第二章

算法分析的数学基础

参考资料

《Introduction to Algorithms》

- 第三章
- 第四章
- 附　录

《Concrete Mathematics:
A Foundation for Computer Science》

Ronald L.Graham, *Donald E.Knuth*, and *Oren Patashnik*

提要

2.1 计算复杂性函数的阶

2.2 和式的计算与估计

2.3 递归方程

提要

2.1 计算复杂性函数的阶

2.2 和式的计算与估计

2.3 递归方程

2.1 计算复杂性函数的阶

- 计算复杂性函数的阶
  - 算法执行时间增长的阶（增长率）
  - 执行时间函数的主导项

例如：

$T(n)=an^2+bn+c$

主导项: an^2

当输入大小n较大时，其它低阶项相对来说意义不大

系数a也相对来说意义不大

即：函数$T(n)$的阶为n^2

2.1 计算复杂性函数的阶

2.1.1 同阶函数

2.1.2 低阶函数

2.1.3 高阶函数

2.1.4 严格低阶函数

2.1.5 严格高阶函数

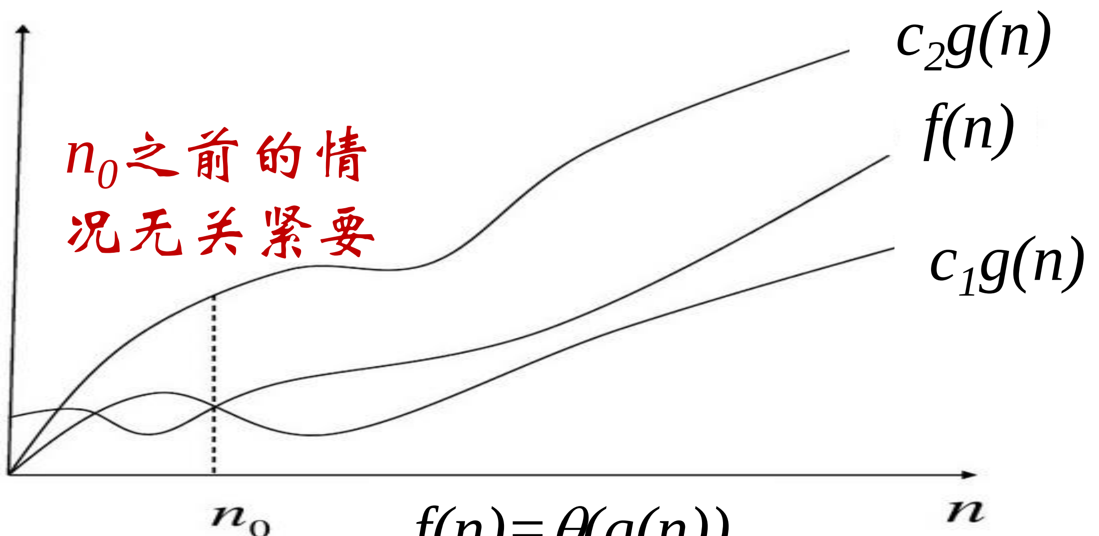
2.1.6 函数阶的性质

2.1.1 同阶函数集合

定义2.1.1. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\exists c_1, c_2>0$, n_0, $\forall n>n_0$, $c_1g(n)\leq f(n)\leq c_2g(n)$，则称$f(n)$与$g(n)$同阶，记作$f(n)=\theta(g(n))$。

$\theta(g(n))$可以视为所有与$g(n)$同阶的函数集合：

$\{f(n) \mid \exists c_1, c_2>0,\ n_0,\ \forall n>n_0, c_1g(n)\leq f(n)\leq c_2g(n)\}$



$f(n)=\theta(g(n))$

2.1.1 同阶函数集合

- **例1，证明：$(1/3)n^2-3n=\theta(n^2)$**

往证$\exists c_1, c_2>0,\ n_0,\ \forall n>n_0,$

$$c_1 n^2 \le (1/3)n^2-3n \le c_2 n^2$$

对于左侧不等式，$\forall n>1$，有:

$$c_1 \le (1/3) -3/n = (1/6) + (1/6) - 3/n$$

即当$n>18$，$c_1=1/6$时，不等式成立

对于右侧不等式，$\forall n>1$，有: $(1/3) -3/n \le c_2$,

即当$n>18$，$c_2=1/3$时，不等式成立

2.1.1 同阶函数集合

例2 证明$6n^3 \neq \theta(n^2)$

证. 如果存在c_1、$c_2>0$，n_0使得当$n \geq n_0$时，

$c_1 n^2 \leq 6n^3 \leq c_2 n^2$，

即 $c_1 \leq 6n \leq c_2$, $n \leq c_2/6$。

于是，当$n > c_2/6$时与$n \leq c_2/6$矛盾。

例3 证明$f(n)=an^2+bn+c=\theta(n^2)$，其中$a>0$。

证. 往构造$c_1, c_2>0, n_0$, 使得$n>n_0$时,
$c_1n^2 \le an^2+bn+c \le c_2n^2$成立.

令$c_1=a/4, c_2=7a/4$, 构造n_0使得
$an^2/4 \le an^2+bn+c \le 7an^2/4$成立.

当$n_0=2\max\{\frac{|b|}{a},\sqrt{|c|/a}\}$时，上述不等式成立。得证。

命题2.1.1：对于任意正整数d和任意常数a_d>0，有：

$$P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i = \theta\left(n^d\right).$$

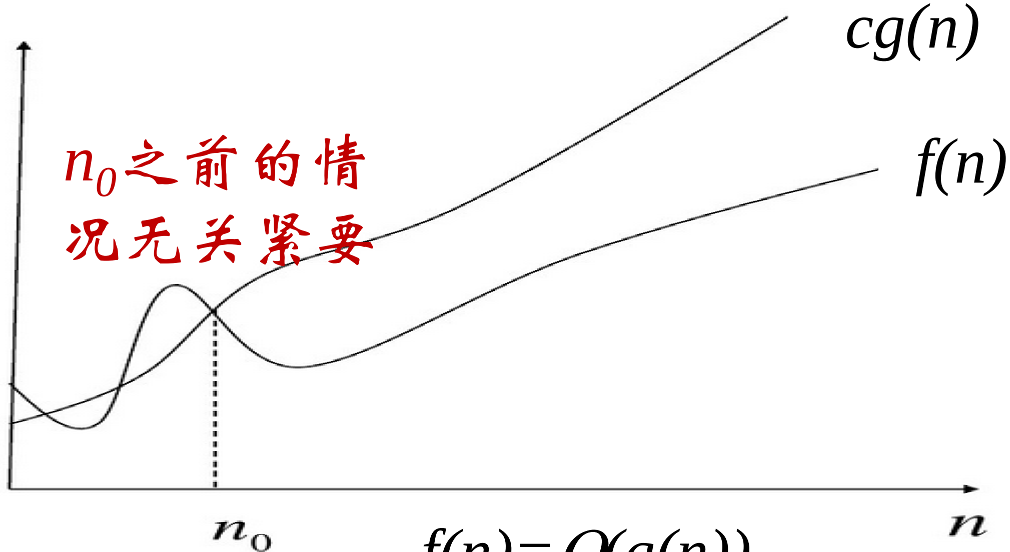
请完成上述命题的证明.

