第四章

Dynamic Programming Algorithms

提要

4.1 Elements of Dynamic Programming
4.2 Matrix-chain multiplication
4.3 Longest Common Subsequence
4.4 0/1 Knapsack Problem
4.5 The Optimal binary search trees

参考资料

Introduction to Algorithms

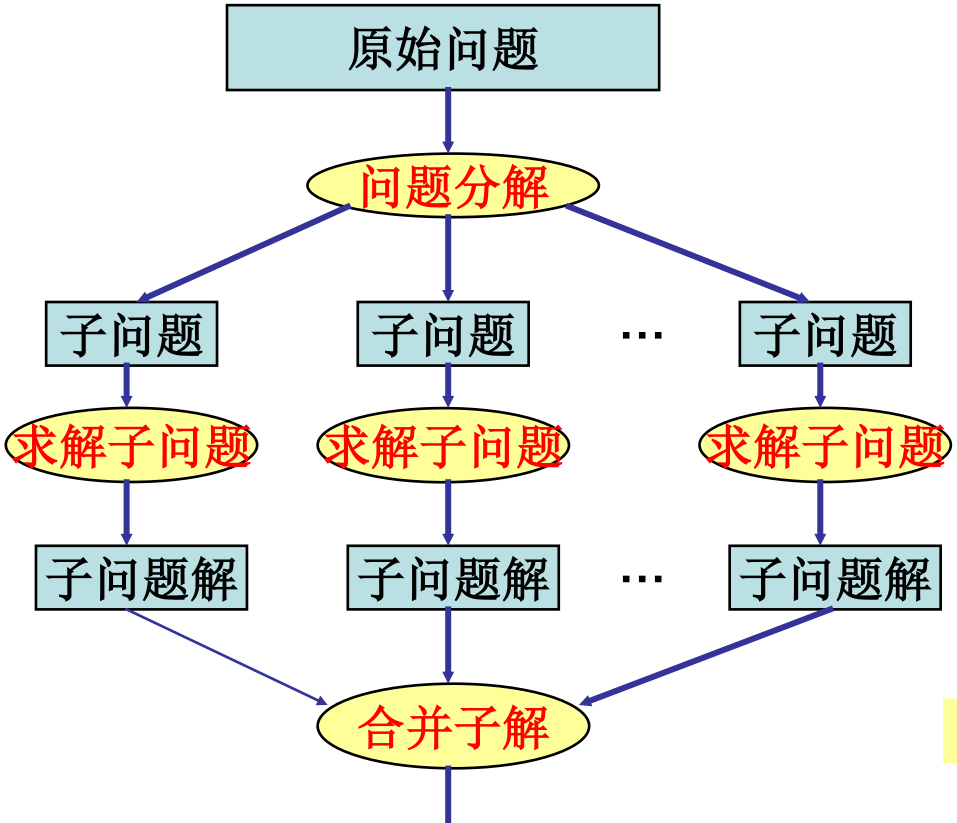
第15章

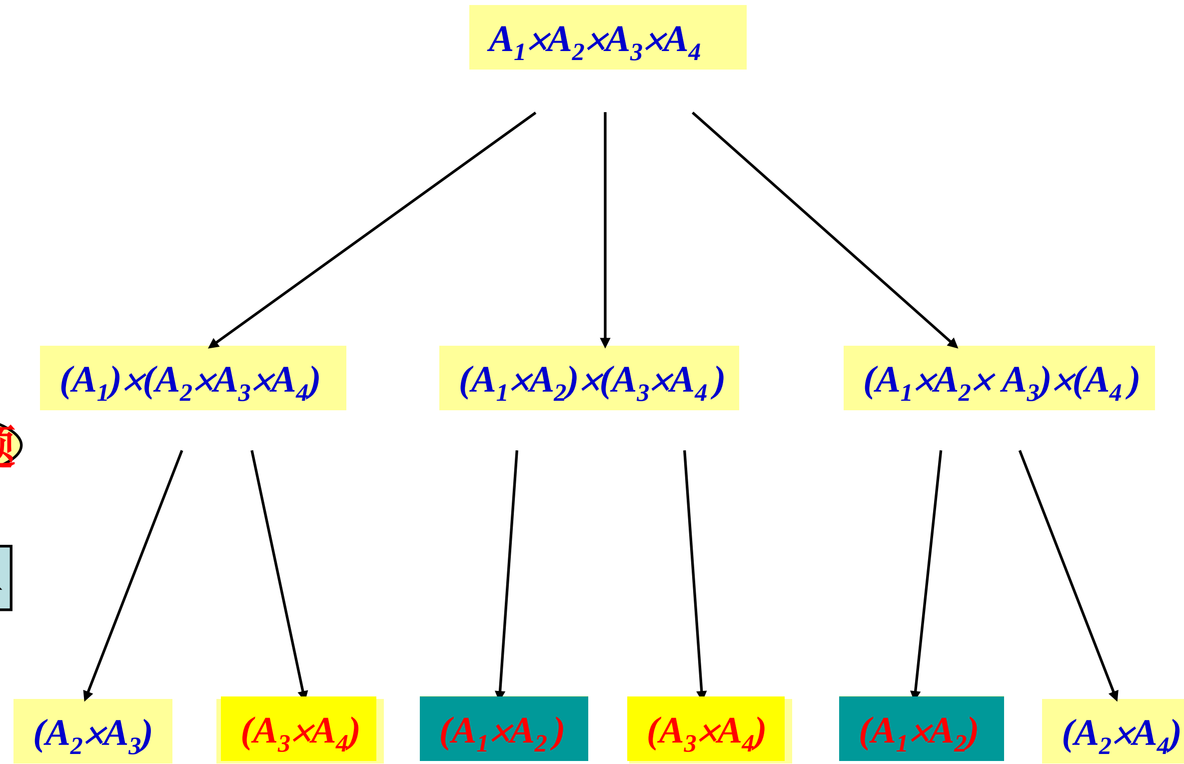
15.2, 15.3, 15.4, 15.5

4.1 Elements of Dynamic Programming

Why?
What?
How?

