

算法设计与分析第一次作业

1. 求解递归方程 $T(n) = T(\frac{5n}{6}) + n$
2. 证明或否证明 $f(n) + o(f(n)) = \theta(f(n))$
3. 证明：设 k 是任意常数正整数，则 $\log^k n = o(n)$
4. 证明 $O(f(x)) + O(g(x)) = O(\max(f(x), g(x)))$
5. 求解递归方程 $T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$
6. 请证明算法 PartitionSort 的正确性

```
PartitionSort(A,i,j)
Input:  A[i,...,j], x
Output: 排序后的 A[i,...,j]
1. x ← A[i];           //以确定的策略选择x
2. k ← partition(A,i,j,x); //用x完成划分
3. partitionSort(A,i,k); //递归求解子问题
4. partitionSort(A,k+1,j);

Partition(A,i,j,x)
1. low ← i; high ← j;
2. While( low < high ) Do
3.     swap(A[low], A[high]);
4.     While( A[low] < x ) Do
5.         low ← low + 1;
6.     While( A[high] ≥ x ) Do
7.         high ← high - 1;
8. return(high)
```

7. 证明：对于任意正整数 d 和任意常数 $a_d > 0$ ，有： $P(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i = \theta(n^d)$.
8. 证明： $\sum_{k=1}^n \theta(f(k)) = \theta(\sum_{k=1}^n f(k))$.
9. 解递归方程

$$T(n) \leq \begin{cases} \theta(1) & \text{if } n \leq 140 \\ T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\frac{7n}{10} + 6\right) + O(n) & \text{if } n > 140 \end{cases}$$

10. 解递归方程

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn$$