2.1.2 低阶函数集合

定义2.1.2. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\exists c>0$, n_0, $\forall n>n_0$, $f(n)\le cg(n)$，则称$f(n)$比$g(n)$低阶或$g(n)$是$f(n)$的上界，记作$f(n)=O(g(n))$。

$O(g(n))$可以视为所有比$g(n)$低阶的函数的集合：

$$\{f(n) \mid \exists c,\ n_0,\ \forall n>n_0,\ f(n)\le cg(n)\}$$



$f(n)=O(g(n))$

2.1.2 低阶函数集合

例1. $f(n)=\theta\big(g(n)\big)\Rightarrow f(n)=O\big(g(n)\big)$

例2. 证明$n=O(n^2)$.

证. 取$c=1, n_0=1$, 则当$n\geq n_0$时, 有

$$0\leq n\leq cn^2$$

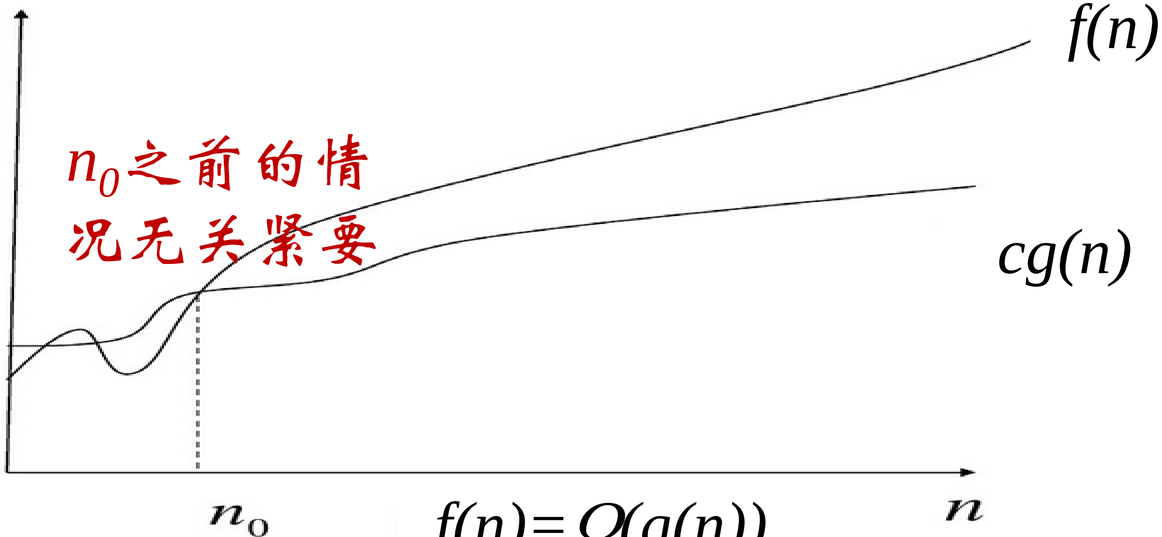
得证.

2.1.3 高阶函数集合

定义2.1.3. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\exists c>0$, n_0, $\forall n>n_0$, $f(n)\geq cg(n)$，则称$f(n)$比$g(n)$高阶或$g(n)$是$f(n)$的下界，记作$f(n)=\Omega(g(n))$。

$\Omega(g(n))$可以视为所有比$g(n)$高阶的函数集合：

$\{f(n) \mid \exists c, n_0, \forall n>n_0, f(n)\geq cg(n)\}$



$f(n)=\Omega(g(n))$

θ、O、Ω之间的关系

- θ 表示渐进紧界
- O 表示渐进上界
- Ω 表示渐进下界
- $\theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
- $f(n) = \theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = an^2+bn+c = \theta(n^2)$, $f(n) = O(n^2)$
- $an+b = O(n^2)$.
- $n = O(n^2)$

如果$f(n)=O(n^k)$，则称$f(n)$是多项式界限的

θ，O，Ω之间的关系

- 一些讨论:
  - 当我们谈到插入排序的最坏运行时间是$O(n^2)$, 这个结论适用于所有的输入，即使对于已经排序的输入也成立，因为$O(n) \subseteq O(n^2)$.
  - 然而插入排序的最坏运行时间$\theta(n^2)$不能应用到每个输入，因为对于已经排序的输入, $\theta(n) \neq \theta(n^2)$.

θ, O, Ω之间的关系

- Ω 用来描述运行时间的最好情况
- 对于插入排序，我们可以说
  - 最好运行时间是 $\Omega(n)$
  - 或者说，运行时间是$\Omega(n)$
  - 插入排序算法的运行时间在$\Omega(n)$和 $O(n^2)$之间
  - 插入排序算法的最坏运行时间是$\Omega(n^2)$
  - 但说插入排序算法的运行时间是$\Omega(n^2)$，是错误的！

极少用Ω来描述算法的运行时间和复杂性

θ，O，Ω之间的关系

定理2.1. 对于任意$f(n)$和$g(n)$, $f(n)=\theta(g(n))$当且仅当 $f(n)=O(g(n))$而且$f(n)=\Omega(g(n))$.

证. $\Rightarrow$: 如果$f(n)=\theta(g(n))$, 则$\exists c_1, c_2>0, n_0>0$, 使得$n\geq n_0$时, $c_1 g(n)\leq f(n)\leq c_2 g(n)$成立. 这也必然使得$f(n)=O(g(n))$和$f(n)=\Omega(g(n))$均成立.

$\Leftarrow$: 如果$f(n)=O(g(n))$而且$f(n)=\Omega(g(n))$, 则由$f(n)=O(g(n))$, 可知$\exists c_1>0, n_1>0$, 使得$n\geq n_1$时, $f(n)\leq c_1 g(n)$成立; 又由$f(n)=\Omega(g(n))$, 可知$\exists c_2>0, n_2>0$, 使得$n\geq n_2$时, $f(n)\geq c_2 g(n)$成立.
因此, $\exists c_1, c_2>0, n_0=\max\{n_1,n_2\}>0$, 使得$n\geq n_0$时, $c_1 g(n)\leq f(n)\leq c_2 g(n)$成立.

2.1.4 严格低阶函数集合

定义2.1.4. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\forall c>0, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)<cg(n)$，则称$f(n)$严格比$g(n)$低阶或$g(n)$是$f(n)$的严格上界，记作$f(n)=o(g(n))$。

$o(g(n))$可以视为所有比$g(n)$严格低阶的函数集合：

$$\{f(n) \mid \forall c, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)<cg(n)\}$$

2.1.4 严格低阶函数集合

关于低阶O与严格低阶o的进一步说明

- O标记可能是或不是紧的
  - $2n^2 = O(n^2)$ 是紧的，但$2n = O(n^2)$不是紧的.
- o标记用于标记上界但不是紧的情况
  - $2n = o(n^2)$，但是$2n^2 \neq o(n^2)$.
- 区别：某个正常数c在O标记中，但所有正常数c在o标记中.

例1. 证明$2n = o(n^2)$

证. 对$\forall c > 0$, 要得到$2n < cn^2$, 其中$n > 0$, 只需满足$2 < cn$, 即$n > \frac{2}{c}$。

因此, 对$\forall c > 0$, 存在$n_0 = \frac{2}{c}$, 当$n > n_0$时, $2n < cn^2$成立.

例2. 证明$2n^2 \neq o(n^2)$

证. 当$c = 1$时, 不存在任何n_0, 使得$n > n_0$时, $2n^2 < cn^2 = n^2$成立.

