



HITWH
SE

第三章

排序与分治算法



HITWH
SE

参考材料

《Introduction to Algorithm》

Chapter 6, 7, 8, 9

**《Introduction to the Design and
Analysis of Algorithm》**

Chapter 4



- 3.1 分治算法的原理
- 3.2 基于分治思想的排序算法
- 3.3 Medians and Order Statistics
- 3.4 最邻近点对
- 3.5 线性时间排序算法
- 3.6 凸包问题
- 3.7 FFT
- 3.8 整数乘法



3.1 Divide-and-Conquer 原理

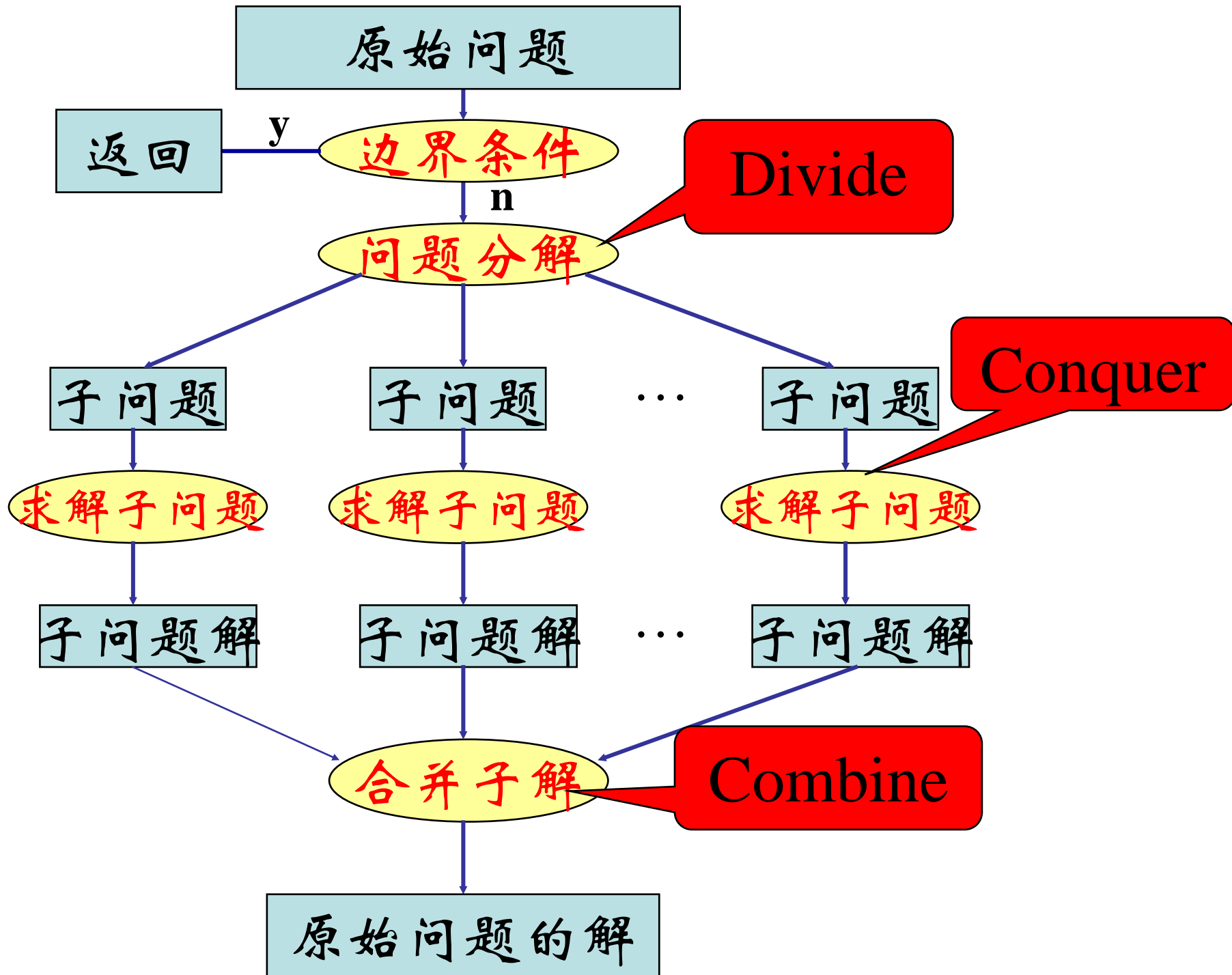
- Divide-and-Conquer 算法的设计
- Divide-and-Conquer 算法的分析



Divide-and-Conquer算法的设计



- 设计过程分为三个阶段
 - Divide: 整个问题划分为多个子问题
 - 注意: 分解的这组子问题 p_1, p_2, \dots, p_m 未必一定是相同的子问题, 即 p_i 和 p_j 可以是分别完成不同任务的子问题
 - Conquer: 求解各子问题(递归调用正设计的算法)
 - Combine: 合并子问题的解, 形成原始问题的解





Divide-and-Conquer 算法的分析



- 分析过程
 - 建立递归方程
 - 求解
- 递归方程的建立方法
 - 设输入大小为 n , $T(n)$ 为时间复杂性
 - 当 $n < c$, $T(n) = \theta(1)$



– Divide阶段的时间复杂性

- 划分问题为 a 个子问题。
- 每个子问题大小为 n/b 。
- 划分时间可直接得到= $D(n)$

– Conquer阶段的时间复杂性

- 递归调用
- Conquer时间= $aT(n/b)$

– Combine阶段的时间复杂性

- 时间可以直接得到= $C(n)$

最后得到递归方程：

$$\bullet T(n) = \theta(1) \quad \text{if } n \leq c$$

$$\bullet T(n) = aT(n/b) + D(n) + C(n) \quad \text{if } n > c$$



HITWH
SE

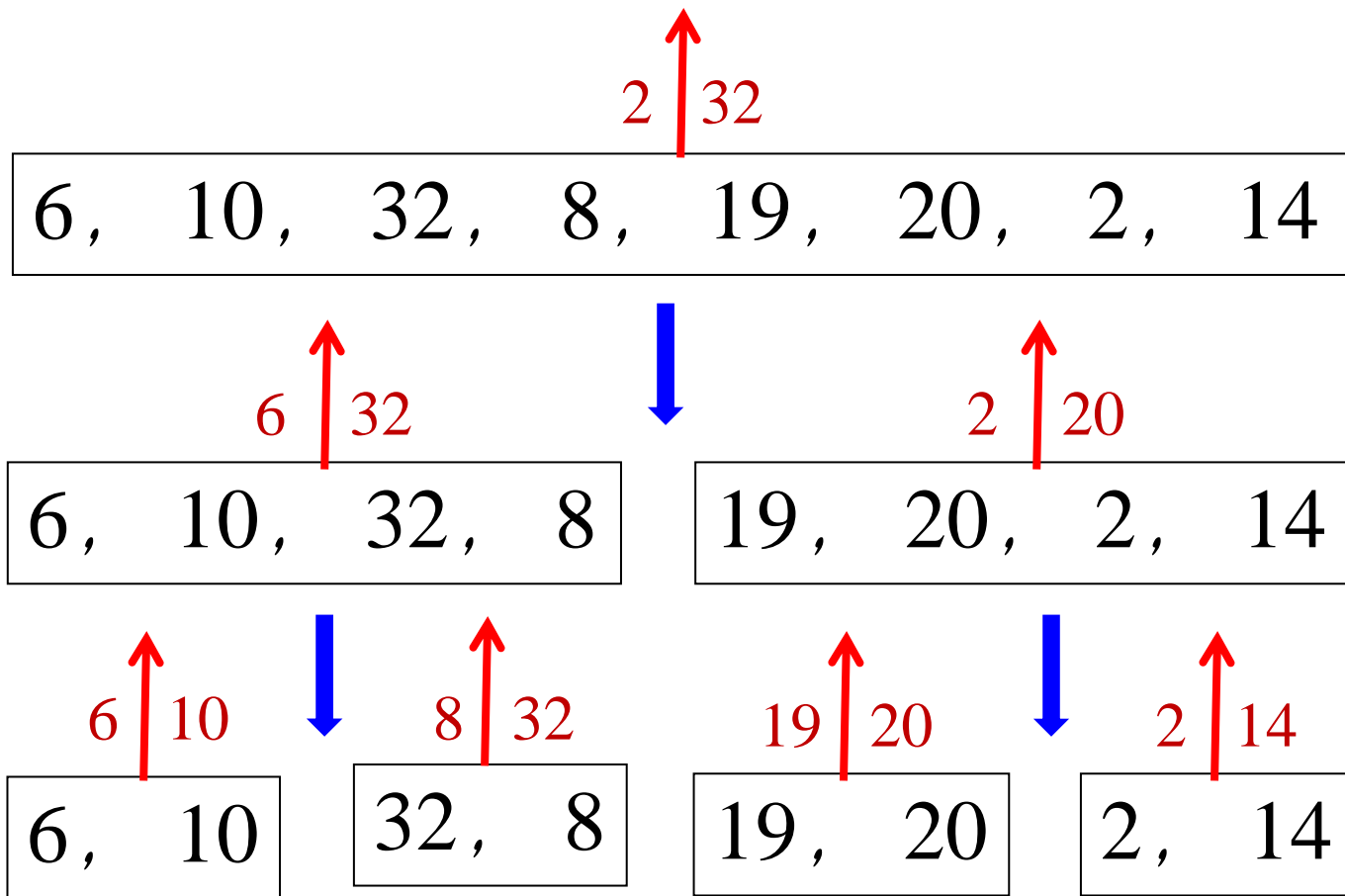
举例：最大最小值问题

输入：数组 $A[1, \dots, n]$

输出：A 中的 max 和 min

通常，直接扫描需要 $2n-2$ 次比较操作

我们给出一个仅需 $\lceil 3n/2 - 2 \rceil$ 次比较操作的算法





算法MaxMin(A)

输入: 数组 $A[i, \dots, j]$

输出: 数组 $A[i, \dots, j]$ 中的max和min

1. If $j-i+1=1$ Then 输出 $A[i], A[i]$, 算法结束
2. If $j-i+1=2$ Then
3. If $A[i] < A[j]$ Then 输出 $A[i], A[j]$; else 输出 $A[j], A[i]$;
 算法结束
4. $k \leftarrow (j+i)/2$
5. $m_1, M_1 \leftarrow \text{MaxMin}(A[i:k]);$
6. $m_2, M_2 \leftarrow \text{MaxMin}(A[k+1:j]);$
7. $m \leftarrow \min(m_1, m_2);$
8. $M \leftarrow \max(M_1, M_2);$
9. 输出 m, M



算法复杂性分析

$$T(1)=0$$

$$T(2)=1$$

$$T(n)=2T(n/2)+2$$

$$= 2(2T(n/2^2)+2)+2 = 2^2T(n/2^2)+2^2+2$$

$$= \dots$$

$$= 2^{k-1}T(2)+2^{k-1}+2^{k-2}+\dots+2^2+2$$

$$= 2^{k-1}+ 2^k-2$$

$$= n/2+ n -2$$

$$= 3n/2-2$$

$$n=2^k$$

与Naïve算法相比，虽然同阶，但系数有所改进

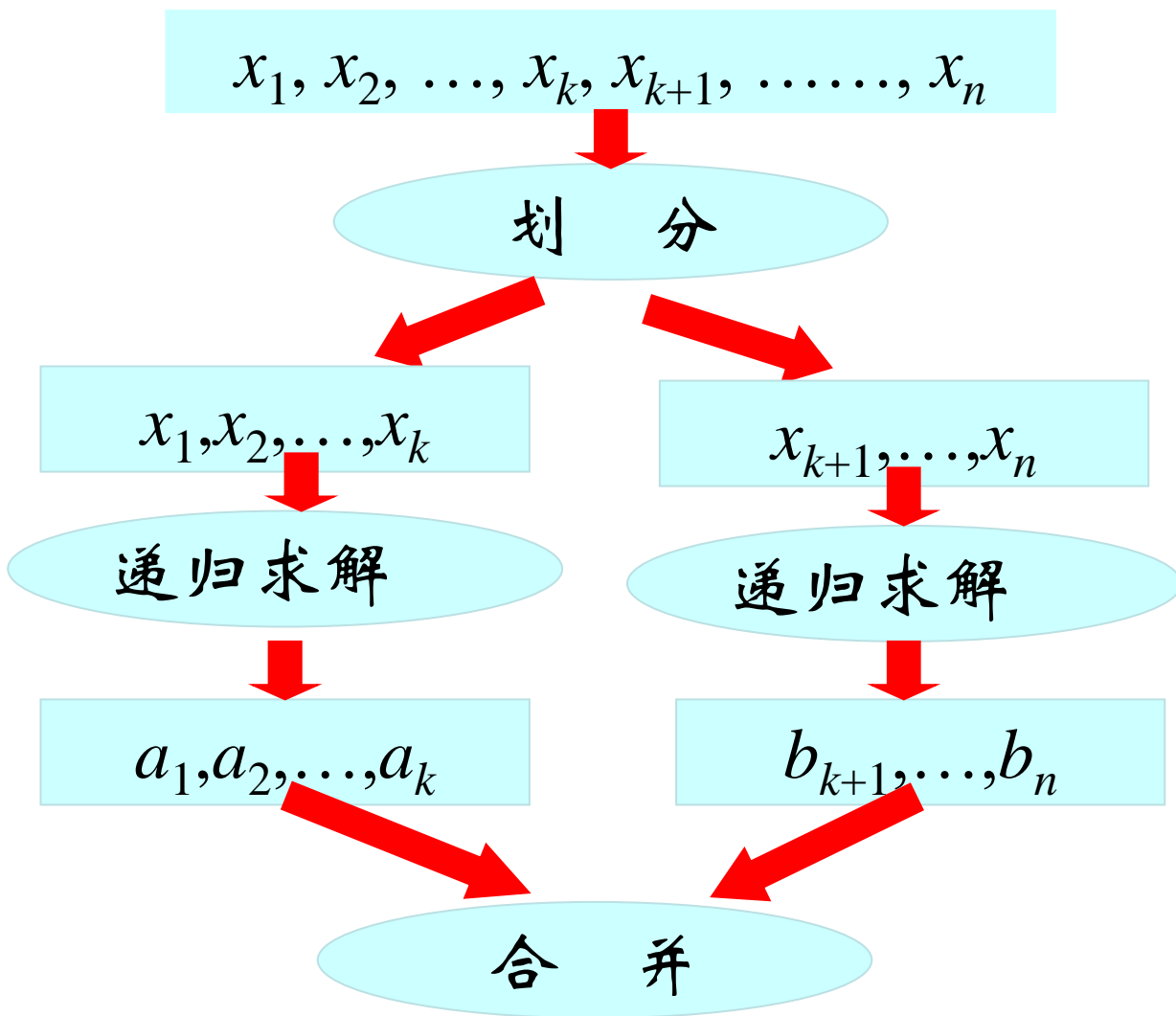


3.2 基于分治的排序算法

- *Quicksort* Algorithm
- 排序问题的下界



基于分治思想的排序算法



划分的策略

根据某一策略将数据集合划分成两个部分

Mergesort: 中间点

Quicksort: 任选一个划分点 x , 利用 x 的值将数据划分成两部分

合并策略

不同的划分策略对应不同的合并策略



3.2.1 *Quicksort*

- Idea of *Quicksort*
- *Quicksort* Algorithm
- Correctness Proof
- Performance Analysis
- Randomized *Quicksort* Algorithms



Idea of *Quicksort*

- Divide-and-Conquer

- Divide:

- Partition $A[p..r]$ into $A[p..q]$ and $A[q+1..r]$.

p		$q-1$	q	$q+1$		r
-----	--	-------	-----	-------	--	-----

- $\forall x \in A[p...q], x \leq A[q], \forall y \in A[q+1...r], y > A[q]$.
- q is generated by partition algorithm.

- Conquer:

- Sort $A[p...q-1]$ and $A[q+1...r]$ using quicksort recursively

- Combine:

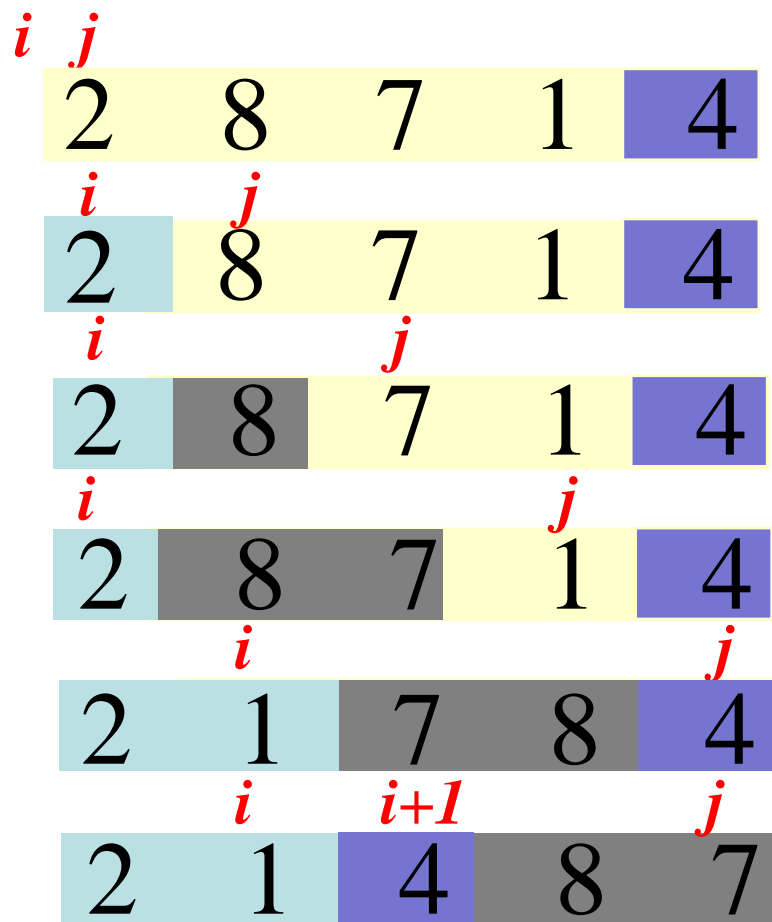
- Since $A[p...q-1]$ and $A[q+1...r]$ have been sorted, nothing to do



- 划分 $A[p..r]$

- 选择元素 x 作为划分点, $x=A[r]$
- x 逐一与其它元素作比较

算法执行过程中,
 A 被分成4个区域





Partition(A, p, r)

$x \leftarrow A[r];$

$i \leftarrow p - 1;$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$

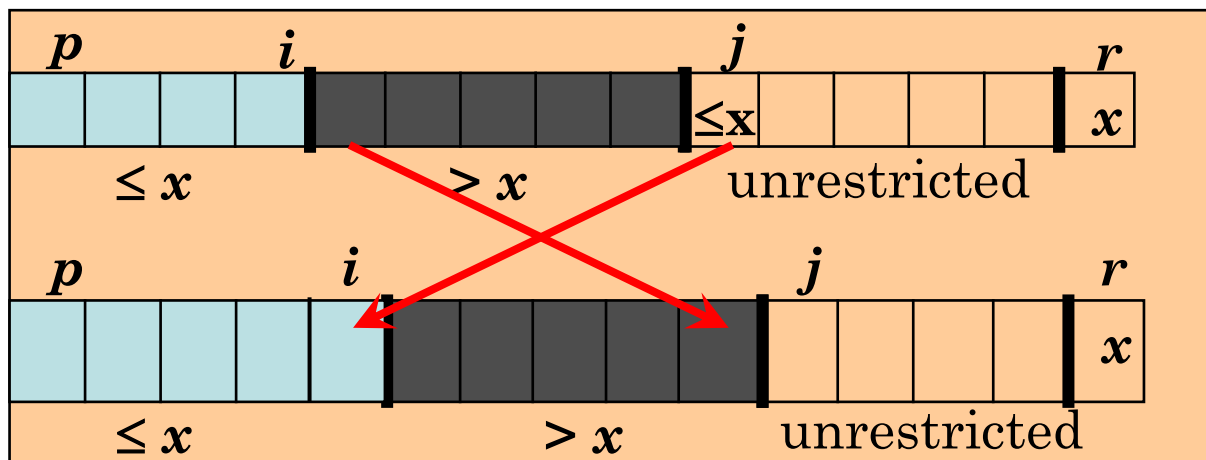
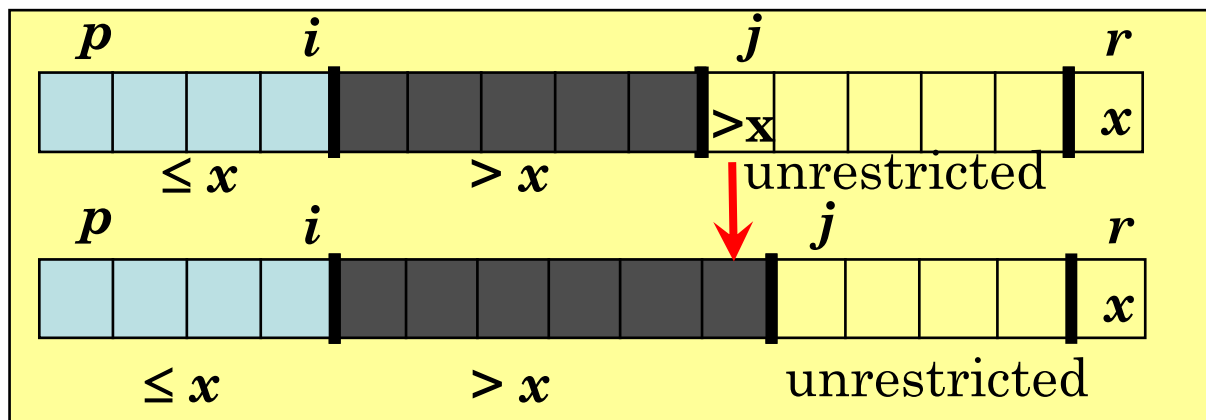
do if $A[j] \leq x$

$i \leftarrow i + 1;$

exchange $A[i] \leftrightarrow A[j];$

exchange $A[i + 1] \leftrightarrow A[r];$

return $i + 1;$



Running time: $\Theta(n)$



Quicksort Algorithm



Quicksort(A, p, r)

If $p < r$

Then $q = \text{Partition}(A, p, r);$

 Quicksort ($A, p, q-1$);

 Quicksort ($A, q+1, r$);



- Loop Invariant(循环不变量方法)

证明主要结构是循环结构的算法的正确性

循环不变量：数据或数据结构的关键性质

依赖于具体的算法和算法特点

证明分三个阶段

- (1) 初始阶段：循环开始前循环不变量成立
- (2) 循环阶段：循环体每执行一次,循环不变量成立
- (3) 终止阶段：算法结束后，循环不变量保证算法正确



Partition(A, p, r)

$x \leftarrow A[r];$

$i \leftarrow p - 1;$

(3) for $j \leftarrow p$ to $r - 1$

(4) do if $A[j] \leq x$

(5) $i \leftarrow i + 1;$

(6) exchange $A[i] \leftrightarrow A[j];$

 exchange $A[i + 1] \leftrightarrow A[r];$

 return $i + 1;$

• Correctness Proof

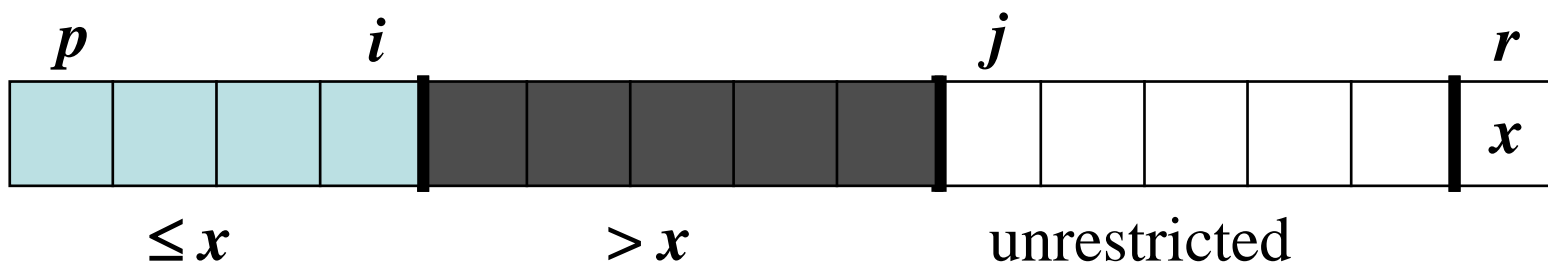
定义循环不变量:

At the start of the loop of lines 3-6, for any k

1. if $p \leq k \leq i$, then $A[k] \leq x$.