- Divide-and-Conquer方法的问题





问题：如果子问题不是相互独立的，分治方法将重复计算公共子问题，效率很低

Why?

- 优化问题
  - 问题可能有很多解，每个可能的解都对应有一个值，这个值通常称为代价
  - 优化问题是要在该问题所有可能的解中找到具有最优值(最大/最小)的解，即问题的一个最优解
  - 一个问题的最优解不一定是唯一的
  - 举例：最短路径，旅行商、任务调度等问题
  - 因此我们也可以说：优化问题就是给定一个代价函数，在问题的解空间中搜索具有最小或最大代价的优化解

动态规划是解决优化问题的一种常见方法

What?

- Dynamic Programming历史
  - 动态规划是运筹学的一个分支，20世纪50年代初美国数学家R.E.Bellman等人在研究多阶段决策过程(Multistep decision process)的优化问题时，提出了著名的最优性原理，把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法----动态规划自底向上地求解子问题
  - 多阶段决策问题：求解的问题可以划分为一系列相互联系的阶段，在每个阶段都需要做出决策，且一个阶段决策的选择会影响下一个阶段的决策，从而影响整个过程的活动路线，求解的目标是选择各个阶段的决策使整个过程达到最优

What?

- Dynamic Programming
  - 把原始问题划分成一系列子问题
    - 不同子问题的数目常常只有多项式量级
  - 求解每个子问题仅一次，并将其结果保存在一个表中，以后用到时直接存取，不重复计算，节省计算时间
  - 自底向上地求解子问题
- 适用范围
  - 一类优化问题：可分为多个相关子问题，子问题的解被重复使用

How?

- 使用Dynamic Programming的条件
  - 优化子结构
    - 当一个问题的优化解包含了子问题的优化解时，我们说这个问题具有优化子结构。
  - 重叠子问题
    - 在问题的求解过程中，很多子问题的解将被多次使用

How?

- Dynamic Programming算法的设计步骤
  - 分析优化解的结构
  - 递归地定义最优解的代价
  - 递归地划分子问题，直至不可分
  - 自底向上地求解各个子问题
    - 计算优化解的代价并保存之
    - 获取构造最优解的信息
  - 根据构造最优解的信息构造优化解

4.2 Matrix-chain Multiplication

问题的定义

- 输入：<A_1, A_2, ..., A_n>，A_i是$p_{i-1}\times p_i$矩阵
- 输出：计算$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$的最小代价方法

矩阵乘法的代价/复杂性：乘法的次数

若A是$p\times q$矩阵，B是$q\times r$矩阵，则$A\times B$的代价是$O(pqr)$

Motivation

- 矩阵链乘法
  - 矩阵乘法满足结合率。
  - 计算一个矩阵链的乘法可有多种方法:

例如，$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4)$

$$= (A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4)))$$

$$= ((A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4))$$

....

$$= (((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4)$$

- 矩阵链乘法的代价与计算顺序的关系
  - 设A_1=10×100矩阵, A_2=100×5矩阵, A_3=5×50矩阵

    T((A1×A2)×A3)=10×100×5+10×5×50 =7500

    T(A1×(A2×A3))=100×5×50+10×100×50 =75000

结论：不同计算顺序有不同的代价

- 矩阵链乘法优化问题的解空间
  - 设$p(n)$=计算n个矩阵乘积的方法数
  - $p(n)$的递归方程

$$(A_1 \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n)$$

$$p(k) \qquad\qquad p(n\text{-}k)$$

$$p(n) = 1 \qquad \text{if } n=1$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(k)\,p(n-k) \qquad \text{if } n>1$$

$$P(n) = \Omega(2^n)$$

$$(A_1) \qquad \times(A_2 \times \ldots \times A_n)$$
$$(A_1 \times A_2) \qquad \times(A_3 \times \ldots \times A_n)$$
....
$$(A_1 \times \ldots \times A_k) \quad \times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n)$$
...
$$(A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times (A_n)$$

如此之大的解空间是无法用枚举方法
求出最优解的!

下边开始设计求解矩阵链乘法问题的Dynamic Programming算法

- 分析优化解的结构
- 递归地定义最优解的代价
- 递归地划分子问题，直至不可分
- 自底向上地求解各个子问题
  - 计算优化解的代价并保存之
  - 获取构造最优解的信息
- 根据构造最优解的信息构造优化解

分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) \qquad\qquad \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) \qquad \times (A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. \\ (A_1 \times \ldots \times A_k)\times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1})\times(A_n) \end{cases}$$

如果等式右端所有子问题的最优乘法方案的代价均已知，则
根据等式右端组合子问题的解，取组合方案代价的最小值即可获得解

HITWH
SE

分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. \\ (A_1 \times \ldots \times A_k)\times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times (A_n) \end{cases}$$

$$cost_{1\sim n} = Min \begin{cases} cost_{1\sim 1} + cost_{2\sim n} + p_0 p_1 p_n \\ cost_{1\sim 2} + cost_{3\sim n} + p_0 p_2 p_n \\ \ldots. \\ cost_{1\sim k} + cost_{k+1\sim n} + p_0 p_k p_n \\ \ldots \\ cost_{1\sim n-1} + cost_{n\sim n} + p_0 p_{n-1} p_n \end{cases}$$