命题2.1.2. $f(n) = o\big(g(n)\big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$

证. 由于$f(n) = o\big(g(n)\big)$, 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$n_0 > 0$, 当$n \geq n_0$时, $0 < f(n) < \varepsilon g(n)$成立, 即$0 < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon$. 于是, 有$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

2.1.5 严格高阶函数集合

定义2.1.4. 设$f(n)$和$g(n)$是正值函数。如果$\forall c>0, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)>cg(n)$，则称$f(n)$严格比$g(n)$高阶或$g(n)$是$f(n)$的严格下界，记作$f(n)=\omega(g(n))$。

$\omega(g(n))$可以视为所有比$g(n)$严格高阶的函数集合：

$$\{f(n) \mid \forall c, \exists n_0, \forall n>n_0, f(n)>cg(n)\}$$

命题2.1.3. $f(n)=\omega\big(g(n)\big)$当且仅当$g(n)=o\big(f(n)\big)$

证. $\Rightarrow$: 对$\forall c>0$, 有$\frac{1}{c}>0$. 由$f(n)=\omega\big(g(n)\big)$可知, 对 $\frac{1}{c}>0$, 存在$n_0>0$, 当$n\geq n_0$时, $f(n)>\frac{1}{c}g(n)$, 即$g(n)<cf(n)$成立. 于是有$g(n)=o\big(f(n)\big)$.

$\Leftarrow$: 对$\forall c>0$, 有$\frac{1}{c}>0$. 由$g(n)=o\big(f(n)\big)$可知, 对$\frac{1}{c}>0$, 存在$n_0>0$, 当$n\geq n_0$时, $g(n)<\frac{1}{c}f(n)$, 即$f(n)>cg(n)$成立. 于是有$f(n)=\omega\big(f(n)\big)$.

命题2.1.4. $f(n)=\omega\big(g(n)\big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$.

证. 对$\forall c>0$, 由于$f(n)=\omega\big(g(n)\big)$, 必然存在$n_0>0$, 使得当$n>n_0$时, $f(n)>cg(n)$.

即对$\forall c>0$, 必然存在$n_0>0$, 当$n>n_0$时, $\frac{f(n)}{g(n)}>c$, 于是可得$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$.

2.1.6 函数阶的性质

A. 传递性:

- $f(n) = \theta(g(n)) \wedge g(n) = \theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \theta(h(n))$
- $f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$
- $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$
- $f(n) = o(g(n)) \wedge g(n) = o(h(n)) \Rightarrow f(n) = o(h(n))$
- $f(n) = \omega(g(n)) \wedge g(n) = \omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \omega(h(n))$

2.1.6 函数阶的性质(续)

B. 自反性:

- $f(n) = \theta(f(n))$
- $f(n) = O(f(n))$
- $f(n) = \Omega(f(n))$

C. 对称性:

- $f(n) = \theta(g(n))$当且仅当$g(n) = \theta(f(n))$

D. 反对称性:

- $f(n) = O(g(n))$当且仅当$g(n) = \Omega(f(n))$
- $f(n) = o(g(n))$当且仅当$g(n) = \omega(f(n))$

所有函数都是可比的吗？？？

$f(n)=n$ 与 $g(n)=n^{1+\sin(n)}$ 可比吗？

数学公式中函数阶的含义

$n = O(n^2)$表示$f(n) = n, f(n) \in O(n^2)$

数学公式中的函数阶，独立地表示一个匿名函数，例如：$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \theta(n)$中，$\theta(n)$代表一个函数，它是$\theta(n)$中的一个元素，并且使得公式中的等号相等，此处它代表的是$f(n) = 3n + 1$.

等号左侧和右侧都出现函数的阶，表示无论如何选择等号左侧的匿名函数，都存在一个等号右侧匿名函数的选择方法，使得公式中的等号成立.
例如：$2n^2 + \theta(n) = \theta(n^2)$，表示无论如何选择一个$f(n) \in \theta(n)$，都存在$g(n) \in \theta(n^2)$，使得$2n^2 + f(n) = g(n)$.

$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \theta(n) = \theta(n^2)$的含义？

分别处理
两个等号

2.1 计算复杂性函数的阶

2.2 和式的计算与估计

2.3 递归方程

2.2 和式的估计与界限

1. 线性和

命题 2.3.1. $\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

命题 2.3.2. $\sum_{k=1}^{n} \theta\big(f(k)\big) = \theta(\sum_{k=1}^{n} f(k))$

请完成命题2.3.2的证明.

2. 级数

命题 2.3.3 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \theta(n^2)$$

命题 2.3.4 $$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots\dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad (x \neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

命题 2.3.5 $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$$

命题 2.3.6 $$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k-1}\right) = a_n - a_0 .$$

命题 2.3.7 $$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_k - a_{k+1}\right) = a_0 - a_n$$

命题 2.3.8 $$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

命题 2.3.9 $$\lg\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k$$

3. 直接求和的界限

例1. $\sum_{k=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} n = n^2$

例2. $\sum_{i=1}^{n} a_i \le n \times \max\{a_i\}$

例3. 设对于所有$k \ge 0, a_k > 0, a_{k+1}/a_k \le r < 1,$

求$\sum_{k=0}^{n} a_k$的上界.

解: $a_1/a_0 \le r \ \Rightarrow a_1 \le a_0 r,$

$a_2/a_1 \le r \ \Rightarrow a_2 \le a_0 r^2,$

$a_3/a_2 \le r \ \Rightarrow a_3 \le a_0 r^3,$

$a_k/a_{k-1} \le r \ \Rightarrow a_k \le a_0 r^k,$

于是, $\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{a_0}{1-r}.$

例4. 求$\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k)$的上界

解. 使用例3中的方法. $\frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} = \frac{1}{3} \times \frac{k+1}{k} \leq \frac{2}{3} = r.$

$$\text{因此}, \sum_{k=1}^{\infty} k/3^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

例5. 用分裂和的方法求$\sum_{k=1}^{n} k$的下界

解. $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k \geq \sum_{k=1}^{n/2} 0 + \sum_{k=n/2+1}^{n} \frac{n}{2}$

$$\geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \Omega(n^2).$$

例6. 求$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$的上界

解： 当$k\geq 3$时，$\frac{(k+1)^2/_{2^{k+1}}}{k^2/_{2^k}}=\frac{(k+1)^2}{2k^2}\leq\frac{8}{9}$

于是，$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$

$\leq\theta(1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{8}\left(\frac{8}{9}\right)^k=O(1)$