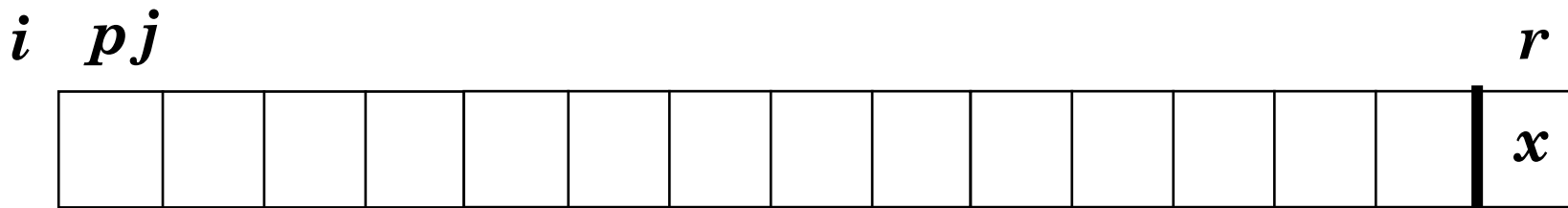
2. if $i + 1 \leq k \leq j - 1$, then $A[k] > x$.

3. if $k = r$, then $A[k] = x$.



- 初始阶段: $j = p$

算法迭代前: $i = p - 1, j = p$, 条件 1 和 2 为真. 算法第1行使得条件 3 为真.

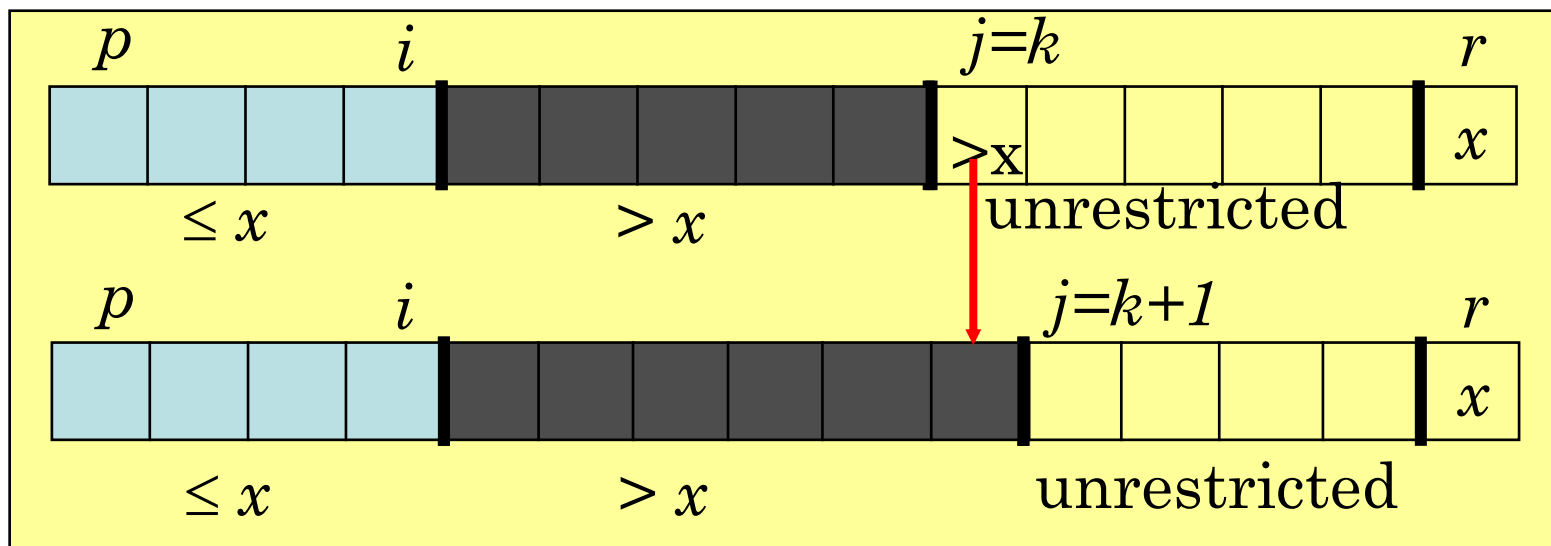
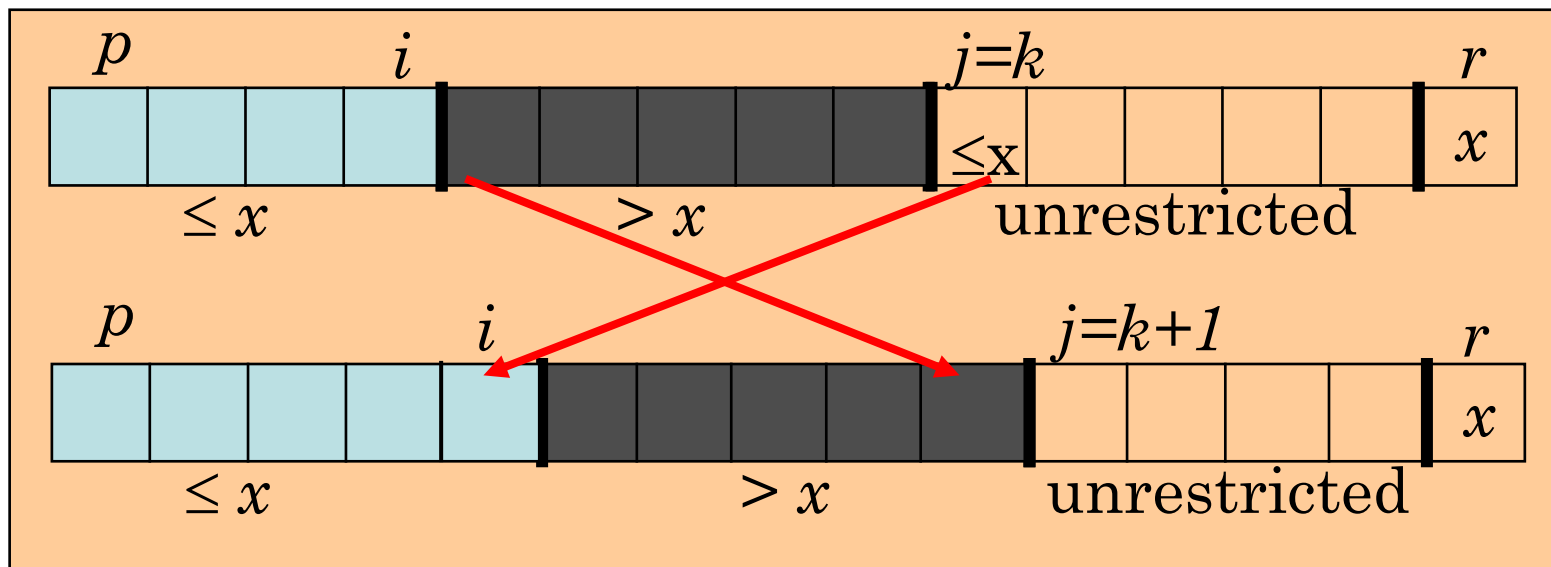
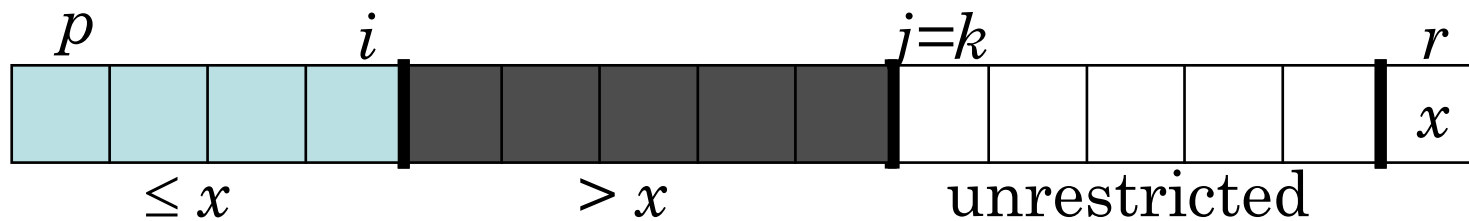


一 保持阶段

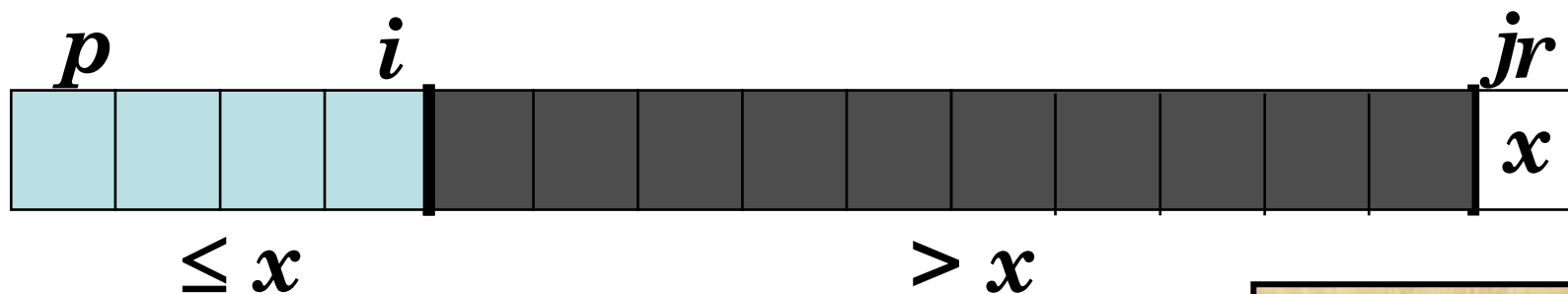
设 $j=k$ 时循环
不变量成立.

往证 $j=k+1$ 时
不变量成立.

```
Partition(A, p, r)
  x ← A[r];
  i ← p - 1;
  for j ← p to r - 1
    do if A[j] ≤ x
      i ← i + 1;
      exchange A[i] ↔ A[j];
  exchange A[i + 1] ↔ A[r];
  return i + 1;
```



- 终止阶段



循环结束时, $j=r$, 产生三个集合:

1. 所有小于等于 x 的元素构成的集合.
2. 所有大于 x 的元素构成的集合.
3. 由元素 x 构成的集合.

算法结束时

最后一个步骤将 $A[r]$ 与 $A[i+1]$ 互换.

Partition(A, p, r)

$x \leftarrow A[r];$

$i \leftarrow p - 1;$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$

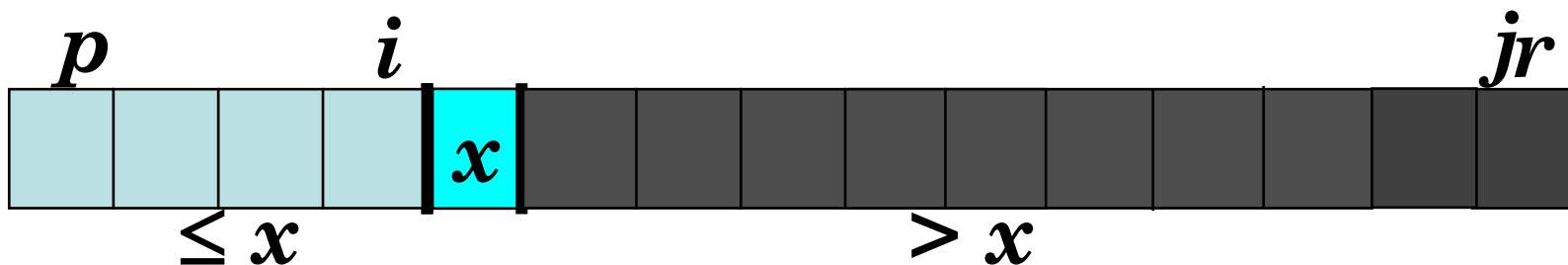
do if $A[j] \leq x$

$i \leftarrow i + 1;$

exchange $A[i] \leftrightarrow A[j];$

exchange $A[i + 1] \leftrightarrow A[r];$

return $i + 1;$





Performance Analysis



- Time complexity of PARTITION: $\theta(n)$
- Best case time complexity of *Quicksort*
 - Array in partition into 2 equal sets
 - $T(n) = 2T(n/2) + \theta(n)$
 - $T(n) = \theta(n \log n)$



Performance Analysis



- Worst case time complexity of Quicksort

- Worst Case

- $|A[p..q-1]|=0, \quad |A[q+1..r]|=n-1$



- The worst case happens in call to Partition Algorithm

- Worst case time complexity

- $T(n) = T(0) + T(n-1) + \theta(n) = T(n-1) + \theta(n) = \theta(n^2)$



Performance Analysis



What is the average time complexity?

$$T(n) = O(n \log n)$$

Why?



- 假如第一次划分后产生两个子序列，一个子序列包含 s 个元素，另一个子序列包含 $n-1-s$ 个元素
- 一共有 n 种可能的划分，即 $0 \leq s \leq n-1$ ，每种可能划分产生的概率为 $1/n$
- 平均复杂性 $T(n) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} (T(s) + T(n-1-s)) + cn$

$$\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} (T(s) + T(n-1-s)) = \frac{1}{n} (T(0) + T(n-1) + T(1) + T(n-2) + \cdots + T(n-1) + T(0))$$

由于 $T(0)=0$ ，有：
$$T(n) = \frac{1}{n} (2T(1) + 2T(2) + \cdots + 2T(n-1)) + cn$$

$$nT(n) = 2T(1) + 2T(2) + \cdots + 2T(n-1) + cn^2$$



$$nT(n) = 2T(1) + 2T(2) + \cdots + 2T(n-1) + cn^2$$

用 n 替换为 $n-1$ 代入上式，有：

$$(n-1)T(n-1) = 2T(1) + 2T(2) + \cdots + 2T(n-2) + c(n-1)^2$$

两式相减： $nT(n) - (n-1)T(n-1) = 2T(n-1) + c(2n-1)$

$$nT(n) - (n+1)T(n-1) = c(2n-1)$$

$$\frac{T(n)}{n+1} - \frac{T(n-1)}{n} = c \frac{(2n-1)}{(n+1)n} = c \frac{(3n - (n+1))}{(n+1)n} = c \left(\frac{3}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$$

递归地：

$$\frac{T(n-1)}{n} - \frac{T(n-2)}{n-1} = c \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n-1} \right)$$

...

$$\frac{T(2)}{3} - \frac{T(1)}{2} = c \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{2} \right)$$



我们得到：

$$\frac{T(n)}{n+1} - \frac{T(n-1)}{n} = c \left(\frac{3}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{T(n-1)}{n} - \frac{T(n-2)}{n-1} = c \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n-1} \right)$$

...

$$\frac{T(2)}{3} - \frac{T(1)}{2} = c \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = 3c \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{3} \right) - c \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} \right) + \frac{T(1)}{2}$$

$$= 2c \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{7}{2}c + \frac{T(1)}{2} + \frac{3c}{n+1}$$

$$= 2cH_n - \frac{7}{2}c + \frac{T(1)}{2} + \frac{3c}{n+1}$$

$$T(n) = 2cnH_n + 2cH_n + \left(\frac{T(1)}{2} - \frac{7}{2}c \right)n + \left(\frac{T(1)}{2} - \frac{7}{2}c + 3c \right) = O(n \log n)$$



Randomized Quicksort Algorithms

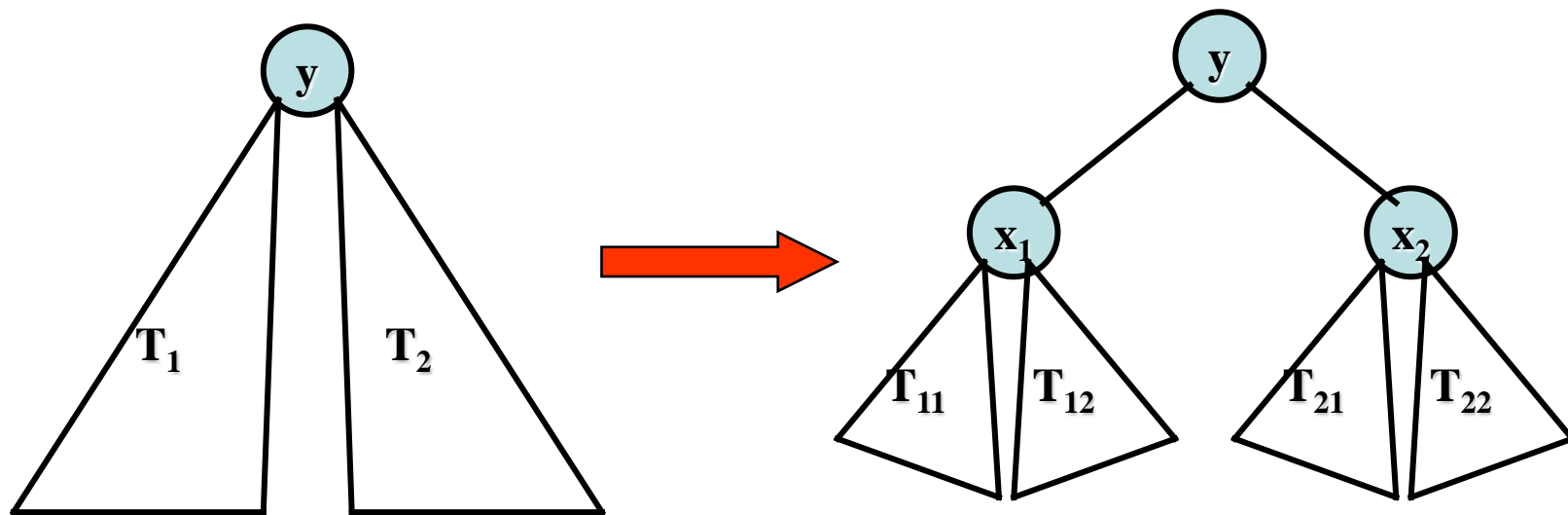


- **Randomized-Partition(A, p, r)**
 1. $i := \text{Random}(p, r)$
 2. $A[r] \leftrightarrow A[i];$
 3. Return Partition(A, p, r)
- **Randomized-Quicksort(A, p, r)**
 1. **If** $p < r$
 2. **Then** $q := \text{Randomized-Partition}(A, p, r);$
 3. Randomized-Quicksort($A, p, q-1$);
 4. Randomized-Quicksort($A, q+1, r$).



随机快速排序复杂性分析

- 我们可以用树表示算法的计算过程



- 我们可以观察到如下事实：
 - 一个子树的根必须与其子树的所有节点比较
 - 不同子树中的节点不可能比较
 - 任意两个节点至多比较一次



• 基本概念

- $x_{(i)}$ 表示 A 中 Rank 为 i 的元素 (第 i 小元素)

例如, $x_{(1)}$ 和 $x_{(n)}$ 分别是最小和最大元素

- 随机变量 X_{ij} 定义如下:

$X_{ij}=1$ 如果 $x_{(i)}$ 和 $x_{(j)}$ 在运行中被比较, 否则为 0

X_{ij} 是 $x_{(i)}$ 和 $x_{(j)}$ 的比较次数

- 算法的比较次数为 $\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} X_{ij}$

- 算法的复杂性为 $T(n) = E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} E[X_{ij}]$



$$T(n) = E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} E[X_{ij}]$$

- 计算 $E[X_{ij}]$
 - 设 p_{ij} 为 $x_{(i)}$ 和 $x_{(j)}$ 在运行中被比较的概率, 则

$$E[X_{ij}] = p_{ij} \times 1 + (1 - p_{ij}) \times 0 = p_{ij}$$

关键问题成为求解 p_{ij}



• 求解 p_{ij}

• $Z_{ij} = \{x_{(i)}, x_{(i+1)}, \dots, x_{(j)}\}$ 是 $x_{(i)}$ 和 $x_{(j)}$ 之间元素集合,

Z_{ij} 在同一棵子树时, $x_{(i)}$ 和 $x_{(j)}$ 才可能比较.

• $x_{(i)}$ 和 $x_{(j)}$ 在执行中被比较, 需满足下列条件:

- $x_{(i)}$ 是 Z_{ij} 中第一个被选择的子树根节点, 或者
- $x_{(j)}$ 是 Z_{ij} 中第一个被选择的子树根节点

• 一棵子树所有点等可能地被选为划分点, 所以 $x_{(i)}$ 或 $x_{(j)}$ 被选为划分点的概率 $= 2/|Z_{ij}| = 2/(j-i+1)$.

