering, quindi non esistevano fotoni ed energie diverse.

Alla **ricombinazione** ($t = t_{ric}$) tutto il gas era praticamente neutro, la frazione di ionizzazione lo dimostra $\frac{HII}{HI} = 10^{-5}$, non è un rapporto statico poiché la materia in inflow nella buca costituita DM si raffredda radiativamente ionizzando materia. L'universo non è trasparente alle radiazioni con lunghezze d'onda inferiori alla lunghezza d'onda di ionizzazione dell'idrogeno (912 Å), n alle forti transizioni dell'idrogeno neutro, di cui Lya di gran lunga il più forte. Il fenomeno di "cooling" della materia in questione non è **efficiente** in quanto avendo unicamente idrogeno ha pochi canali di raffreddamento, dunque il processo di frammentazione delle nubi protostellari porta alla formazione di stelle molto massicce POPIII. Essendo composte per la maggior parte di H, il loro spettro piccato nell'alto UV ionizza il mezzo intergalattico, infatti il 75% dei fotoni che emette $\lambda_{Lya} = 1216$ Å corrispondono alla transizione Lyman α dell'atomo di idrogeno ($n = 1 \rightarrow n = 2$). Siamo nel periodo della **reionizzazione**

4.7.1 Sistema di assorbimento della serie di Lyman

Quando la luce UV proveniente da una sorgente di background, in genere un **Quasar** o una **giovane galassia** con alta formazione stellare, viaggia attraverso lo spazio intergalattico, viene continuamente redshiftata prima di essere misurata dai nostri rilevatori. Nel suo cammino incontra sistemi di HI raggrumati e fluttuanti nella struttura filamentosa 2D su larga scala che costituisce lo space web. Questo è quella che viene definita **foresta Ly α** , ovvero nubi di idrogeno neutro con densità numerica che possiamo calcolarci in una metrica di FW dalle seguenti relazioni:

$$I = I_0 \exp\{-\tau\} \quad (134)$$

$$\begin{cases} \tau(\nu_o) = \int \alpha(\nu_e) \underbrace{\frac{cdt}{dl}}_{dl} = \int_0^z \alpha(\nu_e) \frac{cdz'}{H_0 E^{\frac{1}{2}}(z')(1+z')} \\ \alpha(\nu_e) = \sigma(\nu_e) n_{HI}(z) \\ \sigma(\nu_e) = \frac{e^2 f}{4\epsilon_0 m_e c} g(\nu_e - \nu_{Ly\alpha}) \end{cases} \quad (135)$$

che mettendo tutto insieme ci porta a scrivere la profondità ottica correlata al fotone osservato:

$$\tau(\nu_o) = \frac{e^2 f}{4\epsilon_0 m_e c} \frac{1}{H_0} \frac{n_{HI}(z)}{(1+z)(\Omega_0 z + 1)^{\frac{1}{2}} \nu_{Ly\alpha}} \quad (136)$$

Conoscendo I ed I_0 si trova il limite superiore della profondità ottica $\tau \leq 0.1$ ovvero $n_{HI}(z=3) \leq 10^{-11} \frac{\text{atomi}}{\text{cm}^3}$, se la confrontiamo con la densità di barioni $n_b(z=3) = 10^{-4} \frac{\text{atomi}}{\text{cm}^3}$ otteniamo $\frac{\Omega_{HI}}{\Omega_B} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ sempre a $z=3$. La struttura d'idrogeno assorbe proporzionalmente alla sua densità i fotoni che la attraversano, quindi il fatto che non assorba il flusso di UV che arriva dal quasar significa che la densità di HI neutro è molto bassa in termini di densità barionica.

Applicazioni cosmologiche:

- *La mappatura della lunghezza d'onda e della distanza consente di mappare la densità di sistemi di diversa massa a diversi redshift lungo una certa linea di vista. La distribuzione di queste nuvole di HI segue quella di DM in quanto cadono dentro alle buche di potenziale della materia non barionica, quindi tracciano la distribuzione di massa dell'Universo, non solo la distribuzione della materia luminosa .*

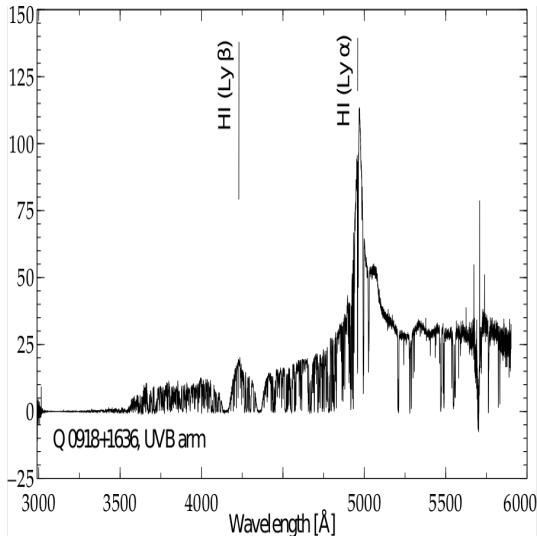


Figure 27: Lo spettro del quasar viene frastagliato in seguito al passaggio dei suoi fotoni attraverso il gas composto da idrogeno neutro. La profondità della riga è correlata alla densità barionica ad un certo redshift.