例7. 求$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$的上界

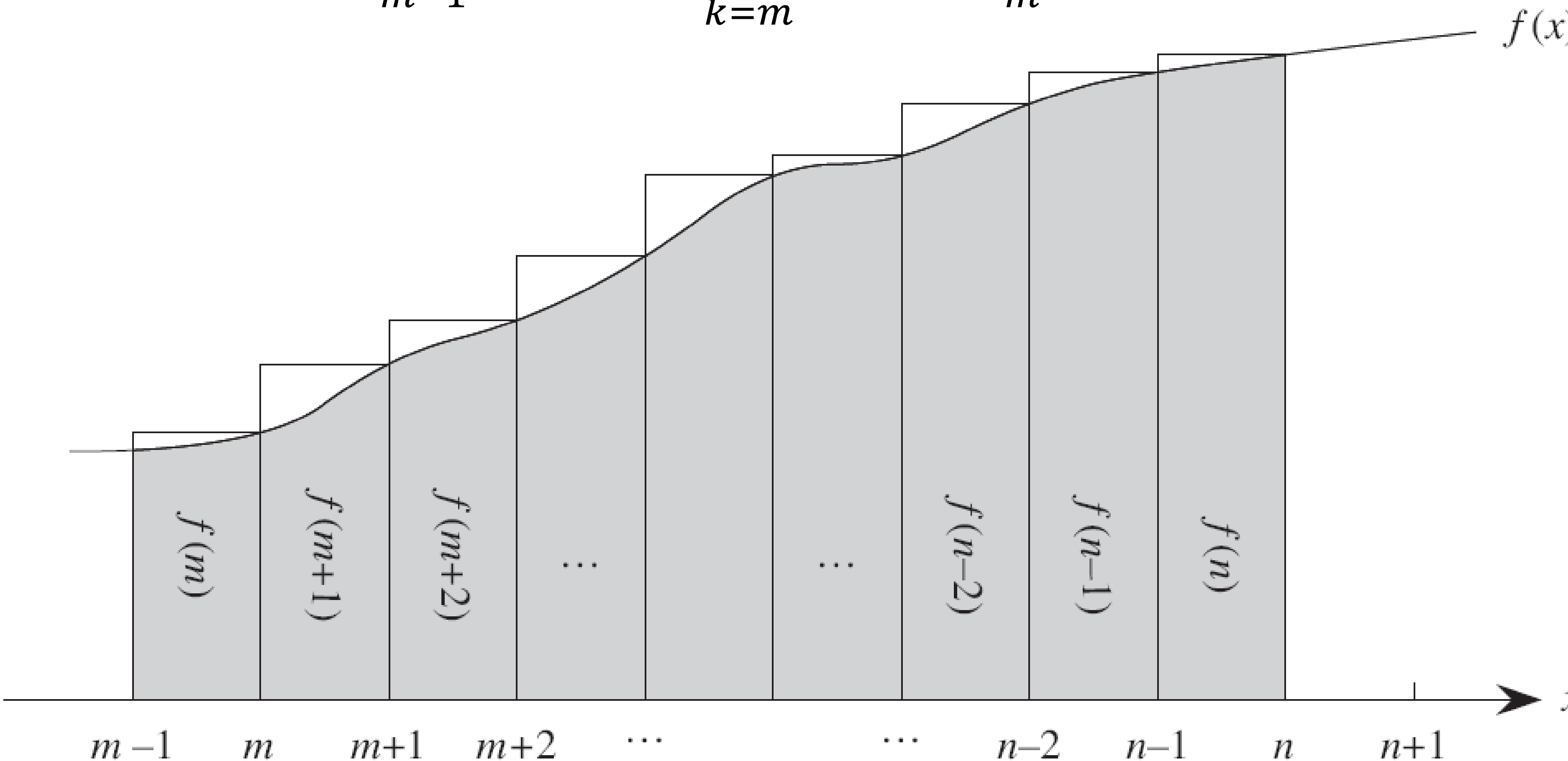
解：$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})$$

$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)+\cdots$$

$$\le\sum_{i=0}^{\lfloor\lg n\rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i+j}\le\sum_{i=0}^{\lfloor\lg n\rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i}\le\sum_{i=0}^{\lfloor\lg n\rfloor}1\le\lg n+1$$

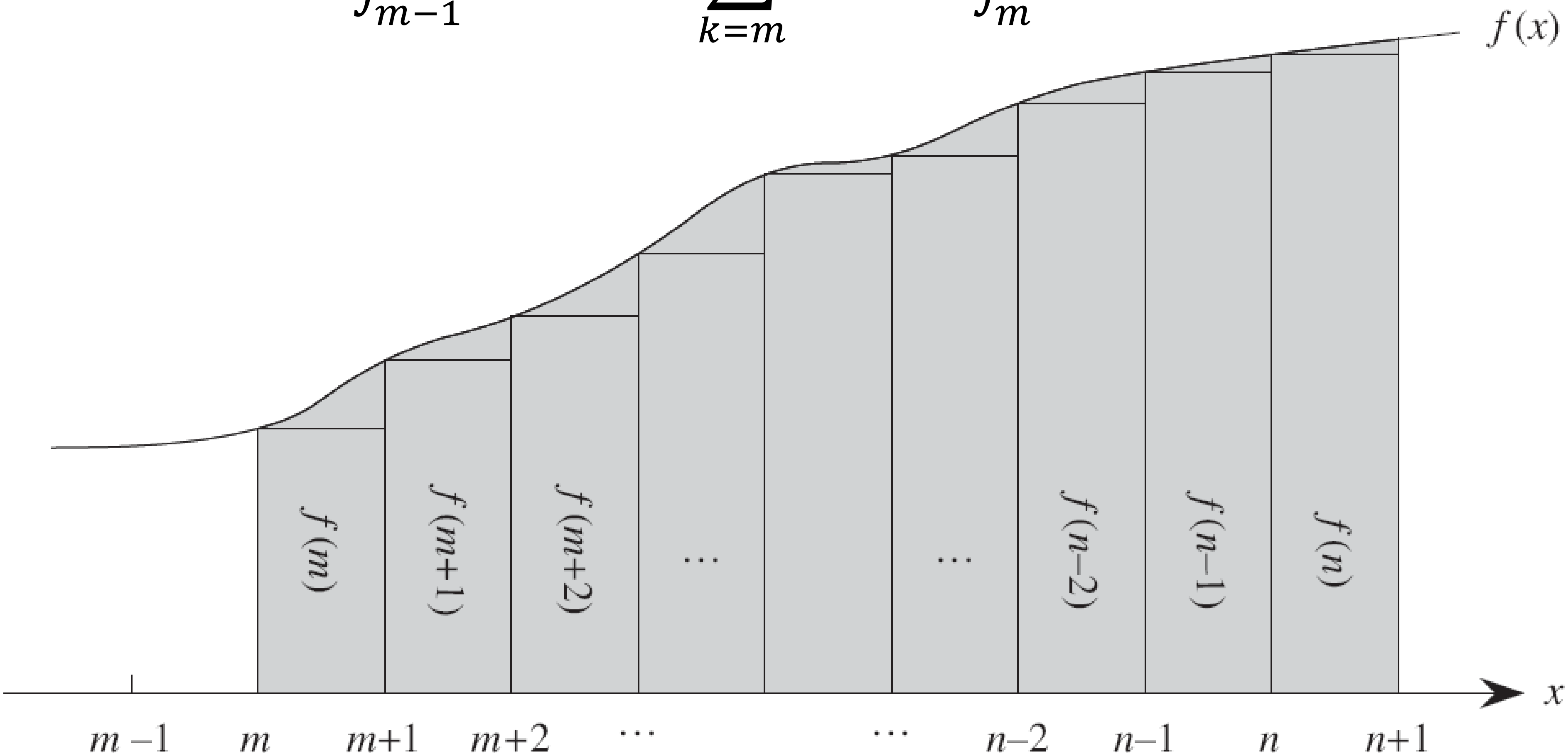
例8. 如果$f(k)$单调递增，则

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$



例8. 如果$f(k)$单调递增，则

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$



例9. 如果$f(k)$单调递减，则

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$

例10.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1)$$

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \sum_{2}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx \le \ln n + 1$$

提要

2.1 计算复杂性函数的阶

2.2 和式的计算与估计

2.3 递归方程

2.3 递归方程

- 递归方程：递归方程是使用具有较小输入值的相同方程来描述一个方程.

  用自身来定义自身

- 递归方程例：Merge-sort排序算法的复杂性方程

  $T(n)=2T(n/2)+\theta(n)$ if $n>1$.

  $T(n)=\theta(1)$ if $n=1$(边界条件)

  $T(n)$的解是$\theta(n\log n)$

边界条件是根据问题的不同而不同的！

求解递归方程的三个主要方法

- 替换方法:
  - 先猜测方程的解,
  - 然后用数学归纳法证明.
- 迭代方法:
  - 把方程转化为一个和式
  - 然后用估计和的方法来求解.
- Master方法:
  - 求解型为$T(n)=aT(n/b)+f(n)$的递归方程

2.3.1 替换(Substitution)方法

Substitution方法I：联想已知的$T(n)$

例1. 求解$T(n)=2T(n/2 + 17) + n$

解: 猜想, $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2} + 17\right) + n$与$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$只差一个17.

