第八章

图算法

提要

8.1　网络流算法

8.2　单源最短路径问题

参考资料

Introduction to Algorithms
第24、26章

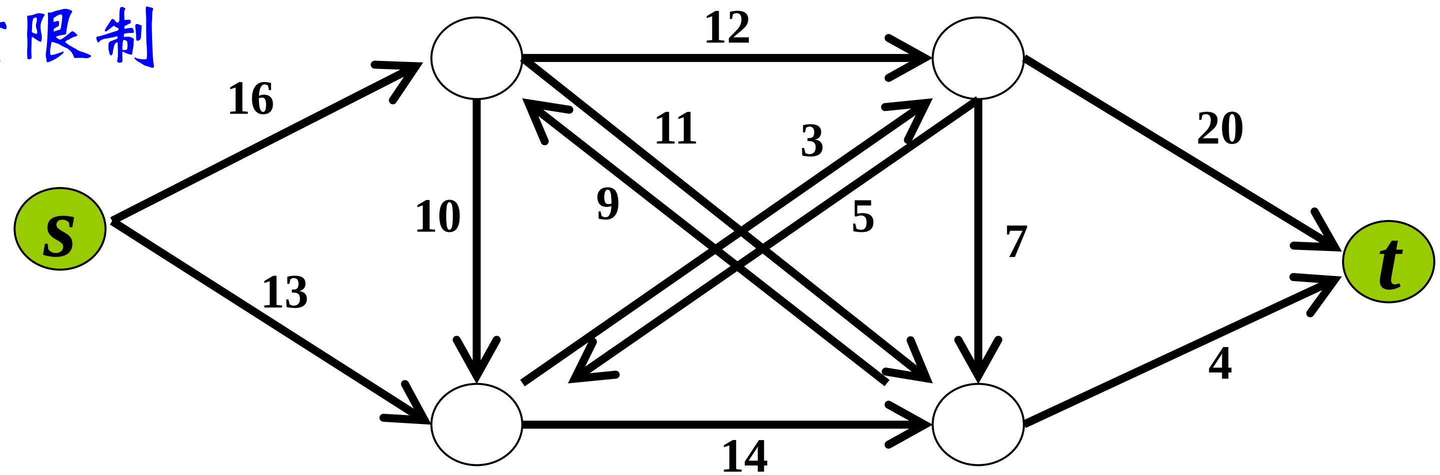
8.1 网络流算法

- 基本概念与问题定义
- Ford-Fulkerson方法

8.1.1 基本概念与问题定义

应用背景

- 很多实际问题可以建模为流网络
  - 装配线上物件的流动
  - 电网中电流的流动
  - 通信网络中信息的流动
  - 道路交通网络中的运输活动
  - ……
- 一个源节点s、一个汇点t，由源节点流向汇点
  - 流量守恒
  - 容量限制



基本概念

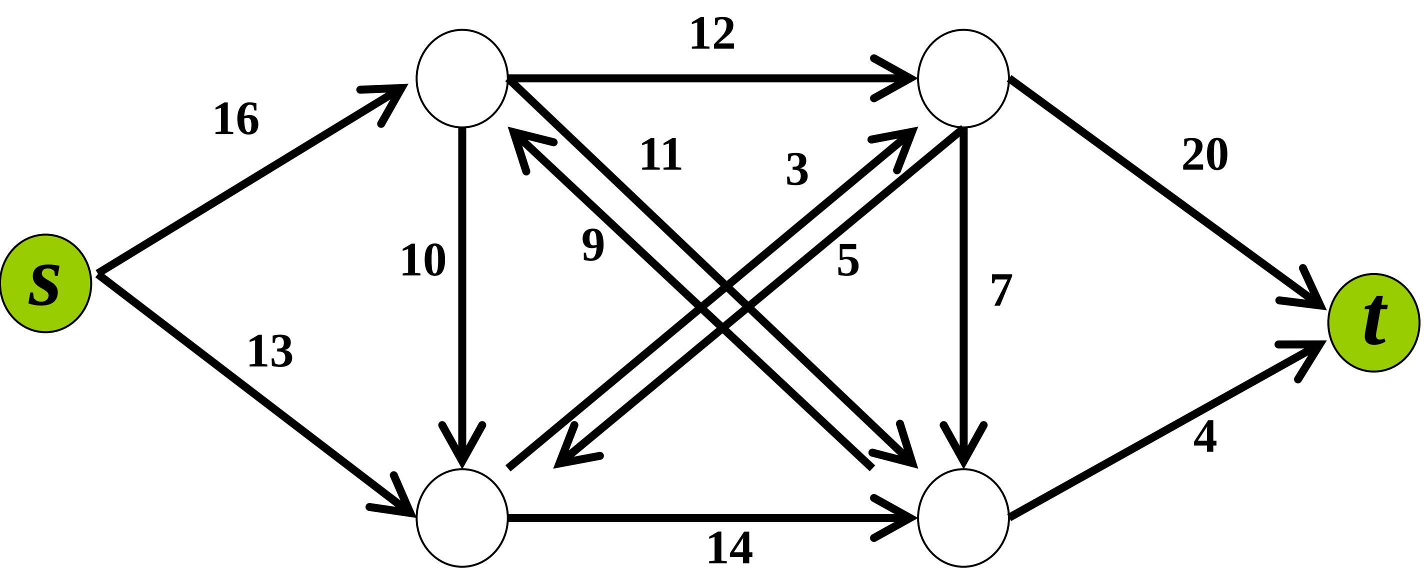
- 流网络

  是一个无自环的有向图$G=(V, E)$，

  (1) 图中的每条边$(u, v)\in E$有一个非负的容量值$c(u, v)\geq 0$。
  if $(u, v)\notin E$ $c(u, v)=0$；

  (2) 有两个特殊结点$s, t\in V$，s称为源结点(source)，t称为汇点(sink)

  (3) For $\forall v\in V$，存在一个s到t经过v的路径$s\Rightarrow v\Rightarrow t$.



流网络是连通的

除源结点外，每个结点都至少有一条进入的边，所以$|E| \geq |V|-1$

基本概念

- 流(Flow)

设$G(V,E)$是一个流网络，c是容量函数，s源结点，t是汇点。G中的流是一个实值函数f: $V\times V\rightarrow R$，满足下列性质：

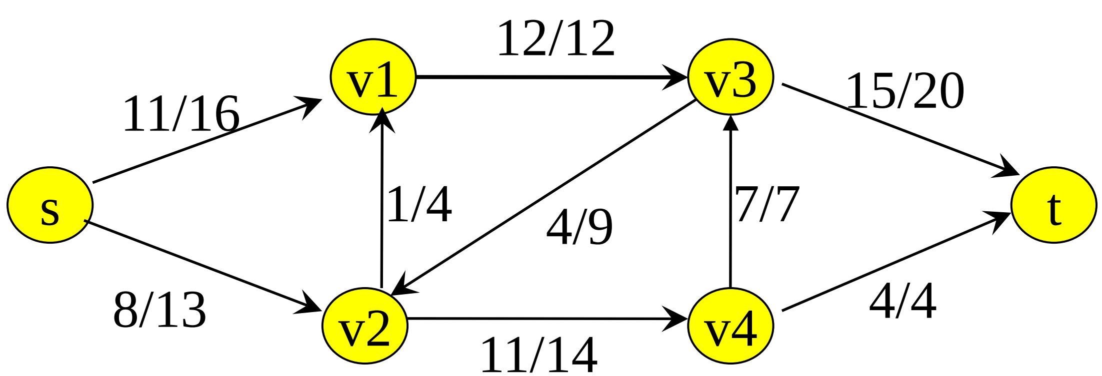
(1) 容量约束：$\forall u,v\in V$, $0\le f(u,v)\le c(u,v)$；

(2) 流量守恒： $\forall u\in V-\{s,t\}$, 有

$$\sum_{v\in V} f(v,u)=\sum_{v\in V} f(u,v)$$

称$f(u,v)$为从结点u到结点v的流

当$(u,v)\notin E$时，从结点u到v之间没有流，因此$f(u,v)=0$.



一个流f的值$|f|$定义为：

$$\sum_{v\in V} f(s,v)-\sum_{v\in V} f(v,s)$$

- 流(Flow)

设$G(V,E)$是一个流网络，c是容量函数，s源结点，t是汇点。G中的流是一个实值函数f：$V\times V\rightarrow R$，满足下列性质：

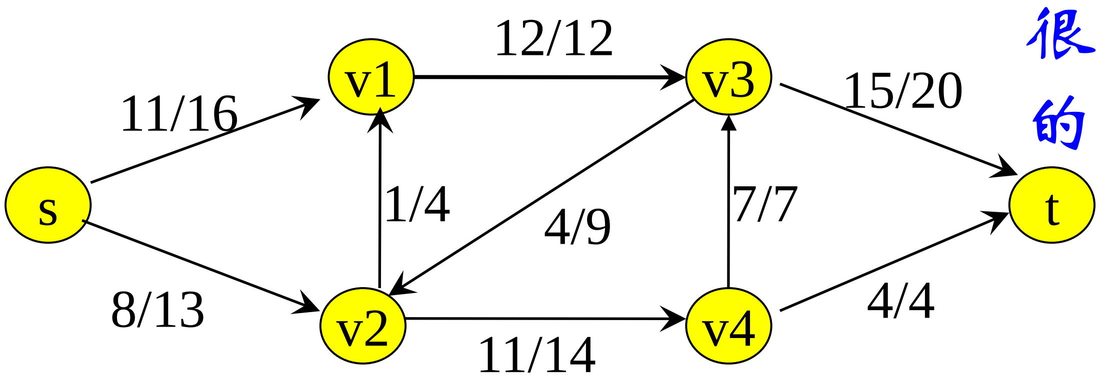
(1) 容量约束：$\forall u,v\in V$, $0 \le f(u, v) \le c(u, v)$；

(2) 流量守恒：$\forall u\in V-\{s,t\}$, 有

$$\sum_{v\in V} f(v,u) = \sum_{v\in V} f(u,v)$$

称$f(u, v)$为从结点u到结点v的流

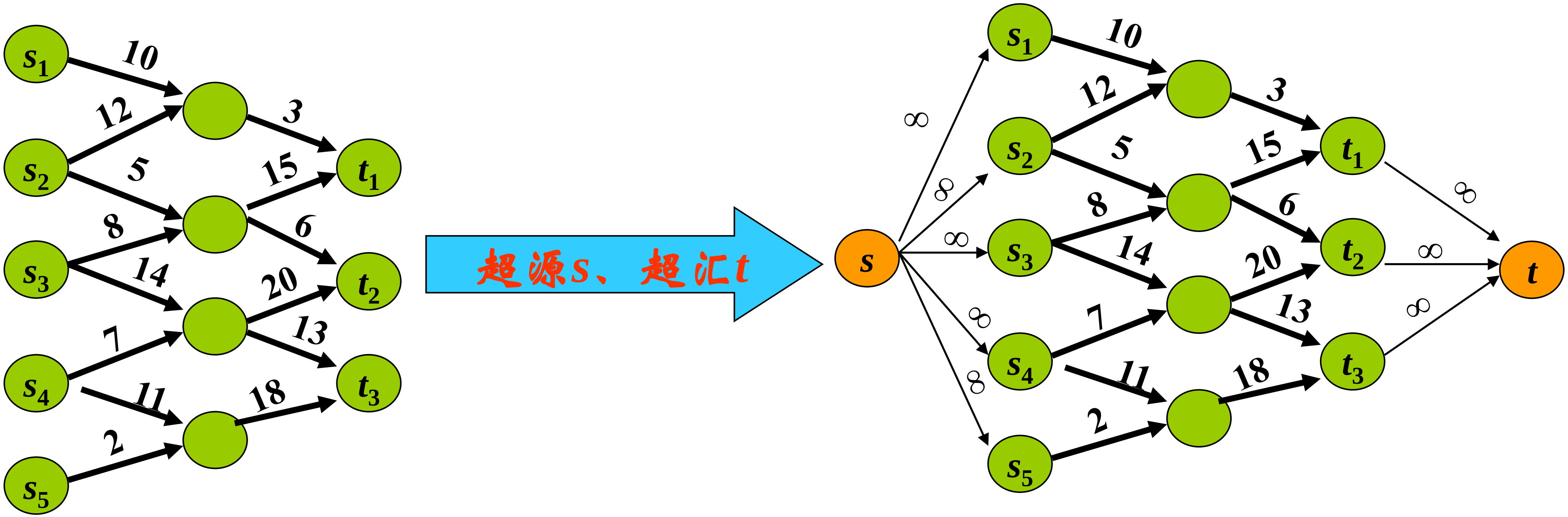
当$(u, v)\notin E$时，从结点u到v之间没有流，因此$f(u, v)=0$.