• $x_{(i)}$ 和 $x_{(j)}$ 被进行比较的概率:

$$p_{ij} = 2/(j-i+1)$$



随机快速排序复杂性分析



• 现在我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} E[X_{ij}] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{2}{j-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 2nH_n = O(n \log n)\end{aligned}$$

定理. 随机排序算法的期望时间复杂性为 $O(n \log n)$



HITWH
SE

3.2.2 排序问题的下界



- 问题的下界(lower bound of a problem)
 - 是用于解决该问题的任意算法所需要的最小时间复杂度
 - 问题难度的一种度量
 - 如果问题可由一个具有较低时间复杂性的算法解决，则该问题是简单的；否则是困难的
 - 通常指：最坏情况下界
- 问题的下界是**不唯一的**
 - 例如. $\Omega(1)$, $\Omega(n)$, $\Omega(n \log n)$ 都是排序的下界
 - 只有 $\Omega(n \log n)$ 是有意义的
 - 下界应尽可能地高，达到上限
 - 下界的分析都是经过严格理论分析和证明，而非纯粹猜测



问题的下界的意义



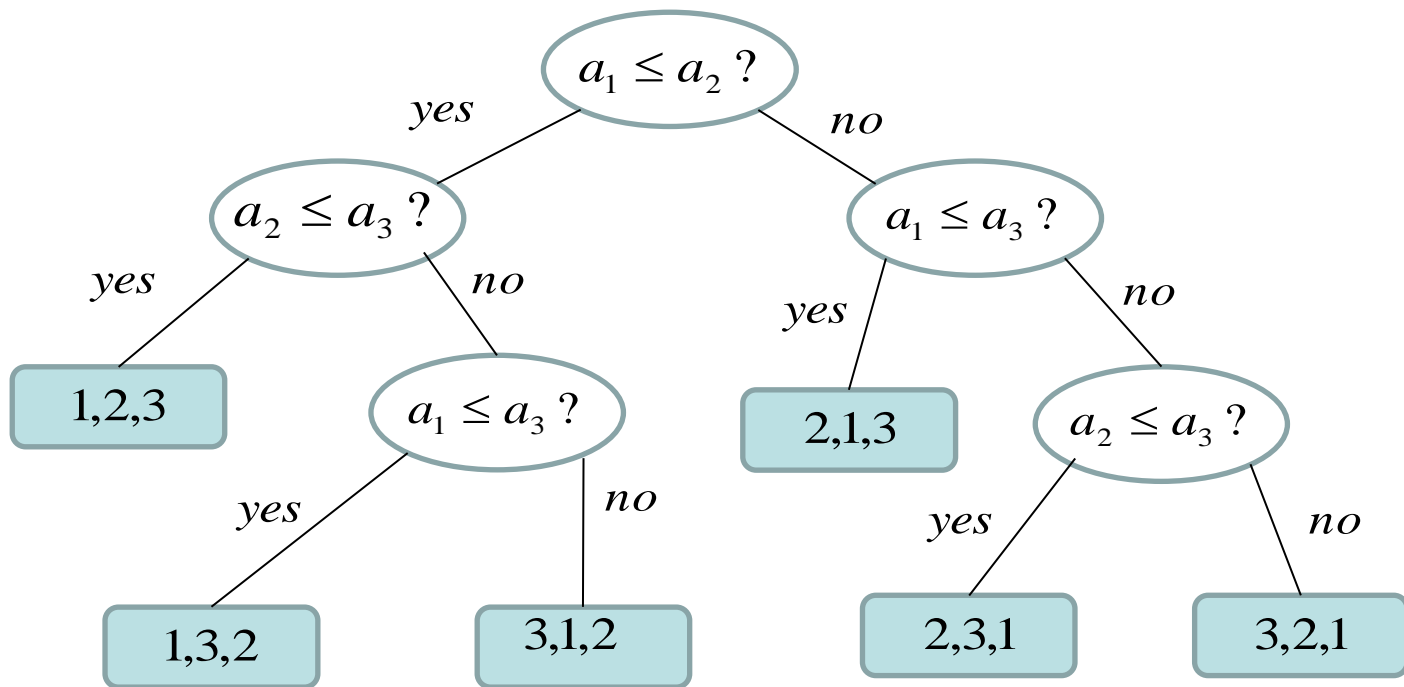
- 如果一个问题的最高下界是 $\Omega(n \log n)$ 而当前最好算法的时间复杂性是 $O(n^2)$.
 - 我们可以寻找一个更高的下界.
 - 我们可以设计更好的算法.
 - 下界和算法都是可能改进的.
- 如果一个问题的下界是 $\Omega(n \log n)$ 且算法的时间复杂性是 $O(n \log n)$, 那么这个算法是**最优的**



排序的下界

- 通常，基本操作是比较和交换的排序算法可以用一个二叉决策树描述
 - 通过忽略比较以外的细节来抽象表示比较排序算法
 - 每个内节点表示一个比较操作 $a_i \leq a_j$;
 - 所有被排序元素的全排列是树的叶节点;

对于特定输入数据集的排序过程，对应于从树的根结点到叶子节点的一条路径





- n 个元素有 $n!$ 种不同排列
- 其排序过程对应于一个高度为 h ，具有 $n!$ 个叶子节点的二叉决策树.
- 由于高度为 h 的二叉树至多有 2^h 个叶子节点
- 则有 $2^h \geq n!$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

即： $h \geq \lg(n!) = \Omega(n \lg n)$

排序的下界是： $\Omega(n \log n)$



3.3 Medians and Order Statistics

- Decrease and Conquer 原理
- Selection Problem



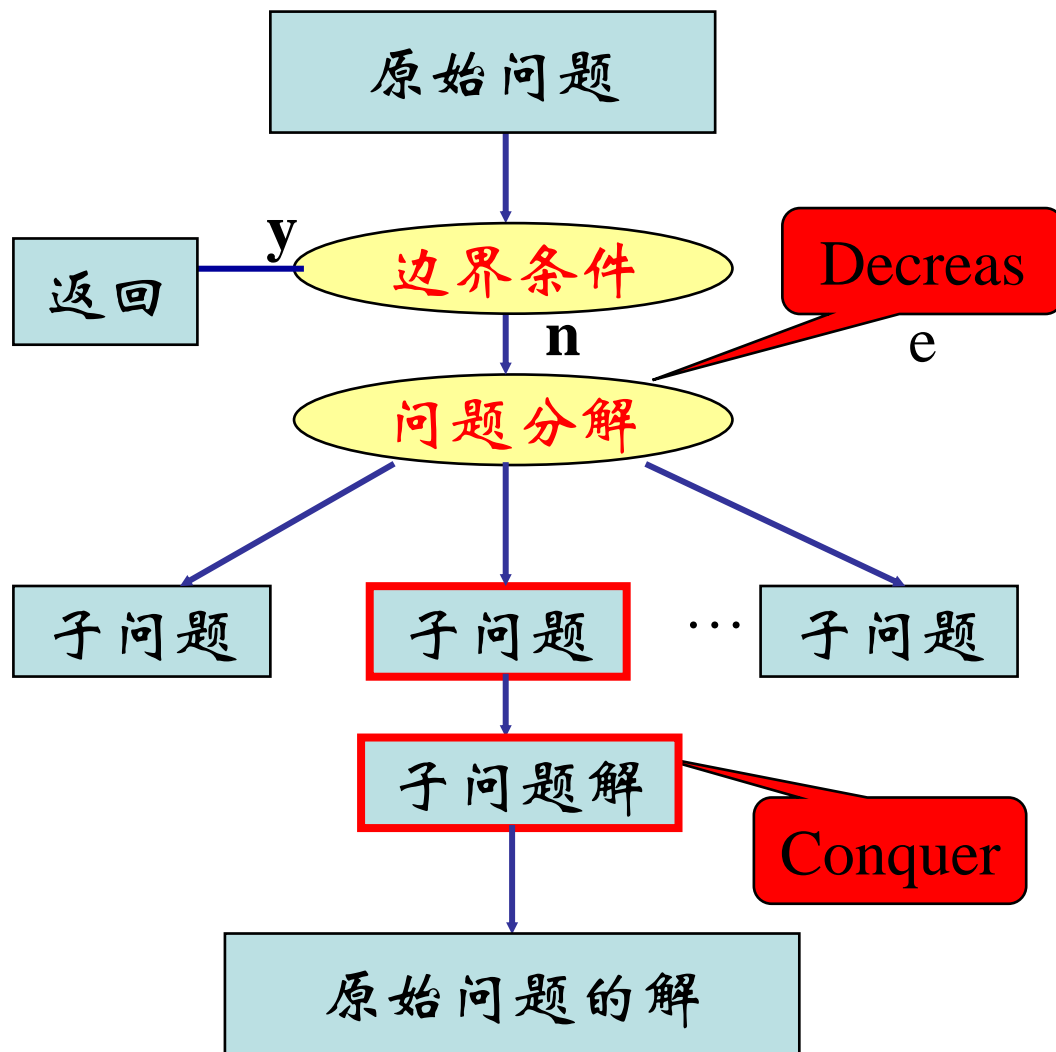
Decrease and Conquer 原理

- 原始问题划分为若干子问题，将原始计算问题转化为其中某一个子问题的计算问题

例如：折半查找

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$$

- 非常有效的一种方法，通常用于解决优化问题





Decrease and Conquer 原理

- 与 Divide and Conquer 的不同
 - 分治方法：递归求解每一个子问题，然后通过合并各个子问题的解最后得到原始问题的解
 - 减治方法：仅通过求解某一个子问题的解得到原始问题的解



Medians and Order Statistics



- The i^{th} order statistic problem
 - Input: set S of n (distinct) elements, and a number k .
 - Output: element x in S that is greater than exactly $k-1$ elements in S .
 - Special order statistics
 - The 1^{st} order statistic is the *minimum* in S
 - The n^{th} order statistic is the *maximum* in S
 - The *median* in S is at
 - $(n+1)/2$ when n is odd
 - $n/2$ and $n/2+1$ when n is even



Selection Problem

- **Problem**

- Input: set A of n (distinct) elements, and a number k .
- Output: element x in A that is greater than exactly $k-1$ elements in A , i.e. the k^{th} smallest element.

The straightforward algorithm:

step 1: Sort the n elements

step 2: Locate the k^{th} element in the sorted list.

Time complexity: $O(n \log n)$



Algorithm of Selection Problem

- **Main Idea**

- $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Let $p \in S$, 用 p 将 S 划分为 3 个子集合 S_1, S_2, S_3 :
 - $S_1 = \{a_i \mid a_i < p, 1 \leq i \leq n\}$
 - $S_2 = \{a_i \mid a_i = p, 1 \leq i \leq n\}$
 - $S_3 = \{a_i \mid a_i > p, 1 \leq i \leq n\}$
- 3 种情况:
 - 若 $|S_1| > k$, 则在集合 S_1 中搜索第 k 小的元素.
 - 否则, 若 $|S_1| + |S_2| > k$, 则 p 是 S 中第 k 小的元素.
 - 否则, 在 S_3 中搜索第 $(k - |S_1| - |S_2|)$ 小的元素.



Algorithm of Selection Problem

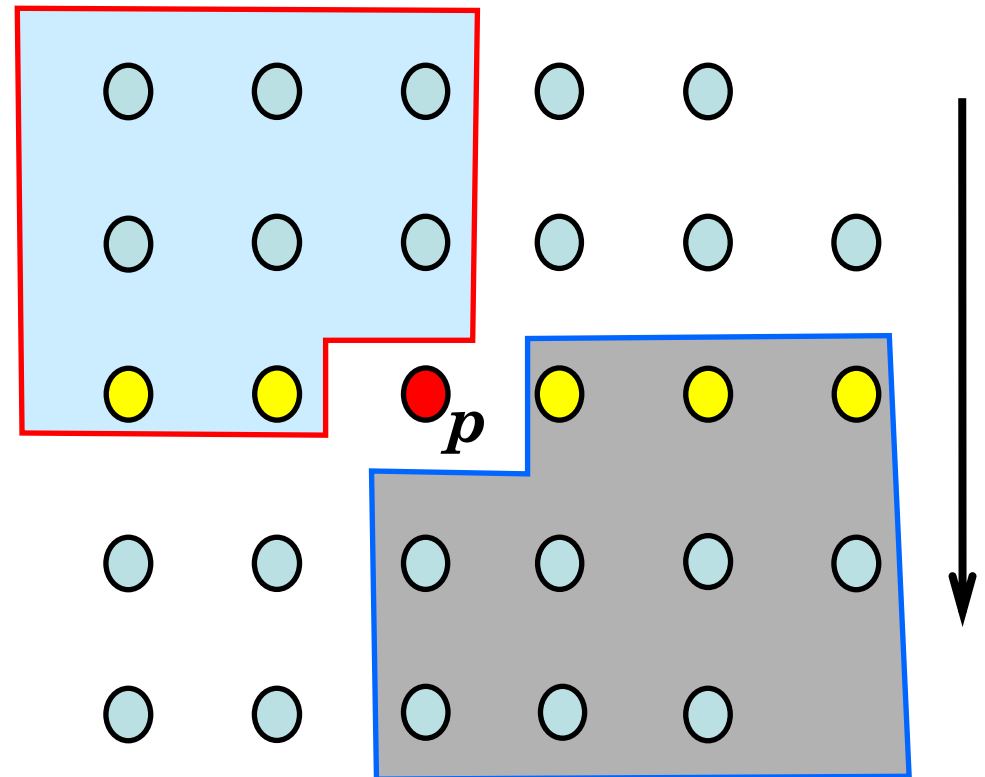
- 如何选择 p ?

- The n elements are divided into $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ subsets

(Each subset has 5 elements.)

- Sort each subset

- Find the element p which is the median of the medians of the $\lceil n/5 \rceil$ subsets





Algorithm of Selection Problem

算法步骤:

$O(n)$

Step 1: 划分 S 为 $\lceil n/5 \rceil$ 个组. 每组包含5个元素. 若最后一组不足5个元素, 则用 ∞ 补足.

Step 2: 排序每组5个元素, 并确定每一分组的中位数. $O(n)$

Step 3: 计算 $\lceil n/5 \rceil$ 个中位数的中位数 p . $T(n/5)$

Step 4: p 将 S 划分为三个子集合 S_1, S_2 及 S_3 , S_1 中元素均小于 p , S_2 中元素均等于 p , S_3 中元素均大于 p . $O(n)$

Step 5: 若 $|S_1| \geq k$, 则递归地在 S_1 中搜索第 k 小元素;

否则, 若 $|S_1| + |S_2| \geq k$, 则 p 即为 S 中第 k 小元素;

否则, 令 $k' = k - |S_1| - |S_2|$, 递归地在 S_3 中搜索第 k' 小元素.

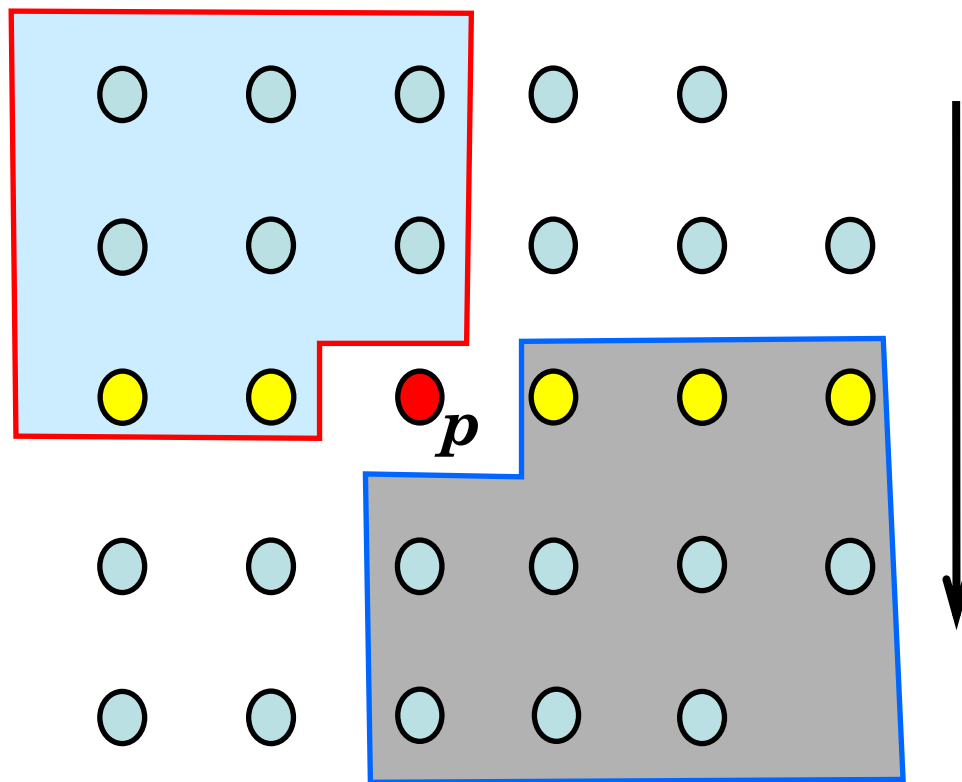
?



Performance Analysis

Each 5-element subset is sorted in non-decreasing sequence.

“大约”至少
 $|S|/4$ 个元素小于
等于 p



“大约”至少 $|S|/4$
个元素大于等于 p



Algorithm of Selection Problem

算法步骤:

$O(n)$

Step 1: 划分 S 为 $\lceil n/5 \rceil$ 个组. 每组包含5个元素. 若最后一组不足5个元素, 则用 ∞ 补足.

Step 2: 排序每组5个元素, 并确定每一分组的中位数. $O(n)$

Step 3: 计算 $\lceil n/5 \rceil$ 个中位数的中位数 p . $T(n/5)$

Step 4: p 将 S 划分为三个子集合 S_1, S_2 及 S_3 , S_1 中元素均小于 p , S_2 中元素均等于 p , S_3 中元素均大于 p . $O(n)$

Step 5: 若 $|S_1| \geq k$, 则递归地在 S_1 中搜索第 k 小元素;

否则, 若 $|S_1| + |S_2| \geq k$, 则 p 即为 S 中第 k 小元素;

否则, 令 $k' = k - |S_1| - |S_2|$, 递归地在 S_3 中搜索第 k' 小元素.

$T(3n/4)$



• 算法复杂性分析

$$T(n) = T(3n/4) + T(n/5) + O(n)$$

$$\text{Let } T(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots, a_1 \neq 0$$

$$T(3n/4) = a_0 + (3/4)a_1 n + (9/16)a_2 n^2 + \dots$$

$$T(n/5) = a_0 + (1/5)a_1 n + (1/25)a_2 n^2 + \dots$$

$$T(3n/4 + n/5) = T(19n/20) = a_0 + (19/20)a_1 n + (361/400)a_2 n^2 + \dots$$

$$T(3n/4) + T(n/5) = a_0 + a_0 + (19/20)a_1 n + (241/400)a_2 n^2 + \dots$$

$$\leq a_0 + T(19n/20)$$

$$\Rightarrow T(n) \leq cn + T(19n/20)$$



Performance Analysis

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(n) &\leq cn + T(19n/20) \\ &\leq cn + (19/20)cn + T((19/20)^2n) \\ &\quad \vdots \\ &\leq cn + (19/20)cn + (19/20)^2cn + \dots + (19/20)^p cn + T((19/20)^{p+1}n) , \\ &\quad (19/20)^{p+1}n \leq 1 \leq (19/20)^p n \\ &= cn (1 + 19/20 + (19/20)^2 + \dots + (19/20)^p) + b \\ &= \frac{1 - (\frac{19}{20})^{p+1}}{1 - \frac{19}{20}} cn + b \\ &\leq 20 cn + b \\ &= O(n) \end{aligned}$$



• Time complexity analysis

- The number of elements that greater than the partition element x is at least

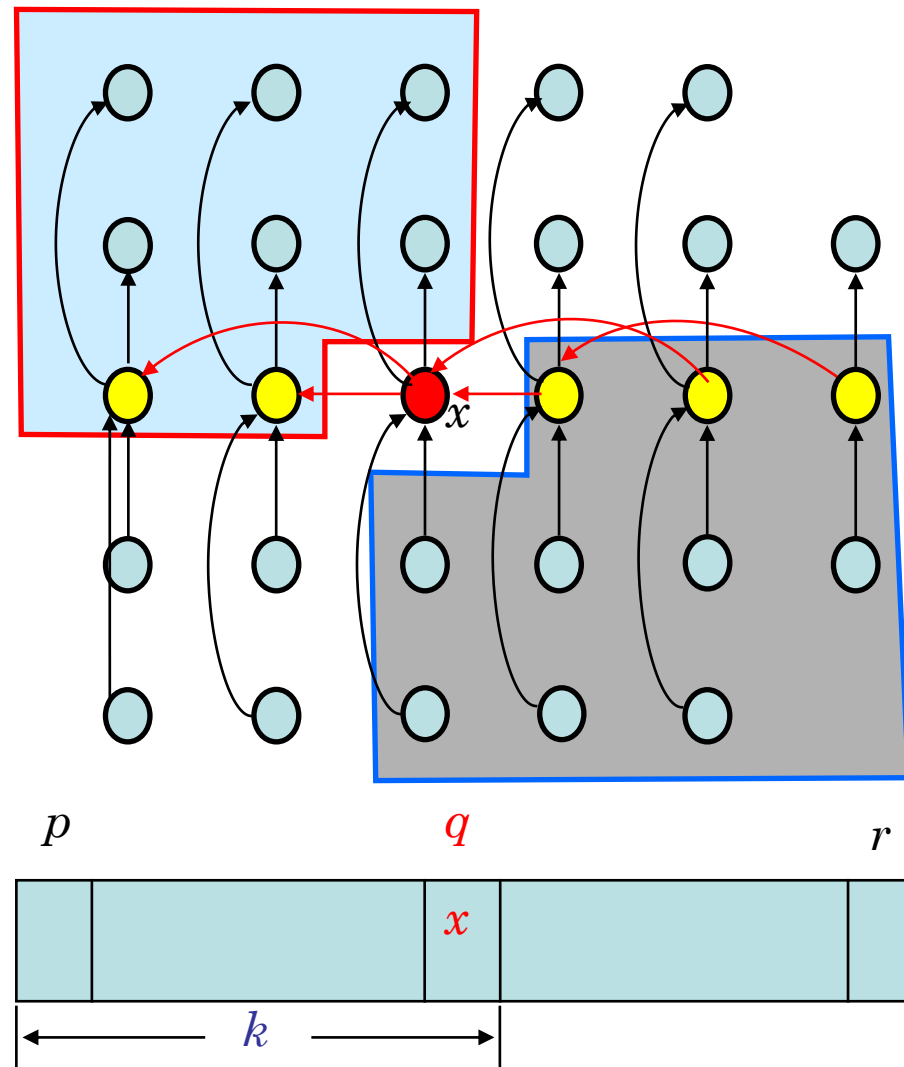
$$3 \left(\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2 \right) \geq \frac{3n}{10} - 6$$

- Thus, in the worst case, the number of elements that smaller than the x is at most

$$n - ((3n/10) - 6) = 7n/10 + 6.$$

- Similarly, the number of elements that greater than the x is also at most

$$7n/10 + 6$$





1. Divide n elements in A into $\lceil n/5 \rceil$ groups of 5 elements each, at most one group has $(n \bmod 5)$ elements.

$O(n)$

2. Find median of each group by sorting first.

$O(n)$

3. Use Select recursively to find the median x of the $\lceil n/5 \rceil$ medians. In case of having two medians, take the lower.

$T(\lceil n/5 \rceil)$

4. Exchange x with the last element in A and apply Partition subroutine. Let k be the number of elements on the low side of the partition including x .

$O(n)$

5. If $i = k$, return x . Otherwise, use Select recursively to find the i^{th} smallest element on the low side if $i \leq k$, or the $(i - k)^{\text{th}}$ smallest element on the high side if $i > k$.