当n充分大时, $T\left(\frac{n}{2} + 17\right)$与$T\left(\frac{n}{2}\right)$的差别并不大, 因为$\frac{n}{2} + 17$和$\frac{n}{2}$相差很小.

因此, 我们可以猜想$T(n) = O(n\lg n)$.

证明： 用数学归纳法

Substitution方法I：联想已知的$T(n)$

例1. 求解$T(n) = 2T(n/2 + 17) + n$

解. 猜想$T(n) = O(n\lg n)$, 往证存在常数c, n_0, 使$n \geq n_0$时, 有$T(n) \leq cn\lg n$. 假设$m \leq n-1$且$m \geq n_0$时, 有$T(m) \leq cm\lg m$.

因此$T(n) = 2T(n/2 + 17) + n$

$$\leq 2c\left(\frac{n}{2} + 17\right)\lg\left(\frac{n}{2} + 17\right) + n$$

$$\leq 2c\left(\frac{n}{2} + 17\right)\lg\left(\frac{3n}{4}\right) + n \qquad (n \geq 68)$$

$$= cn\lg n - \lg\left(\frac{4}{3}\right)cn + 34c\lg n - 34c\lg\left(\frac{4}{3}\right) + n$$

令$c \geq 2/\lg\left(\frac{4}{3}\right)$时, n足够大使得$\lg\left(\frac{4}{3}\right)n > 68\lg n$时, $T(n) \leq cn\lg n$.

Substitution方法II：猜测上下界，减少不确定性范围

例3. 求解$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$.

解: 首先证明$T(n) = \Omega(n), T(n) = O(n^2)$.

然后逐阶地降低上界, 提高下界.

从$\Omega(n)$找到上一个阶$\Omega(n\log n)$,

从$O(n^2)$找到下一个阶$O(n\log n)$.

细微差别的处理

- 问题：猜测正确，数学归纳法的归纳步似乎证不出来
- 解决方法：从guess中减去一个低阶项，可能work.

例4. 求解$T(n)=T(\lfloor n/2\rfloor)+T(\lceil n/2\rceil)+1$

解: (1) 猜测$T(n)=O(n)$

证明: $T(n)\le c\lfloor n/2\rfloor+c\lceil n/2\rceil+1=cn+1\ne cn$

(2) 从猜测的数学形式中减去一个低阶项, 即:

$T(n)\le cn-b$, $b\ge 0$是常数.

证明: 设不超过$n-1$时都成立

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor n/2\rfloor)+T(\lceil n/2\rceil)+1 \\
&\le c\lfloor n/2\rfloor-b+c\lceil n/2\rceil-b+1
\end{aligned}
$$

当$b\ge 1$即可. (c应足够大以满足边界条件)

避免陷阱

例5. 求解$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

证：用数学归纳法证明$T(n) \leq cn.$

--错！！

$$T(n) \leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \leq cn + n = O(n).$$

错在哪里？ 过早使用了O(n)而掉进了陷阱！

应该在证明了$T(n) \leq cn$后才可使用。

从$T(n) \leq cn + n$不可能得到$T(n) \leq cn$

因为对于$\forall c > 0$，我们都得不到$cn + n \leq cn$。

Substitution方法III：变量替换

经变量替换把递归方程变换为熟悉的方程.

例6. 求解$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

解: 令$m = \log n, n = 2^m, T(2^m) = 2T\left(2^{m/2}\right) + m.$

令$S(m) = T(2^m)$, 则$2T\left(2^{m/2}\right) = 2S(m/2).$

于是$S(m) = 2S(m/2) + m.$

$S(m) = O(m \log m)$, 即$T(2^m) = O(m \log m).$

由于$2^m = n, m = \log n, T(n) = O(\log n \times \log \log n).$

2.3.2 迭代(Iteration)方法

方法：

循环地展开递归方程，

把递归方程转化为和式，

然后可使用求和技术解之。

例1. $T(n) = n + 3T(\lfloor {}^{n}/_{4} \rfloor)$, $n < 4$时, $T(n) = \theta(1)$

$$= n + 3\left\lfloor {}^{n}/_{4} \right\rfloor + 9T(\lfloor {}^{n}/_{16} \rfloor)$$

$$= n + 3\left\lfloor {}^{n}/_{4} \right\rfloor + 9\lfloor {}^{n}/_{16} \rfloor + 27T(\lfloor {}^{n}/_{64} \rfloor)$$

$$= n + 3\left\lfloor {}^{n}/_{4} \right\rfloor + 3^2\left\lfloor {}^{n}/_{4^2} \right\rfloor + 3^3\left\lfloor {}^{n}/_{4^3} \right\rfloor + \cdots + 3^i T(\left\lfloor {}^{n}/_{4^i} \right\rfloor)$$

$i = \lfloor \log_4 n \rfloor$时, $\left\lfloor {}^{n}/_{4^i} \right\rfloor$首次下降到小于4的值

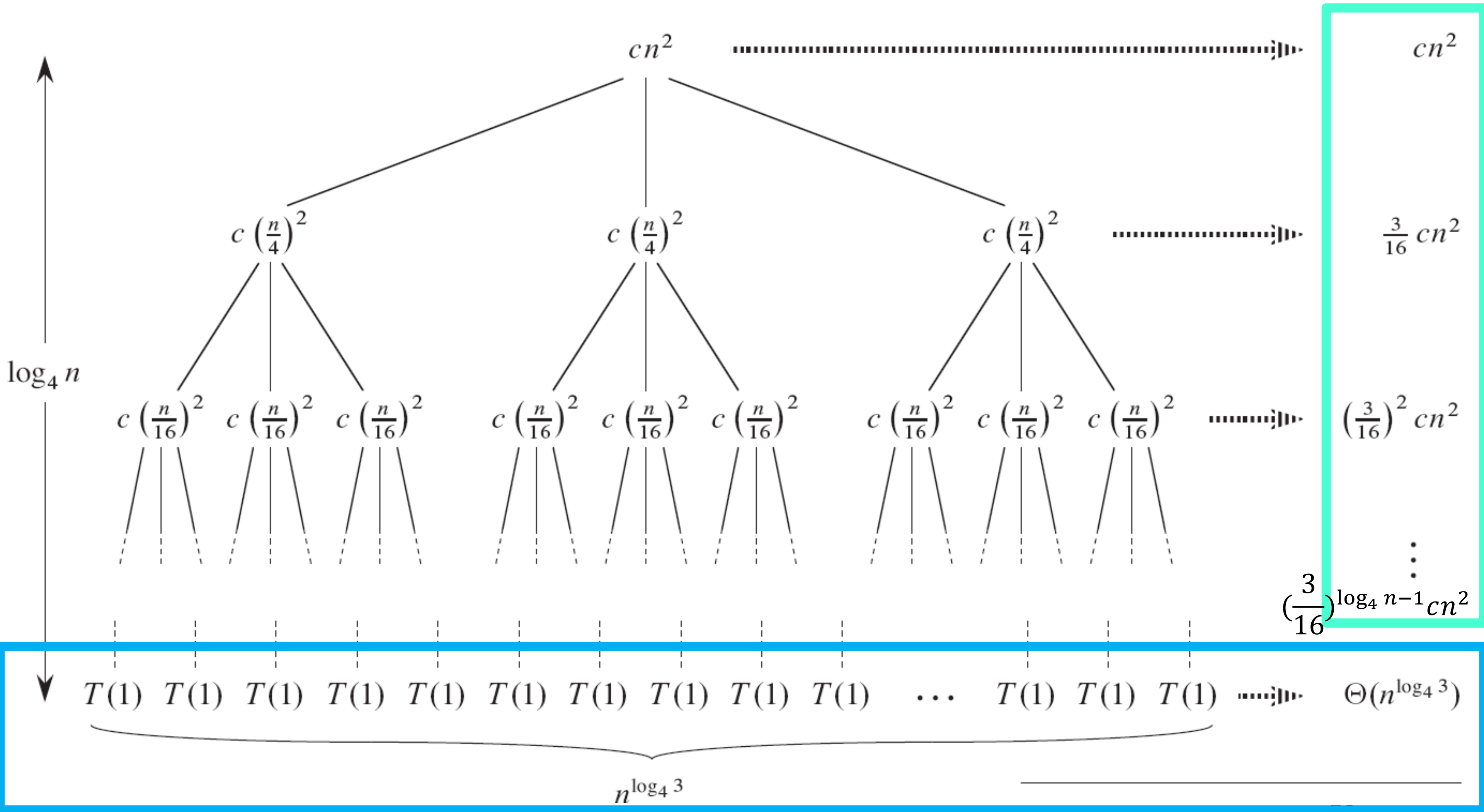
$$= n + 3\left\lfloor {}^{n}/_{4} \right\rfloor + 3^2\left\lfloor {}^{n}/_{4^2} \right\rfloor + 3^2\left\lfloor {}^{n}/_{4^2} \right\rfloor + \cdots + 3^{\lfloor \log_4 n \rfloor} T(\left\lfloor {}^{n}/_{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor)$$