很多流网络中没有进入source的边，一个流f的值$|f|$定义为：

$$\sum_{v\in V} f(s,v)$$

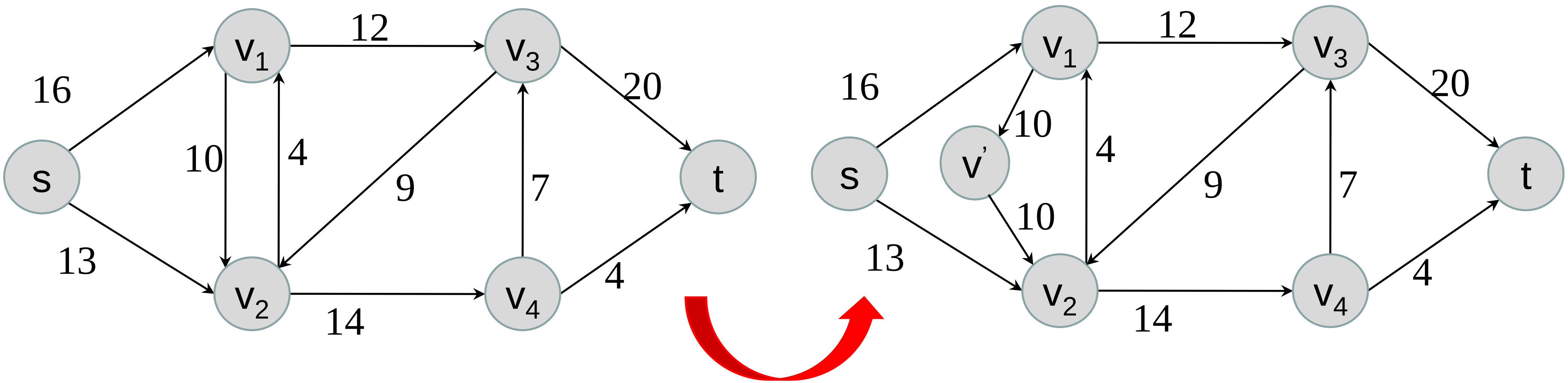
- 多源多汇的网络



只需讨论单源单汇的网络流

一些假设

- 单源结点、单汇点流网络
- 假设：流网络中无反向边
  - 给定有向图$G=(V, E)$，如果边$(u, v)\in E$，则边$(v, u)\notin E$



最大流问题

- 问题定义
  - 输入：流网络$G=(V, E)$
  - 输出：具有最大流值的流f

直观想法

- 循环递进
  - 初始：网络上的流为0
  - 找出一条从s到t的路径p和正数a，使得p上的每一条边(u,v)的流量增加a之后仍能够满足容量约束：$f(u,v)+a \le c(u,v)$

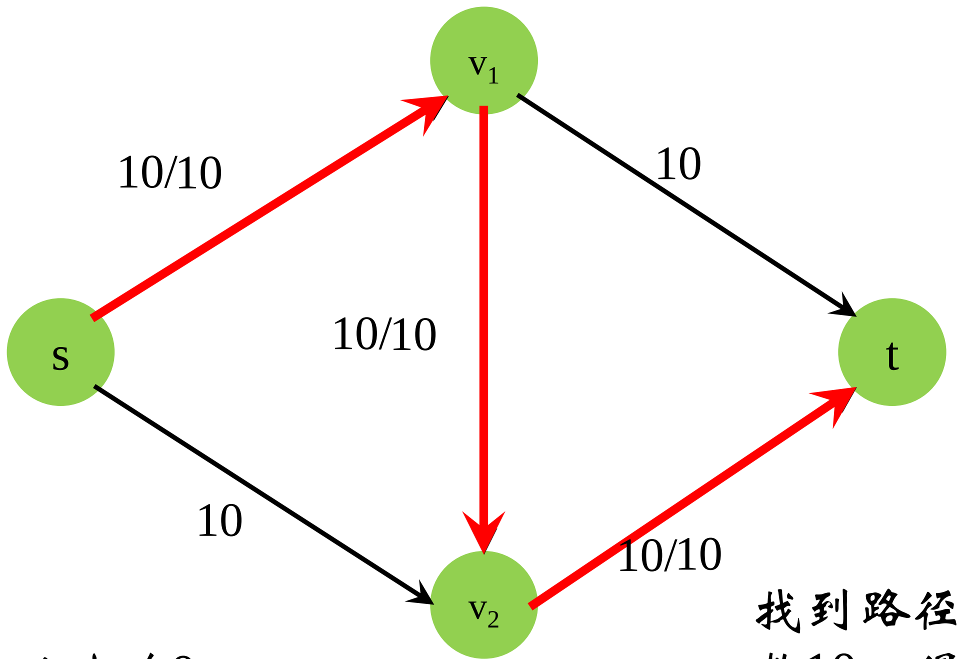
    //将p上的每条边的流量增加a，得到一个更大的流
  - 重复执行第二步，直到找不到满足约束条件的路径.

关键在于：

1. 如何找路径p，以便得到更大的流？
2. 如何判断循环结束的条件？

   即：当循环结束时，所得到的流一定是最大流么？

无法找到更大的流，也无法找到最大流！



初始：网络上的流为0

$$f(s, v_1) = 0$$
$$f(v_1, v_2) = 0$$
$$f(v_2, t) = 0$$
$$f(s, v_2) = 0$$
$$f(v_1, t) = 0$$

找到路径$s \to v_1 \to v_2 \to t$和正数10，得到一个更大的流：

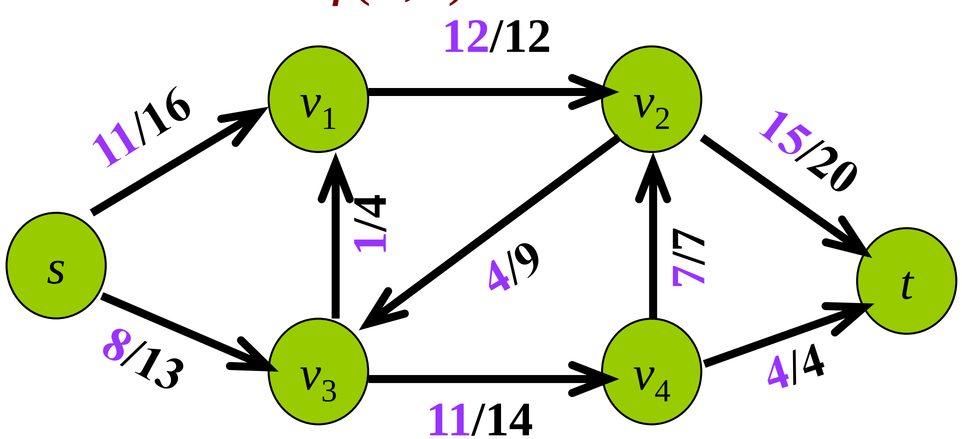
$$f(s, v_1) = 10$$
$$f(v_1, v_2) = 10$$
$$f(v_2, t) = 10$$
$$f(s, v_2) = 0$$
$$f(v_1, t) = 10$$

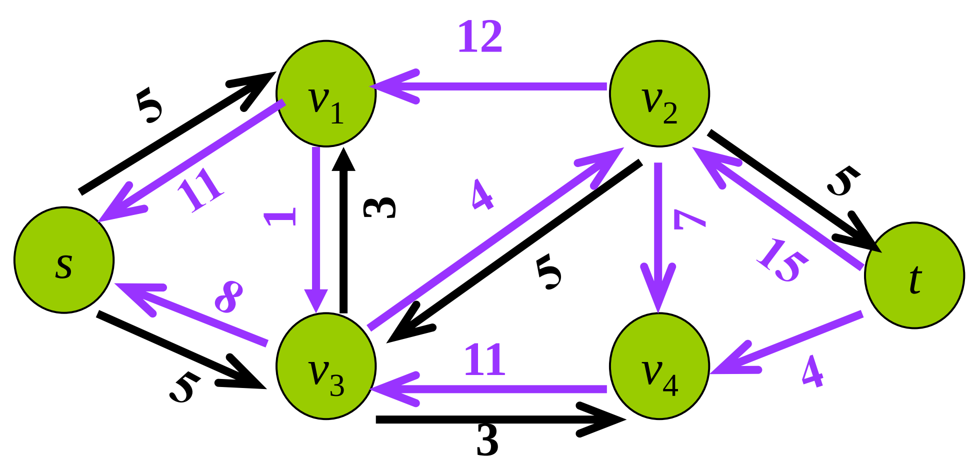
8.1.2 Ford-Fulkerson方法

- 如何找路径p，以便得到更大的流?
- 如何判断循环结束的条件?

相关概念

- 在一个关联的剩余网络中寻找一条增广路径
- 剩余网络(Residual network)
  - 给定流网络$G(V,E)$和一个流f，则由f诱导的G的剩余网络为$G_f=(V, E_f)$，其中E_f为
    - 对于G中每条边(u, v)，若$c(u,v)-f(u,v)>0$，则$(u, v) \in E_f$，且$c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$ （称$c_f(u,v)$为剩余容量residual capacity）
    - 对于G中每条边(u, v)，若$f(u,v)>0$，在G_f中构造边(v, u)，且$c_f(v, u)=f(u,v)$





E_f中的边要么是E中原有的边，要么是其反向边，因此$|E_f|\le 2|E|$

相关概念

- 剩余网络类似于一个容量为c_f的流网络，但包含反向边
- 也可以把流网络G看成是一个当前流f=0的剩余网络
- 可以在剩余网络中定义一个流
- 设f'是剩余网络G_f中的流，f'同样满足容量限制和流量守恒，f'也有大小

相关概念

引理. 给定流网络$G(V,E)$和其中的流f，流f'是剩余网络G_f中的流，则通过f'提升f可以得到如下的流：

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{若 } (u,v) \in E \\ 0 & \text{否则} \end{cases},$$

而且$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

需要证明$f \uparrow f'$是一个流，而且$f \uparrow f'$的大小为$|f| + |f'|$.

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & 若\ (u,v) \in E \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

证明. 往证容量限制, 即$0 \le (f \uparrow f')(u,v) \le c(u,v)$.

对于任何$(u,v) \in E$, $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, $c_f(v,u) = f(u,v)$.

因此有$f'(u,v) \le c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, $f'(v,u) \le c_f(v,u) = f(u,v)$.

故而,
$$\begin{aligned}(f \uparrow f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \\ &\ge f(u,v) + f'(u,v) - f(u,v) = f'(u,v) \ge 0\end{aligned}$$

同时,
$$\begin{aligned}(f \uparrow f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \\ &\le f(u,v) + f'(u,v) \le f(u,v) + c_f(u,v) \\ &\le f(u,v) + c(u,v) - f(u,v) = c(u,v)\end{aligned}$$

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{若 } (u,v) \in E \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

证明. 往证流量守恒, 即对于任何$u \in V - \{s,t\}$, 有$\sum_{v\in V}(f \uparrow f')(u,v) = \sum_{v\in V}(f \uparrow f')(v,u)$.

对于给定的u, 令$V_1 = \{v|v \in V, (u,v) \in E\}$, $V_2 = \{v|v \in V, (v,u) \in E\}$, 由于流网络G中没有双向边, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. 对于$v \notin V_1$, 有$f(u,v) = 0$, $(f \uparrow f')(u,v) = 0$; 对于$v \notin V_2$, 有$f(v,u) = 0$, $(f \uparrow f')(v,u) = 0$.而且对于$v \notin V_1 \cup V_2$，(u,v)和(v,u)一定不在G_f中，故而$f'(u,v) = 0$, $f'(v,u) = 0$.

对于$u \in V - \{s,t\}$, 由于流f满足流量守恒, 于是有$\sum_{v\in V} f(u,v) = \sum_{v\in V} f(v,u)$. 进一步有 $\sum_{v\in V_1} f(u,v) = \sum_{v\in V} f(u,v) = \sum_{v\in V} f(v,u) = \sum_{v\in V_2} f(v,u)$.

与此同时, 流f'也满足流量守恒, 于是有$\sum_{v\in V} f'(u,v) = \sum_{v\in V} f'(v,u)$. 因此, 进一步有 $\sum_{v\in V_1} f'(u,v) + \sum_{v\in V_2} f'(u,v) = \sum_{v\in V_1\cup V_2} f'(u,v) = \sum_{v\in V} f'(u,v) = \sum_{v\in V} f'(v,u) = \sum_{v\in V_1\cup V_2} f'(v,u) = \sum_{v\in V_1} f'(v,u) + \sum_{v\in V_2} f'(v,u)$, 于是可得$\sum_{v\in V_1} f'(u,v) - \sum_{v\in V_1} f'(v,u) = \sum_{v\in V_2} f'(v,u) - \sum_{v\in V_2} f'(u,v)$.