$T(7n/10 + 6)$

$$T(n) \leq \begin{cases} \theta(1) & \text{if } n \leq 140 \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + O(n) & \text{if } n > 140 \end{cases}$$



- Now we have

$$T(n) \leq \begin{cases} \theta(1) & \text{if } n \leq 140 \\ T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + O(n) & \text{if } n > 140 \end{cases}$$

- Using inductive method, we can prove $T(n) \leq cn$ for some c and $n > 140$.
- Thus, the worst case time complexity is $T(n) = O(n)$.



$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) && \text{if } n \leq c \\ T(n) &= aT(n/b) + D(n) + C(n) && \text{if } n > c \end{aligned}$$

3.4 Finding the closest pair of points

优化combine阶段, 降低 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ 中的 $f(n)$



输入：Euclidean空间上的n个点的集合 Q

输出： $A, B \in Q$,

$$Dis(A, B) = \text{Min}\{Dis(P_i, P_j) \mid P_i, P_j \in Q\}$$

$Dis(P_i, P_j)$ 是Euclidean距离：

如果 $P_i = (x_i, y_i)$, $P_j = (x_j, y_j)$, 则

$$Dis(P_i, P_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$



- 利用排序的算法

- 算法

- 把Q中的点排序



- 通过有序集合的线性扫描找出最近点对

- 时间复杂性

- $T(n) = O(n \log n)$



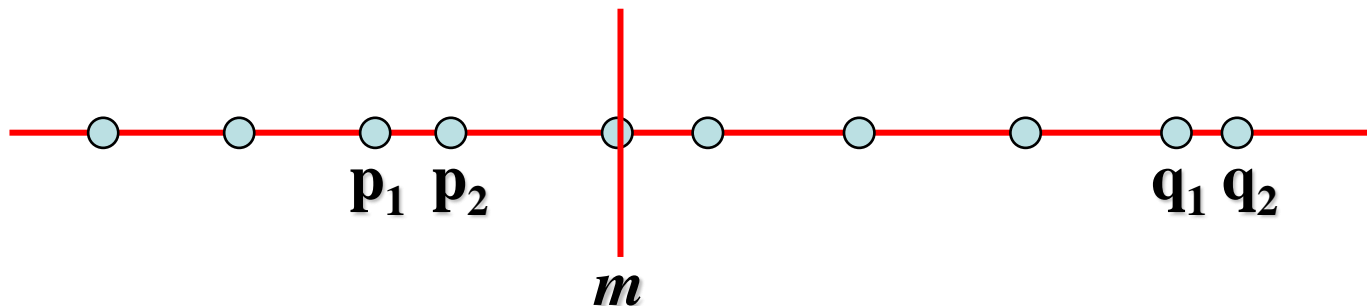
- Divide-and-conquer 算法

边界条件:

1. 如果 Q 中仅包含2个点, 则返回这个点对;

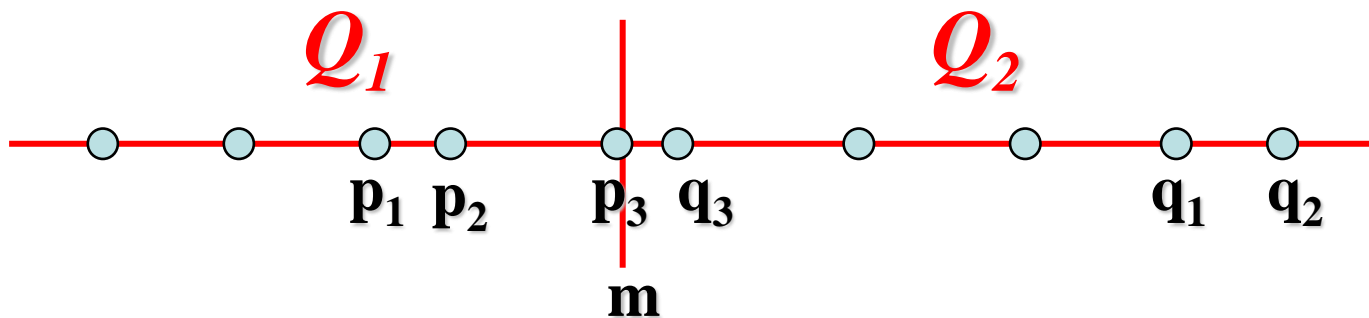
Divide:

2. 求 Q 中点的中位数 m ;





3. 用 Q 中点坐标中位数 m 把 Q 划分为两个大小相等的子集合 $Q_1=\{x \in Q \mid x \leq m\}$, $Q_2=\{x \in Q \mid x > m\}$

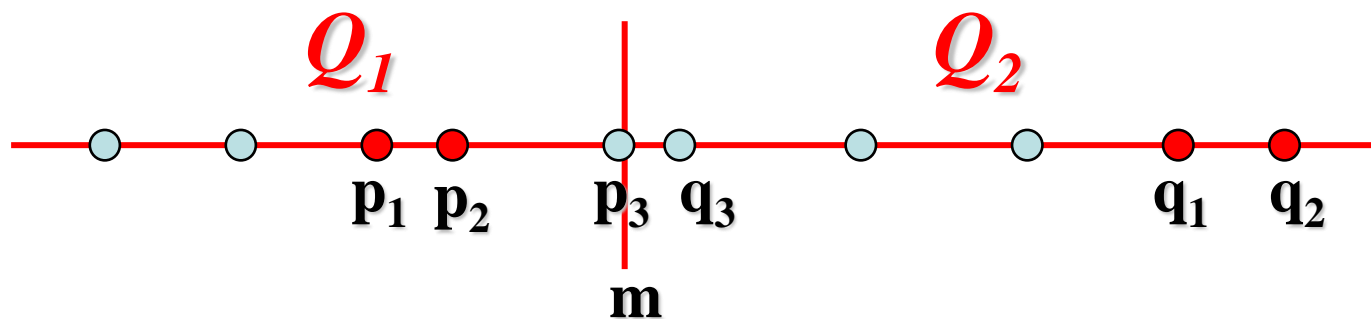


Conquer:

4. 递归地在 Q_1 和 Q_2 中找出最接近点对
 (p_1, p_2) 和 (q_1, q_2)



Merge:



5. 在 (p_1, p_2) 、 (q_1, q_2) 和 某个 (p_3, q_3) 之间选择最接近点对 (x, y) , 其中 p_3 是 Q_1 中最大点, q_3 是 Q_2 中最小点。

(x, y) 是 Q 中最接近点对



- 时间复杂性

- Divide阶段需要 $O(n)$ 时间
- Conquer阶段需要 $2T(n/2)$ 时间
- Merge阶段需要 $O(n)$ 时间
- 递归方程

$$T(n) = O(1) \quad n = 2$$

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) \quad n \geq 3$$

- 用Master定理求解 $T(n)$

$$T(n) = O(n \log n)$$

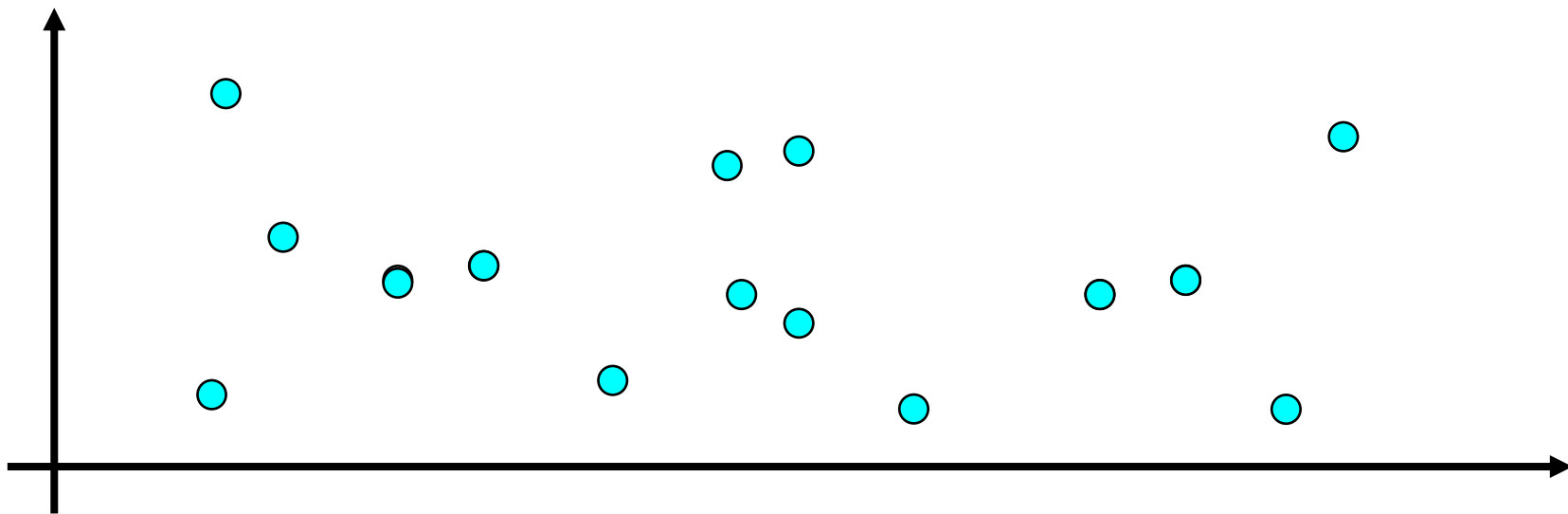


- Divide-and-conquer 算法

Assume: Q 中点已经分别按 x 坐标和 y 坐标排序
后存储在 X 和 Y 中.

边界条件:

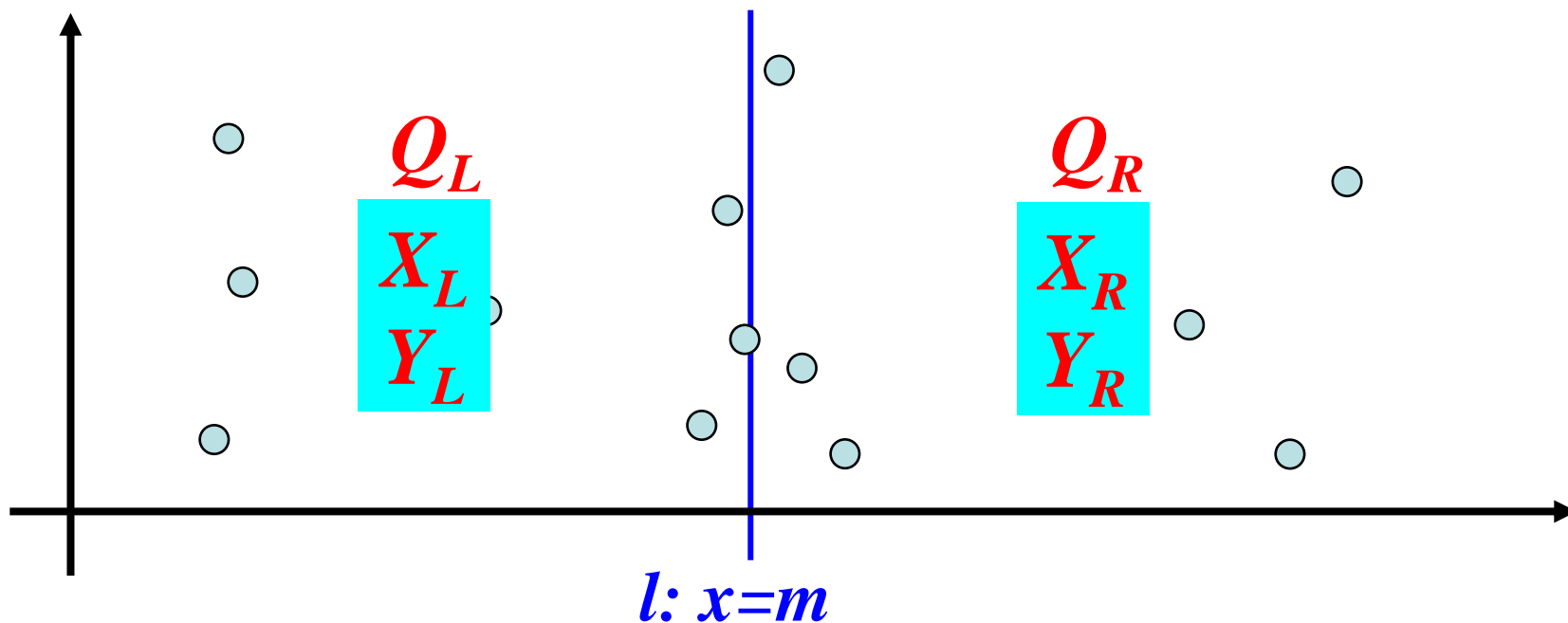
1. 如果 Q 中仅包含 3 个点, 则返回最近点对, 结束;





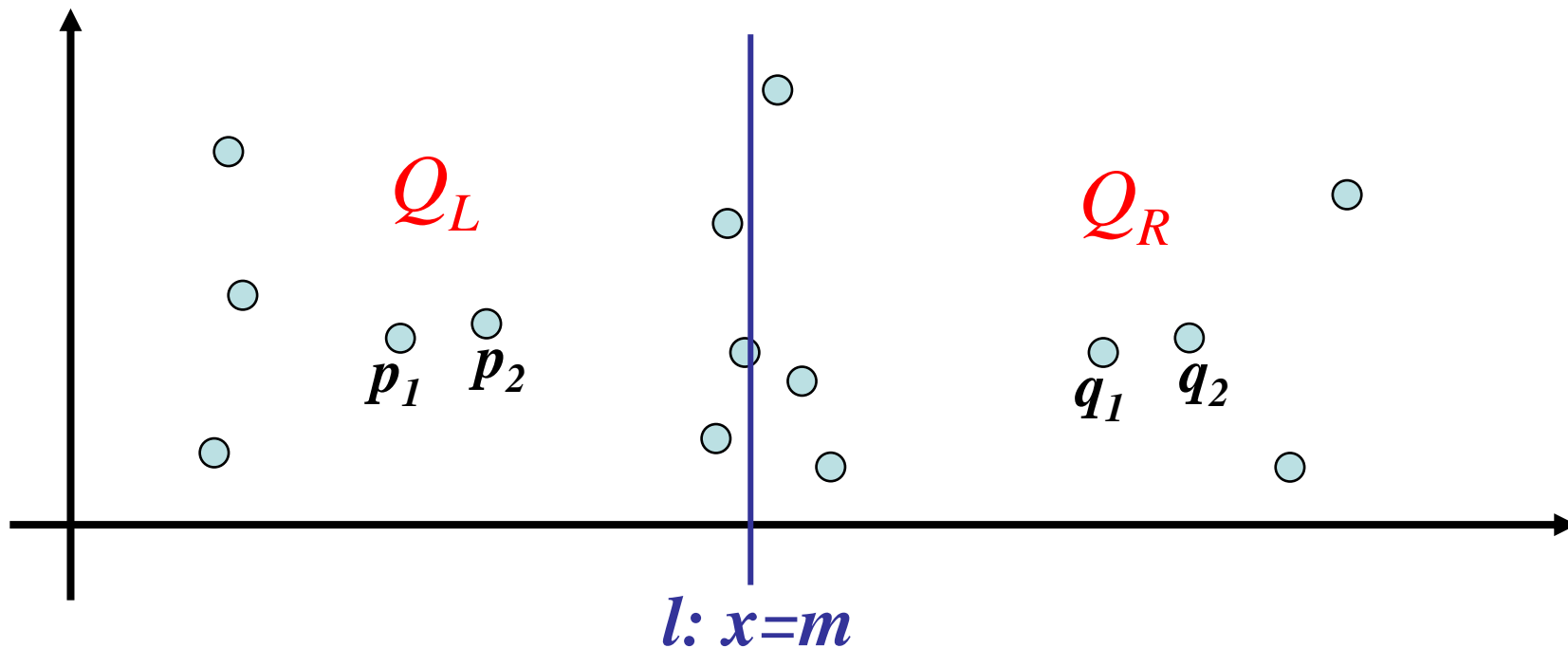
Divide:

2. 计算 Q 中各点 x -坐标的中位数 m ;
3. 用垂线 $l: x=m$ 把 Q 划分成两个大小相等的子集合 Q_L 和 Q_R , Q_L 中点在 l 左边, Q_R 中点在 l 右边;
4. 把 X 划分为 X_L 和 X_R ; 把 Y 划分为 Y_L 和 Y_R ;





HITWH
SE

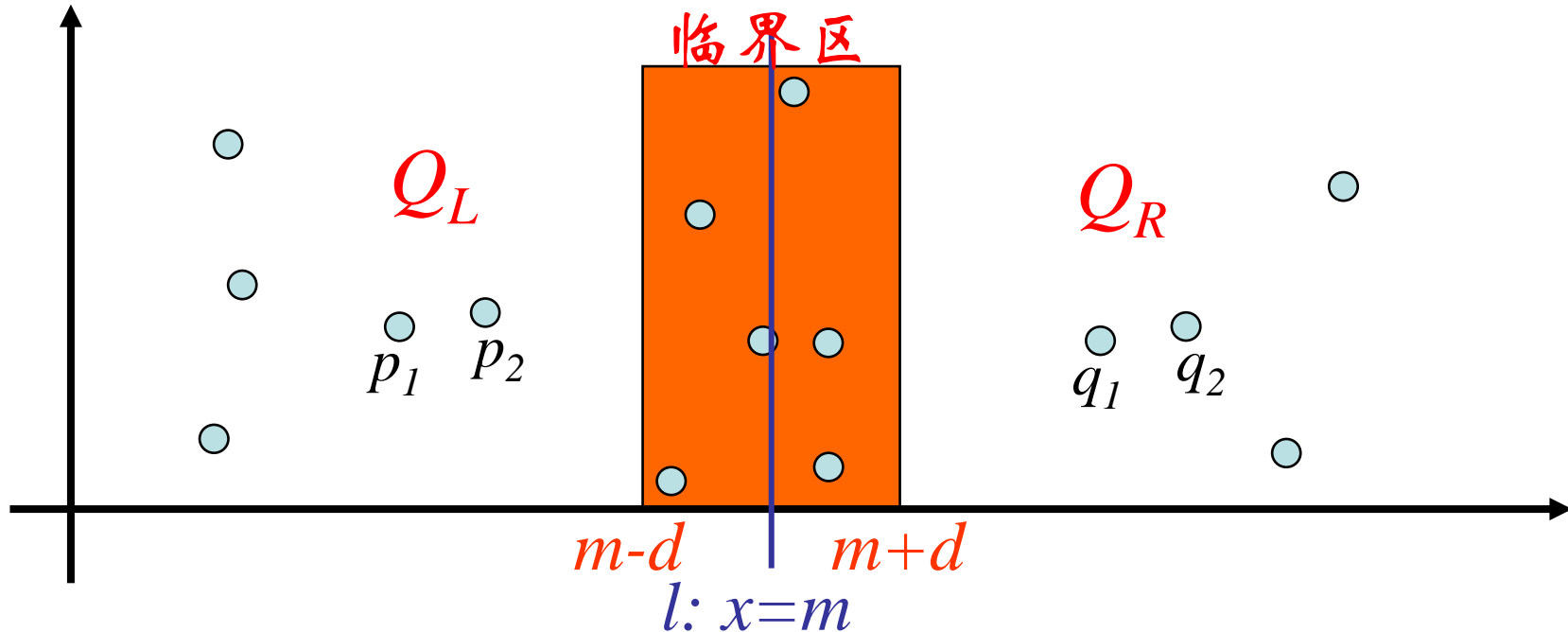


Conquer:

5. 递归地在 Q_L 、 Q_R 中找出最近点对:

$$(p_1, p_2) \in Q_L, (q_1, q_2) \in Q_R$$

6. $d = \min\{Dis(p_1, p_2), Dis(q_1, q_2)\};$



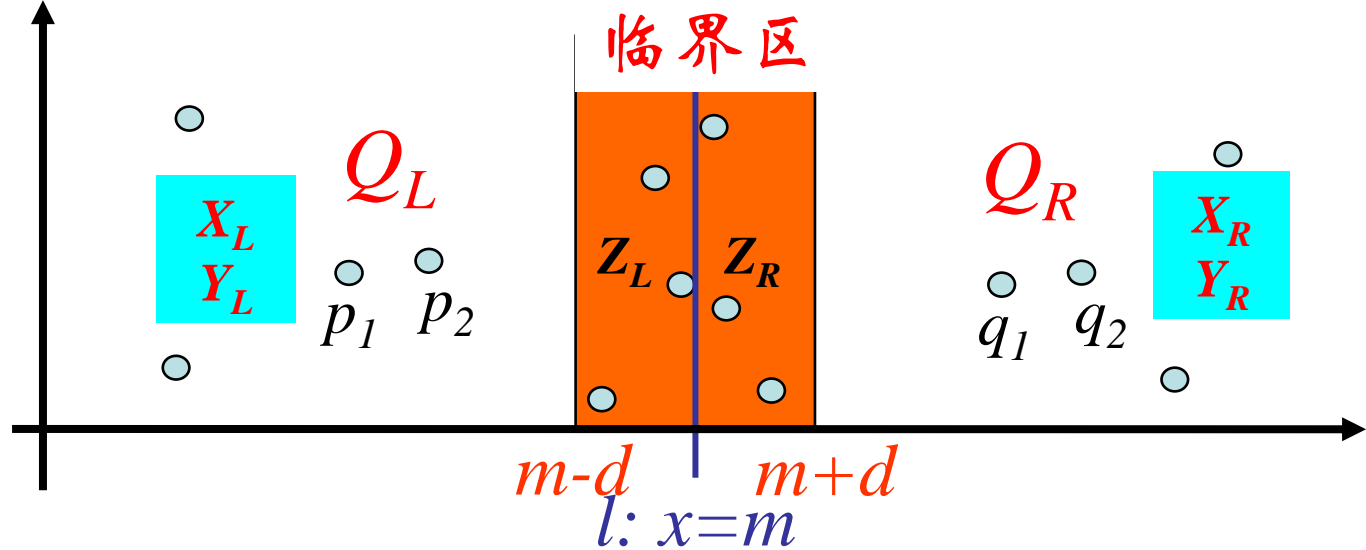
Merge:

1. 在临界区查找距离小于 d 的最近点对 (p_l, q_r) , $p_l \in Q_L$, $q_r \in Q_R$;
2. 若找到, 则 (p_l, q_r) 是 Q 中最近点对, 否则 (p_1, p_2) 和 (q_1, q_2) 中距离最小者为 Q 中最近点对.