$$\le \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 3^i\, {}^{n}/_{4^i} + c \times 3^{\log_4 n} \le n \sum_{i=0}^{\infty} {}^{3^i}/_{4^i} + c \times n^{\log_4 3}$$

c是常数

$$= n \times \frac{1}{1 - {}^{3}/_{4}} + c \times n^{\log_4 3} = O(n).$$

求解 $T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + cn^2$



求解 $T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + cn^2$

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right) = \frac{16}{13}cn^2 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right) = O(n^2)$$

cn^2

$\frac{3}{16} cn^2$

$\left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2$

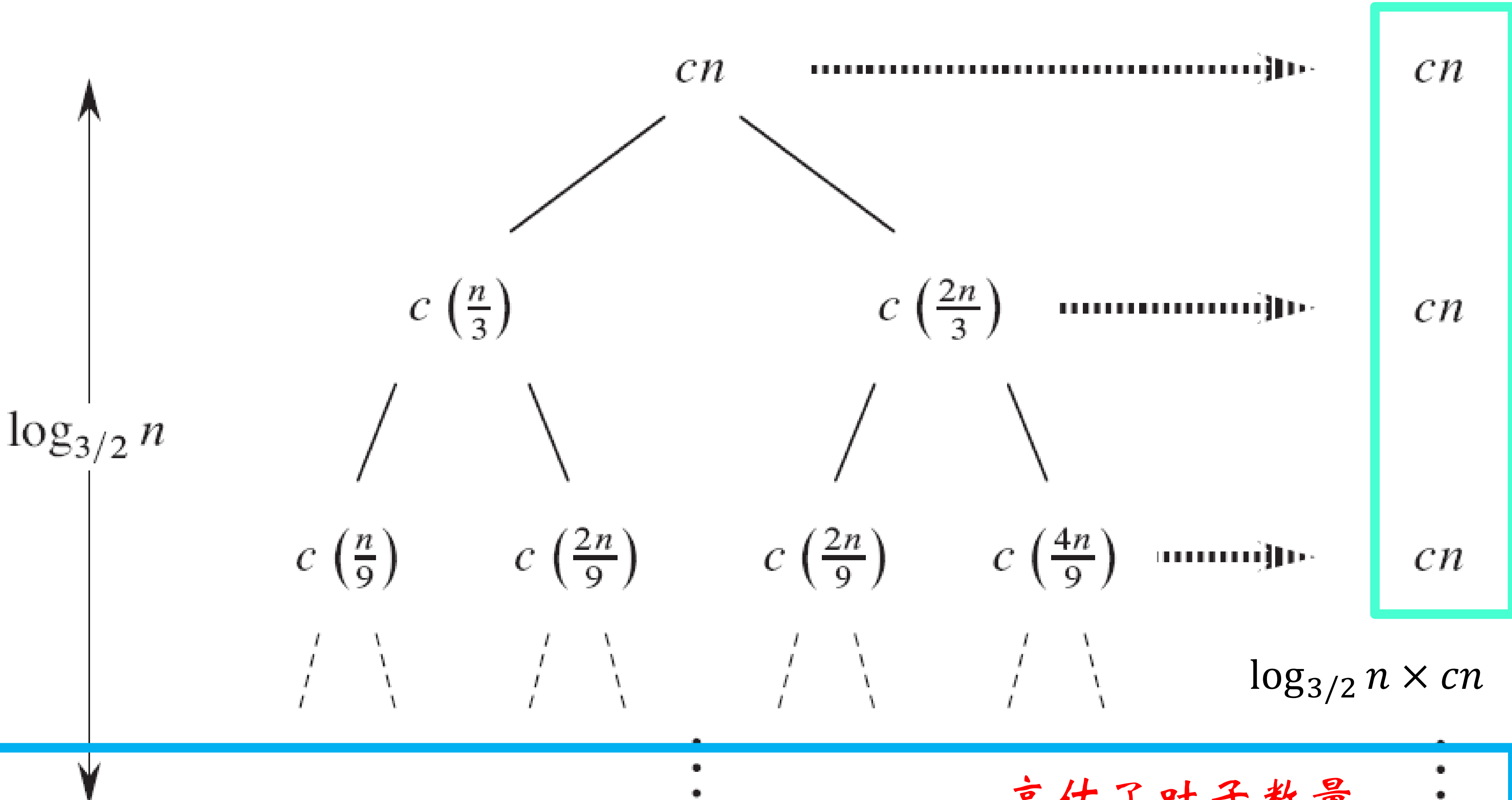
$\vdots$

$\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2$

$T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $\cdots$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $\Theta(n^{\log_4 3})$