基于以上推导, 对于任何$u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v\in V}(f \uparrow f')(u,v) = \sum_{v\in V_1}(f \uparrow f')(u,v) = \sum_{v\in V_1}(f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)) = \sum_{v\in V_1} f(u,v) + \sum_{v\in V_1} f'(u,v) - \sum_{v\in V_1} f'(v,u) = \sum_{v\in V_2} f(v,u) + \sum_{v\in V_2} f'(v,u)\, 0 - \sum_{v\in V_2} f'(u,v) = \sum_{v\in V_2}(f \uparrow f')(v,u) = \sum_{v\in V}(f \uparrow f')(v,u)$.

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{若 } (u,v) \in E \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

证明. 令$V_1 = \{v|(s,v) \in E\}$,令$V_2 = \{v|(v,s) \in E\}$, 可知$V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 而且$V_1 \cup V_2 \subseteq \mathrm{V}$.

$$|f \uparrow f'| = \sum_{v\in V} (f \uparrow f')(s,v) - \sum_{v\in V} (f \uparrow f')(v,s)$$

$$= \sum_{v\in V_1} (f \uparrow f')(s,v) - \sum_{v\in V_2} (f \uparrow f')(v,s)$$

$$= \sum_{v\in V_1} (f(s,v) + f'(s,v) - f'(v,s)) - \sum_{v\in V_2} (f(v,s) + f'(v,s) - f'(s,v))$$

$$= \sum_{v\in V_1} f(s,v) + \sum_{v\in V_1} f'(s,v) - \sum_{v\in V_1} f'(v,s)$$

$$- \sum_{v\in V_2} f(v,s) - \sum_{v\in V_2} f'(v,s) + \sum_{v\in V_2} f'(s,v)$$

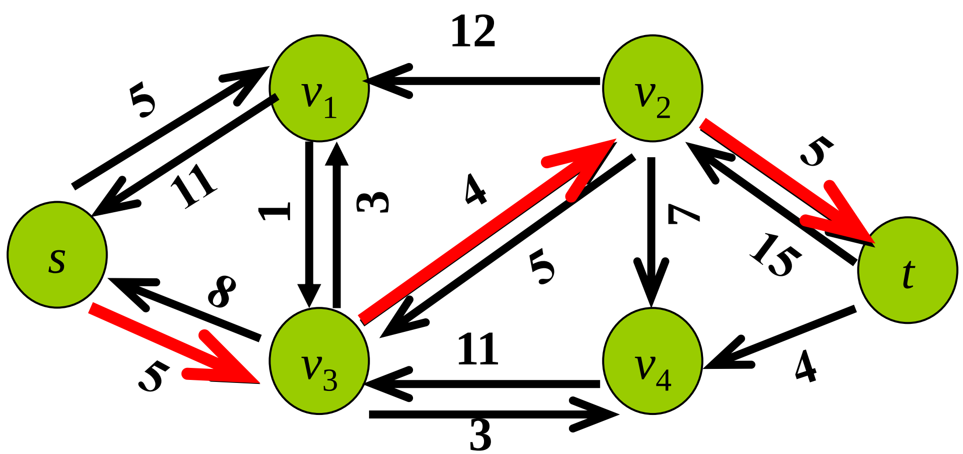
$$= \sum_{v\in V_1} f(s,v) - \sum_{v\in V_2} f(v,s)$$

$$+ \sum_{v\in V_1} f'(s,v) + \sum_{v\in V_2} f'(s,v) - \sum_{v\in V_1} f'(v,s) - \sum_{v\in V_2} f'(v,s)$$

$$|f| \qquad = \boxed{\sum_{v\in V_1} f(s,v) - \sum_{v\in V_2} f(v,s)} + \boxed{\sum_{v\in V_1\cup V_2} f'(s,v) - \sum_{v\in V_1\cup V_2} f'(v,s)\,.} \qquad |f'|$$

相关概念

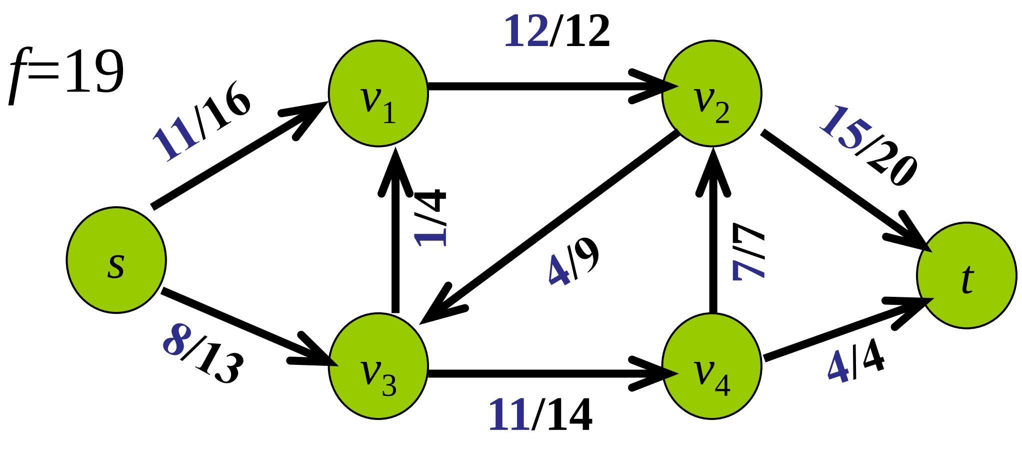
- 增广路径
  - 剩余网络中的由源结点s到汇点t的一条路径p
- 增广路径p的剩余容量
  - $c_f(p)=\min\{c_f(u, v) : (u, v)$属于路径$p\}$
    - 表示了该路径能够增加的流的最大值



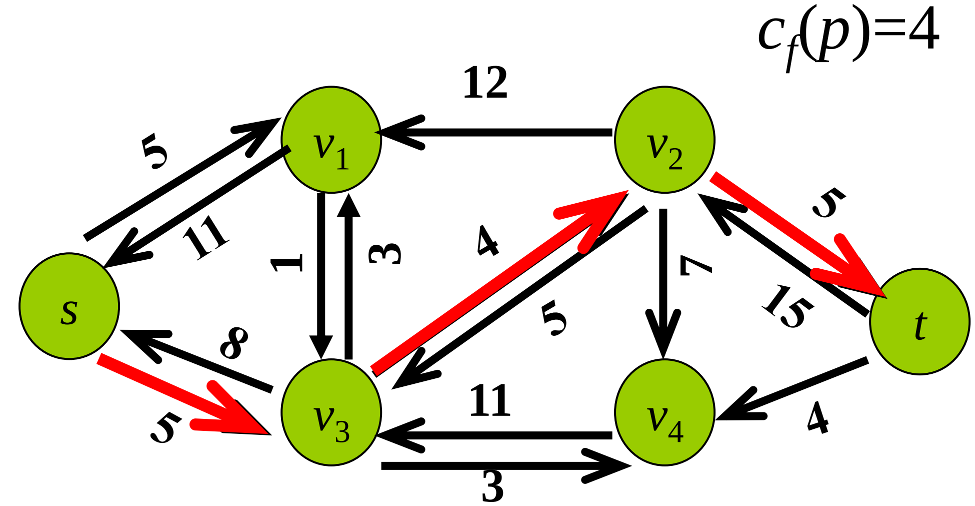
图中红色标注的路径为一条增广路径，其剩余容量为4

Ford-Fulkerson方法

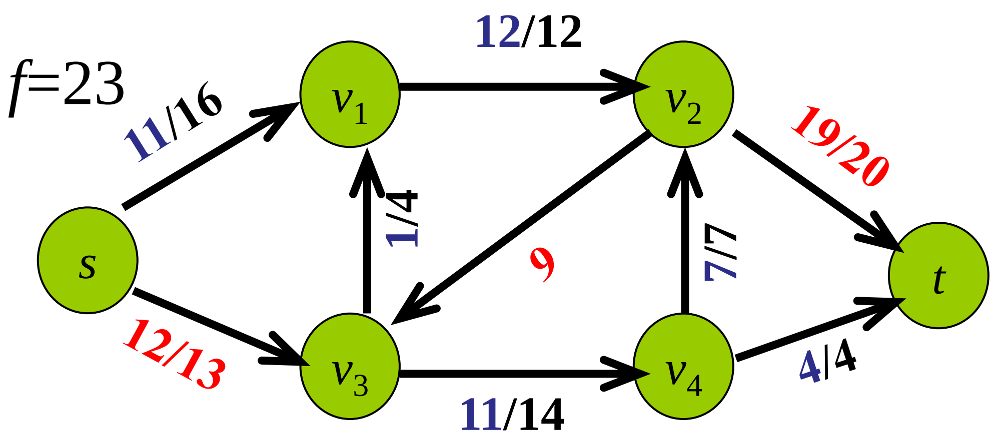
- 在剩余网络中寻找增广路径



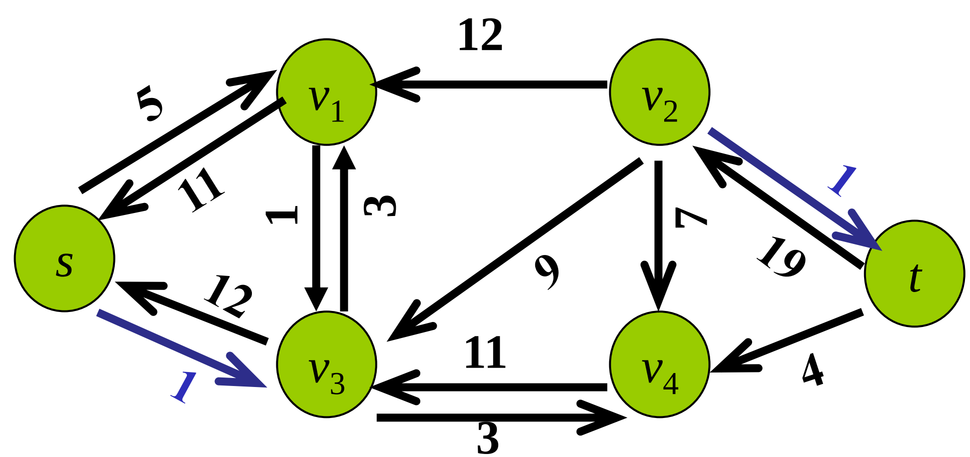
(a) 流网络G及流f



(b) 由(a)诱导的剩余网络



(c) 由增广路径得到的更大流



(d) 由(c)诱导的剩余网络

Ford-Fulkerson方法

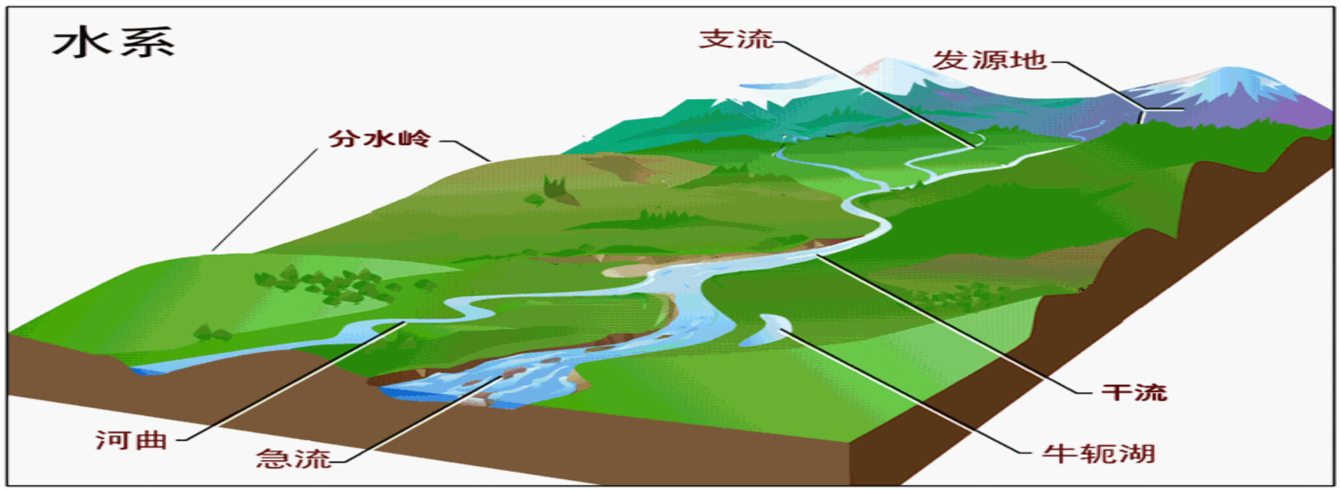
- FF算法的核心是：通过增广路径不断增加路径上的流量，直到找到一个最大流为止

问题：
如何判断算法结束时，确实找到了一个最大流？

如何判断是否已获得最大流?