- *Selezionando il limite superiore di densità dell'idrogeno neutro abbiamo un metodo per cercare galassie in formazione.*

Siamo partiti all'epoca di ricombinazione $z \sim 1000$ in cui la frazione di ionizzazione era $\frac{HII}{HI} = 10^{-5}$, nel frattempo avviene la **reionizzazione** fino ad arrivare a $z \sim 3$ in cui arriviamo ad un limite in cui tutto l'idrogeno è ionizzato $\frac{HII}{HI} = 10^5$. Nel lasso di tempo compreso tra $1000 < z < 3$ tutto l'idrogeno neutro è stato reionizzato da quasar e galassie giovani. *Ci si domanda quanto il grosso della reionizzazione è avvenuto?*

4.7.2 Depressione di Gunn-Peterson

Per rispondere alla domanda posta in precedenza, bisogna andare ad osservare dei quasar che invece di avere nello spettro la foresta $Ly\alpha$ hanno una depressione dell'intensità come mostrata nel grafico seguente. Nella figura 29 la reionizzazione sembra completa gi intorno a $z \sim 8$, ma c'è

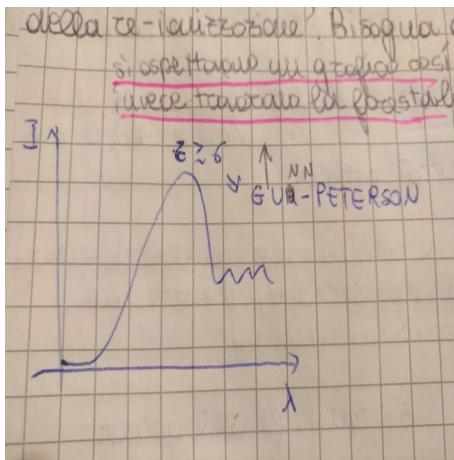


Figure 28: Lo spettro di Gunn Peterson non presenta le frastagliature che caratterizzavano la foresta Lyman α .

ancora abbastanza idrogeno neutro che galleggia intorno per renderlo opaco a $Ly\alpha$ in quanto una piccola frazione $\frac{\Omega_{HI}}{\Omega_B} \sim 10^{-3}$ è sufficiente, quindi la $Ly\alpha$ definisce solo la vera fine del processo

approssimativamente a $z \sim 6$.

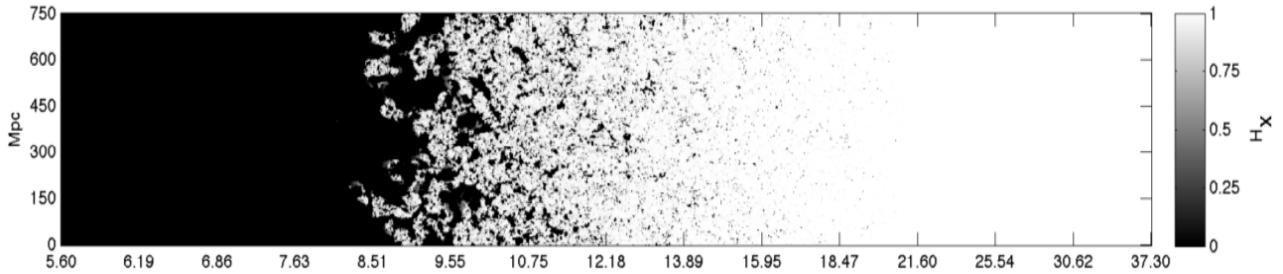


Figure 29: Mappa della reionizzazione in funzione del redshift.

4.7.3 Ray Tacking Experiment

Attorno agli anni '90 vennero fatte delle simulazioni ad N corpi che simulavano l'universo (modello Λ CDM) nelle quali veniva simulata l'emissione di un quasar ad un estremo del dominio. Questo per avere le informazioni sull'universo a larga scala che derivo dall'assorbimento dello spettro da HI.

4.7.4 Scale dinamiche e termiche

Il gas ionizzato forma delle strutture cosmiche. Quindi regolare il processo é necessario prendere in considerazione le due scale che definiscono i processi che prendono parte: la scala dinamica che riguarda il collasso gravitazionale e la scala termica che riguarda la perdita di energia per irraggiamento.

$$\tau_{dyn} \sim (G\rho)^{-\frac{1}{2}} \propto n^{-\frac{1}{2}} \quad (137)$$

Per introdurre l'altra forza che si oppone al collasso, ovvero quella di pressione, é necessario introdurre l'energia persa per collisionalmente per un gas ideale

$$\frac{dE}{dt} = -n^2 \Lambda(T) \quad (138)$$

in cui Λ é la funzione di raffreddamento dipendente dalla composizione chimica del plasma (per quella storia dei canali di raffreddamento) e alla velocitá con cui si muovono gli elettroni e gli ioni. Ad alte energie gli elettroni perdono energia per bremsstrahlung, radiazione da frenamento, mentre a basse energie perdono energia per ricombinazione.