其中A_i是$p_{i-1} \times p_i$矩阵

分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. \\ (A_1 \times \ldots \times A_k)\times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times (A_n) \end{cases}$$

优化子结构：

如果红色方案是代价最小的方案，则该方案中

计算$A_1 \times \ldots \times A_k$的方案必须是代价最小的方案

计算$A_{k+1} \times \ldots \times A_n$的方案必须是代价最小的方案

下面用$A_{i\sim j}$表示矩阵链$A_i \times \ldots \times A_j$相乘

分析优化解的结构

- 优化解的结构
  - 若计算$A_{1\sim n}$的优化顺序在k处断开矩阵链，即$A_{1\sim n}=A_{1\sim k}\times A_{k+1\sim n}$，则在$A_{1\sim n}$的优化顺序中，对应于子问题$A_{1\sim k}$的解必须是$A_{1\sim k}$的优化解，对应于子问题$A_{k+1\sim n}$的解必须是$A_{k+1\sim n}$的优化解.

$$(A_1 \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n)$$

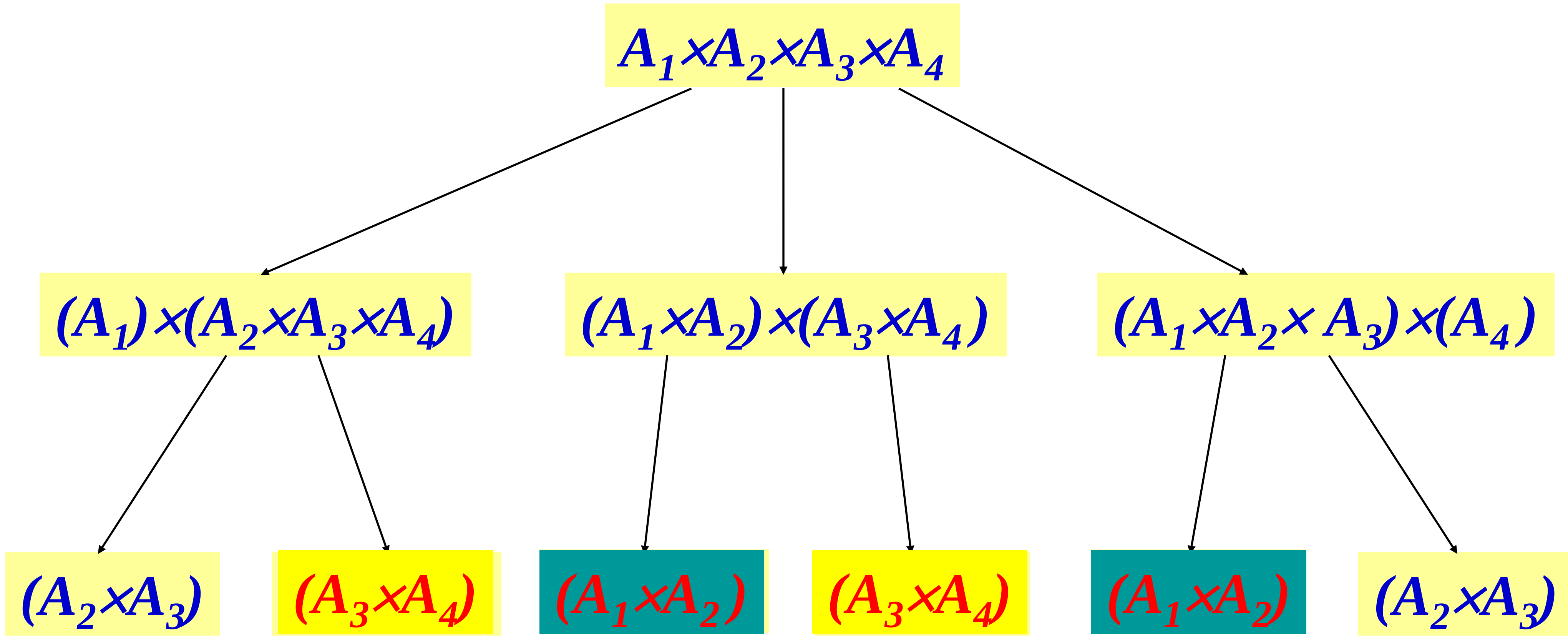
$$((A_1 \times \ldots A_i) \times (A_{i+1} \times \ldots \times A_k)) \times ((A_{k+1} \times \ldots A_j) \times (A_{j+1} \times \ldots \times A_n))$$

  - 否则,若优化解中给出的子问题$A_{1\sim k}$的计算顺序不是$A_{1\sim k}$的优化顺序，则一定存在$A_{1\sim k}$的一个计算代价更小的优化顺序：

$$((A_1 \times \ldots A_r) \times (A_{r+1} \times \ldots \times A_k))$$

  - 用其替代$A_{1\sim n}$的优化解中$A_{1\sim k}$的计算顺序，将会得到一个计算代价更小的解，则与$A_{1\sim n}=A_{1\sim k}\times A_{k+1\sim n}$是优化顺序相矛盾了。
  - 对子问题$A_{k+1\sim n}$亦同理。

- 子问题重叠性



具有子问题重叠性

递归地定义最优解的代价

- 递归求解过程
  - 一般化表示：计算子链$A_iA_{i+1}\ldots A_j$的最优乘法方案

$$
A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j = \begin{cases}
(A_i) \times (A_{i+1} \times \ldots \times A_j) \\
(A_i \times A_{i+1}) \times (A_{i+2} \times \ldots \times A_j) \\
\ldots. \\
(A_i \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_j) \\
\ldots \\
(A_i \times \ldots \times A_{j-1}) \times (A_j)
\end{cases}
$$