关键是 (p_l, q_r) 的搜索方法及其搜索时间



HITWH
SE



• (p_l, q_r) 搜索算法

1. $Z_L = \{Q_L \text{ 中左临界区点}\};$
 $Z_R = \{Q_R \text{ 中右临界区点}\};$



• 时间复杂性

$$O(6n) = O(n)$$

• (p_l, q_r) 搜索算法

1. $Z_L = \{Q_L \text{ 中左临界区点}\};$

$Z_R = \{Q_R \text{ 中右临界区点}\};$

2. For $\forall p(x_p, y_p) \in Z_L$ Do

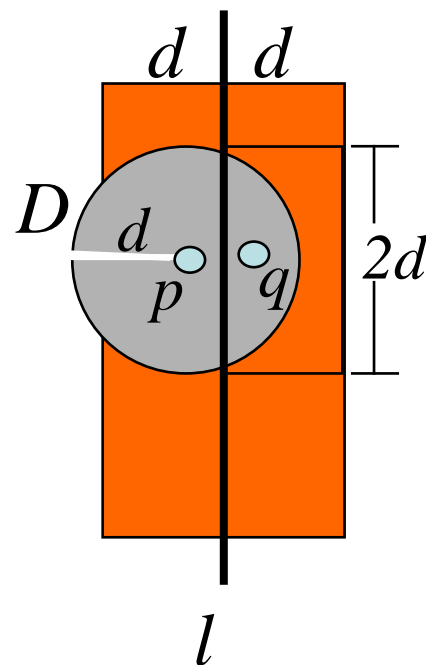
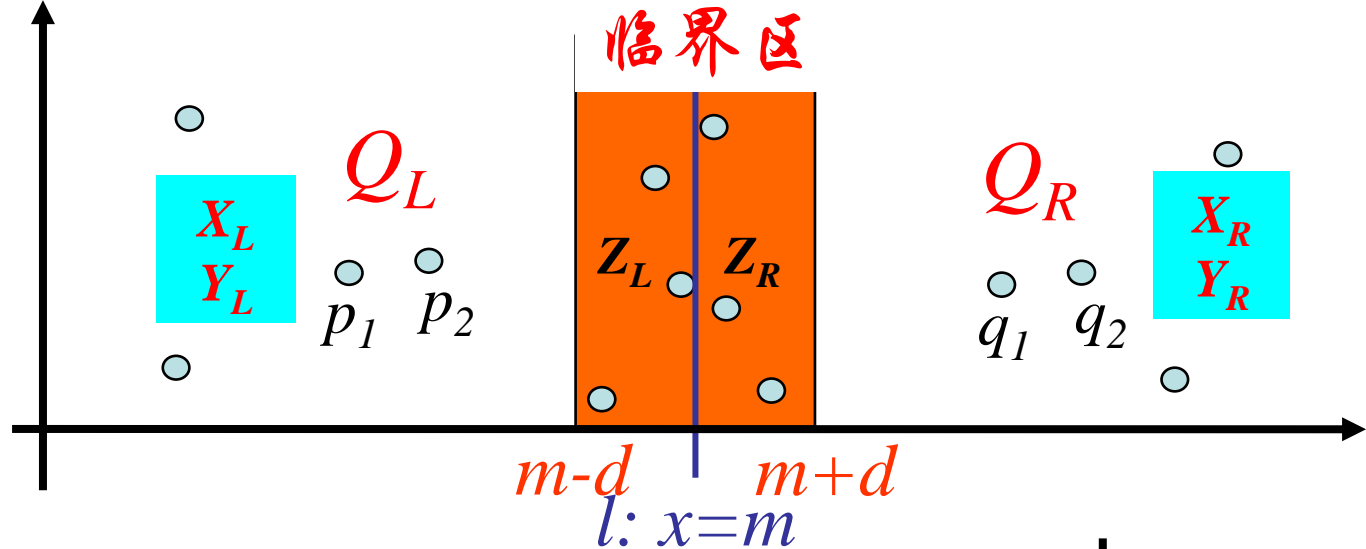
3. For $\forall q(x_q, y_q) \in Z_R$ Do $(y_p - d \leq y_q \leq y_p + d)$

这样点至多6个

4. If $Dis(p, q) < d$

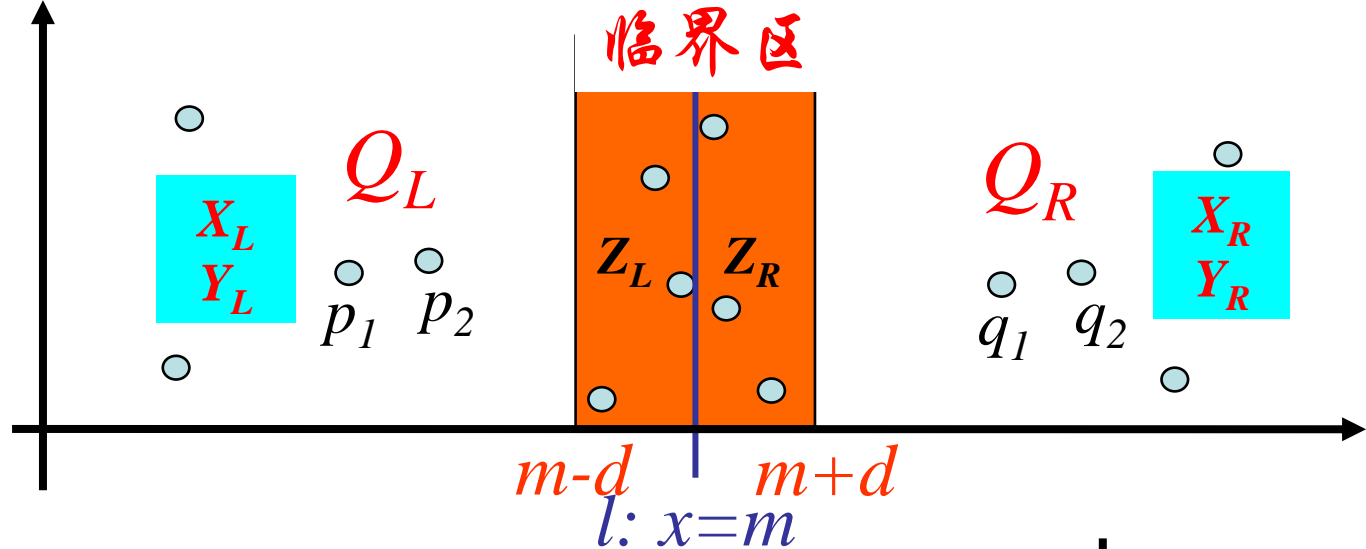
5. Then $d = Dis(p, q)$, 记录 (p, q) ;

6. 如果 d 发生过变化, 与最后的 d 对应的点对即为 (p_l, q_r) , 否则不存在 (p_b, q_r) .





• 时间复杂性
 $O(6n) = O(n)$



• (p_l, q_r) 搜索算法

1. $Z_L = \{Q_L \text{ 中左临界区点}\};$

$Z_R = \{Q_R \text{ 中右临界区点}\};$

2. For $\forall p(x_p, y_p) \in Z_L$ Do

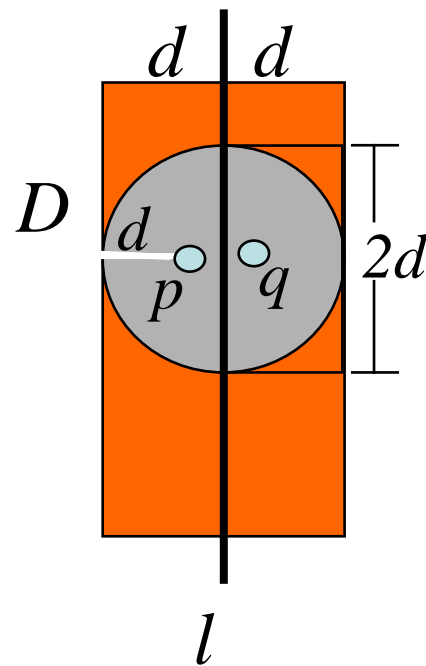
3. For $\forall q(x_q, y_q) \in Z_R$ Do $(y_p - d \leq y_q \leq y_p + d)$

\backslash *这样点至多6个* \backslash

4. If $Dis(p, q) < d$

5. Then $d = Dis(p, q)$, 记录 (p, q) ;

6. 如果 d 发生过变化, 与最后的 d 对应的点对即为 (p_l, q_r) , 否则不存在 (p_b, q_r) .





- 时间复杂性

- Divide阶段需要 $O(n)$ 时间
- Conquer阶段需要 $2T(n/2)$ 时间
- Merge阶段需要 $O(n)$ 时间
- 递归方程

$$T(n) = O(1) \quad n \leq 3$$

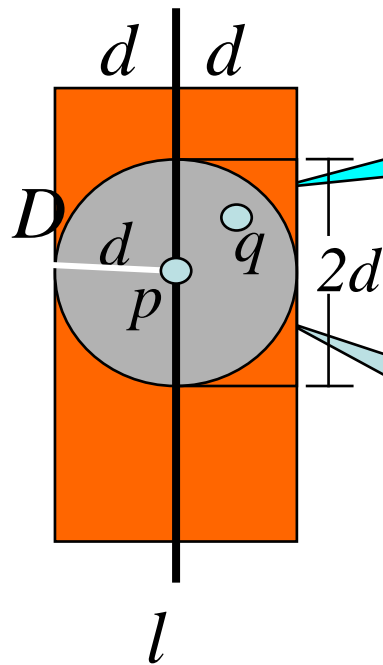
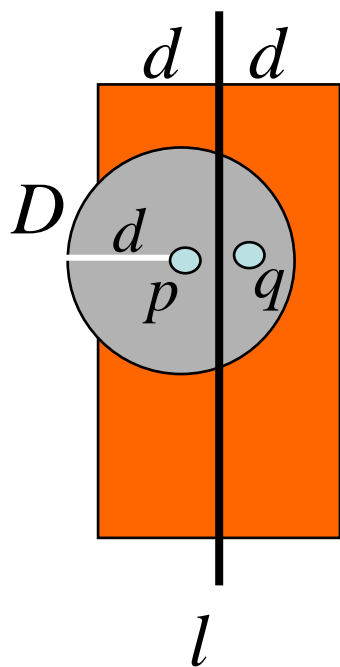
$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) \quad n > 3$$

- 用Master定理求解 $T(n)$

$$T(n) = O(n \log n)$$

(p_l, q_r) 的搜索时间:

- 若 (p, q) 是最近点对而且 $p \in Q_L, q \in Q_R$, $\text{dis}(p, q) < d$, (p, q) 只能在下图的区域 D .
- 若 p 在分割线 l 上, 包含 (p, q) 的区域 D 最大, 嵌于 $d \times 2d$ 的矩形 (p -右邻域) 中, 如下图所示.



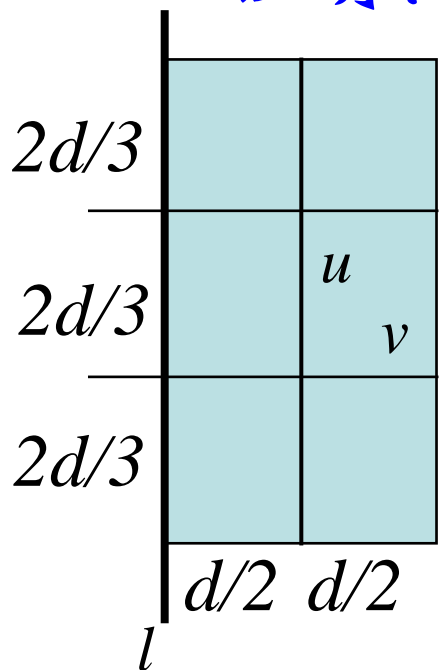
p -右邻域

至多包含6个点



定理1. 对于左临界区中的每个点 p ,
 p -右邻域中至多包含6个点。

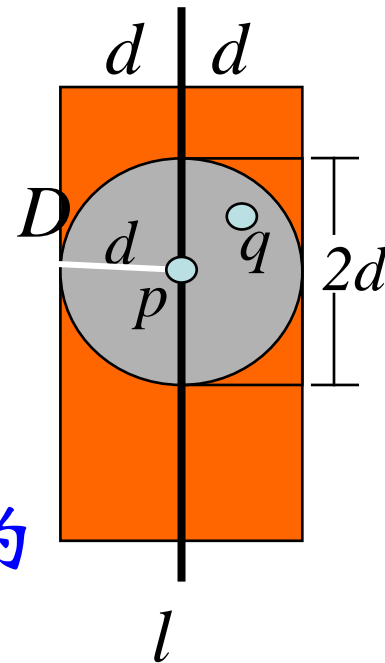
证明: 把 p -右邻域划分为6个 $(d/2) \times (2d/3)$ 的
矩形。



若 p -右邻域中点数大于6, 由鸽巢原理, 至少
有一个矩形中有两个点. 设为 u 、 v , 则

$$(x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2 \leq (d/2)^2 + (2d/3)^2 = 25d^2/36$$

即 $Dis(u, v) \leq 5d/6 < d$, 与 d 的定义矛盾。





- **Assume:**

*Q 中点已经分别按 x 坐标和 y 坐标
排序后存储在 X 和 Y 中.*

1. X = 按 x 排序 Q 中点;
2. Y = 按 y 排序 Q 中点;
3. FindCPP(X , Y).

时间复杂度 = $O(n \log n) + T(\text{FindCPP}) = O(n \log n)$



3.5 Sorting in Linear Time

- Counting Sort Algorithm
- Radix Sort Algorithm
- Bucket Sort Algorithm



Counting Sort



- Input: $A[1..n]$, $0 \leq A[i] \leq k$ for $1 \leq i \leq n$
- Output: $B[1..n] = \text{sorted } A[1..n]$
- Idea
 - Use $C[0..k]$ to compute the position of each $A[i]$
 - Put each $A[i]$ for $i=n$ to 1 into $B[\textcolor{red}{C}[A[i]]]$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	5	3	0	2	3	0	3
	1	2	3	4	5	6	7	8
B								
	1	2	3	4	5	6	7	8
B							3	
	1	2	3	4	5	6	7	8
B		0					3	
	1	2	3	4	5	6	7	8
B		0				3	3	
	1	2	3	4	5	6	7	8
B		0		2		3	3	
	1	2	3	4	5	6	7	8
B	0	0		2		3	3	
	1	2	3	4	5	6	7	8
B	0	0	2	2	3	3	3	5

	0	1	2	3	4	5
C	2	0	2	3	0	1
	0	1	2	3	4	5
C	2	2	4	7	7	8
	0	1	2	3	4	5
C	2	2	4	6	7	8
	0	1	2	3	4	5
C	1	2	4	6	7	8
	0	1	2	3	4	5
C	1	2	4	5	7	8
	0	1	2	3	4	5
C	1	2	3	5	7	8
	0	1	2	3	4	5
C	0	2	3	5	7	8



- Algorithm and Time complexity

```
for  $i \leftarrow 0$  to  $k$ 
```

```
do  $C[i] \leftarrow 0$ ;
```

$O(k)$

```
for  $j \leftarrow 1$  to  $length[A]$ 
```

```
do  $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$ ;
```