$n^{\log_4 3}$

求解 $T(n) = T(n/3) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn$



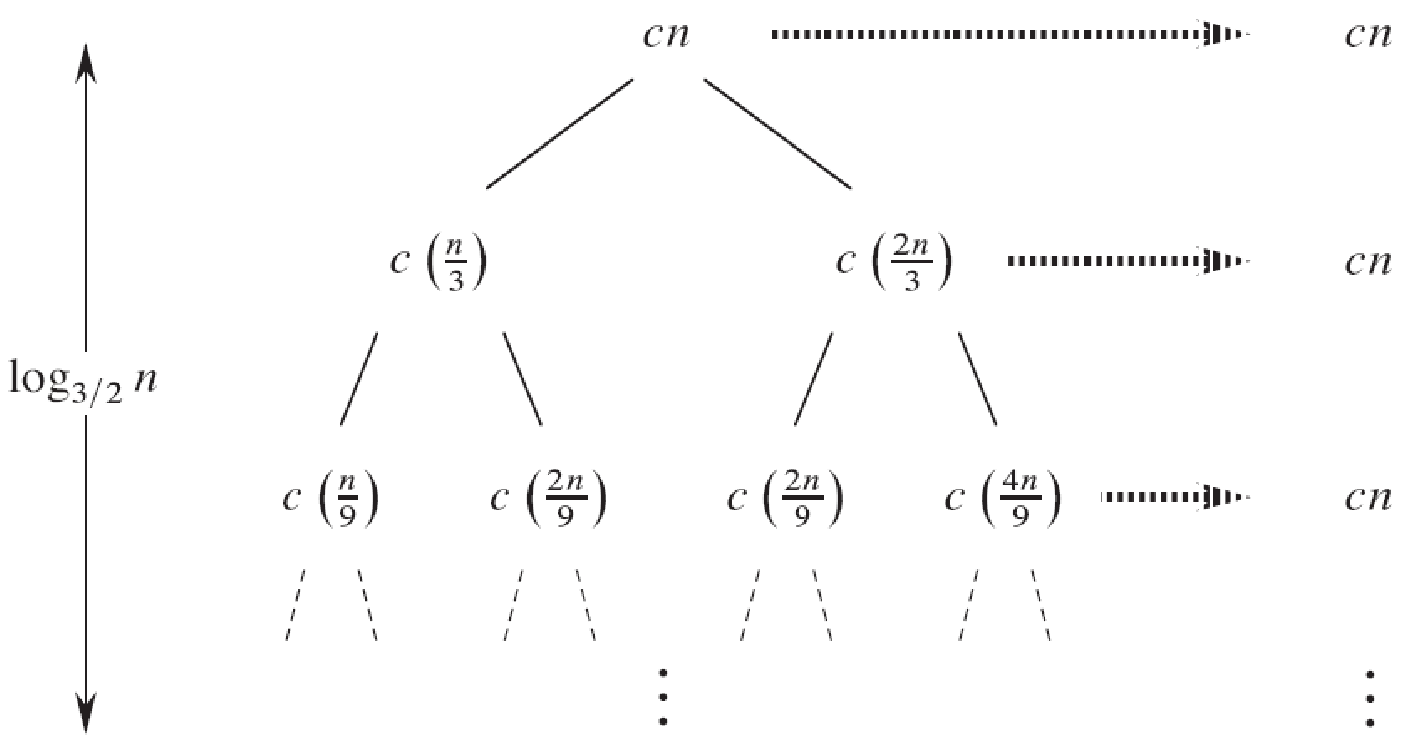
$$\theta(n^{\log_{\frac{3}{2}} 2}) \neq O(n \log n)$$

高估了叶子数量和中间层的加和

求解 $T(n) = T(n/3) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn$

叶子的数量实际为$O(n)$

通过数学归纳法可得$T(n) = O(n\log n)$



2.3.3 Master定理

目的：求解$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$型方程，其中$a \geq 1$，$b > 1$是常数，$f(n)$是正函数。

一般的分治递归：把问题分成一些更小(或许有重叠)的子问题，递归地求解这些子问题，然后用所得到的子问题的解去求解原始问题。

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$：将一个大小为**n**的问题分成大小为**n/b**的**a**个子问题，递归地求解这些子问题，然后用所得到的子问题的解以**f(n)**的代价求解原始问题。

Master 定理

定理2.4.1 设$a \geq 1, b > 1$为常数, $f(n)$是一个函数, $T(n)$是定义在非负整数上的递归式$T(n) = aT(n/b) + f(n)$. 这里n/b可以解释为$\lfloor n/b \rfloor$或者$\lceil n/b \rceil$. 则$T(n)$的渐进界为:

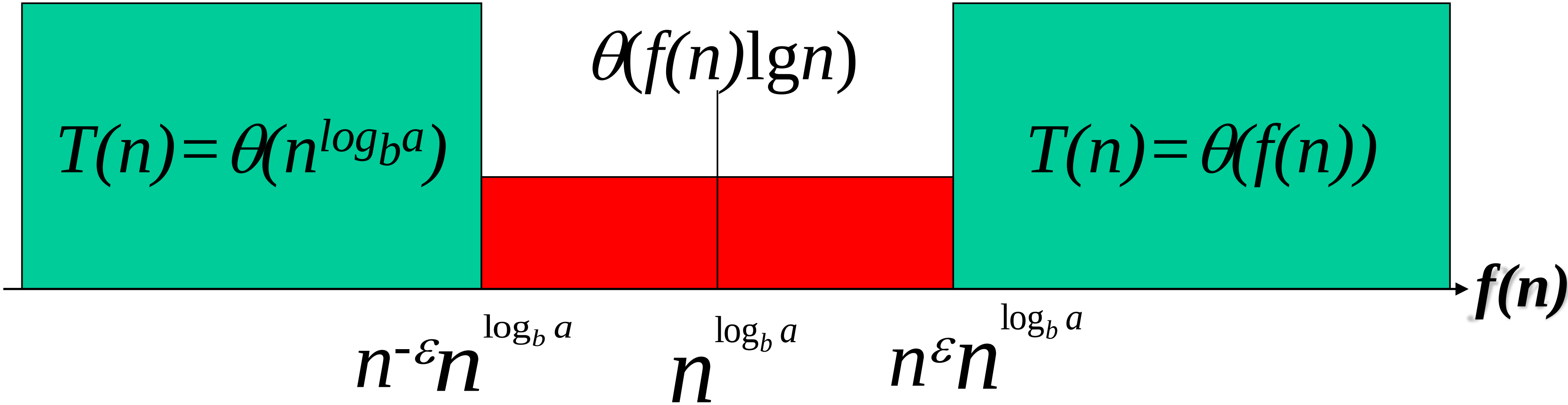
(1). 若对于某个常数$\varepsilon > 0$, 有$f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$,
则$T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$.

(2). 若$f(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$, 则$T(n) = \theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$.

(3). 若对于某个常数$\varepsilon > 0$, 有$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$, 而且对于某个常数$c < 1$和足够大的$n$有$af(n/b) \leq cf(n)$, 则$T(n) = \theta\left(f(n)\right)$.

直观地，我们比较$f(n)$与$n^{\log_b a}$的阶：

- 如果$n^{\log_b a}$更大，则$T(n)=\theta(n^{\log_b a})$;
- 如果$f(n)$更大，则则$T(n)=\theta(f(n))$;
- 如果$f(n)$与$n^{\log_b a}$同阶, 则$T(n)=\theta(f(n)\log n)=\theta(n^{\log_b a}\log n)$



对于红色部分，Master定理无能为力

更进一步：

(1) 在第一种情况下，$f(n)$不仅低阶于$n^{\log_b a}$，而且必须多项式地低阶于$n^{\log_b a}$，即存在常数$\varepsilon > 0$，使得：

$$f(n) = O(\frac{n^{\log_b a}}{n^{\varepsilon}}).$$

(2) 在第三种情况下，$f(n)$不仅高阶于$n^{\log_b a}$，而且必须多项式地高阶于$n^{\log_b a}$，即存在常数$\varepsilon > 0$，使得：

$$f(n) = O(n^{\log_b a} \times n^{\varepsilon}).$$

Master定理的使用

例 1. 求解 $T(n)=9T\left(n/3\right)+n$.

解： $a=9$， $b=3$， $f(n)=n$ ， $n^{\log_b a}=\theta\left(n^2\right)$

$\because f(n)=n=O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$， $\varepsilon=1$

$\therefore T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\right)=\theta\left(n^2\right)$

例 2. 求解 $T(n)=T\left(2n/3\right)+1$.