HITWH
SE

递归地定义最优解的代价

$$A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j = \begin{cases} (A_i) \times (A_{i+1} \times \ldots \times A_j) \\ (A_i \times A_{i+1}) \times (A_{i+2} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots. \\ (A_i \times \ldots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots \\ (A_i \times \ldots \times A_{j-1}) \times (A_j) \end{cases}$$

$$cost_{i\sim j} = Min_{i \le k \le j-1} \begin{cases} cost_{i\sim i} + cost_{i+1\sim j} + p_{i-1} p_i p_j \\ cost_{i\sim i+1} + cost_{i+2\sim j} + p_{i-1} p_{i+1} p_j \\ \ldots. \\ cost_{i\sim k} + cost_{k+1\sim j} + p_{i-1} p_k p_j \\ \ldots \\ cost_{i\sim j-1} + cost_{j\sim j} + p_{i-1} p_{j-1} p_j \end{cases}$$

其中A_r是$p_{r-1} \times p_r$矩阵

递归地定义最优解的代价

- 假设
  - $m[i, j]$ = 计算$A_{i\sim j}$的最小乘法数
  - $m[1, n]$ = 计算$A_{1\sim n}$的最小乘法数

$$(A_i \ldots A_k)(A_{k+1} \ldots A_j)$$

考虑到所有的k，优化解的代价方程为

$m[i, j] = 0$ if $i=j$

$m[i, j] = \min_{i \le k < j}\{ m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}p_kp_j \}$ if $i<j$

递归地划分子问题

$$m[i, j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \}$$

$m[i,i]$	$m[i,i+1]$	……	$m[i,j-1]$	$m[i,j]$
				$m[i+1,j]$
				$m[i+2,j]$
				……
				$m[j,j]$

递归地划分子问题

$$m[i,j] = \min_{i \le k < j}\{ m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j \}$$

m[1,1]	m[1,2]	m[1,3]	m[1,4]	m[1,5]
	m[2,2]	m[2,3]	m[2,4]	m[2,5]
		m[3,3]	m[3,4]	m[3,5]
			m[4,4]	m[4,5]
				m[5,5]

HITWH
SE

自底向上计算优化解的代价

$m[i, j] = 0 \qquad\qquad \text{if} \quad i=j$

$m[i, j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \}$

m[1,1]	m[1,2]	m[1,3]	m[1,4]	m[1,5]
	m[2,2]	m[2,3]	m[2,4]	m[2,5]
		m[3,3]	m[3,4]	m[3,5]
			m[4,4]	m[4,5]
				m[5,5]

算法描述

$$m[i,j] = 0 \quad \text{if} \quad i=j$$

$$m[i,j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \}$$

m[1,1]	m[1,2]	m[1,3]	m[1,4]	m[1,5]
	m[2,2]	m[2,3]	m[2,4]	m[2,5]
		m[3,3]	m[3,4]	m[3,5]
			m[4,4]	m[4,5]
				m[5,5]

```
Matrix-Chain-Order(p)
n=length(p)-1;
FOR i=1 TO n DO
      m[i, i]=0;
FOR l=2 TO n DO /* 计算对角线 */
    FOR i=1 TO n-l+1 DO
        j=i+l-1;
        m[i, j]=∞;
        FOR k←i To j-1 DO /* 计算m[i,j] */
            q = m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}×p_k×p_j
            IF q<m[i, j] THEN m[i,j]=q;
Return m.
```

$m[i, j] = 0 \quad \text{if} \quad i=j$

获取构造最优解的信息

$m[i, j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \}$

```
Matrix-Chain-Order(p)
n=length(p)-1;
FOR i=1 TO n DO
        m[i, i]=0;
FOR l=2 TO n DO /* 计算对角线 */
    FOR i=1 TO n-l+1 DO
        j=i+l-1;
        m[i, j]=∞;
        FOR k←i To j-1 DO /* 计算m[i,j] */
            q = m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}×p_k×p_j
            IF q<m[i, j] THEN m[i,j]=q;   s[i,j]=k;
Return m and s.
```

m[1,1]	m[1,2]	m[1,3]	m[1,4]	m[1,5]
	m[2,2]	m[2,3]	m[2,4]	m[2,5]
		m[3,3]	m[3,4]	m[3,5]
			m[4,4]	m[4,5]
				m[5,5]

$S[i,j]=k$记录$A_iA_{i+1}\ldots A_j$的最优划分处是在A_k与A_{k+1}之间

获取构造最优解的信息

$$m[i,j]=\min_{i\le k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}p_kp_j\}$$

- Matrix-Chain-Order(*p*)
- *n*=length(*p*)-1；
- FOR *i=1* TO *n* DO
- $m[i, i]=0$;
- FOR *l=2* TO *n* DO
- FOR *i=1* TO *n-l+1* DO
- $j=i+l-1$;
- $m[i, j]=\infty$;
- FOR $k \leftarrow i$ To *j-1* DO
- $q = m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}\times p_k\times p_j$
- IF $q<m[i, j]$ THEN $m[i,j]=q$， $s[i,j]=k$;
- Return *m* and *s*.

时间复杂性：$O(n^3)$

构造最优解

```
Print-Optimal-Parens(s, i, j)
IF j=i
THEN  Print "A"i;
ELSE  Print "("
          Print-Optimal-Parens(s, i, s[i, j])
          Print-Optimal-Parens(s, s[i, j]+1, j)
          Print  ")"
```

$S[i, j]$记录$A_i \ldots A_j$的最优划分处；
$S[i, S[i,j]]$记录$A_i \ldots A_{s[i,j]}$的最优划分处；
$S[S[i,j]+1, j]$记录$A_{s[i,j]+1} \ldots A_j$的最优划分处.