河水的**最大流量**取决于

干流中河道**狭窄处**的通行能力

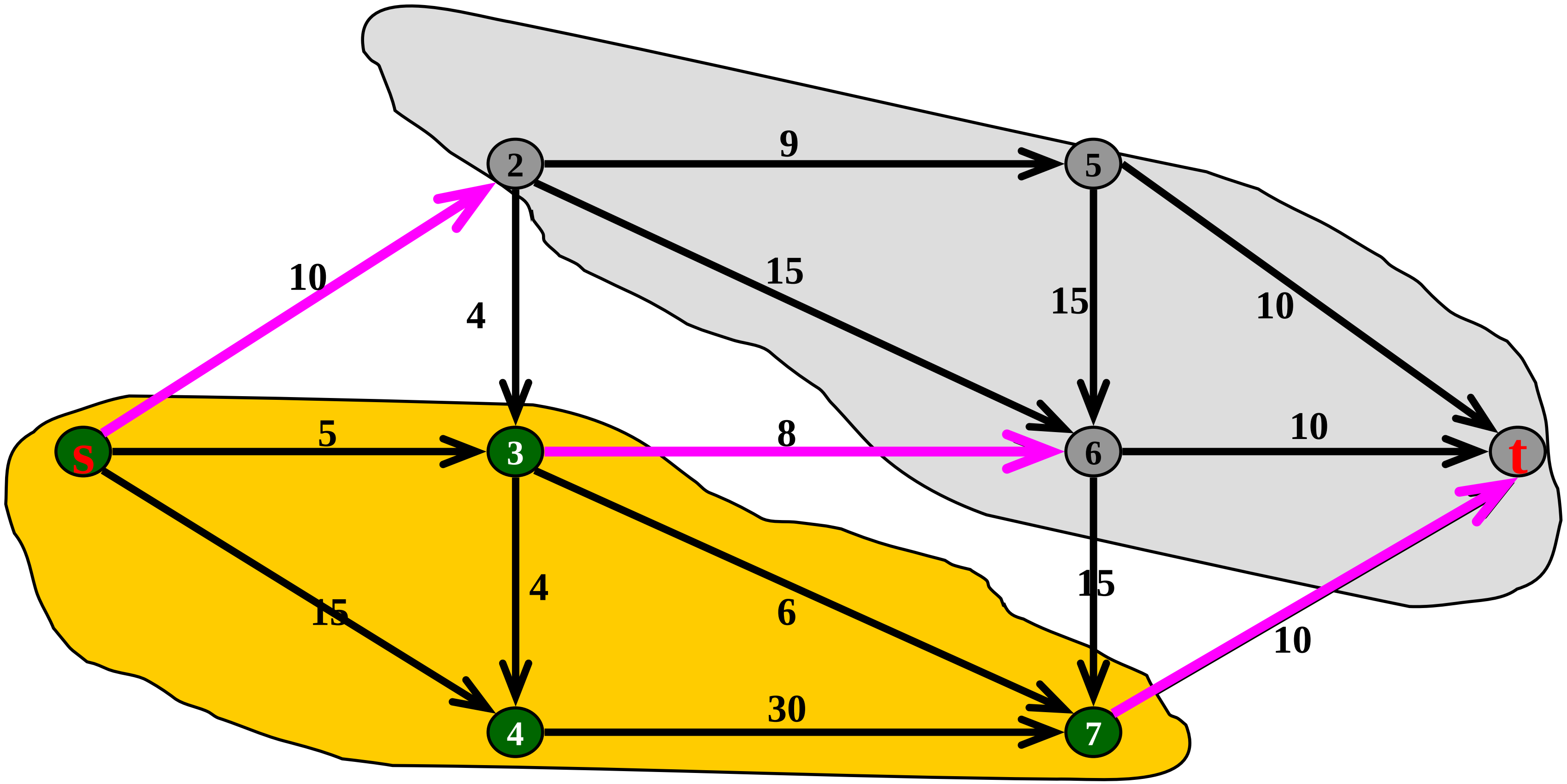


这种观察能否用于最大流问题呢?

如何判断是否已获得最大流?

HITWH
SE

从s流到t的最大流量不会超过10+8+10=28



流网络的割

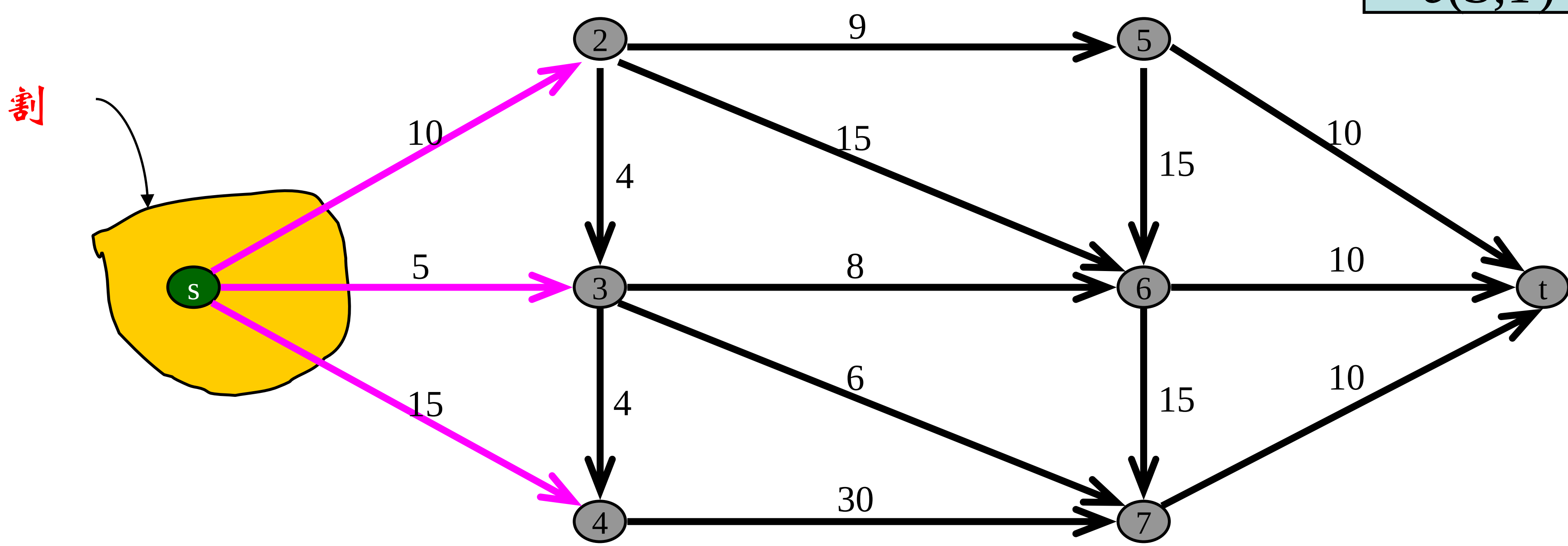
给定流网络 $G = (V,E)$,其源为s， 汇为t，

G的一个割(cut)是V的2-集合划分(S, T), $T=V-S$, 且$s\in S$, $t\in T$

割的容量定义为

$$c(S,T) = \sum_{u\in S, v\in T} c(u,v)$$

$c(S,T) = 30$

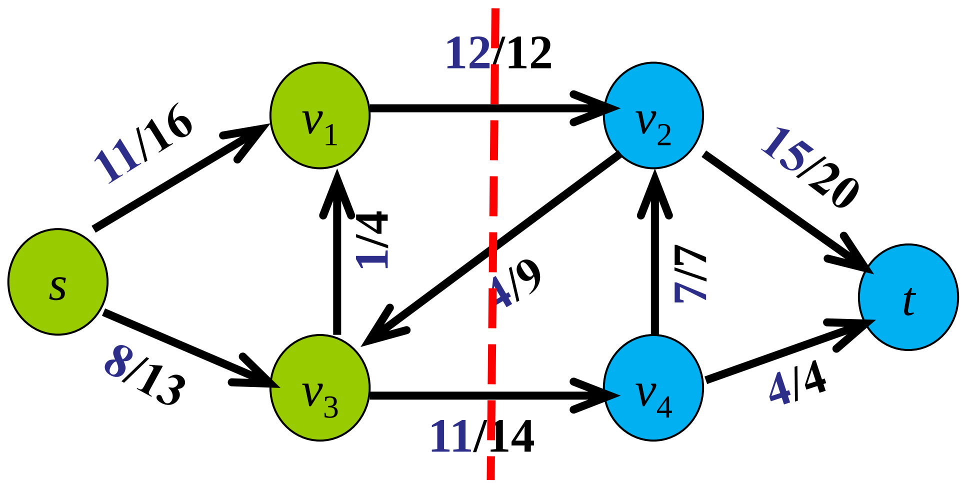


流网络的割

引理1. 设f为流网络G的一个流，该流网络的源结点为s，汇点为t，设(S,T)为流网络G的任意一个割，则横跨割(S,T)的净流量为$|f|$.

横跨割(S,T)的净流量定义为：

$$f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T}f(u,v)-\sum_{u\in S}\sum_{v\in T}f(v,u)$$



流网络G及流f

f=19

$$f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)-\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

证明. 对于任一$u \in V-\{s,t\}$, 有$\sum_{v\in V} f(u,v)-\sum_{v\in V} f(v,u)=0$.

因此, $|f|=\sum_{v\in V} f(s,v)-\sum_{v\in V} f(v,s)+\sum_{u\in S-\{s\}}(\sum_{v\in V} f(u,v)-\sum_{v\in V} f(v,u))$.

$$\begin{aligned}
|f| &= \sum_{v\in V} f(s,v)-\sum_{v\in V} f(v,s)+\sum_{u\in S-\{s\}}\sum_{v\in V} f(u,v)-\sum_{u\in S-\{s\}}\sum_{v\in V} f(v,u) \\
&= \sum_{v\in V}\left(f(s,v)+\sum_{u\in S-\{s\}} f(u,v)\right)-\sum_{v\in V}\left(f(v,s)+\sum_{u\in S-\{s\}} f(v,u)\right) \\
&= \sum_{v\in V}\sum_{u\in S} f(u,v)-\sum_{v\in V}\sum_{u\in S} f(v,u) .
\end{aligned}$$

由于$V=S\cup T$, 并且$S\cap T=\emptyset$,

$$\begin{aligned}
|f| &= \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(u,v)+\sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v)-\sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u)-\sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\
&= \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v)-\sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\
&\quad + \cancel{\left(\sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(u,v)-\sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u)\right)} .
\end{aligned}$$

推论1. 流网络G中任意流的值不能超过G的任意割的容量.