$O(n)$

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$ 
```

```
do  $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$ ;
```

$O(k)$

```
for  $j \leftarrow length[A]$  downto 1
```

```
do begin
```

```
     $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$ ;
```

```
     $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$ ;
```

$O(n)$

Time Complexity = $O(n+k)$

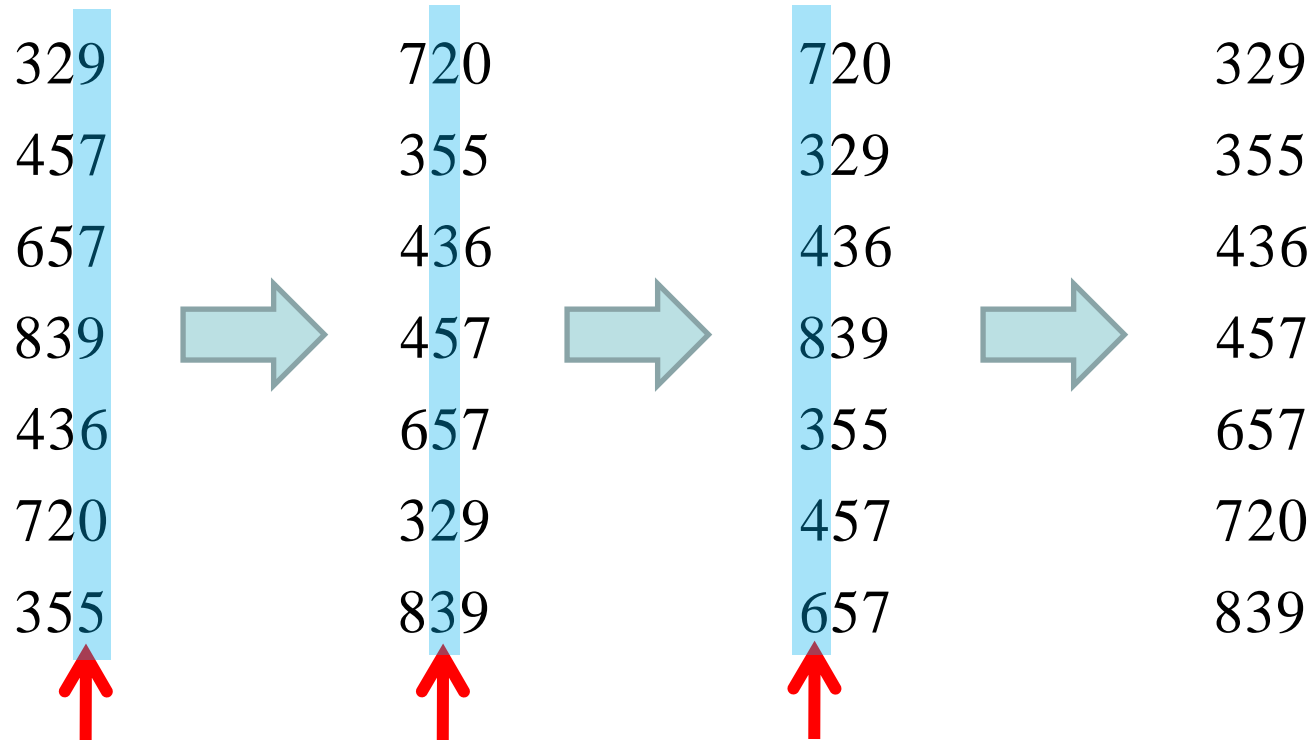


- Counting Sort 算法性质
 - Counting sort doesn't sort in place
 - Counting sort is **stable**
 - That is, the same values appear in the output array in the same order as they do in the input array.
 - Problems
 - $A[i]$ must be integer.
 - k should be small



Radix Sort Algorithm

- Idea of Radix sort algorithm
 - Use stable sort algorithm
 - Sort the n d -digit elements from the lowest digit to the highest digit





- Radix sort algorithm

Input: Array A , each element is a number of d digit.

Radix-Sort(A, d)

for $i \leftarrow 1$ to d do

 use a stable sort to sort array A on digit i ;

- Time complexity of Radix sort algorithm

- Using Counting sort algorithm, $0 \leq A[i] \leq k$

- The time complexity is $O(d(n+k))$

- Problems

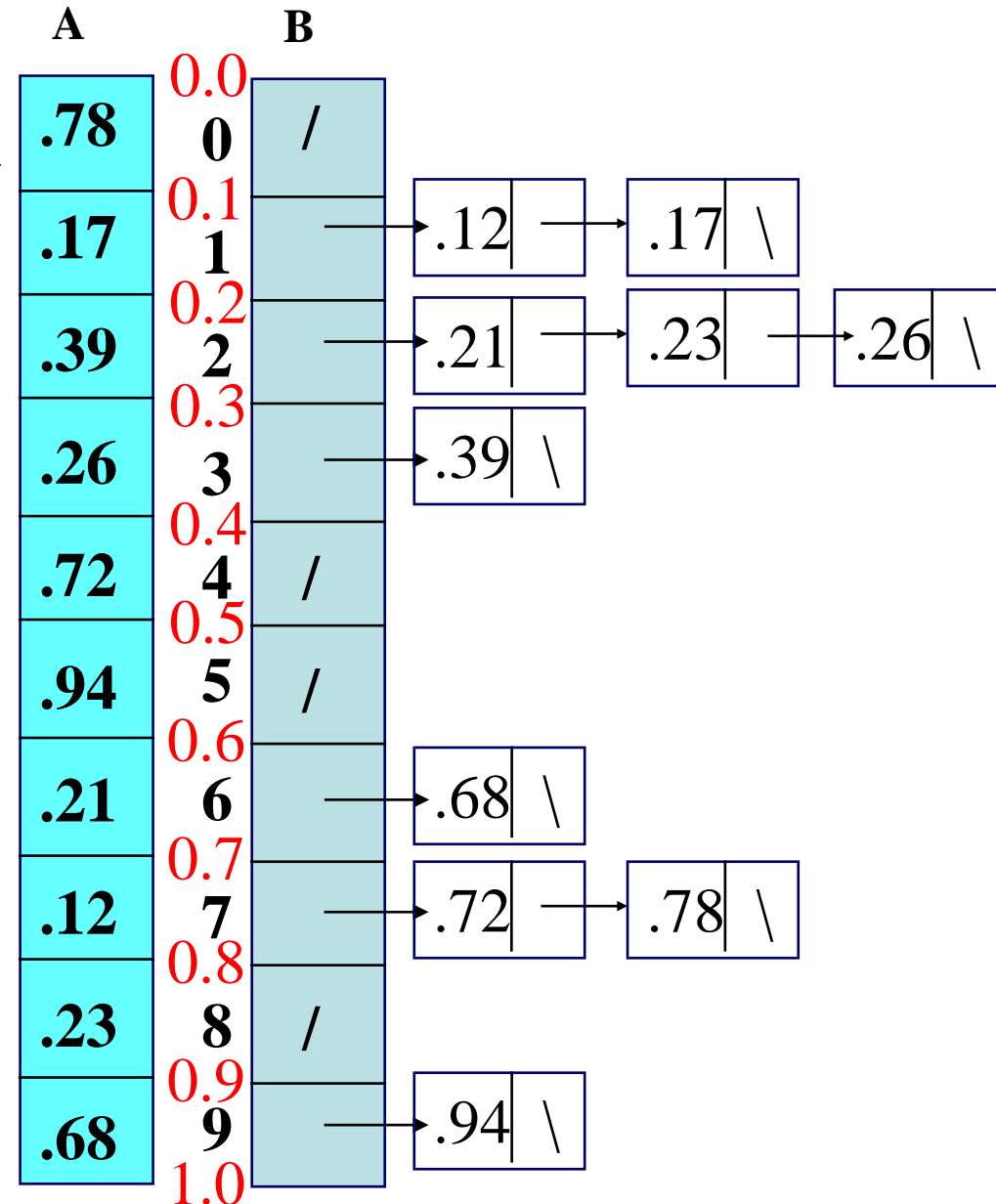


- Extension of Radix sort
 - Input: n b -binary-digit number, any $r \leq b$
 - Radix sort can sort these numbers in $\Theta((b/r)(n+2^r))$
 - Why
 - View each number as $d = \lceil b/r \rceil$ digits of r bits each.
 - Each digit is an integer in the range 0 to $2^r - 1$
 - Use counting sort with $k = 2^r - 1$
 - How about $b=500$, $r=100$?



Bucket Sort

- **Assumption of Bucket Sort**
 - Input is elements uniformly distributed in $[0, 1)$ independently
- **Idea of Bucket Sort**
 - Divide $[0, 1)$ into n equal-sized bucket
 - Distribute the input into the n bucket
 - Sort the numbers in each bucket
 - List all the sorted numbers in each bucket in order

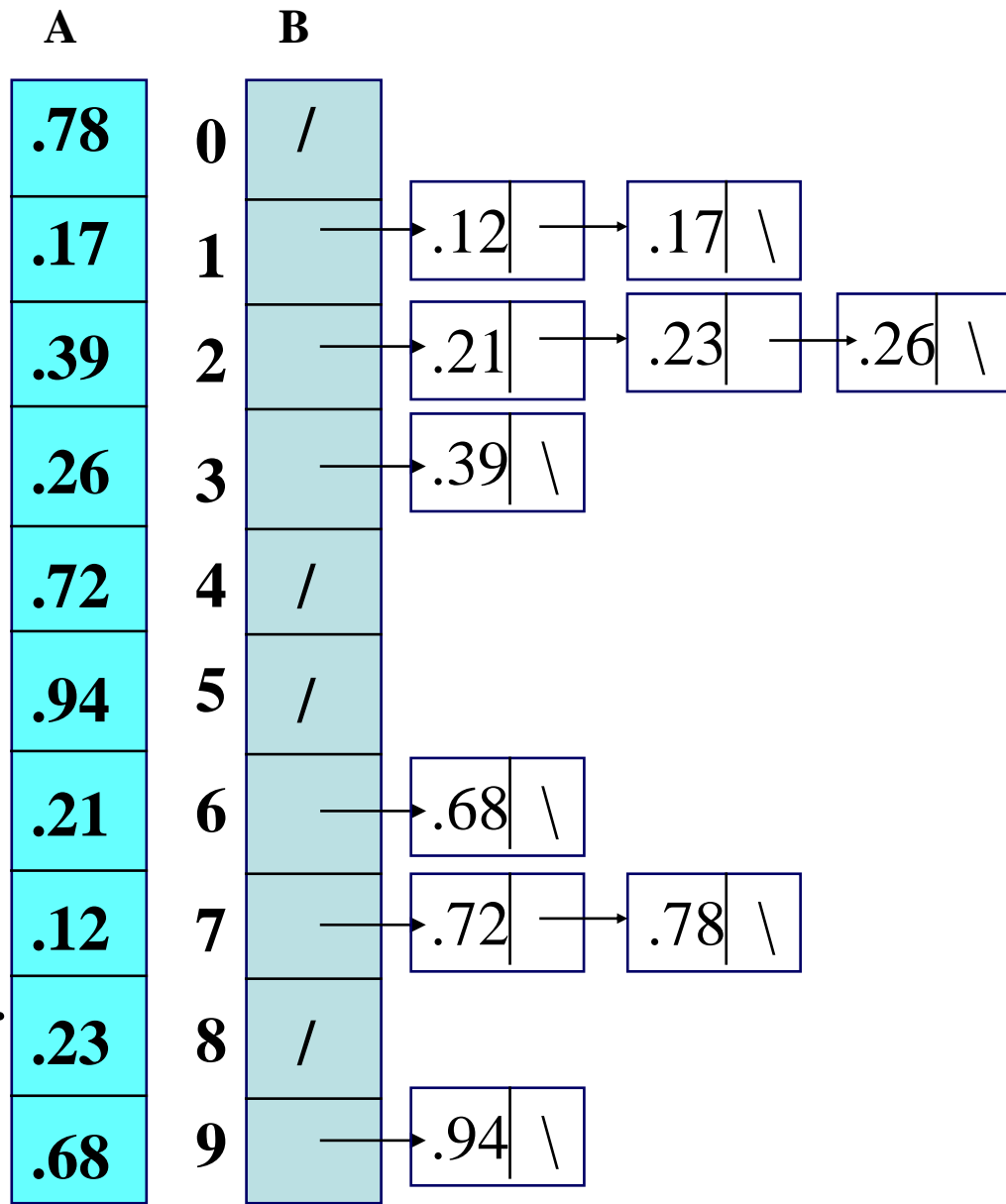




• Bucket Sort Algorithm

Bucket-Sort(A)

1. $n = \text{length}[A]$;
2. For $i=1$ To n Do
3. Insert $A[i]$ into list $B[\lfloor nA[i] \rfloor]$;
4. For $i=0$ To $n-1$ Do
5. Sort list $B[i]$ with insert sort;
6. concatenate lists $B[0], \dots, B[n-1]$.





- **Time complexity**

- Let the random variable $n_i = |B[i]|$
- The time complexity:

$$T(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

- Since $E[n_i^2] = 2 - 1/n$

$$\begin{aligned} E[T(n)] &= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + O(n(2 - 1/n)) = \Theta(n) \end{aligned}$$



HITWH
SE

3.6 Finding the convex hull



输入：平面上的 n 个点的集合 Q

输出：CH(Q): Q 的convex hull

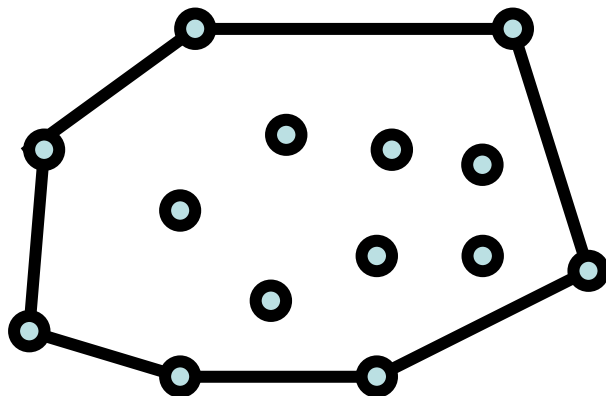
Q 的convex hull是一个最小凸多边形
 P , Q 的点或者在 P 上或者在 P 内

凸多边形 P 是具有如下性质多边形:
连接 P 内任意两点的边都在 P 内



- 基本思想

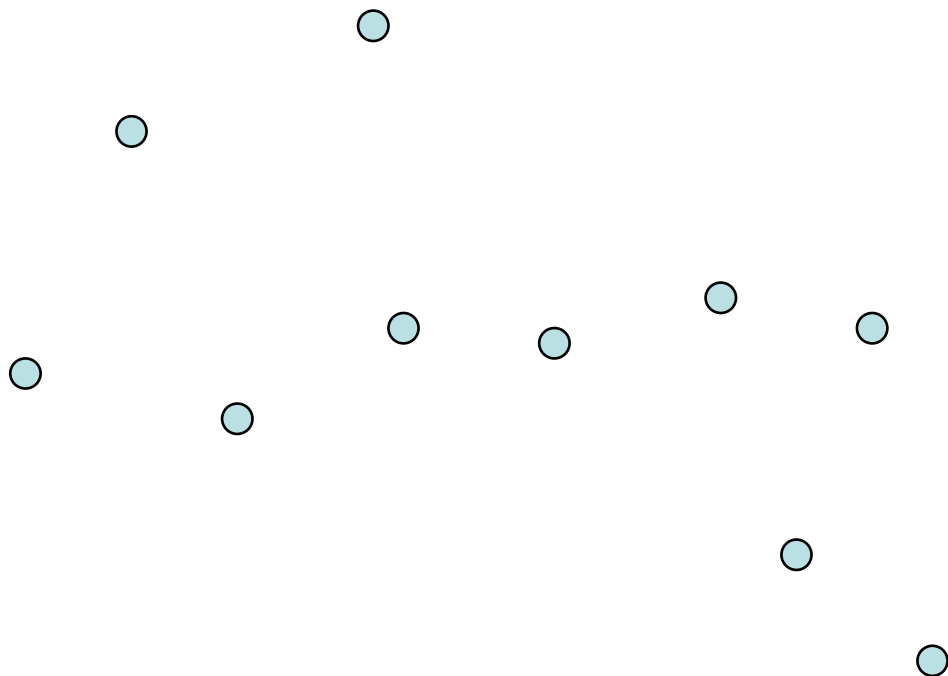
- 当沿着Convex hull逆时针漫游时，总是向左转
- 在极坐标系下按照极角大小排列，然后逆时针方向漫游点集，去除非Convex hull顶点(非左转点)。





HITWH
SE

第1步

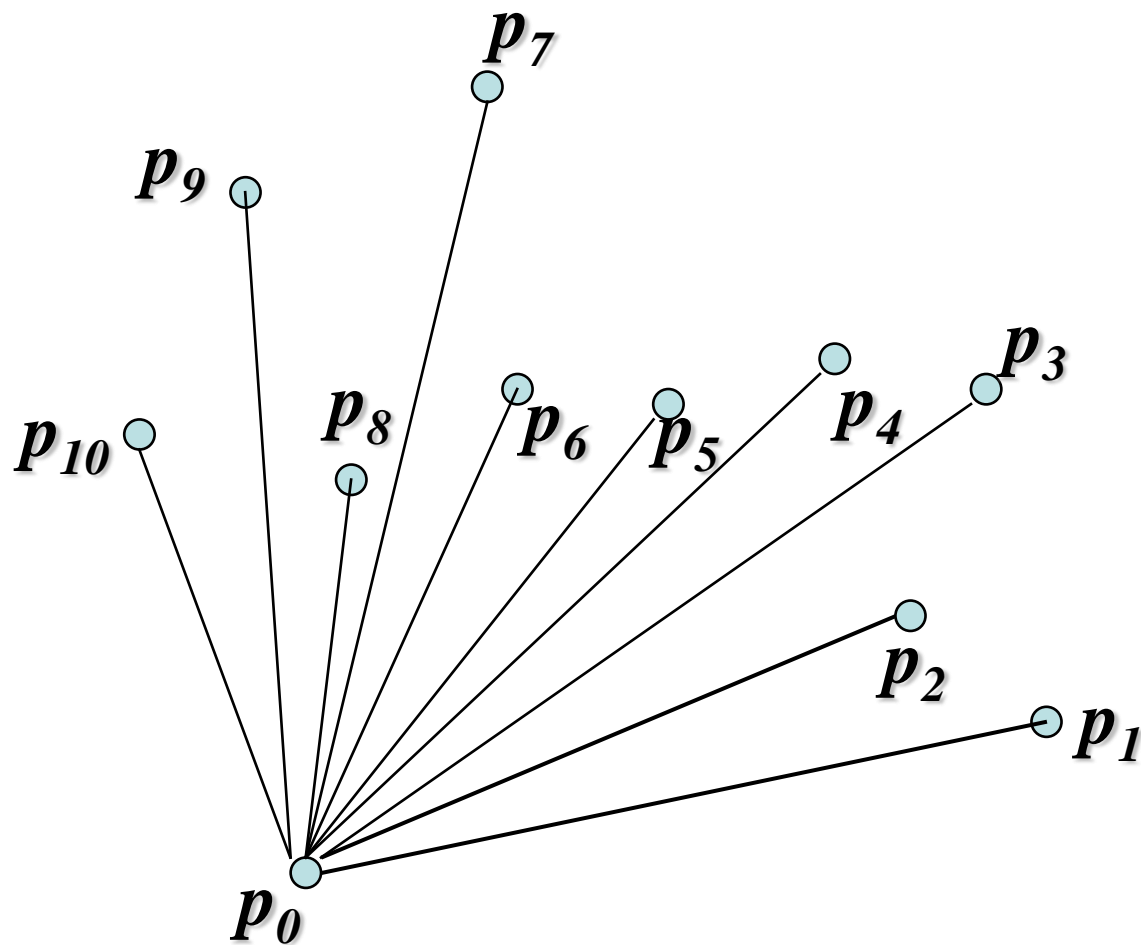


p_0



HITWH
SE

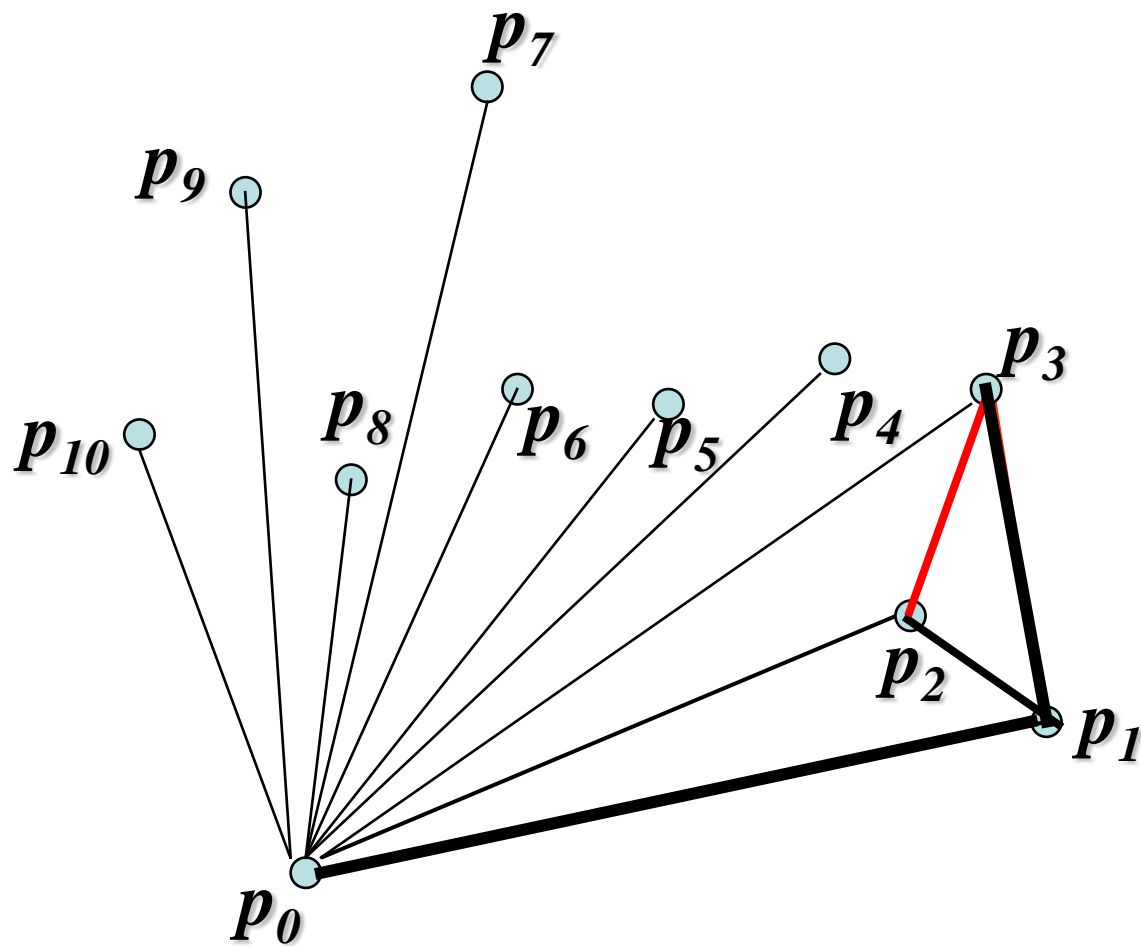
第2步





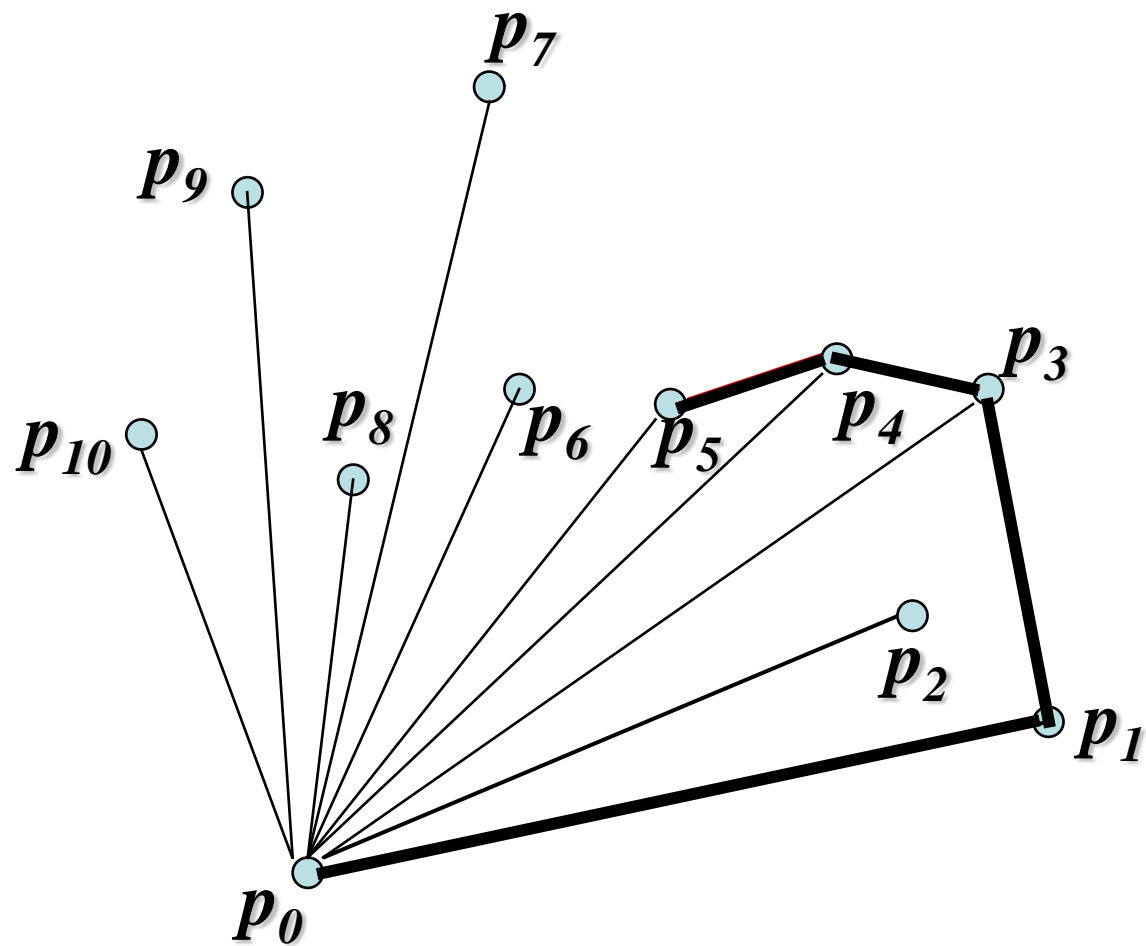
HITWH
SE

第3步



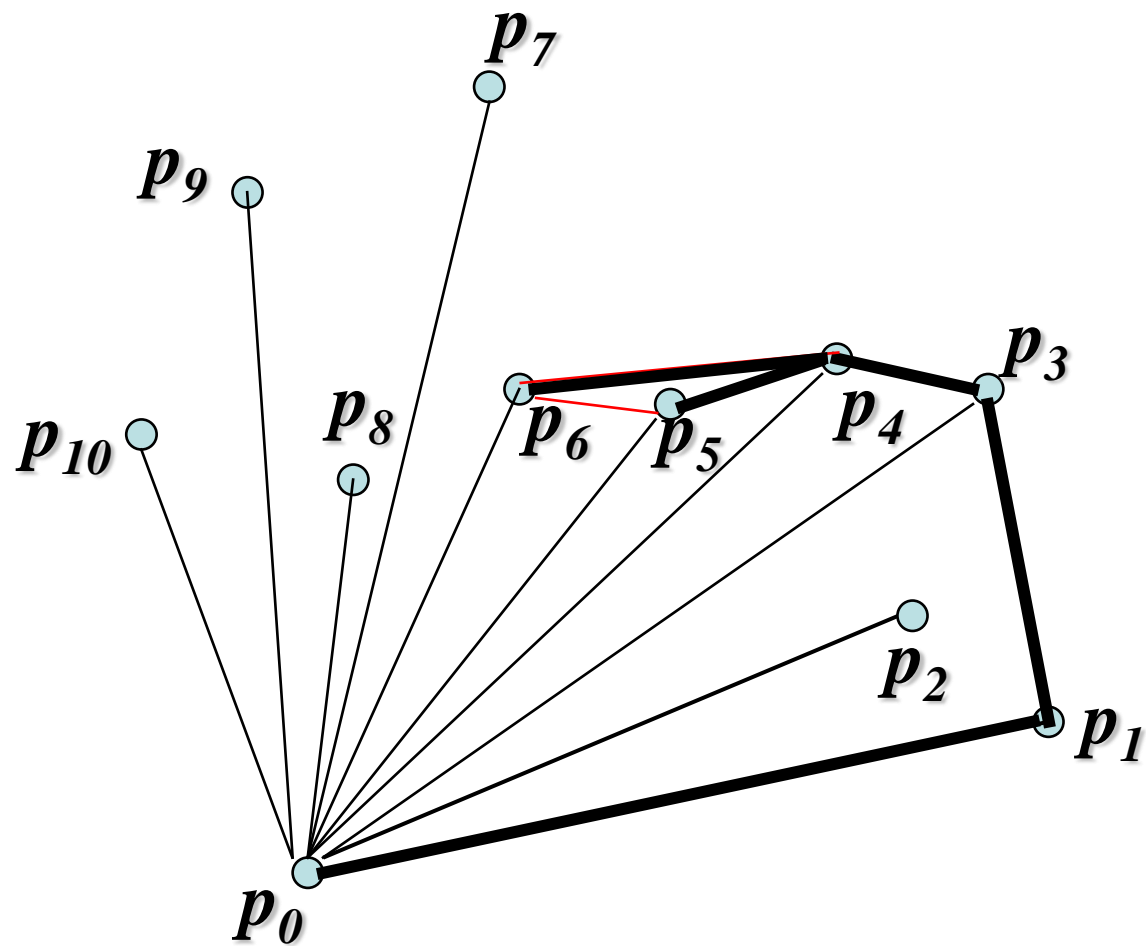


HITWH
SE



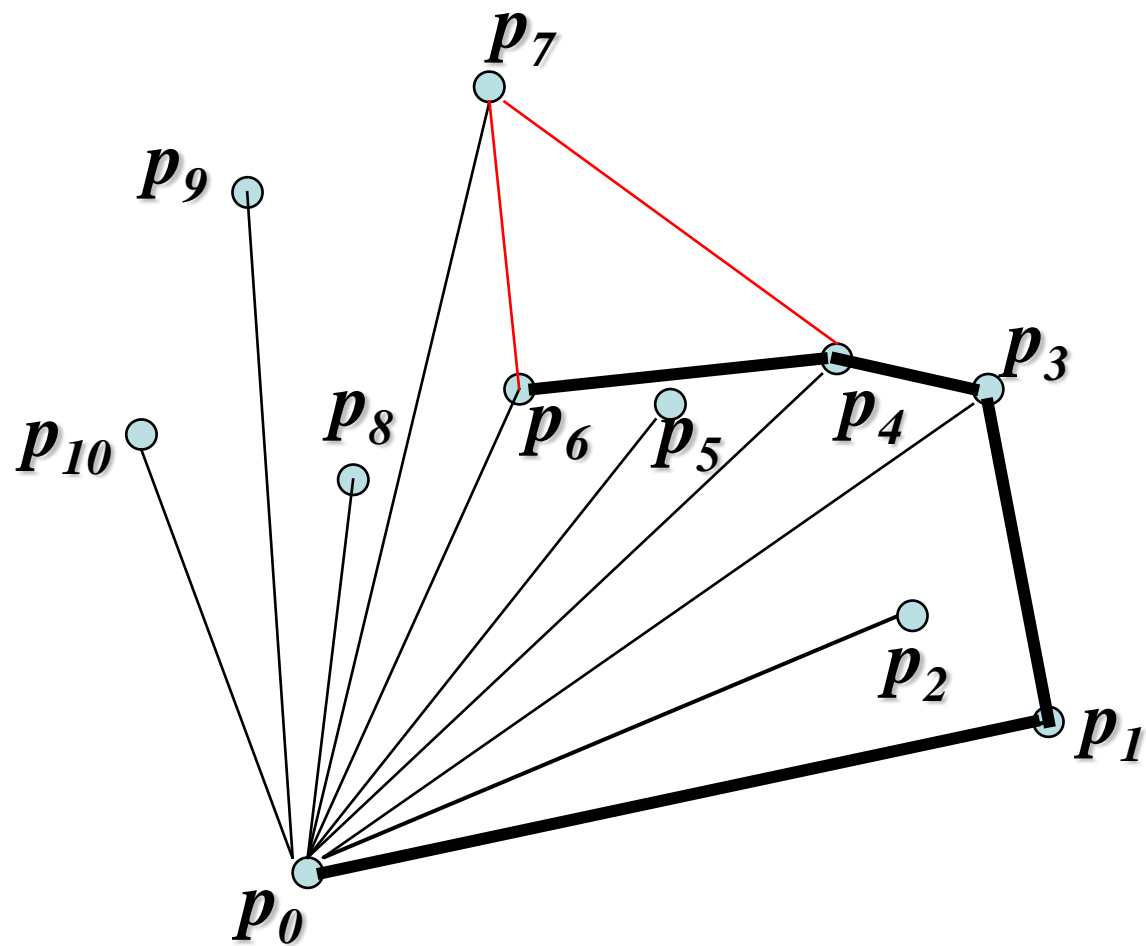


HITWH
SE



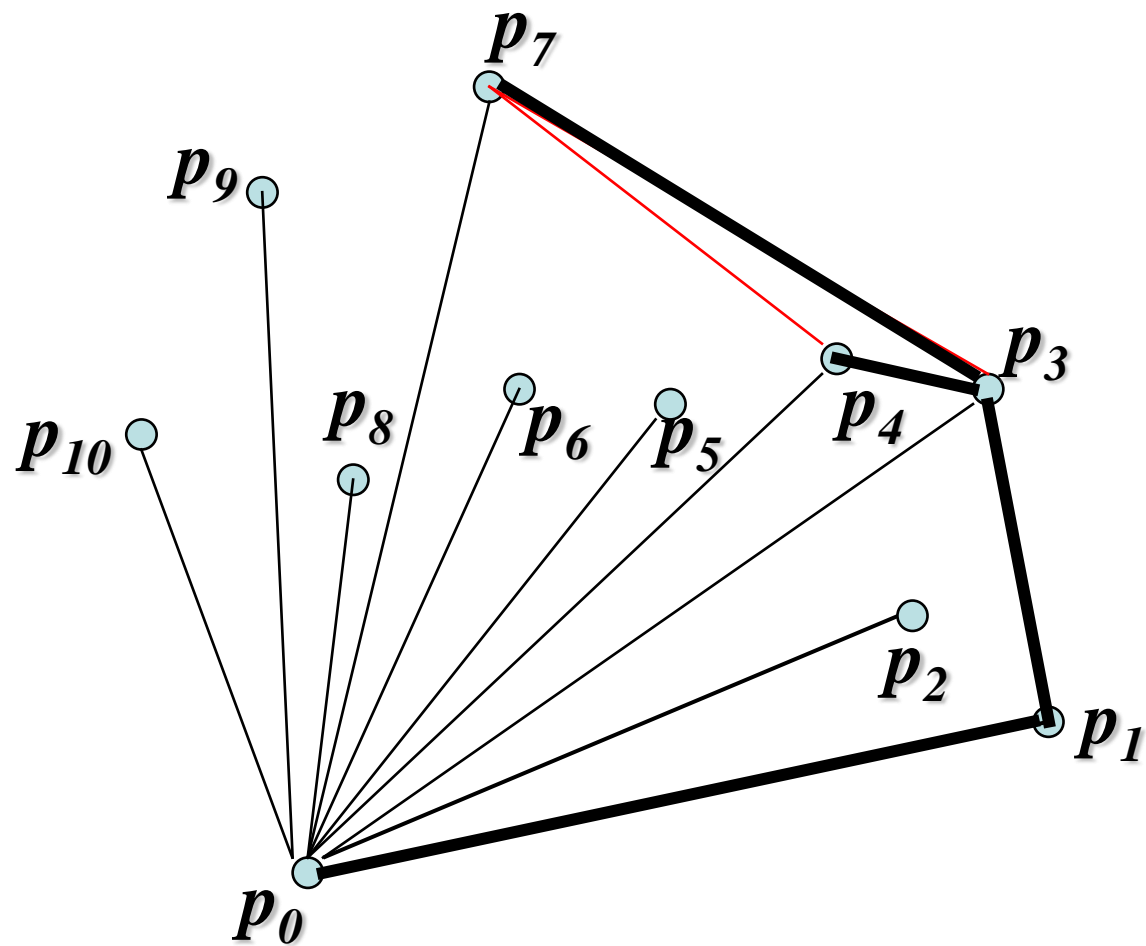


HITWH
SE



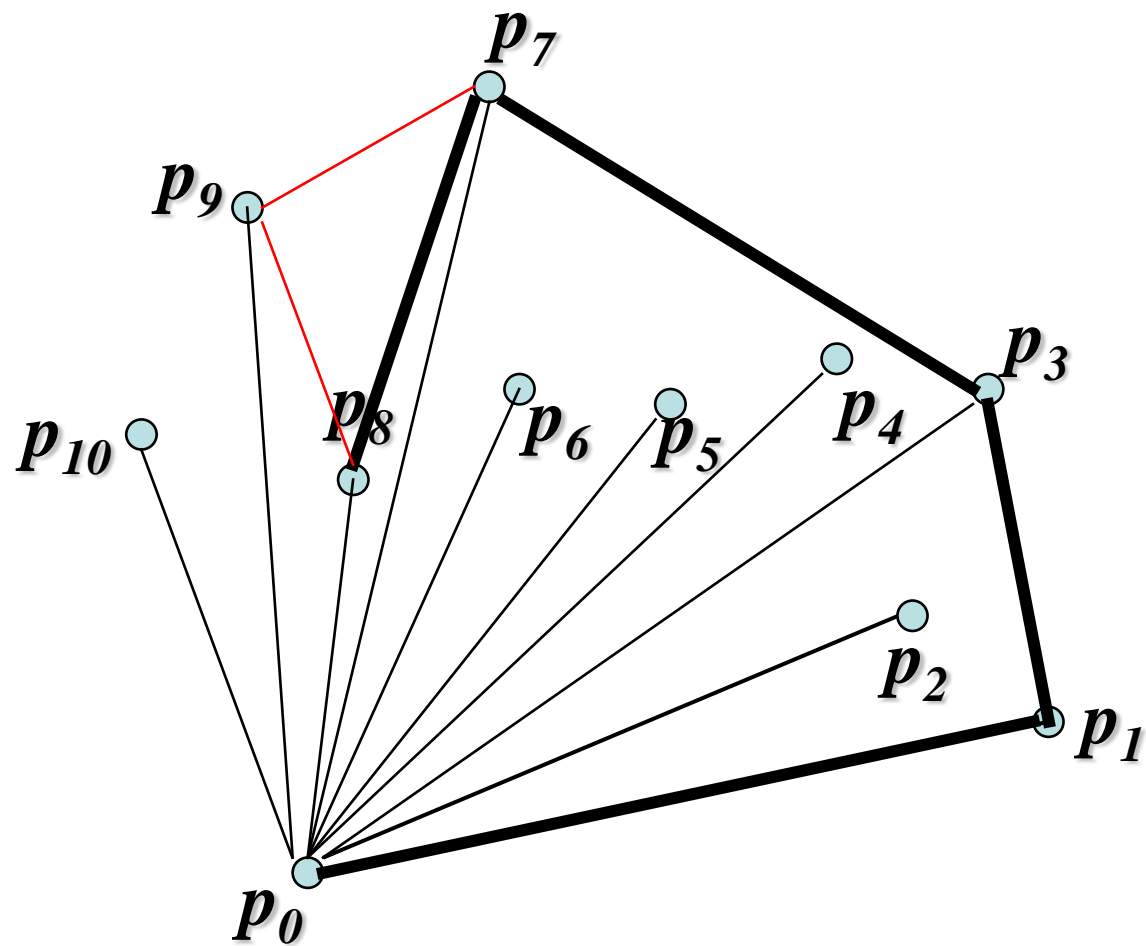


HITWH
SE



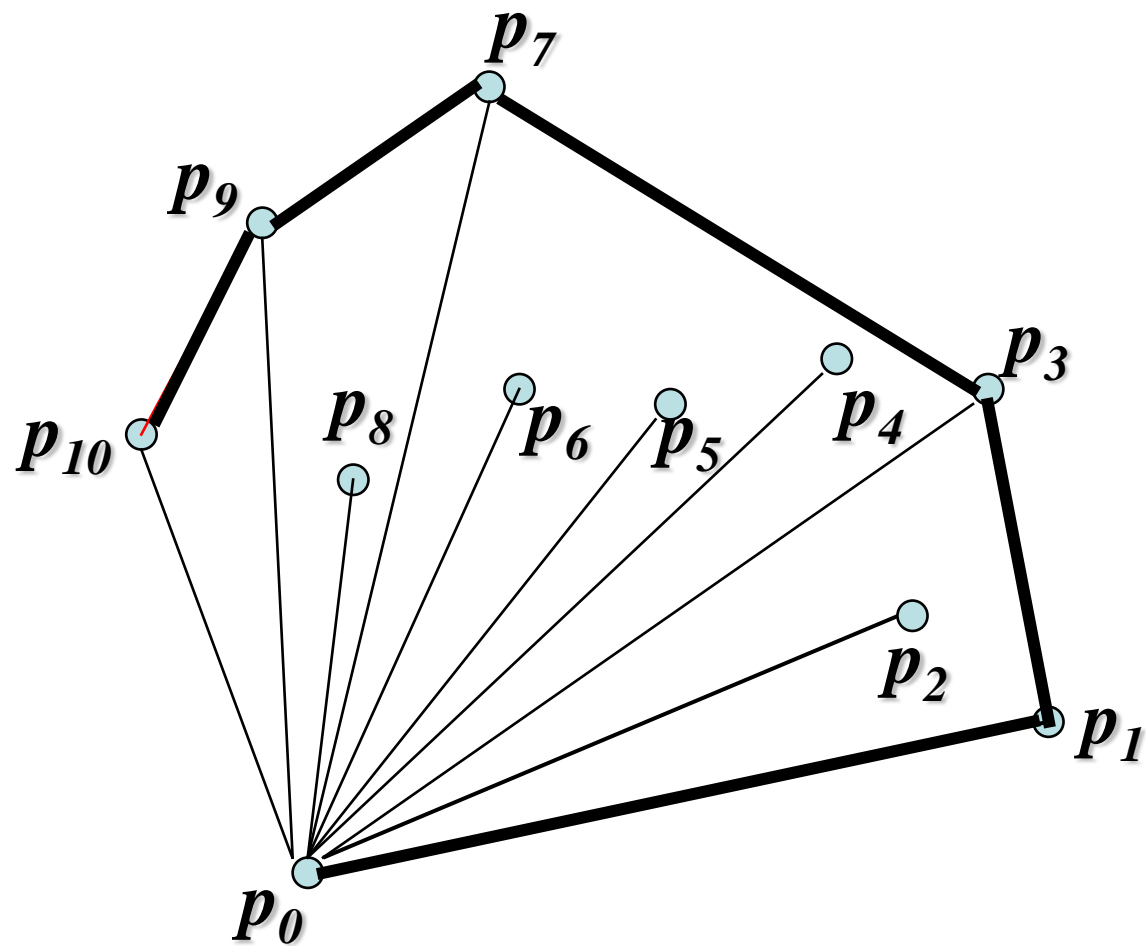


HITWH
SE





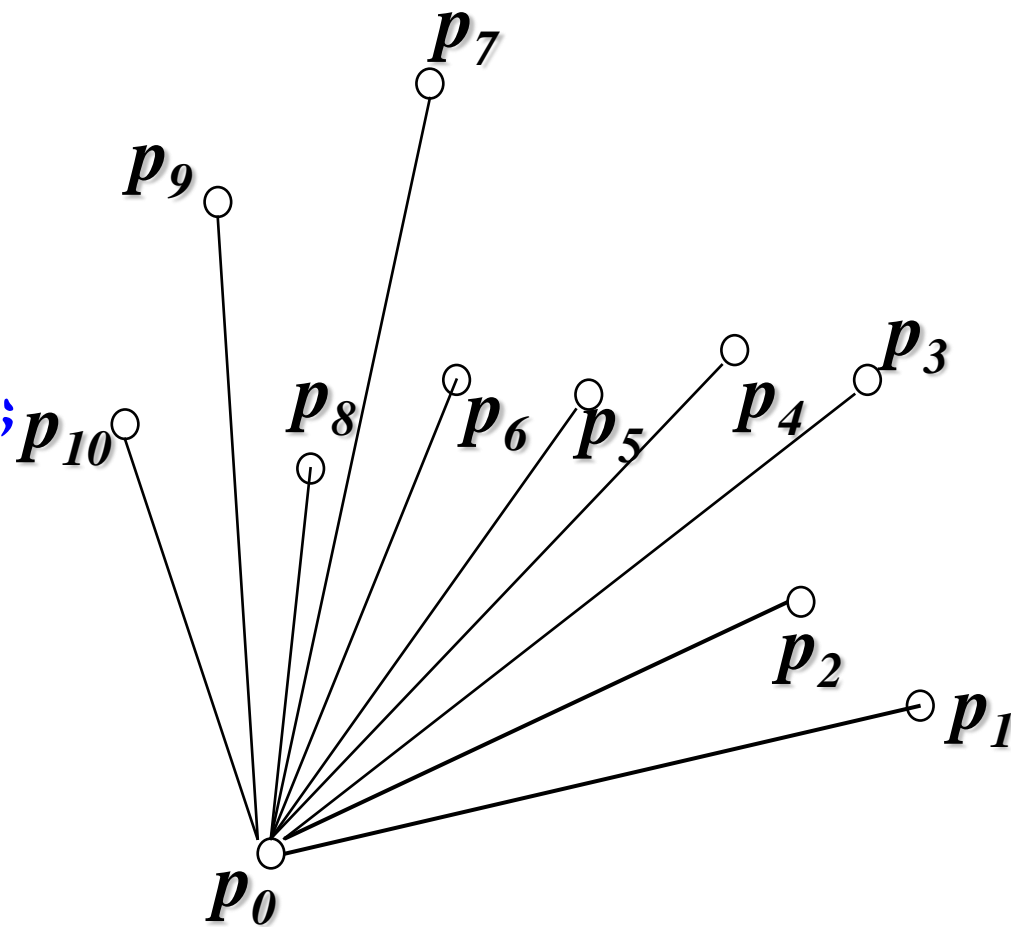
HITWH
SE



算法Graham-Scan(Q)

/* 栈 S 从底到顶存储按逆时针
方向排列的CH(Q)顶点 */

1. 求 Q 中 y -坐标值最小的点 p_0 ;
2. 按照与 p_0 极角(逆时针方向)
大小排序 Q 中其余点,
结果为 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$;
3. Push p_0, p_1, p_2 into S ;
4. FOR $i=3$ TO n DO
5. While Next-to-top(S)、Top(S)和 p_i 形成非左移动 Do
6. Pop(S);
7. Push(p_i, S);
8. Rerurn S .





• 时间复杂性 $T(n)$

1. 求 Q 中 y -坐标值最小的点 p_0 ;
2. 按照与 p_0 极角(逆时针方向)大小排序 Q 中其余点, 结果为 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$;
3. Push p_0, p_1, p_2 into S ;
4. **FOR** $i=3$ **TO** n **DO**
5. **While** Next-to-top(S)、Top(S)
 和 p_i 形成非左移动 **Do**
6. Pop(S);
7. Push(p_i, S);
8. Rerurn S .

- 第1步需要 $O(n)$ 时间
- 第2步需要 $O(n \log n)$ 时间
- 第3步需要 $O(1)$ 时间
- 第4-7步需要 $O(n)$ 时间
 - 因为每个点至多进栈一次出栈一次, 每次需要常数计算时间
- $T(n) = O(n \log n)$



- 正确性分析

定理. 设 n 个二维点的集合 Q 是Graham-Scan算法的输入, $|Q| \geq 3$, 算法结束时, 栈 S 中自底到顶存储 $CH(Q)$ 的顶点 (按照逆时针顺序).

证明: 使用循环不变量方法

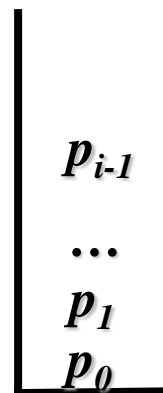
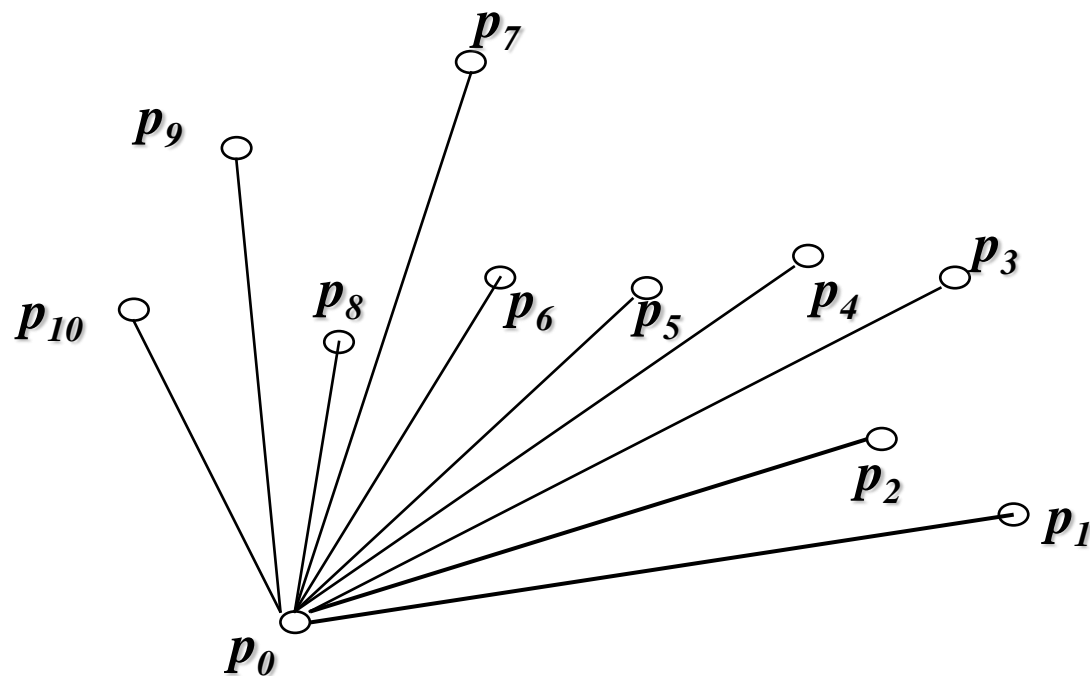
```