调用Print-Optimal-Parens(s, 1, n)
即可输出$A_{1\sim n}$的优化计算顺序

算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - (l, i, k)三层循环，每层至多n-1步
    - $O(n^3)$
  - 构造最优解的时间: $O(n)$
  - 总时间复杂性为：$O(n^3)$
- 空间复杂性
  - 使用数组m和S
  - 需要空间$O(n^2)$

Hu, TC; Shing, MT (1982). "Computation of Matrix Chain Products, Part I"
Hu, TC; Shing, MT (1984). "Computation of Matrix Chain Products, Part II"

```
MEMOIZED-MATRIX-CHAIN(p)
n = p.length - 1
let m[1 .. n, 1 .. n] be a new table
for i = 1 to n
    for j = i  to n
        m[i, j] = ∞
return LOOKUP-CHAIN(m, p, 1, n)

LOOKUP-CHAIN(m, p, i, j)
if m[i, j]  < ∞
    return m[i, j]
if i == j
    m[i, j] = 0
else for k = i to j - 1
    q = LOOKUP-CHAIN(m, p, i, k) + LOOKUP-CHAIN(m, p, k + 1, j) + p_{i-1} p_k p_j
    if q < m[i, j]
        m[i, j] = q
return m[i, j]
```

4.3 Longest Common Subsequence

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解的代价递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

问题的定义

$X=<x_1, x_2, \ldots, x_m>$

任意严格递增序列$<i_1, i_2, \ldots, i_k>$, $1\le i_1, i_k\le m$,

$Z=<z_1, z_2, \ldots, z_k>=<x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}>$是$X$的子序列

- 子序列
  - $X=(A, B, C, B, D, B)$
  - $W=(B, D, A)$是X的子序列?
  - $Z=(B, C, D, B)$是X的子序列?
- 公共子序列
  - Z是序列X与Y的公共子序列如果Z是X的子序列也是Y的子序列。

最长公共子序列（LCS）问题

输入：$X = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$，$Y = (y_1,y_2,\ldots y_n)$

输出：X与Y的最长公共子序列

$Z=(z_1, z_2, \ldots, z_k)$

优化子结构分析

- 第i前缀
  - 设$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是一个序列
    则$X_i=(x_1, \ldots, x_i)$是X的第i前缀

例. $X=(A, B, D, C, A)$, $X_1=(A)$, $X_2=(A, B)$, $X_3=(A, B, D)$

$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$

$Y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$

- 优化子结构的猜想

X和Y的LCS为$LCS_{XY}=(z_1, \ldots, z_k)$

If $x_m=y_n$ 则 $z_k=x_m=y_n$

$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}+<x_m=y_n>$

If $x_m \neq y_n$,

$$\left.\begin{array}{ll} z_k \neq x_m & LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y} \\ z_k \neq y_n & LCS_{XY}=LCS_{XY_{n-1}} \end{array}\right\} \rightarrow LCS_{XY}=\max\{LCS_{X_{m-1}Y}, LCS_{XY_{n-1}}\}$$

- 优化子结构

定理1（优化子结构）设$X=(x_1, ..., x_m)$、$Y=(y_1, ..., y_n)$是两个序列，$LCS_{XY}=(z_1, ..., z_k)$是X与Y的LCS，我们有：

(1) 如果$x_m=y_n$, 则$z_k=x_m=y_n$, $LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>$, $LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}$是X_{m-1}和Y_{n-1}的LCS.

(2) 如果$x_m \neq y_n$，且$z_k \neq x_m$，则LCS_{XY}是X_{m-1}和Y的LCS，即 $LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y}$

(3) 如果$x_m \neq y_n$,且$z_k \neq y_n$,则LCS_{XY}是X与Y_{n-1}的LCS，即 $LCS_{XY} = LCS_{XY_{n-1}}$

证明：

(1). $X=<x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, \ldots, y_{n-1}, x_m>$，则

$$z_k=x_m=y_n \text{ 且 } LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>.$$

设$z_k \neq x_m$，则可加$x_m=y_n$到Z，得到一个长为$k+1$的X与Y的公共序列，与Z是X和Y的LCS矛盾。于是，$z_k=x_m=y_n$。

假设Z_{k-1}是X_{m-1}与Y_{n-1}的非最长公共子序列，已知有

$$LCS_{XY} = Z_{k-1} + <x_m=y_n>,$$

则由于$|Z_{k-1}|<|LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}|$,

$$|LCS_{XY} = Z_{k-1} + <x_m=y_n>|<|LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>|,$$