解： $a=1$， $b=\left(3/2\right)$， $n^{\log_b a}=n^{\log_{3/2}1}=n^0=1$ ，

$f(n)=1=\theta(1)=\theta\left(n^{\log_b a}\right)$， $T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\lg n\right)=\theta(\lg n)$

例3. 求解$T(n) = 3T(^n/_4) + n\log n$

解: $a = 3, b = 4, n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$

$f(n) = n\log n = \Omega(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}), \varepsilon = 0.2$

对于$\forall n, af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \le \frac{3}{4}n\log n = cf(n), c = \frac{3}{4}.$

于是, $T(n) = \theta\big(f(n)\big) = \theta(n\log n).$

例 4. 求解$T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$

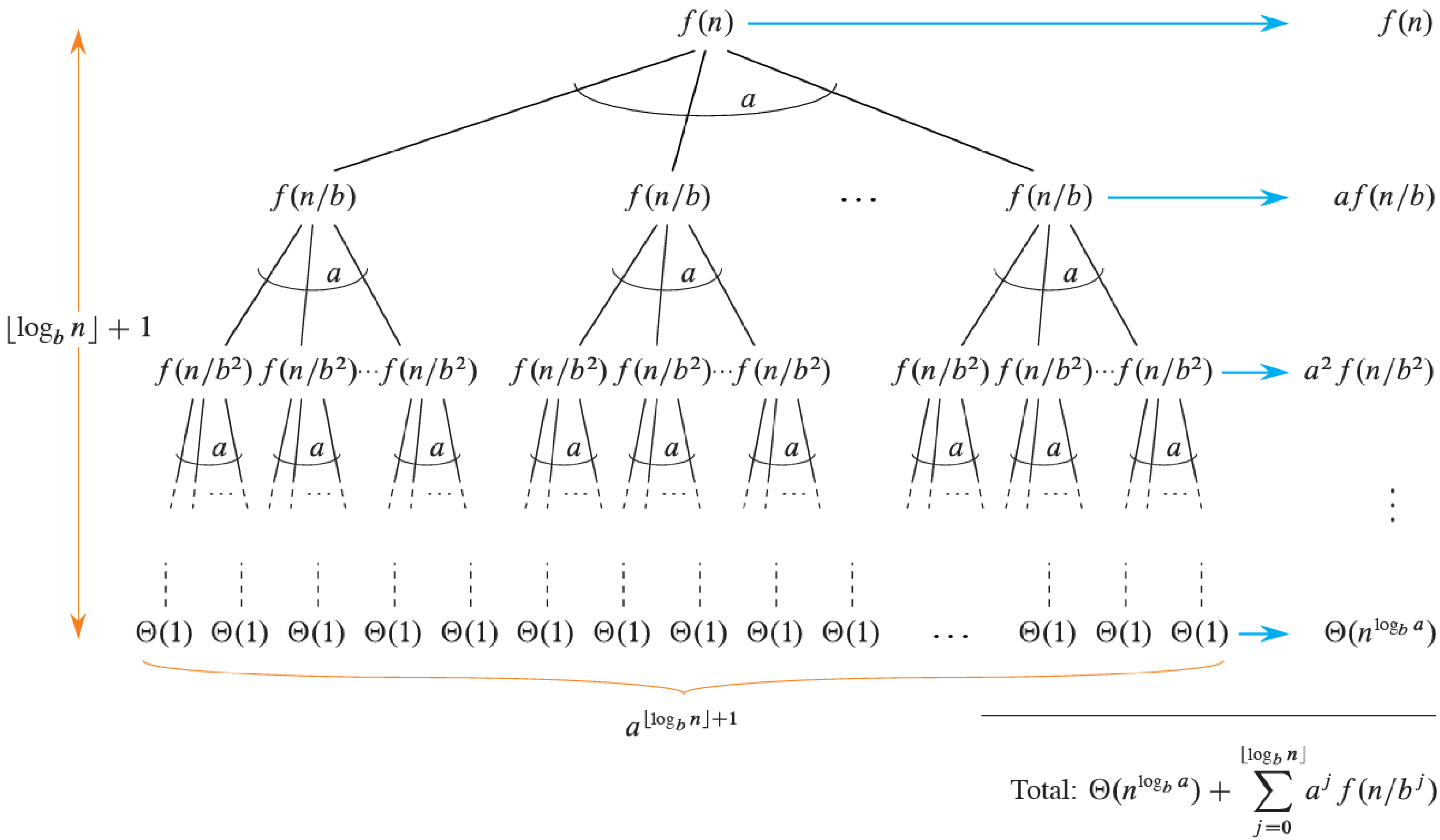
解：a=2^n，非常数项，不满足master定理条件，
故master定理不适用。

例 5. 求解$T(n) = 0.5T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n}$

解：a<1，不满足master定理条件，故master定理不适用。

例 6. 求解$T(n) = 64T\left(\frac{n}{8}\right) - n^2 \log n$

解： $f(n)$ 非正函数，不满足master定理条件，
故master定理不适用。



f(n)
a
f(n/b)
f(n/b²)
Θ(1)
⌊log_b n⌋ + 1
a^{⌊log_b n⌋+1}
f(n)
af(n/b)
a² f(n/b²)
Θ(n^{log_b a})
Total: Θ(n^{log_b a}) + Σ_{j=0}^{⌊log_b n⌋} a^j f(n/b^j)

扩展master定理

定理2.4.2 设$a \geq 1, b \geq 1$为常数, $f(n)$是一个函数, $T(n)$是定义在非负整数上的递归式$T(n) = aT(n/b) + f(n)$. 这里n/b可以解释为$\lfloor n/b \rfloor$或者$\lceil n/b \rceil$. 则$T(n)$的渐进界为:

(1). 若对于某个常数$\varepsilon > 0$, 有$f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$,
则$T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$.

(2). 若对于某个非负整数$k \geq 0$有$f(n) = \theta\left(n^{\log_b a}(\lg n)^k\right)$, 则
$T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}(\lg n)^{k+1}\right)$.

(3). 若对于某个常数$\varepsilon > 0$, 有$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$, 而且对于某个常数$c < 1$和足够大的$n$有$af(n/b) \leq cf(n)$, 则$T(n) = \theta\left(f(n)\right)$.

(2). 若对于某个非负整数$k \geq 0$有$f(n) = \theta\left(n^{\log_b a}(\lg n)^k\right)$, 则$T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}(\lg n)^{k+1}\right)$.

例 **7**．求解 $T(n) = 2T\left(n/2\right) + n\lg n$.

解： $f(n) = n\lg n$

$a = 2, b = 2,$ 根据原始的 master定理， $n^{\log_b a} = n$

$\log n$ 和 n^{ε} 的大小关系：对于任意$\varepsilon>0$，$\log n \in o(n^{\varepsilon})$

显然无法找到大于零的ε使得：

$n\log n = O(n^{1-\varepsilon})$ 或者$n\log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ 成立

$a = 2, b = 2, k = 1,$ 故： $n^{\log_b a}\log^k n = n\lg n = f(n)$

$$T(n) = \theta(n\lg^2 n)$$

本章总结

- 计
- 递

递归式分析：主定理法

- 主定理(扩展形式)：对形如 $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$的递归式

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\big(f(n)\big) & if\ f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}) & ① \\ \Theta\big(n^{\log_b a}\log^{k+1} n\big) & if\ f(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log^k n), k \ge 0 & ② \\ \Theta\big(n^{\log_b a}\big) & if\ f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon}) & ③ \end{cases}$$

- 情况②的三种扩展

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}\log^{k+1} n) & k > -1 \\ \Theta\big(n^{\log_b a}\log\log n\big) & k = -1 \\ \Theta\big(n^{\log_b a}\big) & k < -1 \end{cases} \quad ②$$