算法设计与分析第三次作业

1. 给定矩阵链乘法问题输入实例：$A1 = 30 \times 35, A_2 = 35 \times 15, A_3 = 15 \times 5,\ A_4 = \ 5 \times 10, A_5 = 10 \times 20, A_6 = 20 \times 25$，请首先给出计算该实例最优解代价的全部过程，并在该过程中保存构造最优解信息。其次，请根据保存的构造最优解信息，构造最优解。给出矩阵链乘法动态规划算法的输出结果。

2. 设$A =< x_1, x_2, \ldots, x_n >$是 n 个不等的整数构成的序列，A 的一个单调递增子序列是序列$< x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_k} >$, 使得 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, 且$x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_k}$。子序列$< x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} >$的长度是含有的整数个数 k。例如$A =< 1,5,3,8,10,6,4,9 >$，它的长为 4 的递增子序列是：$< 1,5,8,10 >$，$< 1,5,8,9 >$，⋯. 设计一个算法求 A 的一个最长的单调递增子序列，分析算法的时间复杂度. 设算法的输入实例是$A =< 2,8,4,-4,5,9,11 >$, 给出算法的计算过程和最后的解。

3. 给定一个整数序列 $a_1, \cdots, a_n$。相邻两个整数可以合并，合并之后的结果是两个整数之和（用和替换原来的两个整数），合并两个整数的代价是这两个整数之和。通过不断合并最终可以将整个序列合并成一个整数，整个过程的总代价是每次合并操作代价之和。试设计一个动态规划算法给出 $a_1, \cdots, a_n$的一个合并方案使得该方案的总代价最大。

4. 满足递归式 F(n)=F(n-1)+F(n-2)和初始值 F(0)=F(1)=1 的数列称为斐波那契数列。考虑如何计算该数列的第 n 项 F(n)。（1）说明根据递归式直接完成计算，将有子问题重复求解；（2）说明该问题具有优化子结构；（3）写出求解 F(n)的动态规划算法，并分析算法的时间复杂性。

5. （0-1 背包问题的推广）设有n种物品, 第i种物品的价值是v_i, 重量是w_i, 体积是c, 且装入背包的重量限制是W, 体积是V。问如何选择装入背包的物品使得其总重 i 不超过W, 总体积不超过V且价值达到最大？设计一个动态规划算法求解这个问题, 说明算法的时间复杂度。

6. 请阅读教材第 226 页-230 页关于最优二叉树部分内容，并完成习题 15.5-1，习题 15.5-2，习题 15.5-3 以及习题 15.5-4。