由引理知：

$$|f| = f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

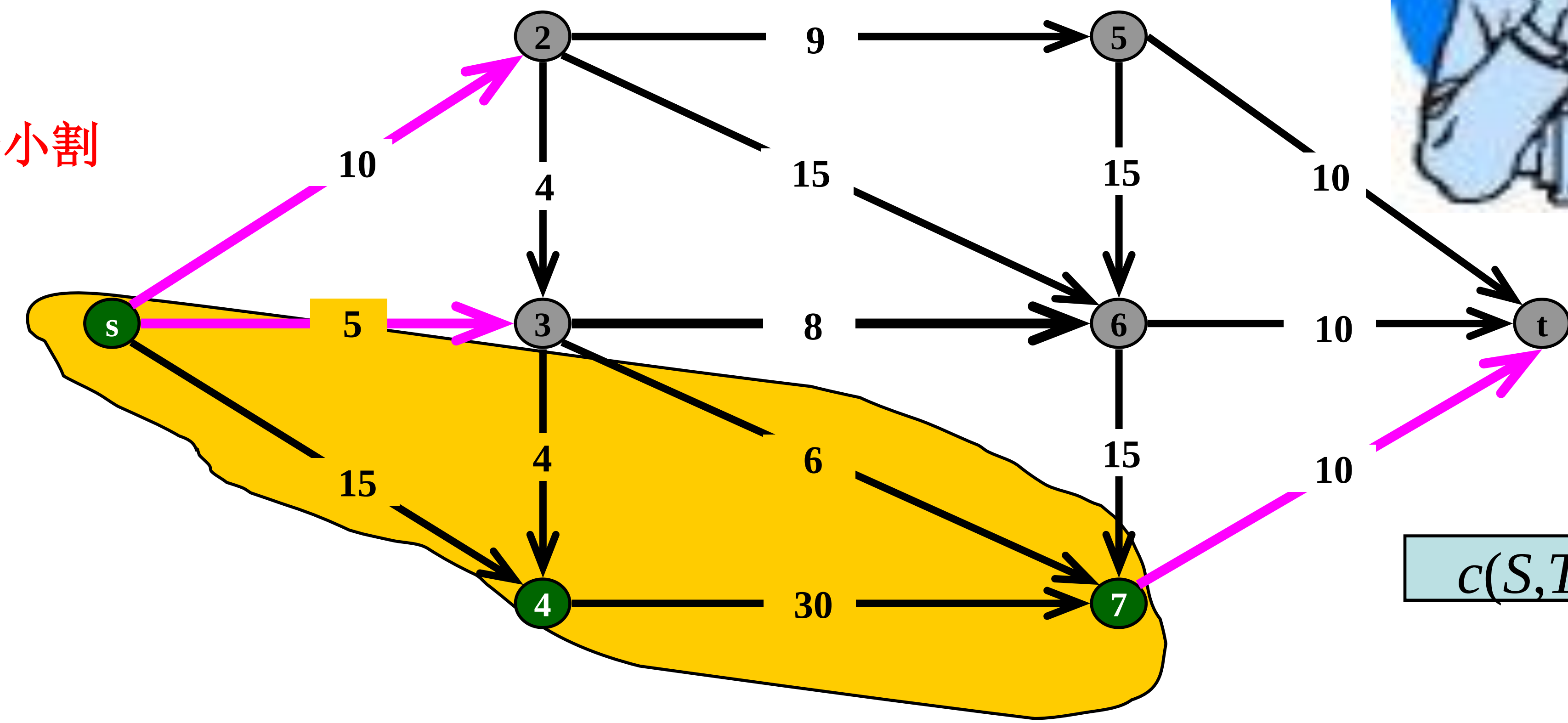
$$\le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)$$

$$\le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) \quad = c(S,T)$$

最小割

- 一个流网络的最小割
  是指：整个网络中容量最小的割

最小割



$c(S,T) = 25$

Max-Min关系

最大流最小割定理：

设f为流网络$G(V,E)$一个流，该流网络的源结点为s，汇点为t，则下面命题等价：

1. f是G的最大流.
2. 剩余网络G_f不包含增广路径.
3. 对于G的某个划分(S, T), $|f|=c(S, T)$.

一个最大流的值实际上等于一个最小割的容量

Max-Min关系：对偶关系

最大流与最小割

最大匹配与最小覆盖

……

Max-Min关系

- 对同一问题从不同角度考虑，有两种对立的描述
  - 例如，平面中矩形面积与周长的关系

正方形： 周长一定，面积最大的矩形

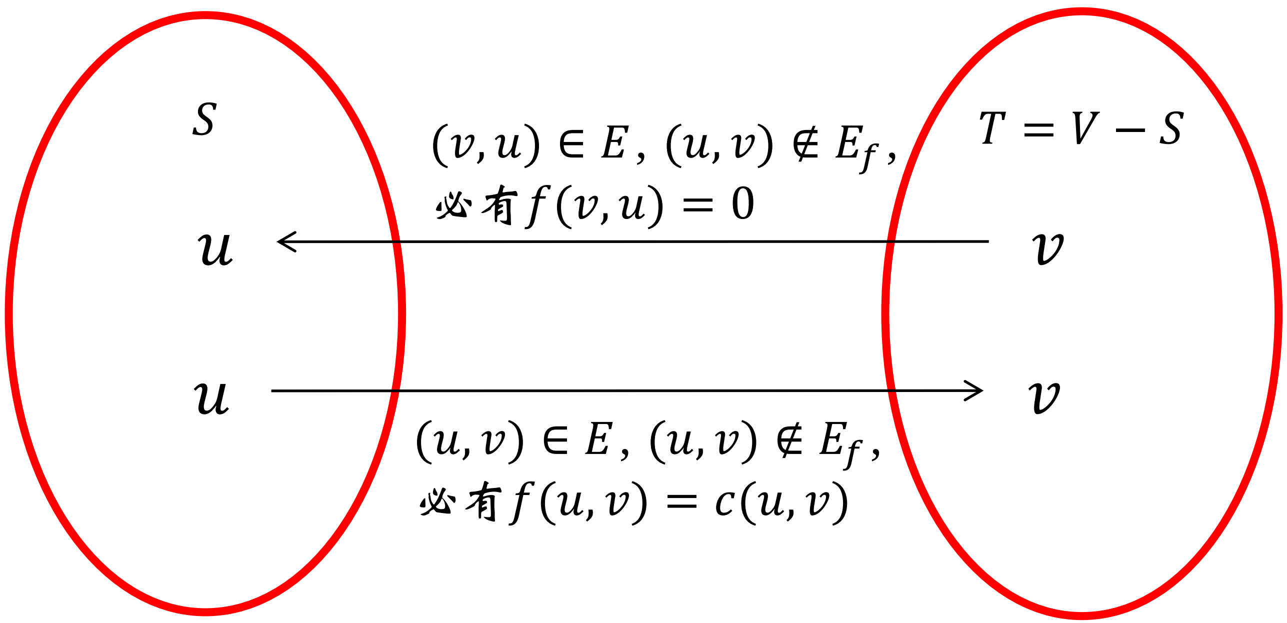
面积一定，周长最小的矩形

Max问题

Min问题

1. f是G的最大流.
2. 剩余网络G_f不包含增广路径.
3. 对于G的某个划分(S, T), $|f|=c(S, T)$.

证明概要：1→ 2，3→ 1比较直观，主要说明2→ 3



$S = \{v | v \in V, G_f$中从s到v有路径可达$\}$

$\forall u \in S, v \in T, (u, v) \notin E_f, E_f$ 是G_f的边集

$$f(S,T) = \sum_{u \in S}\sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S}\sum_{v \in T} f(v,u) = \sum_{u \in S}\sum_{v \in T} c(u,v) = C(S,T)$$

利用Max-Min关系求解最大流问题

1. 初始化一个可行流f
   - 0-流：所有边的流量均等于0的流
2. 不断将f增大，直到f不能继续增大为止
3. 找出一个割(S,T)使得$|f|=c(S,T)$
   - 由此断言f是最大流，而(S,T)是最小割

Max-Min关系提供了高效求解最大流-最小割问题的机制！

Ford-Fulkerson算法

算法Ford-Fulkerson(G,s,t)

Input　流网络G，源s，汇t

Output　G中从s到t的最大流

For $\forall(u,v)\in E[G]$ do
　　$f(u,v)\leftarrow 0$
　　$f(v,u)\leftarrow 0$
While G_f存在增广路径p do
　　$c_f(p)=\min\{c_f(u,v) \mid (u,v)$是$p$上的边$\}$
　　For p上的每条边(u,v) do
　　　　If (u,v)是流网络中的边 Then
　　　　　　$f(u,v) \leftarrow f(u,v)+c_f(p)$
　　　　Else
　　　　　　$f(v,u) \leftarrow f(v,u)-c_f(p)$

Ford-Fulkerson算法分析

- 正确性分析
  1. 算法输出的一定是最大流
     - 由最大流-最小割定理可得
  2. 算法可终止性
     - 假设整数容量，每次流量增加1

Ford-Fulkerson算法分析

算法Ford-Fulkerson(G,s,t)

Input 流网络G，源s，汇t

Output G中从s到t的最大流

1. For $\forall(u,v)\in E[G]$ do
2. $f(u,v)\leftarrow 0$
3. $f(v,u)\leftarrow 0$
4. While G_f存在增广路径p do
5. $c_f(p)=\min\{c_f(u,v)\mid (u,v)$是$p$上的边$\}$
6. For p上的每条边(u,v) do
7. If (u,v)是流网络中的边 Then
8. $f(u,v)\leftarrow f(u,v)+c_f(p)$
9. Else
10. $f(v,u)\leftarrow f(v,u)-c_f(p)$

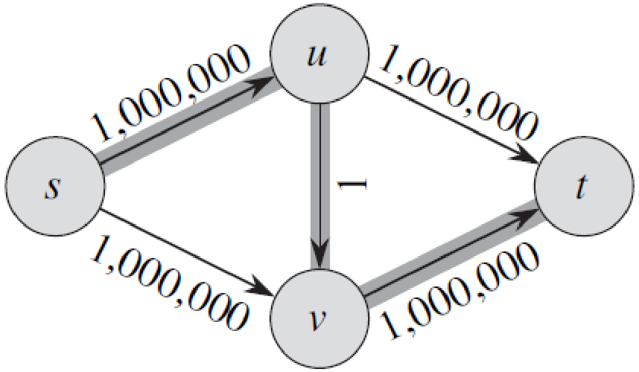
1-3步：$O(E)$

4-8步：循环次数最多为$|f^*|$

第4步在G_f中找路径(深度或宽度优先)代价$O(E)$

总的复杂度$O(|f^*||E|)$

最坏情况下，找到2000000条增广路径才能得到最大流，
最好情况下只需要2条！



如何改进Ford-Fulkerson算法？

加速增广路径的寻找

- 最短增广路径算法：始终沿着G_f中具有最少边的路径进行增广
- 最大增广路径算法：始终沿着G_f中具有最大容量的路径进行增广

Edmonds-Karp算法

- 利用宽度优先在剩余网络G_f中寻找增广路径
  - 从源结点s到汇点t的一条最短路径
  - 每条边的权重为单位距离
  - $\delta_f(u, v)$=剩余网络G_f中从结点u到结点v的最短路径距离
  - 算法复杂性：$O(|V||E|^2)$

Edmonds-Karp算法

引理2：如果Edmonds-Karp算法运行在流网络$G(V,E)$上，该网络的源结点为s，汇点为t，则对于所有的结点$v \in V\text{-}\{s,t\}$，剩余网络G_f中的最短路径距离$\delta_f(s, v)$随着每次流量的递增而单调递增。

证明：反证法，假设存在一个$v \in V-\{s,t\}$，使得$\delta_f(s,v)$减小.

令f是第一次发生最小距离减小之前的流，f'是第一次发生最小距离减小之后的流.

令v为f增长为f'的过程中，在最小距离减小的顶点中具有最小$\delta_{f'}(s,v)$，$\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$.

令路径$p: s \leadsto u \rightarrow v$是$G_{f'}$中从$s$到$v$的最短路径，最后一条边为$(u,v)$.

于是$\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$，而且$\delta_f(s,u) \leq \delta_{f'}(s,u)$. ($v$的选择方式)

考查边(u,v)是否在G_f中，如果在：

$\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1 \leq \delta_{f'}(s,u) + 1 = \delta_{f'}(s,v)$. 矛盾！

Edmonds-Karp算法

证明：反证法，假设存在一个$v \in V-\{s,t\}$，使得$\delta_f(s,v)$减小.令f是第一次发生最小距离减小之前的流，f'是第一次发生最小距离减小之后的流.令v为f增长为f'的过程中，在最小距离减小的顶点中具有最小$\delta_{f'}(s,v)$，$\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$.

令路径$p: s \rightsquigarrow u \rightarrow v$是$G_f$中从$s$到$v$的最短路径，最后一条边为$(u,v)$.于是有$\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u)+1$，而且$\delta_f(s,u) \le \delta_{f'}(s,u)$. 考查边$(u,v)$是否在$G_f$中，如果在：$\delta_f(s,v) \le \delta_f(s,u)+1 \le \delta_{f'}(s,u)+1 = \delta_{f'}(s,v)$. 矛盾！

若不在，则边(u,v)的出现必然因为f'在f中增大了(v,u)上的流.

Edmonds-Karp算法总是在最短路径上增大流，因此(v,u)必为G_f中从s到u的某条最短路径的最后一条边.

于是有$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u)-1 \le \delta_{f'}(s,u)-1 = \delta_{f'}(s,v)-2$.

再次矛盾！

因此不存在一个$v \in V-\{s,t\}$，使得$\delta_f(s,v)$减小，引理2成立。

Edmonds-Karp算法运行时间：$O(VE^2)$

定理1：如果Edmonds-Karp算法运行在流网络$G(V,E)$上，该网络的源结点为s，汇点为t，则算法所执行的流量递增操作的总次数为$O(VE)$。

证明要点：考查增广路径上剩余容量最小的边(u,v)——关键边.

$\delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1$，流$f$增大后关键边$(u,v)$将消失.

(u,v)再次出现时，是因为某次增大流f'时边(v,u)出现在增广路径上.

于是有$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1$. 同时，$\delta_{f'}(s,v)\geq\delta_f(s,v)$(引理2).