$$\tau_{raff} = \frac{E_{in}}{\frac{dE}{dt}} = \frac{3k_B T}{n\Lambda(T)} \quad (139)$$

Ora studiamo il collasso gravitazionale, il grafico 31 é sostanzialmente l'inverso delle curve di raffreddamento. Per $\tau_{raff} < \tau_{dyn}$ quindi il gas si raffredda piú rapidamente di quanto collassi: non c' é piú la pressione a contrastare il collasso quindi la struttura collassa. Se a fissata temperatura considero la curva a densitá piú basse la struttura sará in equilibrio. Considerando in oggetto di massa costante si dimostra che $T \propto n^{\frac{1}{3}}$, quindi gli oggetti a massa costante nel grafico corrispondono a rette con la pendenza di $\frac{1}{3}$. Considerando tutti i coefficienti le varie curve corrispondono a masse:

$$\begin{cases} M \sim 10^{10} M_\odot \\ M \sim 10^{12} M_\odot \\ M \sim 10^{14} M_\odot \end{cases} \quad (140)$$

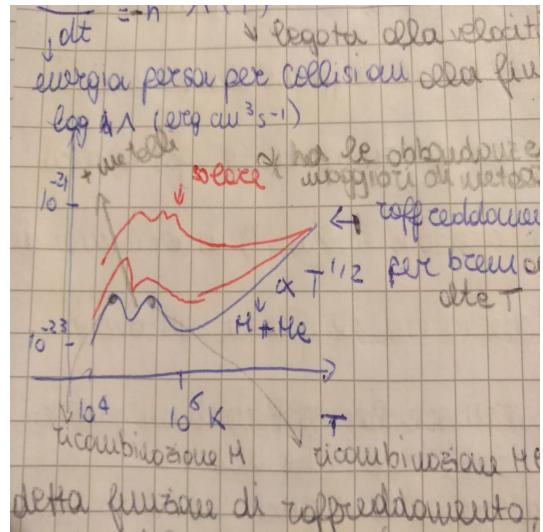


Figure 30: Curve di raffreddamento: frazione di ionizzazione in funzione della temperatura.

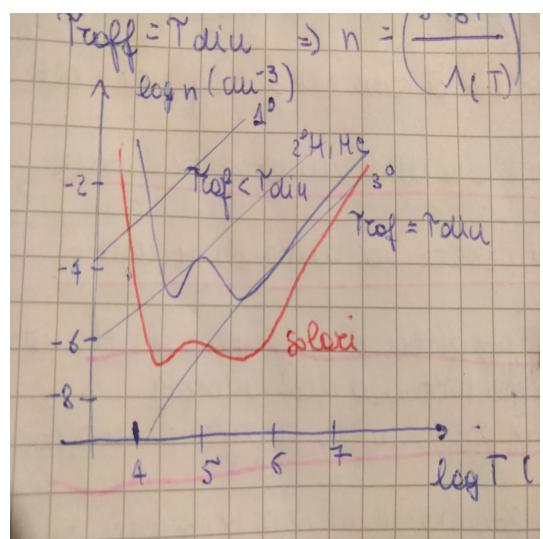


Figure 31: **Curve di collasso:** densità in funzione della temperatura

Sulla terza retta stanno gli ammassi di galassie, il loro $\tau_{dyn} \sim \tau_{raff}$: la pressione del gas al loro interno impedisce il collasso gravitazionale. Infatti in queste strutture si ha per (80 – 90)% il gas a temperature $T \sim KeV$, il tasso di formazione stellare é molto basso in quanto il gas é rimasto caldo. Mentre sulla prima retta a $10M_\odot$, scala di massa galattica, la maggior parte del gas si é raffreddato formando stelle. Queste considerazioni ci danno un'idea piuttosto qualitativa su che massa aspettarci nelle strutture barioniche, ma la questione é piú complessa. Nel momento in cui il gas collassa per formare stelle puó riscaldare a sua volta il messo intergalattico, esattamente come aveva ionizzato il gas. Si deve tenere conto del fatto che esistono problemi aperti nei **modelli di formazione stellare** a piccole scale, che possono essere originati da scala piccola o cosmologica. In questo tipo di formazione di strutture si riproduce in maniera qualitativamente corretta anche il fatto che regioni molto dense sono ricche di galassie ellittiche, viceversa quelle poco dense sono ricche di galassie a disco. Il quadro é corretto ma mancano una serie di dettagli, soprattutto nella formazione di galassie che coinvolga dalle scale atomiche a quelle cosmologiche. L'epoca della ionizzazione sarà invece oggetto di survey radio, perché vogliamo andare a vedere distribuzioni di HI che emette nella riga a $\lambda > 21cm$, da cui estrapoleremo informazioni sulla struttura a larga scala.