与LCS_{XY}是LCS矛盾。

因此，Z_{k-1}一定是X_{m-1}与Y_{n-1}的最长公共子序列

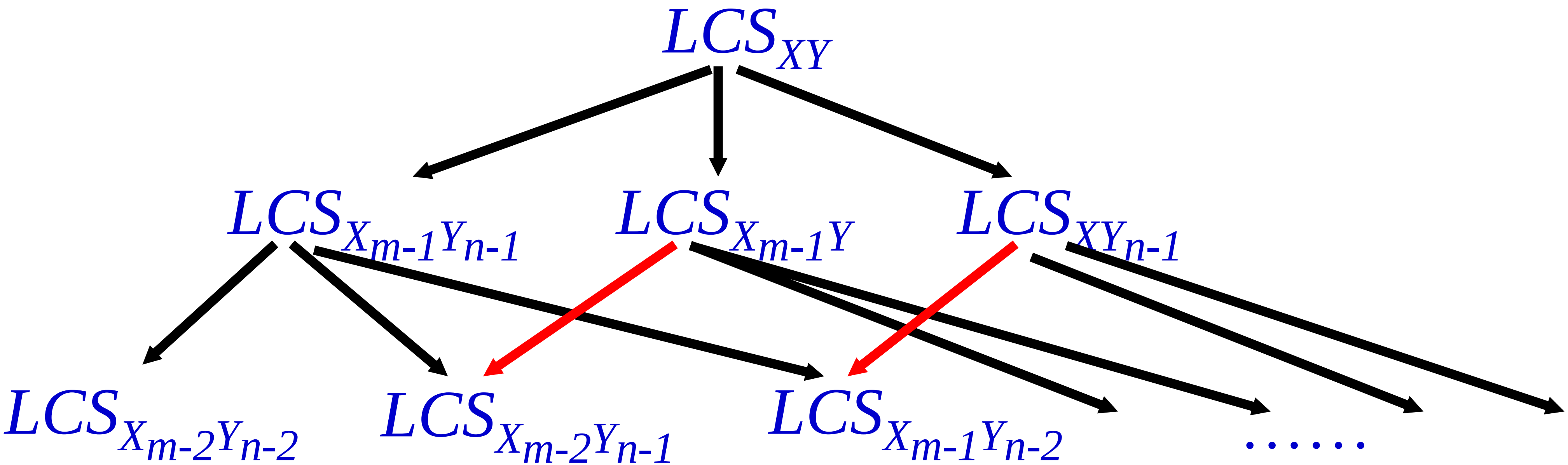
(2) $X=<x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n>$，

$x_m \neq y_n$，$z_k \neq x_m$， 则 $LCS_{XY}= LCS_{X_{m-1}Y}$

由于$z_k \neq x_m$， $Z=LCS_{XY}$是X_{m-1}与Y的公共子序列。我们来证Z是X_{m-1}与Y的LCS。设X_{m-1}与Y有一个公共子序列W，W的长大于k, 则W也是X与Y的公共子序列，与Z是LCS矛盾。因此，$Z=LCS_{XY}$是X_{m-1}与Y的最长公共子序列。

(3) 证明同(2)。

- 子问题重叠性



LCS问题具有子问题重叠性

递归方式需要处理多少个子问题?

建立LCS长度的递归方程

- $C[i, j] = X_i$与Y_j的LCS的长度
- LCS长度的递归方程

$$C[i, j] = 0 \qquad \text{if } i=0 \text{ 或 } j=0$$

$$C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \qquad \text{if } i, j>0 \text{ and } x_i = y_j$$

$$C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j]) \qquad \text{if } i, j>0 \text{ and } x_i \neq y_j$$

递归划分与自底向上求解

- 基本思想

$$C[i,j] = 0,\ \text{if}\ \ i=0\ \text{或}\ j=0$$

$$C[i,j] = C[i-1,j-1] + 1 \quad \text{if } i,j>0 \text{ and } x_i = y_j$$

$$C[i,j] = Max(C[i,j-1], C[i-1,j])\ \text{if } i,j>0 \text{ and } x_i \neq y_j$$

	C[i-1, j-1]	C[i-1,j]	
	C[i, j-1]	C[i, j]	

$C[i-1, j-1]$	$C[i-1, j]$
$C[i, j-1]$	$C[i, j]$

自底向上计算优化解代价

- 递归划分子问题与自底向上求解过程

$C[0,0]$	$C[0,1]$	$C[0,2]$	$C[0,3]$	$C[0,4]$
$C[1,0]$	$C[1,1]$	$C[1,2]$	$C[1,3]$	$C[1,4]$
$C[2,0]$	$C[2,1]$	$C[2,2]$	$C[2,3]$	$C[2,4]$
$C[3,0]$	$C[3,1]$	$C[3,2]$	$C[3,3]$	$C[3,4]$

- $C[i, j] = 0, \ \ i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i\text{-}1, j\text{-}1] + 1, \ \ x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j\text{-}1], C[i\text{-}1, j]), \ x_i \neq y_j$

		y_j	**B**	**D**	**C**	**A**	**B**	**A**
$i=0$	x_i	0	0	0	0	0	0	0
	A	0	0	0	0	1	1	1
	B	0	1	1	1	1	2	2
	C	0	1	1	2	2	2	2
	B	0	1	1	2	2	3	3
	D	0	1	2	2	2	3	3
	A	0	1	2	2	3	3	4
	B	0	1	2	2	3	4	4

$j=0$

- 计算*LCS*长度的算法
  - 数据结构

    C[0:m,0:n]: *C[i,j]*是X_i与Y_j的*LCS*的长度

    B[1:m,1:n]: *B[i,j]*记录优化解的信息

记录优化解信息

- $C[i, j] = 0, \ i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1, \ x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j]), x_i \neq y_j$

	y_j	B	D	C	A	B	A
$i=0$ x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

$j=0$

LCS-length(X, Y)
$m \leftarrow$length(X); $n \leftarrow$length(Y);
For $i \leftarrow 0$ To m Do
    $C[i,0] \leftarrow 0$;
For $j \leftarrow 1$ To n Do
    $C[0,j] \leftarrow 0$;
For $i \leftarrow 1$ To m Do
    For $j \leftarrow 1$ To n Do
        If $x_i = y_j$
        Then $C[i,j] \leftarrow C[i-1,j-1]+1$;
            $B[i,j] \leftarrow$ "↖";
        Else If $C[i-1,j] \geq C[i,j-1]$
            Then $C[i,j] \leftarrow C[i-1,j]$;
                $B[i,j] \leftarrow$ "↑";
            Else $C[i,j] \leftarrow C[i,j-1]$;
                $B[i,j] \leftarrow$ "←";
Return C and B.