因此$\delta_{f'}(s,u)-\delta_f(s,u)\geq 2$.

边(u,v)成为关键边,而后再次成为关键边,s到u的最短距离至少增长2.

s到u的最短距离最大为$|V|-1$，因此每条边(u,v)成为关键边的次数不超过$(|V|-1)/2$. 共有$|E|$条边，所有边成为关键边次数之和不超过$(|V|-1)|E|/2$.

流量递增操作次数不大于所有边成为关键边次数之和(一次递增可能有多个关键边). 因此流量递增次数为$O(VE)$.

8.2 单源最短路径问题

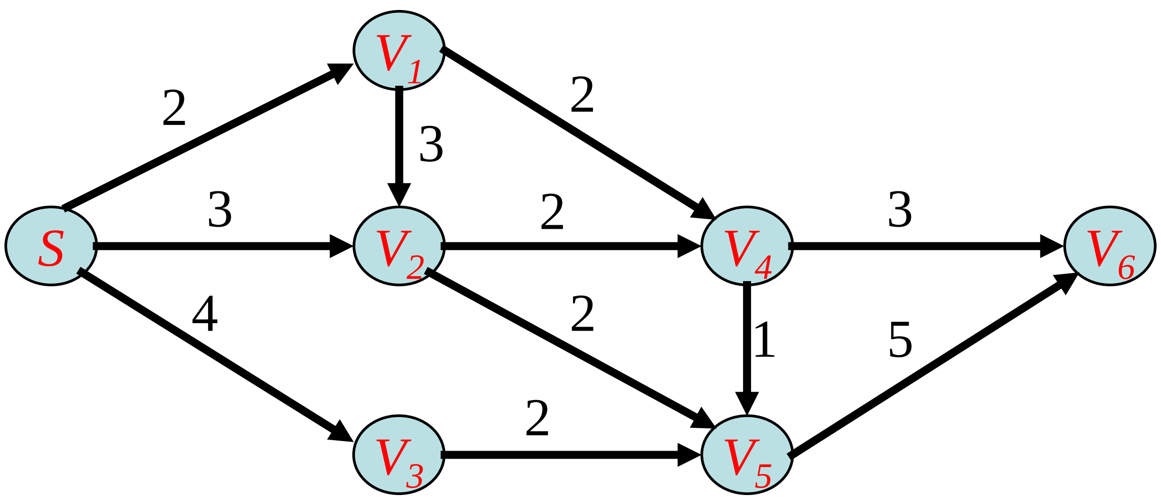
- 单源最短路径问题
- Bellman-Ford算法
- DAG中的算法
- Dijkstra算法

单源最短路径

- 问题定义

输入：给定一个带权的有向连通图$G(V, E)$和权重函数 $W:E\rightarrow\{实数\}$，源点s

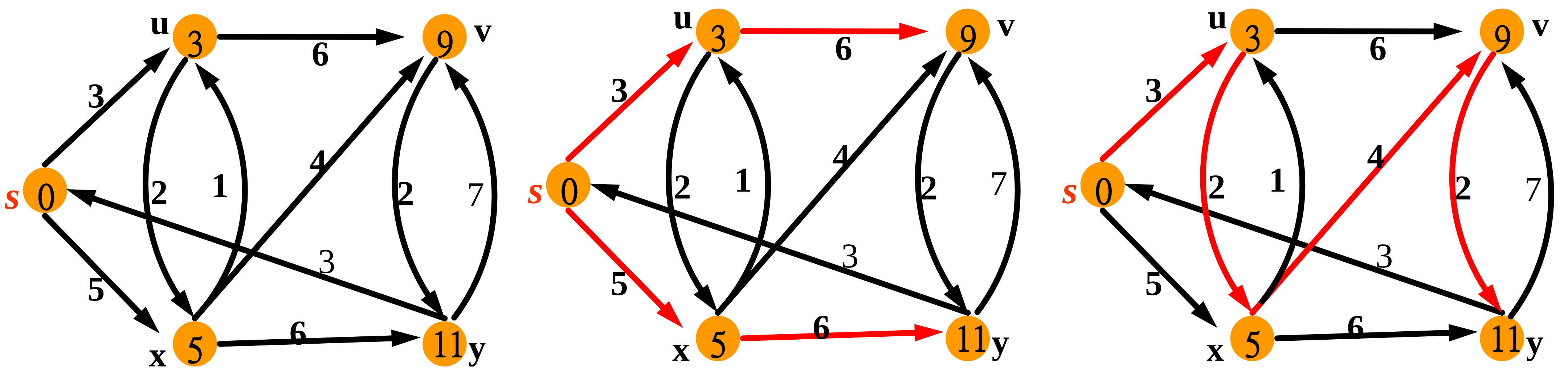
输出：对于$\forall v\in V$，由s到v的权值最小路径，即最短路径



可以应用在很多的领域：路由选择、社交网络、智慧交通等

单源最短路径

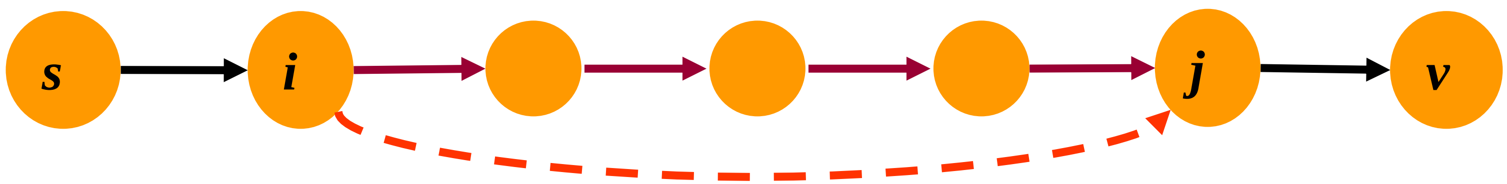
- 最短路径树
  - 一棵有根结点的树，包括了从源结点s到每个可以从s到达的结点的一条最短路径。
  - 最短路径不是唯一的，最短路径树也不是唯一的



最短路径的性质

- 优化子结构：最短路径包含最短子路径

设s到v的最短路径P经过顶点i和j，则P上从i到j的部分必然是i到j的最短路径



证明：如果某条子路径不是最短子路径

则必然存在最短子路径

用最短子路径替换当前子路径

当前路径不是最短路径

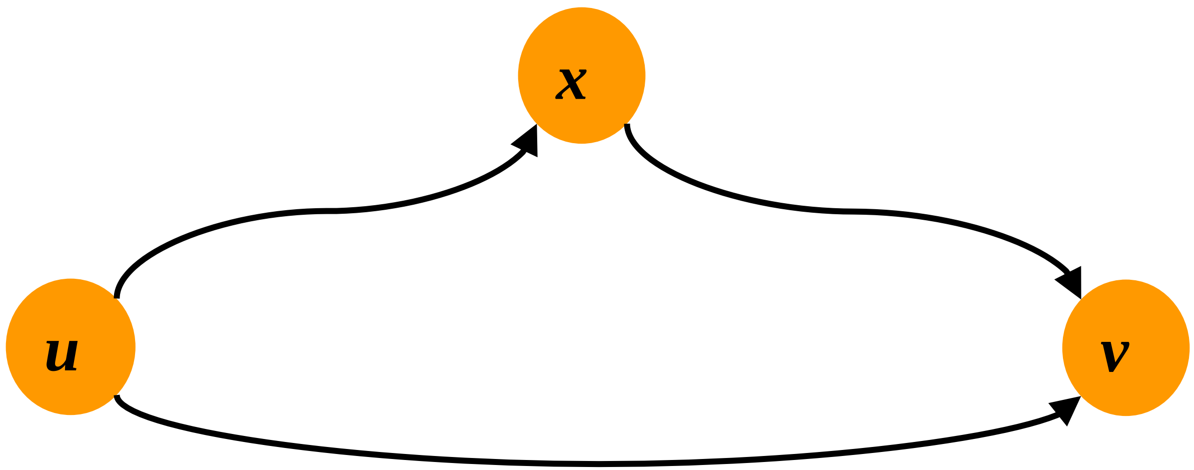
矛盾！

说明：该问题可以用贪心或动态规划方法来解

最短路径的性质

- 最短路径权重满足三角不等式性质
  - 令$\delta(u,v)$表示从u到v的最短路径的权重

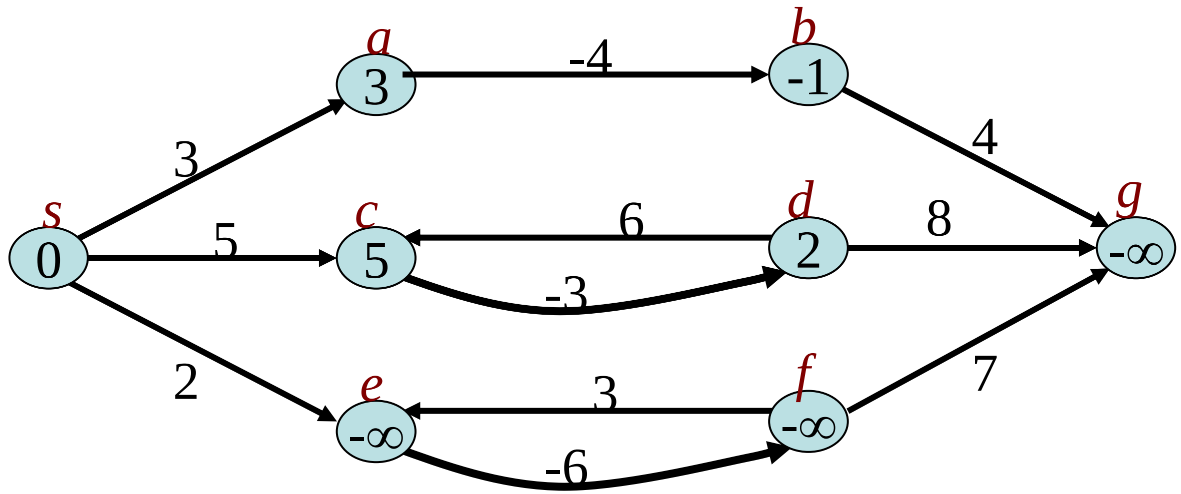
$$\delta(u,v) \le \delta(u,x) + \delta(x,v)$$



最短路径不比其他任何路径长

最短路径的相关问题

- 边权值为负值的问题
  - 在某些问题实例中，某些边的权值可能为负值
  - 如果$G=(V, E)$不包含可由s到达的负权值环，则对于任意$v \in V$，s到v的最短路径权重是有精确定义的.
  - 如果$G=(V, E)$包含可由s到达的负权值环，则对于任意$v \in V$，s到v的最短路径权重无定义.



最短路径的相关问题

- 环问题(最短路径不能包含非0环)
  - 一个最短路径如果包含负值环，它的权值只能$-\infty$
  - 一个最短路径如果包含正值环，去掉这个环后得到一个更短的路径，于是它不是最短路径
  - 一个最短路径可以包含0环，去掉该环后，路径权值相同
  - 我们假定：最短路径不包含环.
  - 无环路径至多包括|V|个节点，即至多包含|V|-1条边
  - 我们只关心边数至多为|V|-1的最短路径

最短路径的核心技术

- 松弛(Relaxation)
  - 令$\delta(s,v)$表示从s到v的最短路径的权值
  - 对所有v,维护$\delta(s,v)$的一个上界$d[v]$(对$\delta(s,v)$的一个估计)

算法Relax(u,v,w)

Input 顶点u和v, 图的加权函数w

Output 松弛后的$d[v]$

1. if ($d[v] > d[u]+w(u,v)$) then
2. $\quad d[v]=d[u]+w(u,v)$;
3. $\quad \pi[v]=u$; //将v的前驱结点置为u

初始化$d[s] = 0, \forall v \in V - \{s\}, d[v] = \infty$, 经过任意序列的Relax操作后:

- $d[v]$依旧是$\delta(s,v)$的上界;
- $d[v]$可以下降到$\delta(s,v)$;
- $d[v]$下降到$\delta(s,v)$后保持不变;
- $d[v] = \delta(s,v)$时, $u = \pi[v]$是s到v的某条最短路径上v的前驱顶点.