3. Push  $p_0, p_1, p_2$  into  $S$ ;
4. FOR  $i=3$  TO  $n$  DO
5.   While Next-to-top( $S$ )、Top( $S$ )
      和  $p_i$  形成非左移动 Do
6.     Pop( $S$ );
7.   Push( $p_i, S$ );

```

Loop invariant

在处理第 i 个顶点之前, 栈 S 中自底到顶存储 $CH(Q_{i-1})$ 的顶点.



栈 S

```
3. Push  $p_0, p_1, p_2$  into  $S$ ;  
4. FOR  $i=3$  TO  $n$  DO  
5.   While Next-to-top( $S$ )、Top( $S$ )  
      和  $p_i$  形成非左移动 Do  
6.     Pop( $S$ );  
7.   Push( $p_i, S$ );
```

循环不变量

在处理第 i 个顶点之前, 栈 S
自底到顶存储 $CH(Q_{i-1})$ 的顶点.

• Proof by induction

– Initialization: (第3步)

- 处理 $i=3$ 之前, 栈 S 中包含 了 $Q_{i-1}=Q_2=\{p_0, p_1, p_2\}$ 中的顶点, 这三个点形成了一个 CH . 循环不变量为真.

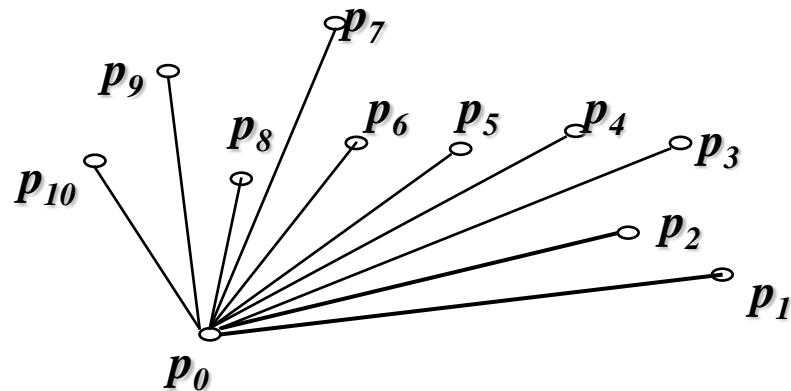
– Maintenance:

- 设在处理第 $i (i \geq 3)$ 个顶点之前, 循环不变量为真, 即: 栈 S 中自底到顶存储 $CH(Q_{i-1})$ 的顶点.
- 往证:
算法执行5~7步之后, 栈 S 中自底到顶存储 $CH(Q_i)$ 的顶点.