- $C[i, j] = 0$, $i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$, $x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j])$, $x_i \neq y_j$

$C[0,0]$	$C[0,1]$	$C[0,2]$	$C[0,3]$	$C[0,4]$
$C[1,0]$	$C[1,1]$	$C[1,2]$	$C[1,3]$	$C[1,4]$
$C[2,0]$	$C[2,1]$	$C[2,2]$	$C[2,3]$	$C[2,4]$
$C[3,0]$	$C[3,1]$	$C[3,2]$	$C[3,3]$	$C[3,4]$

	y_j	B	D	C	A	B	A
x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

.AB

构造优化解

- 基本思想
  - 从$B[m, n]$开始按指针搜索
  - 若$B[i, j]$=“↖”，则$x_i=y_j$是LCS的一个元素
  - 如此找到的“LCS”是X与Y的LCS的$Inverse$

	y_j	B	D	C	A	B	A
x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

Print-LCS(*B*, *X*, *i*, *j*)
If $i=0$ or $j=0$ **Then Return;**
If *B[i, j]*=“↖”
Then Print-LCS(*B*, *X*, *i-1*, *j-1*); Print x_i;
Else
If *B[i, j]*=“↑”
Then Print-LCS(*B*, *X*, *i-1*, *j*);
Else Print-LCS(*B*, *X*, *i*, *j-1*).

Print-LCS(*B*, *X*, *n*, *m*)
可打印出*X*与*Y*的*LCS*
n=length(*X*)
m=length(*Y*)

算法复杂性

```
LCS-length(X, Y)
m←length(X);  n←length(Y);
For  i←0  To  m  Do
        C[i,0]←0;
For  j←1  To  n  Do
        C[0,j]←0;
For  i←1  To  m  Do
    For  j←1  To  n  Do
        If  x_i = y_j
        Then C[i,j]←C[i-1,j-1]+1;
                B[i,j]←"↖";
        Else If C[i-1,j]≥C[i,j-1]
              Then C[i,j]←C[i-1,j];
                      B[i,j]←"↑";
              Else C[i,j]←C[i,j-1];
                      B[i,j]←"←";
  Return C and B.
```

	y_j	**B**	**D**	**C**	**A**	**B**	**A**
x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - (i, j)两层循环
    - $O(mn)$
  - 构造最优解的时间：$O(m+n)$
  - 总时间复杂性为：$O(mn)$
- 空间复杂性
  - 使用数组C和B
  - 需要空间$O(mn)$
- 空间优化策略

4.4 0/1 Knapsack Problem

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解代价的递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

问题的定义

给定n种物品和一个背包，物品i的重量是w_i，价值v_i，背包承重为C，问如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品的总价值最大？

对于每种物品只能选择完全装入或不装入，一个物品至多装入一次。

假设C, w_i, v_i均为正整数

问题的定义

- 输入：$C>0, w_i>0, v_i>0, 1\leq i \leq n$
- 输出：$(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i\in\{0, 1\}$, 满足
  $\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i x_i \leq C$, $\Sigma_{1\leq i\leq n} v_i x_i$ 最大

Naïve方法：

每个物品有两种选择：1(装)或0(不装)

