

## 算法设计与分析第四次作业

1. 现有一台计算机，在某个时刻同时到达了  $n$  个任务。该计算机在同一时间只能处理一个任务，每个任务都必须不间断地被处理。该计算机处理这  $n$  个任务需要的时间分别为  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。将第  $i$  个任务在调度策略中的结束时间记为  $e_i$ 。请设计一个贪心算法输出这  $n$  个任务的一个调度使得用户的平均等待时间  $\frac{1}{n} \sum e_i$  达到最小。

请给出上述问题的贪心选择策略，贪心选择性证明，优化子结构证明，贪心算法伪代码，以及输入为  $\{1, 3, 2, 15, 10, 6, 12\}$  时的输出。

2. 存放于磁带上文件需要顺序访问。故假设磁带上依次存储了  $n$  个长度分别是  $L[1], \dots, L[n]$  的文件，则访问第  $k$  个文件的代价为  $\sum_{j=1}^k L[j]$ 。现给定  $n$  个文件的长度  $L[1], \dots, L[n]$ ，并假设每个文件被访问的概率相等，试给出这  $n$  个文件在磁带上的存储顺序使得平均访问代价最小。

- (1) 简述算法采用的贪心策略。
- (2) 表述并证明问题的贪心选择性。
- (3) 表述并证明问题的优化子结构。
- (4) 写出算法的伪代码。
- (5) 分析算法的时间复杂度。

3. 设  $G = \langle V, E, W \rangle$  是一个通信网络，其中结点集  $V$  是站点集合，边集  $E$  是站点之间的链路集合， $\forall e \in E$ ，权值  $w(e)$  表示带宽，并且假设每条边的权都不相等。对于任意站点  $u, v \in V$ ，一条  $u-v$  路径  $P$  的最大带宽是  $w(P) = \min\{w(e)\}$ ，即这条路径上的所有边的  $e \in P$  带宽的最小值。而  $u-v$  之间的最佳带宽  $w(u, v) = \max\{w(P) | P \text{ 是一条 } u-v \text{ 路径}\}$ ，即所有  $u-v$  路径带宽的最大值。这也是  $u$  与  $v$  之间通信的最佳带宽。

- (1) 证明存在一棵生成树，使得在这棵树中，连接每对结点  $u$  和  $v$  唯一路径的最大带宽等于  $u$  与  $v$  之间的最佳带宽。
- (2) 设计一个找这样一棵生成树的算法并分析算法的时间复杂度。

4. 设  $S=\{1,2,\dots,n\}$  是  $n$  项广告的集合, 广告  $i(i=1,2,\dots,n)$  有发布时间  $s(i)$ 、截止时间  $d(i)$ 、发布效益是  $v(i)$ , 其中,  $s(i)$  是非负整数,  $d(i)$  和  $v(i)$  是正整数, 且  $d(1)\leq d(2)\leq \dots\leq d(n)$ 。问题是: 如何在  $S$  中选择一组广告  $A$ , 使得  $A$  中任意两个广告都相容(时间段不重叠)且总效益最大?
- (1) 假设所有广告的效益都相等, 试设计一个求解上述问题的算法, 证明其正确性, 并说明时间复杂度。
- (2) 如果效益  $v(i)$  可以取任意正整数, 设计一个算法求解这个问题, 用文字说明算法的设计思想和主要步骤分析算法最坏情况下的时间复杂度。
5. (第 6 章平摊分析题目) 请叙述如何用两个栈实现一个队列, 使得 ENQUEUE 和 DEQUEUE 操作的平摊代价都是  $O(1)$ , 并解释原因。
6. (第 6 章平摊分析题目) 设计一个数据结构支持由整数组成的动态多重集合  $S$  (包含可能重复整数的集合) 中的操作: (1)  $\text{Insert}(S, x)$  将整数  $x$  插入  $S$  中; (2)  $\text{Delete-Larger-Half}(S)$  删除  $S$  中最大的  $\lceil |S|/2 \rceil$  个整数。对于任意由  $\text{Insert}$  和  $\text{Delete-Larger-Half}$  组成的长度为  $m$  的操作序列, 要求其总体代价是  $O(m)$ , 并且可以在  $O(|S|)$  代价内输出  $S$  的所有元素。请详细叙述这一数据结构, 并解释原因。