Bellman-Ford 算法

- 针对一般情况下的单源最短路径问题
  - 边的权值可以为负

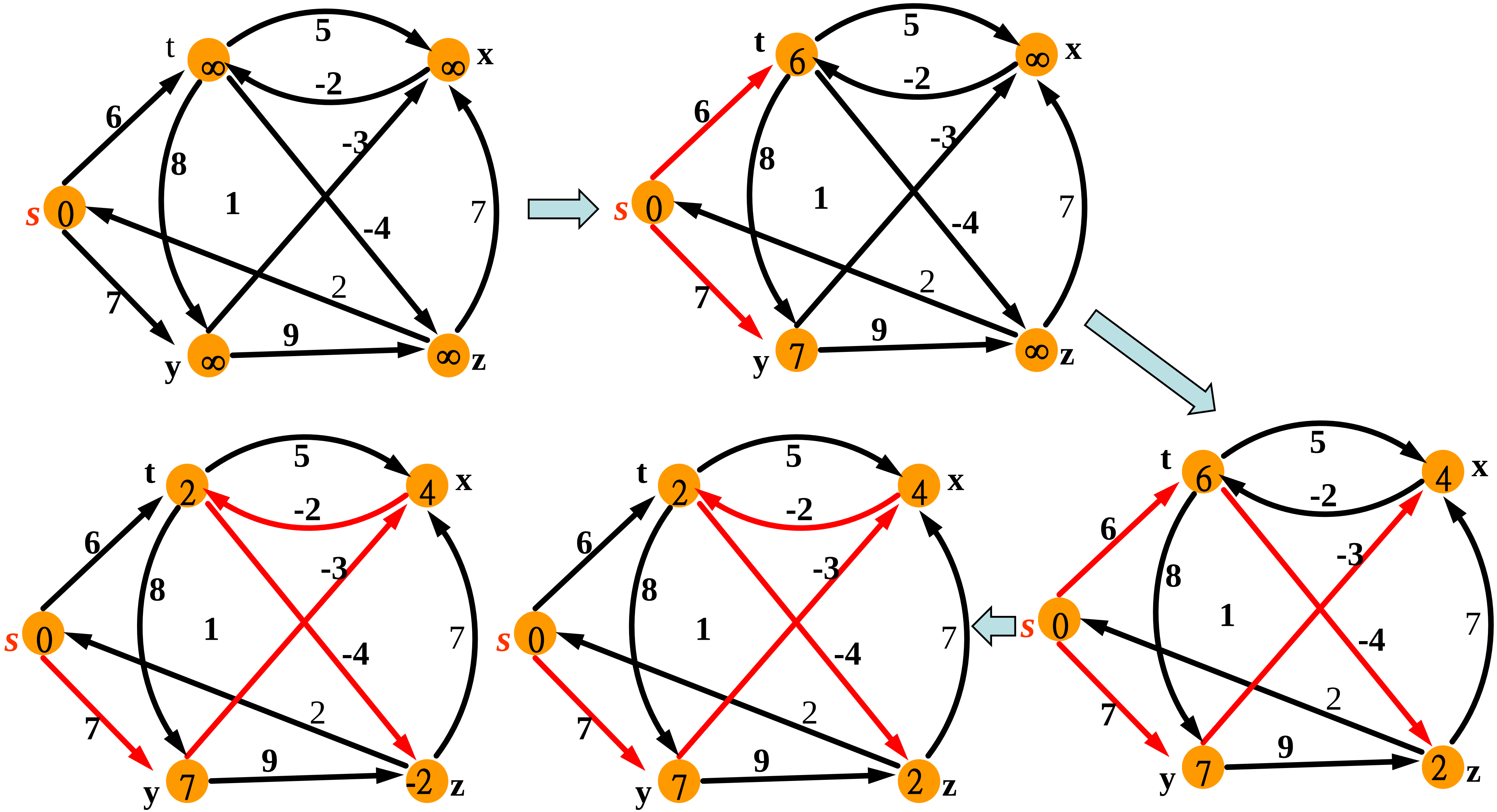
输入：带权有向图$G(V, E)$，及权重函数W：$E \rightarrow R$，源结点s

输出：是否存在一个从s可以到达的权值为负值的环路，

若不存在环路，则给出对应的最短路径及权重

Bellman-Ford算法主要思想：每轮对所有边进行一次松弛

$(t,x),(t,y),(t,z),(x,t),(y,x),(y,z),(z,x),(z,s),(s,t),(s,y).$



Bellman-Ford 算法

算法 Bellman-Ford(G,w,s)

Input 图$G=(V,E)$,边加权函数w,源顶点s

Output s到其所有可达顶点的最短路径

1. For $\forall v \in V$ do
2. $d[v] \leftarrow \infty$;
3. $\pi[v] \leftarrow$ null;
4. $d[s] \leftarrow 0$;
5. For $i \leftarrow 1$ to $|V|-1$ do
6. For $\forall (u,v) \in E$ do
7. Relax(u,v,w);
8. For $\forall (u,v) \in E$ do
9. If d(v)>d(u)+w(u,v) then
10. return FALSE
11. Return True

初始化

求解

执行|V|-1遍，松弛每条边

检查解的合理性，是否有负环

Relax(u,v,w): if (d[v] > d[u]+ w(u,v)) then d[v]=d[u]+ w(u,v)

Bellman-Ford 算法分析

算法 Bellman-Ford(G,w,s)

Input 图$G=(V,E)$,边加权函数w,源顶点s

Output s到其所有可达顶点的最短路径

1. For $\forall v \in V$ do
2. $d[v] \leftarrow \infty$;
3. $\pi[v] \leftarrow$ null;
4. $d[s] \leftarrow 0$;
5. For $i \leftarrow 1$ to $|V|-1$ do
6. For $\forall(u,v) \in E$ do
7. Relax(u,v,w);
8. For $\forall(u,v) \in E$ do
9. If $d(v)>d(u)+w(u,v)$ then
10. return FALSE
11. Return True

时间复杂性?

$O(VE)$

为什么算法运行$|V|$-1遍就足够了?

Relax(u,v,w): if ($d[v] > d[u]+ w(u,v)$) then $d[v]=d[u]+ w(u,v)$

Bellman-Ford 算法分析

- 正确性证明

引理1. $G(V, E)$为一个带权的源结点为s的有向图，其权值函数为$W: E\rightarrow R$。假设图G不包含从源结点s可达的权值为负值的环路。那么在算法的第2-4行for循环执行了$|V|$-1次之后，对于所有从源结点s可以到达的结点v，都有$d(v)= \delta(s,v)$。

证明：设$P = (v_0, \ldots, v_k)$是从s到 v的最短路径，其中$v_0 = s$ 且 $v_k = v$.
由于 P是简单路径，故 $k \leq |V|-1$.
最初，$d[v_0]=d[s]=0=\delta(s,s)$且以后不再变化.
一遍之后，$d[v_1]=\delta(s,v_1)$ 是s到v_1的最短路径，且$d[v_1]$以后不再变化.
设k-1遍后有$d[v_{k-1}]=\delta(s,v_{k-1})$，则第$k$遍循环过程中，
如果$(d[v_k] > d[v_{k-1}]+w(u,v))$，则$d[v_k]=d[v_{k-1}]+w(u,v)$
$d[v_k] =\delta(s,v_k)$，因为每条最短$(k-1)$-路径均会被松弛过程检查和扩展.
$d[v] =\delta(s,v)$在$|V|-1$遍后成立.

HITWH SE

Bellman-Ford 算法分析

- **正确性证明**

定理. $G(V, E)$为一个带权的源结点为s的有向图，其权值函数为$W: E\rightarrow R$。
(1). 如果图G不包含从源结点s可以到达的权值为负值的环路, 那么算法返回True值，且对于所有结点$v\in V$, $d[v]=\delta(s,v)$ 成立;
(2). 如果图G包含一条从源结点s可以到达的权值为负值的环路, 算法返回FALSE.

证明：(1). 若G中没有负环.

$|V|$-1遍后, 我们有$d[v]=\delta(s,v)$对任意顶点v成立.

由三角不等式,

$d[v]=\delta(s,v)\leq\delta(s,u)+w(u,v)=d[u]+w(u,v)$,对任意$(u,v)\in E$成立.

Bellman-Ford 算法分析

- **正确性证明**

定理. $G(V, E)$为一个带权的源结点为s的有向图，其权值函数为$W: E\rightarrow R$。

(1). 如果图G不包含从源结点s可以到达的权值为负值的环路, 那么算法返回True值，且对于所有结点$v\in V$, $d[v]=\delta(s,v)$ 成立;

(2). 如果图G包含一条从源结点s可以到达的权值为负值的环路, 算法返回FALSE.

证明：(2). 反证法. 设G中从s可以到达负环 $(v_0,v_1, \ldots,v_k)$其中$v_k=v_0$.

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$$

但，算法返回TRUE，也就是说：没有负环被检测到，且检测负环$(v_0,v_1, \ldots,v_k)$上的任意一条边时，均有

$$d[v_i] \le d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i) \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, k.$$

三角不等式

$$\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \le \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i).$$

$$\text{Since} \sum_{i=1}^{k} d[v_i] = \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}], \quad \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \ge 0$$

矛盾！

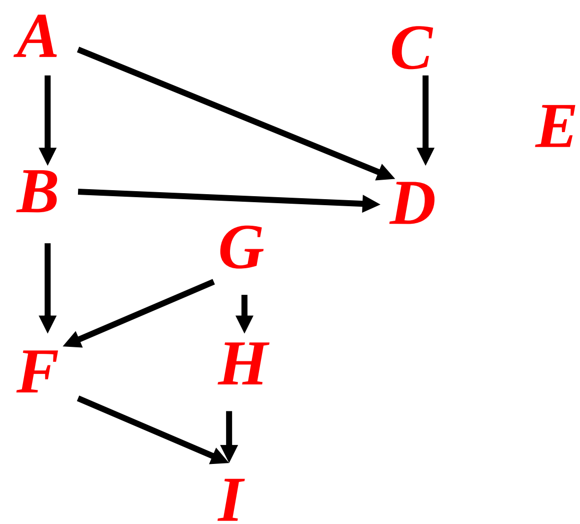
HITWH SE

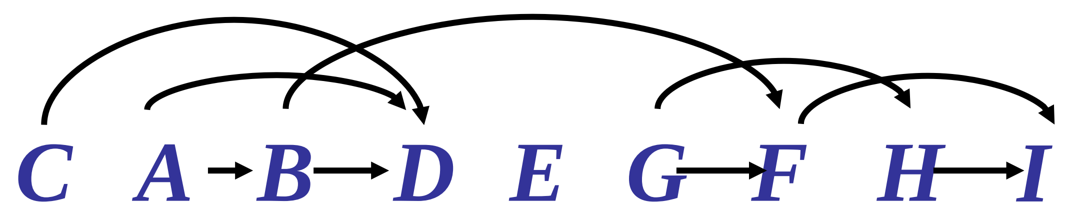
DAG中单源最短路径

- 在有向无环图(Directed Acyclic Graph- DAG)中如何高效地解决单源最短路径问题
  - Bellman-Ford 算法的时间复杂度是 O(*VE*).
  - 在DAG中能否更快?
  - 分析：Bellman-Ford算法执行|*V*|-1遍
    - 每遍均需扫描所有边一遍
    - 对许多边的扫描均是无用的
    - 事实上,
      - 无需扫描不影响结果的边
      - 对于已经找到的最短路径，其上的边无需再扫描

DAG中单源最短路径

- Main Idea：利用拓扑排序
  - DAG中每条路径均是拓扑序顶点序列的子序列
  - 能够容易识别从s可达的顶点，避免无用边扫描
  - 按照拓扑序处理顶点，将始终是前向地处理每条路径，避免重复扫描已知最短路径上的边
  - 仅需要一遍扫描





DAG中单源最短路径

算法 DAG-Shortest-Paths(G,w,s)

Input 无环有向图G=(V,E),边加权函数w,源顶点s

Output s到其所有可达顶点的最短路径

1. 将V中顶点进行拓扑排序
2. For $\forall v \in V$ do
3. $d[v] \leftarrow \infty$;
4. π[v]←null;
5. d[s] ←0;
6. For each $u \in V$ (按拓扑序考虑) do
7. For $\forall v \in Adj[u]$ do
8. Relax(u,v,w);

HITWH
SE

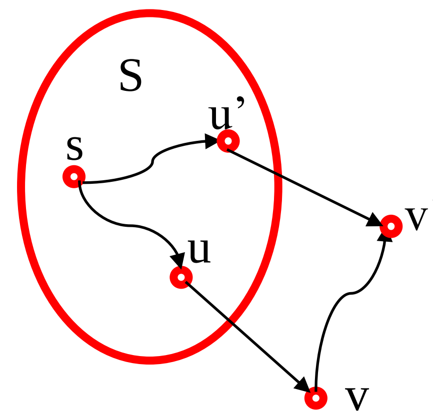
Dijkstra算法

- Dijkstra算法假设$w(u,v)\geq 0$ 对$\forall(u,v)\in E$成立
- 始终维护顶点集 S 使得
  - $\forall v\in S$, $d[v]=\delta(s, v)$,即 s到v的最短路径已经找到.
  - 初始值: $S=\{\}$, $d[s]=0$ 且$d[v]=+\infty$
- 算法运行过程中
  - (a) 选择 $u\in V\text{-}S$ 使得