```

3. Push  $p_0, p_1, p_2$  into  $S$ ;
4. FOR  $i=3$  TO  $n$  DO
5.   While Next-to-top( $S$ )、Top( $S$ )
      和  $p_i$  形成非左移动 Do
6.     Pop( $S$ );
7.   Push( $p_i, S$ );

```



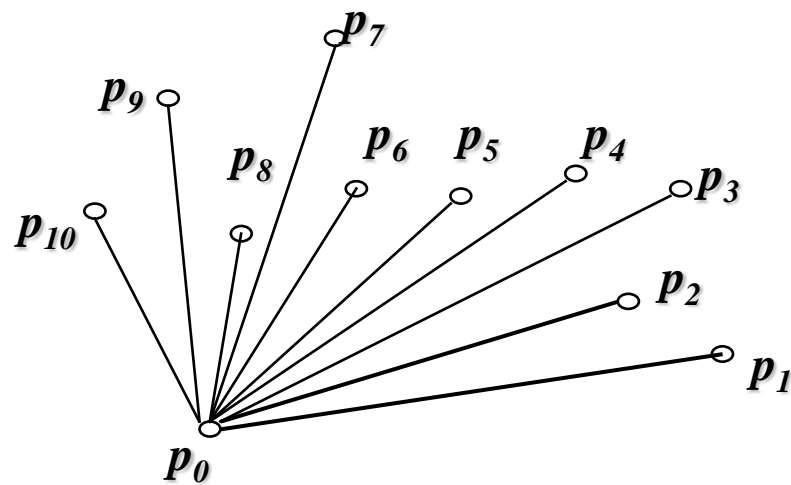
• 往证: 算法执行5~7步后, 栈 S 中自底到顶存储 $CH(Q_i)$ 的顶点

- 5~6步while循环执行结束后, 第7步将 p_i 压入栈之前, 设栈顶元素为 p_j , 次栈顶元素为 p_k , 则此时, 栈中包含了与for循环的第 j 轮迭代后相同的顶点, 即 $CH(Q_j)$, 循环不变量为真.
- 执行第7步之后, p_i 入栈, 则栈 S 中包含了 $CH(Q_j \cup \{p_i\})$ 中的顶点, 且这些点仍按逆时针顺序, 自底向上出现在栈中. $CH(Q_j \cup \{p_i\}) = CH(Q_i)?$
- 对于任意一个在第 i 轮迭代中被弹出的栈顶点 p_t , 设 p_r 为紧靠 p_t 的次栈顶点, p_t 被弹出当且仅当 p_r, p_t, p_i 构成非左移动。因此, p_t 不是 $CH(Q_i)$ 的一个顶点, 即 $CH(Q_i - \{p_t\}) = CH(Q_i)$.
- 设 P_i 为for循环第 i 轮迭代中被弹出的所有点的集合, 则有 $CH(Q_i - P_i) = CH(Q_i)$
- 又 $Q_i - P_i = Q_j \cup \{p_i\}$, 故有 $CH(Q_j \cup \{p_i\}) = CH(Q_i - P_i) = CH(Q_i)$
- 即得到: 一旦将 p_i 压入栈后, 栈 S 中恰包含 $CH(Q_i)$ 中的顶点, 且按照逆时针顺序, 自底向上排列。

```

3. Push  $p_0, p_1, p_2$  into  $S$ ;
4. FOR  $i=3$  TO  $n$  DO
5.   While Next-to-top( $S$ )、Top( $S$ )
      和  $p_i$  形成非左移动 Do
6.     Pop( $S$ );
7.   Push( $p_i, S$ );

```



– Termination:

- $i=n+1$, 栈 S 中自底到顶存储 $CH(Q_n)$ 的顶点, 算法正确.

证毕.



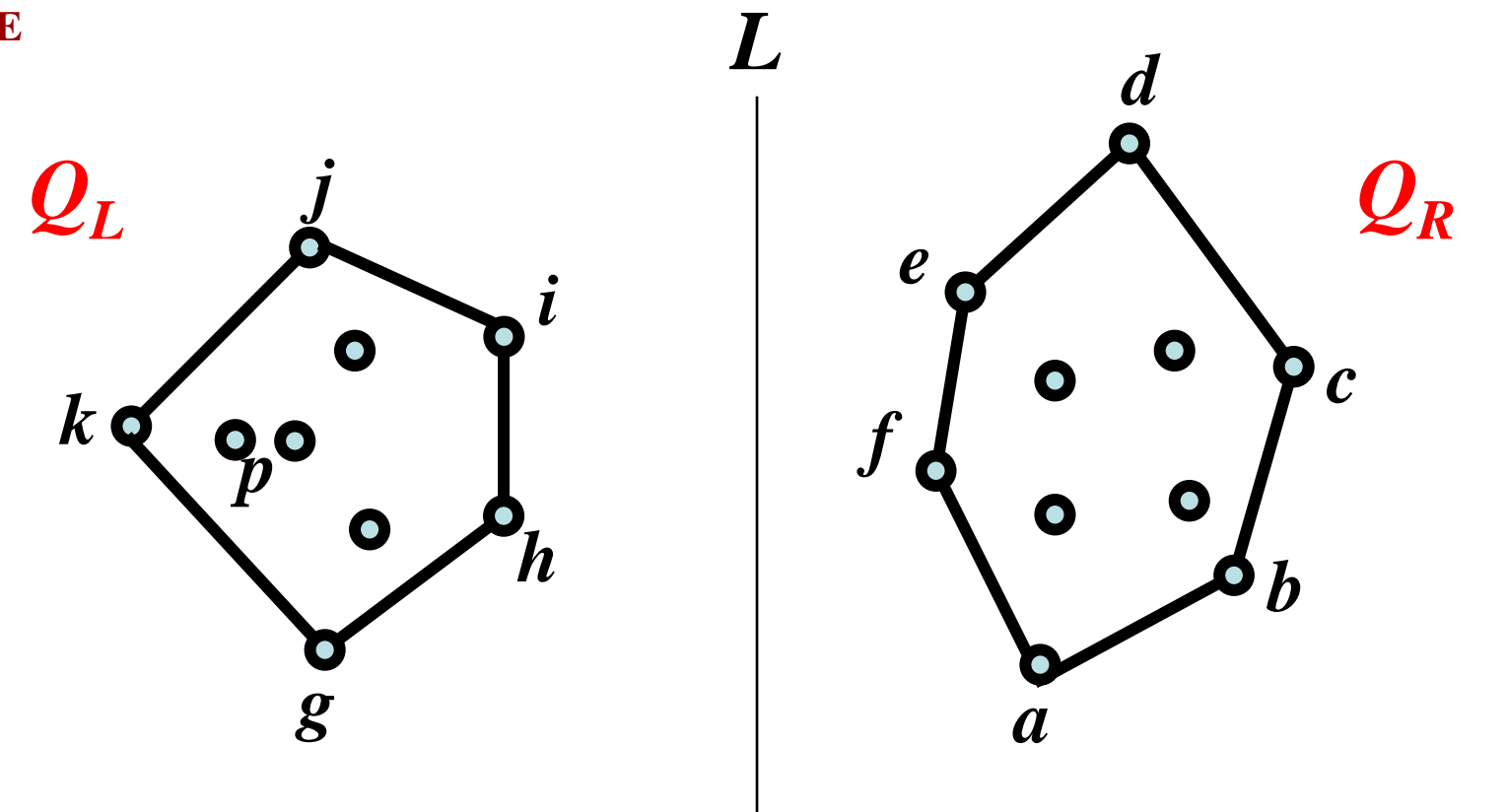
Divide-and-conquer 算法

边界条件: (时间复杂性为 $O(1)$)

1. 如果 $|Q| < 3$, 算法停止;
2. 如果 $|Q| = 3$, 按照逆时针方向输出 $CH(Q)$ 的顶点;
3. 如果 $|Q| < 5$, 使用 Graham-Scan 求 $CH(Q)$;

Divide: (使用 $O(n)$ 算法求中值)

1. 选择一个垂直于 x -轴的直线把 Q 划分为基本相等的两个集合 Q_L 和 Q_R , Q_L 在 Q_R 的左边;



Conquer: (时间复杂度为 $2T(n/2)$)

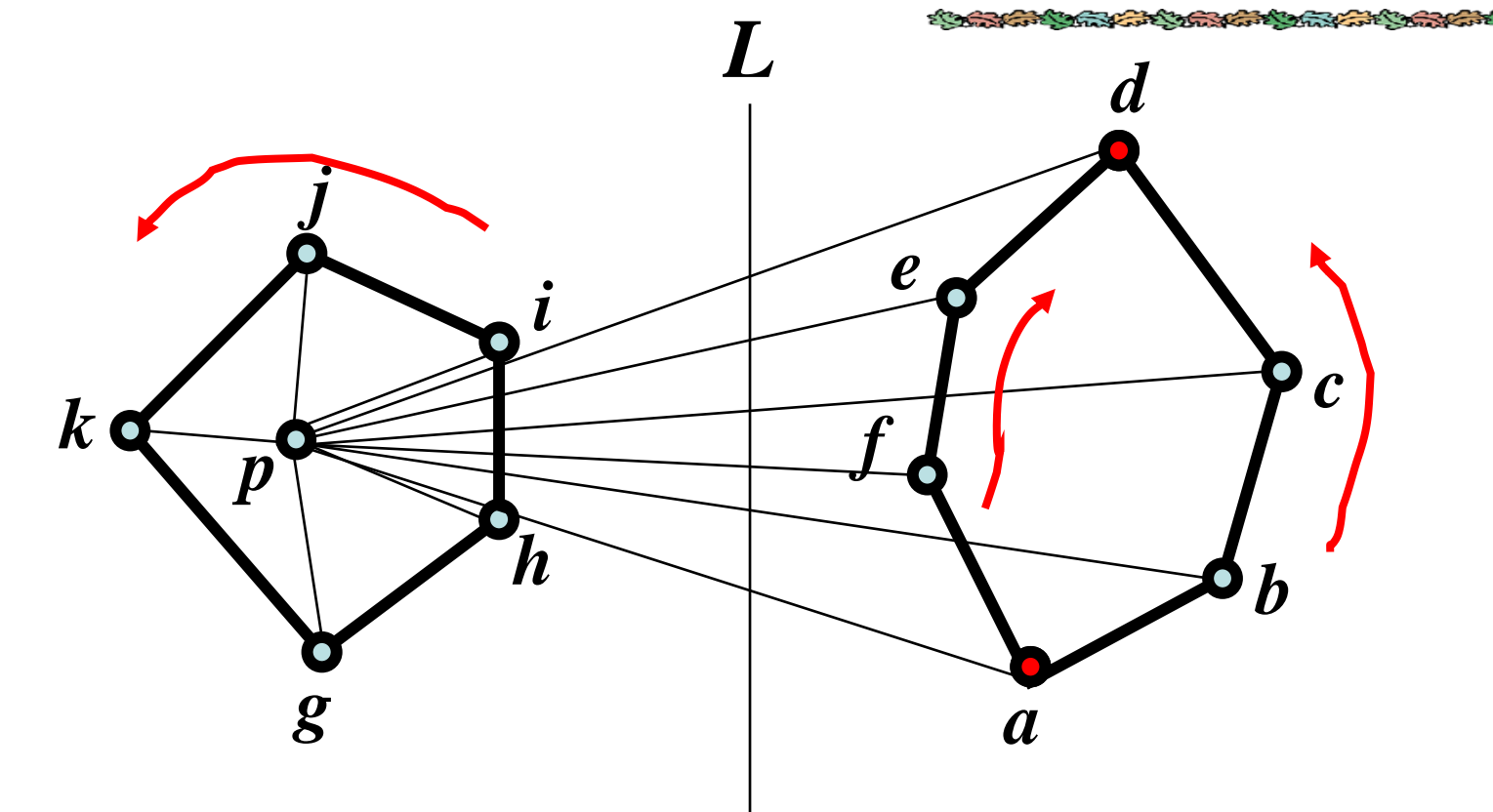
1. 递归地为 Q_L 和 Q_R 构造 $CH(Q_L)$ 和 $CH(Q_R)$;



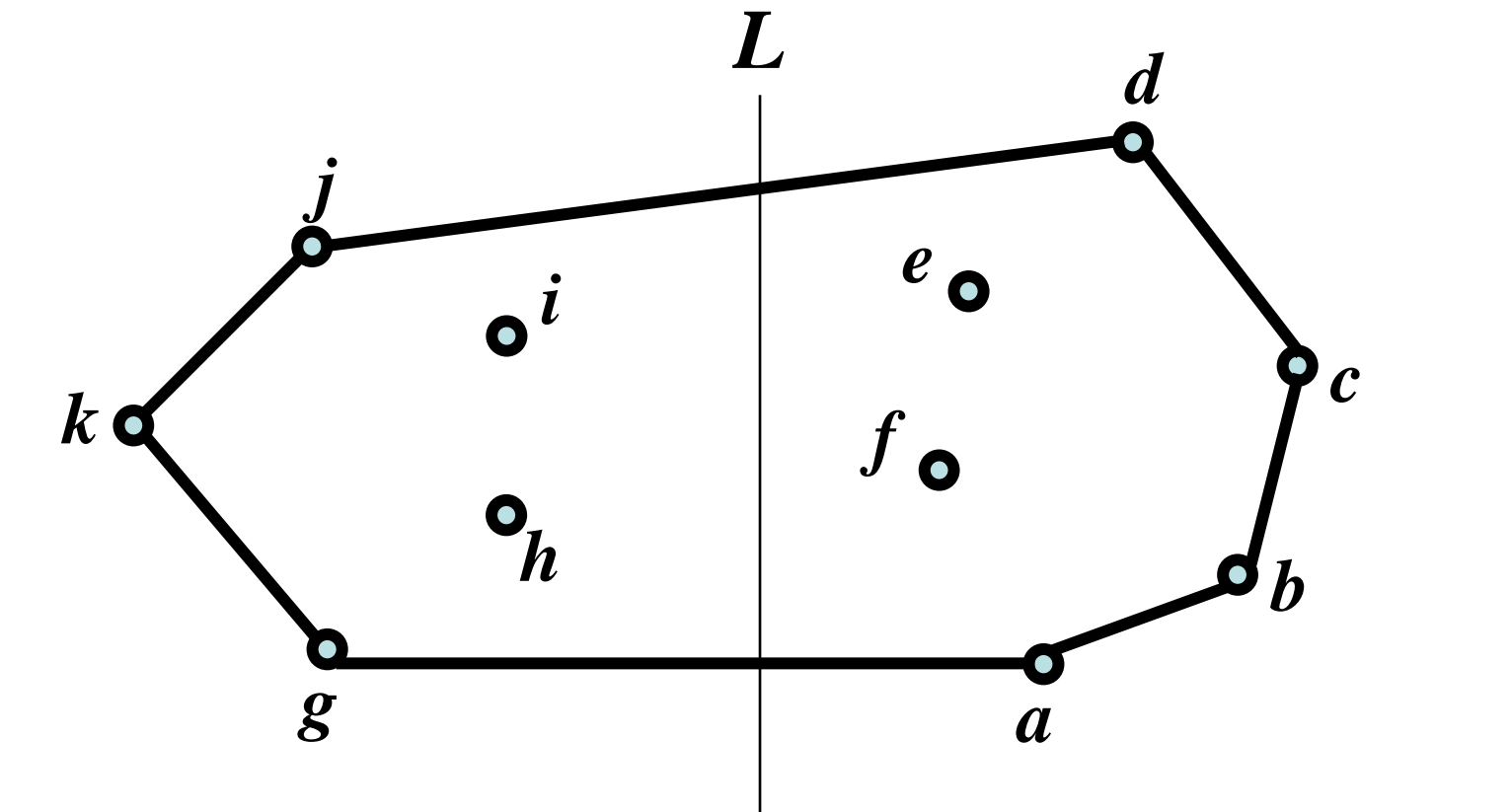
HITWH
SE

Merge:

我们先通过一个例子来看Merge的思想



3个序列: $\langle g, h, i, j, k \rangle$, $\langle a, b, c, d \rangle$, $\langle f, e \rangle$
合并以后: $\langle g, h, a, b, f, c, e, d, i, j, k \rangle$



选择p点为y坐标最小的点
在合并的序列上运行Graham-Scan, 排序部
分合并三个有序序列即可



Merge:(时间复杂性为 $O(n)$)

1. 找到 Q_L 和 Q_R 中 y 坐标最小的点 p (假设在 Q_L 中);
2. 在 $CH(Q_R)$ 中找与 p 的极角最大和最小顶点 u 和 v ;
3. 构造如下三个点序列:
 - (1) 按逆时针方向排列的 $CH(Q_L)$ 的所有顶点,
 - (2) 按逆时针方向排列的 $CH(Q_R)$ 从 v 到 u 的顶点,
 - (3) 按顺时针方向排列的 $CH(Q_R)$ 从 v 到 u 的顶点;
4. 合并上述三个序列;
5. 在合并的序列上应用Graham-Scan.



- Preprocessing 阶段
 - $O(1)$
- Divide 阶段(使用 $O(n)$ 算法求中值)
 - $O(n)$
- Conquer 阶段
 - $2T(n/2)$
- Merge 阶段
 - $O(n)$



- 总的时间复杂性

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

- 使用Master定理

$$T(n) = O(n \log n)$$



HITWH
SE

3.7 快速傅里叶变换



输入: a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , a_i 是实数, $(0 \leq i \leq n-1)$

输出: A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , 使得,

$$A_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{\frac{2\pi i j k}{n}}$$

其中:

(2) $0 \leq j \leq n-1$

(3) e 是自然对数的底数

(4) $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位

蛮力法利用定义计算每个 A_j , 时间复杂度为 $\Theta(n^2)$



$$A_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{\frac{2\pi ijk}{n}} \quad \text{令 } w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad \text{有: } A_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{jk}$$

$$\begin{aligned} A_j &= a_0 + a_1 w_n^j + a_2 w_n^{2j} + a_3 w_n^{3j} + a_4 w_n^{4j} + \dots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j} + a_{n-1} w_n^{(n-1)j} \\ &= (a_0 + a_2 w_n^{2j} + a_4 w_n^{4j} + \dots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j}) \\ &\quad + (a_1 w_n^j + a_3 w_n^{3j} + a_5 w_n^{5j} + \dots + a_{n-1} w_n^{(n-1)j}) \\ &= (a_0 + a_2 w_n^{2j} + a_4 w_n^{4j} + \dots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j}) \\ &\quad + w_n^j (a_1 + a_3 w_n^{2j} + a_5 w_n^{4j} + \dots + a_{n-1} w_n^{(n-2)j}) \end{aligned}$$



算法的数学基础

$$A_j = (a_0 + a_2 w_n^{2j} + a_4 w_n^{4j} + \dots + a_{n-2} w_n^{(n-2)j})$$

奇数输入项的FFT

$$+ w_n^j (a_1 + a_3 w_n^{2j} + a_5 w_n^{4j} + \dots + a_{n-1} w_n^{(n-2)j})$$

偶数输入项的FFT

由于 $w_n^2 = w_{n/2}$, 以及 $w_n^{n+k} = w_n^k$,

$$A_j = (\underbrace{a_0 + a_2 w_{n/2}^j + a_4 w_{n/2}^{2j} + \dots + a_{n-2} w_{n/2}^{(n-2)j}}_{B_j}) + w_n^j (\underbrace{a_1 + a_3 w_{n/2}^j + a_5 w_{n/2}^{2j} + \dots + a_{n-1} w_{n/2}^{(n-2)j}}_{C_j})$$

将问题划分为
两个子问题

于是, $A_j = B_j + w_n^j C_j$ 还可证明, $A_{j+n/2} = B_j + w_n^{j+n/2} C_j$



分治算法过程



划分：将输入拆分成 a_0, a_2, \dots, a_{n-2} 和 a_1, a_3, \dots, a_{n-1} 。

递归求解：递归计算 a_0, a_2, \dots, a_{n-2} 的变换 $B_0, B_1, \dots, B_{n/2-1}$

递归计算 a_1, a_3, \dots, a_{n-1} 的变换 $C_0, C_1, \dots, C_{n/2-1}$

合并：根据 $A_j = B_j + C_j \cdot W_n^j$ ($j < n/2$) 和 $A_j = B_{j-n/2} + C_{j-n/2} \cdot W_n^j$ ($n/2 \leq j < n-1$) 依次求得 A_0, A_1, \dots, A_{n-1} 。



分治算法过程

例如：计算8个点 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 的FFT.



计算4个点
 a_0, a_2, a_4, a_6 的FFT.



计算2个点
 a_0, a_4 的FFT.



计算2个点
 a_2, a_6 的FFT.



计算4个点
 a_1, a_3, a_5, a_7 的FFT.



计算2个点
 a_1, a_5 的FFT.



计算2个点
 a_3, a_7 的FFT.



HITWH
SE

算法及复杂性分析

算法 FFT($a_0, a_2, \dots, a_{n-1}, n$)

输入: $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, n=2^k$

输出: a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 的傅里叶变换 A_0, \dots, A_{n-1}

1. $W \leftarrow \exp(2\pi i/n)$;

2. If ($n=2$) Then

$T(n) = \theta(1)$ If $n=2$

3. $A_0 \leftarrow a_0 + a_1$;

$T(n) = 2T(n/2) + \theta(n)$ If $n > 2$

4. $A_1 \leftarrow a_0 - a_1$;

$T(n) = \theta(n \log n)$

5. 输出 A_0, A_1 , 算法结束;

6. $B_0, B_1, \dots, B_{n/2-1} \leftarrow \text{FFT}(a_0, a_2, \dots, a_{n-2}, n/2)$;

7. $C_0, C_1, \dots, C_{n/2-1} \leftarrow \text{FFT}(a_1, a_3, \dots, a_{n-1}, n/2)$;

8. For $j=0$ To $n/2-1$

9. $A_j \leftarrow B_j + C_j \cdot W^j$;

10. $A_{j+n/2} \leftarrow B_j - C_j \cdot W^j$;

11. 输出 A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , 算法结束;



HITWH
SE

$$T(n) = \theta(1) \quad \text{if } n \leq c$$
$$T(n) = aT(n/b) + D(n) + C(n) \quad \text{if } n > c$$

3.8 整数乘法

优化划分阶段, 降低 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ 中的 a



问题定义

输入：n位二进制整数X和Y

输出：X和Y的乘积

通常，计算 $X*Y$ 时间复杂性为 $O(n^2)$ ，
我们给出一个复杂性为 $O(n^{1.59})$ 的算法。



$$X = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{n/2位} & \text{n/2位} \\ \hline A & B \\ \hline \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{n/2位} & \text{n/2位} \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} XY &= (A2^{n/2} + B)(C2^{n/2} + D) \\ &= AC2^n + AD2^{n/2} + BC2^{n/2} + BD \\ &= AC2^n + ((A-B)(D-C) + AC + BD)2^{n/2} + BD \end{aligned}$$

时间复杂性

$$T(n) = \theta(1)$$

if $n=1$

$$T(n) = 3T(n/2) + O(n) \quad \text{if } n > 1 \quad \text{使用 Master 定理}$$

$$T(n) = O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.59})$$

如此计算需要

$$T(n) = 4T(n/2) + O(n) = O(n^2)$$



针对如下问题，设计分治算法。

输入：包含 n 个整数的集合 S ，整数 x ；

输出：判定 S 中是否存在两个和为 x 的元素。



给定一棵树 T ，其中每个顶点 n 的代价记为 $c(n)$ ，树 T 中一个顶点集合 S 的代价为 $C(S) = \sum_{n \in S} c(n)$ 。记树 T 的顶点集合为 $V(T)$ ， T 的切面定义如下：

一个顶点集合 S 称为树 T 的一个切面，如果 S 满足以下两个条件：

(1) $S \subseteq V(T)$;

(2) 从 T 的根顶点到任意叶子顶点的路径上有且只有一个顶点属于 S 。

请设计算法，求解 T 的一个切面 S 使得 $C(S)$ 最小，并分析算法的时间开销。