    $d[u]=\min \{d[x] \mid x\in V\text{-}S\}$. 令$S=S\cup\{u\}$

    此时$d[u]=\delta(s, u)$! 为什么?
  - (b) 对于u的每个相邻顶点 v执行 RELAX(u, v, w)
- 重复上述步骤(a)和 (b) 直到 $S=V$.
- 该算法类似于Prim算法，属于贪心算法

每次加入新顶点前，对于S中的顶点u, $d[u]=\delta(s, u)$，想要找到一个顶点v加入S，使得$d[v]=\delta(s, v)$



d[v]的取值为$\min_{u\in S}\{\delta(s,u)+w(u,v)\}$：从s到v的只包含S中顶点的路径的最小权值

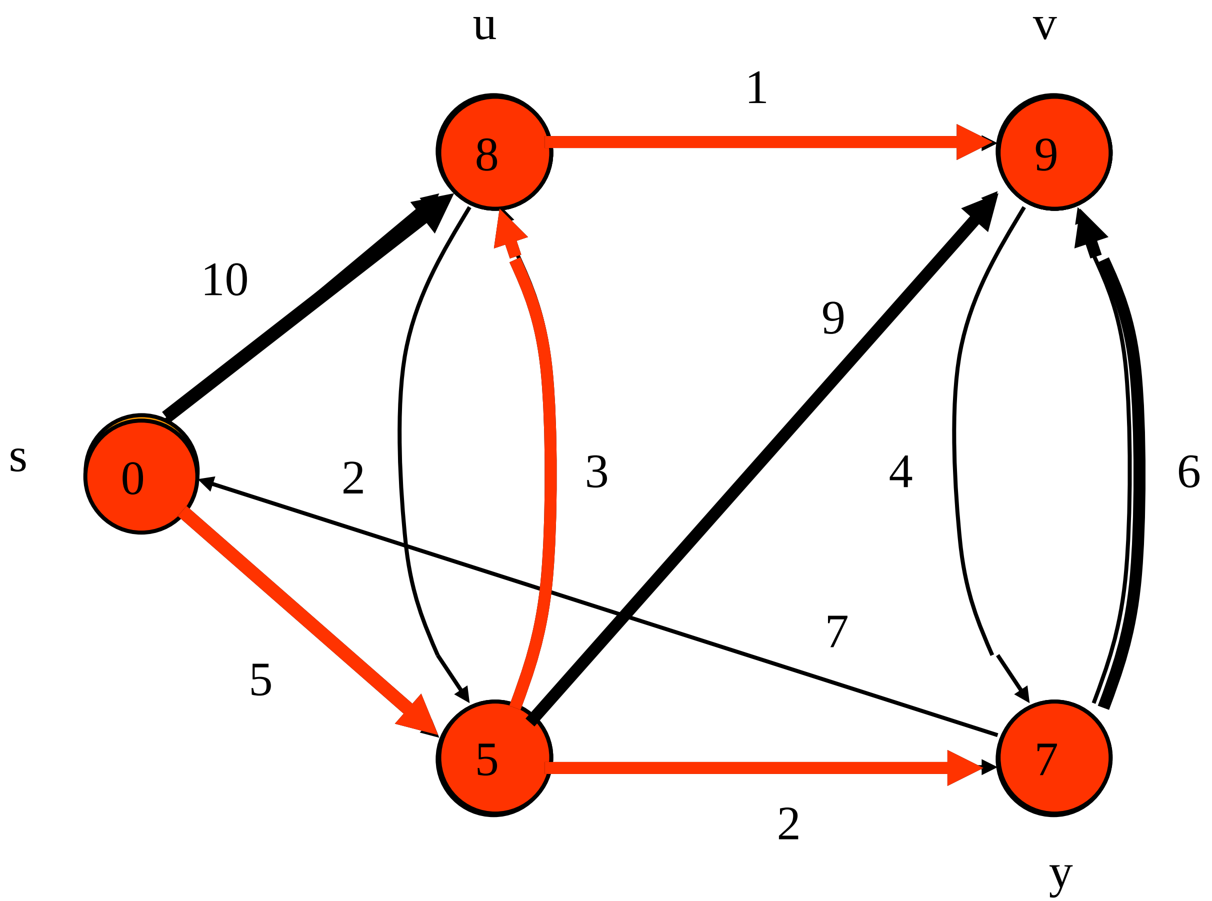
Dijkstra算法

算法 Dijkstra(G,w,s)

Input 图$G=(V,E)$,边加权函数w,源顶点s

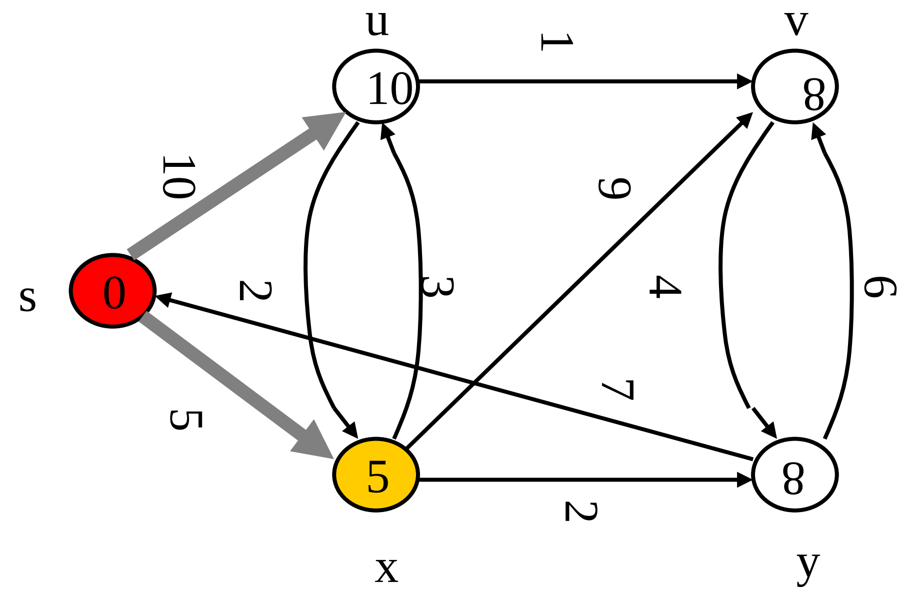
Output s到其所有可达顶点的最短路径

1. For $\forall v \in V$ do
2. $d[v] \leftarrow \infty$;
3. $\pi[v] \leftarrow null$;
4. $d[s] \leftarrow 0$;
5. $S \leftarrow \varnothing$
6. $Q \leftarrow V$
7. while $Q \neq \varnothing$ do
8. $u \leftarrow$ EXTRACT -MIN(Q);
9. $S \leftarrow S \cup \{u\}$
10. For $\forall v \in Adj[u]$ do
11. Relax(u,v,w);


u
v
1
8
9
10
9
s
0
2
3
4
6
7
5
5
7
2
y

第一步：假设EXTRACT -MIN(Q)=*x*.

- *sx*是仅含一条边的最短路径
  - 为什么?
  - 因为sx是从s出发的最短的边.
- 它也是s到x的最短路径



证明:

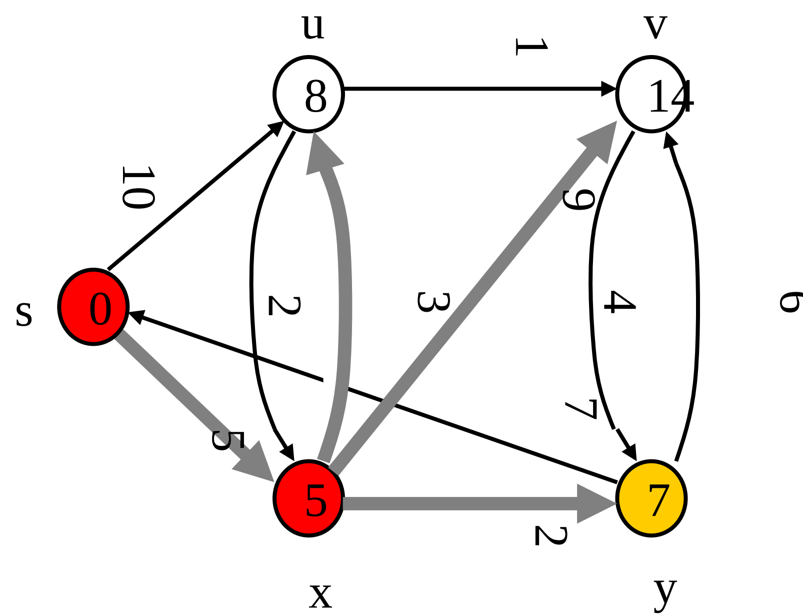
(1) 设*P*: *s*→*u*…→*x* 是s到*x*的最短路径，则$w(s,u) \geq w(s,x)$.

(2) 由于图中没有负权值边,路径*P*的总权值至少为

$$w(s,u) \geq w(s,x).$$

(3) 故,边sx是*s*到*x*的最短路径.

第二步：S={s,x}　　$d[y]=\min_{v\in V-S} d[v]$



(c)

- 论断:$d[y]$是从s到y的最短路径代价，即
  - 要么sy是最短路径
  - 要么$s\to x\to y$是最短路径.
- 为什么?
  - 如果sy是最短路径，论断成立
  - 考察$s\to x\to y$是从s到y的最短路径的情况

证明:(反证法)设$s\to x\to y$不是从s到y的最短路径

(1) 设P_1: $s\to y'\to\ldots\to y$ 是s到y的最短路径，其中$y'\notin S$. (注意此时，我们已经考察了$y'=x$和$y'=s$的情形).

(2) 因此，$w(P_1)<w(s\to x\to y)$.

(3) 由于$w(uv)\geq 0$对任意边成立，故$w(sy')<w(P_1)<w(s\to x\to y)$.

进而$d[y']<d[y]$, 这样算法第二步不可能选中y，矛盾!

后续步骤：设S是算法维护的集合,令$d[y]=\min_{v\in V-S}d[v]$

- **定理**:$d[y]$是从s到y的最短路径代价(正确性分析中最难的部分)

证明：(归纳法+反证)

归纳假设:设对$\forall v\in S$, $d[v]$是从s到v的最短路径的代价，往证本次操作完成后$d[y]$将是s到y的最短路径的代价

若不然,$d[y]$ **不是**从s到y的最短路径的代价。设P_1: $s\to\ldots\to y'\to\ldots\to y$是从$s$到$y$的最短路径，其中$y'\notin S$是$P_1$上第一个不属于S的顶点. 这意味着$y\neq y'$且$w(P_1)<d[y]$.

因此,$w(s\to\ldots\to y')<w(P_1)$. (每条边的权值均非负)

进而$w(s\to\ldots\to y')<w(P_1)<d[y]$.

据此, $d[y']=w(s\to\ldots\to y')<w(P_1)<d[y]$.

因此，算法在本次操作中不会选中y，**矛盾**!

Dijkstra算法的时间复杂度

- 时间复杂度依赖于优先队列Q的实现
- 模型1: 利用数组存储Q
  - EXTRACT-MIN(*Q*) —需要 $O(|V|)$ 时间.
    - 总共需要执行 $|V|$次 EXTRACT -MIN(*Q*).
    - $|V|$次 EXTRACT -MIN(*Q*)操作的总时间为$O(|V|^2)$.
  - RELAX(*u*,*v*,*w*) —需要 $O(1)$时间.
    - 总共需要执行$|E|$次 RELAX(u, v, w)操作.
    - $|E|$次 RELAX(*u*,*v*,*w*)操作的总时间为 $O(|E|)$.
  - 总时间开销为$O(|V|^2+|E|)=O(|V|^2)$
- 模型2:*Q*用斐波那契堆实现.
  - EXTRACT-MIN(*Q*) —平摊代价$O(\log|V|)$.
  - DECREASE-Key —平摊代价$O(1)$.
  - 总时间开销为 $O(|V|\log|V|+E)$.

关于期末考试

- 简答题（x分）
  - 关于基本概念、基本原理
- 计算题（25-x分）
  - 递归方程、平摊分析等内容
- 算法设计题（3×20分）
  - 分治算法、动态规划技术、贪心算法
- 算法实例题（15分）
  - 树搜索、最大流、单源最短路径

HITWH
SE

本学期的算法课程结束了，各位同学的算法学习没有结束……