n个物品共2^n个装取方案

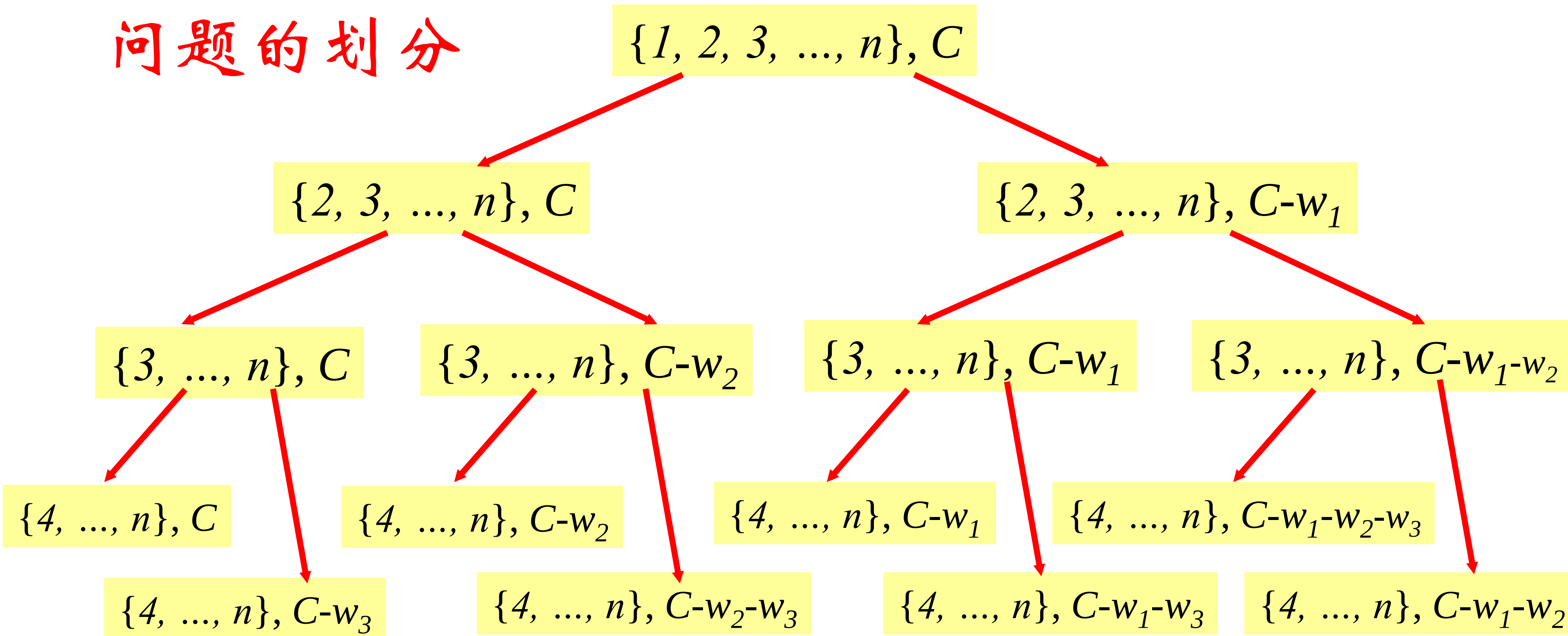
每个装取方案的计算代价为n

总计算代价为$O(n2^n)$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

子问题重叠性

问题的划分



当w_i皆为1时，存在大量重叠子问题

问题优化子结构

问题的划分

$$P_2: \max \sum_{2\le i\le n} v_i x_i$$
$$\sum_{2\le i\le n} w_i x_i \le C - w_1 x_1$$
$$x_i \in \{0, 1\},\ 2\le i\le n$$

$\{1, 2, 3, \ldots, n\}, C$

$\{2, 3, \ldots, n\}, C$ $\{2, 3, \ldots, n\}, C\text{-}w_1$

$\{3, \ldots, n\}, C$ $\{3, \ldots, n\}, C\text{-}w_2$ $\{3, \ldots, n\}, C\text{-}w_1$ $\{3, \ldots, n\}, C\text{-}w_1\text{-}w_2$

$\{4, \ldots, n\}, C$ $\{4, \ldots$ $C\text{-}w_1\text{-}w_2\text{-}w_3$

$\{4, \ldots, n\}, C\text{-}w_3$ $\{4, \ldots, n\}, C\text{-}w_1\text{-}w_2$

P_i: $\{i, i+1, \ldots, n\}, C - \sum_{1\le k\le i-1} w_k x_k$
$$\max \sum_{i\le k\le n} v_k x_k$$
$$\sum_{i\le k\le n} w_k x_k \le C_i = C - \sum_{1\le k\le i-1} w_k x_k$$
$$x_k \in \{0, 1\},\ i\le k\le n$$

优化解结构的分析

定理 如果$S_i=(y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$是0-1背包子问题$P_i=[\{i, i+1, \ldots, n\}, C_i=C-\sum_{1\le k\le i-1} w_k y_k]$的优化解，则$(y_{i+1}, \ldots, y_n)$是如下子问题$P_{i+1}$的优化解：

$$\max \sum_{i+1\le k\le n} v_k x_k$$

$$\sum_{i+1\le k\le n} w_k x_k \le C_i - w_i y_i$$

$$x_k \in \{0, 1\},\ i+1\le k\le n$$

证明： 如果$S_{i+1}=(y_{i+1}, \ldots, y_n)$不是子问题$P_{i+1}$的优化解，则存在$S'_{i+1}=(z_{i+1}, \ldots, z_n)$是$P_{i+1}$的更优解。$S'_i=(y_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)$是问题$P_i$之比$S_i$更优的解，与$S_i$优化矛盾。

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价记录优化解的构造信息
- 构造优化解

- 定义代价矩阵***m***

  矩阵元素$m(i, j)$表示子问题$[(i, i+1, \ldots, n), j]$的优化解$(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$的代价，$\mathbf{m(i, j)= \Sigma_{i\le k\le n} v_k x_k}$

- 形式地

  问题 $$\max \Sigma_{i\le k\le n} v_k x_k$$

  $$\Sigma_{i\le k\le n} w_k x_k \le j$$

  $$x_k \in \{0, 1\},\ i\le k \le n$$

  的最优解代价为$m(i, j)=\Sigma_{i\le k\le n} v_k x_k$.

- 递归方程：

总结：

$$m(n,j) = 0, \quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n,j) = v_n, \quad j \ge w_n$$
$$m(i,j) = m(i+1,j), 0 \le j < w_i$$
$$m(i,j) = \max\{m(i+1,j), m(i+1,j-w_i)+v_i\}, \ j \ge w_i$$

$j \le w_n,$

$$m(n,j) = v_n$$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- **递归地划分子问题**
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

HITWH
SE

$$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ \ j \ge w_i$$
$$m(n, j) = 0,\ \ \ 0 \le j < w_n$$
$$m(n, j) = v_n,\ \ \ j \ge w_n$$

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

令n=4，w_i=整数

$m(1,C)$

$m(2,C-w_1)$ … $m(2,C)$

… $m(3, C-w_1-w_2)$ … $m(3,C-w_1)$ … $m(3,C-w_2)$ … $m(3,C)$

… $m(4, C-w_2-w_3)$ … $m(4,C-w_2)$ … $m(4,C-w_3)$ … $m(4,C)$

$$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ \ j \ge w_i$$
$$m(n, j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n, j) = v_n,\quad j \ge w_n$$

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

令n=4，w_i=整数

						$m(1,C)$
$m(2, 0)$	$\cdots$	$m(2,w_2-1)$	$m(2, w_2)$	$\cdots$	$m(2,C-1)$	$m(2,C)$
$m(3, 0)$	$\cdots$	$m(3,w_3-1)$	$m(3, w_3)$	$\cdots$	$m(3,C-1)$	$m(3,C)$
$m(4, 0)$	$\cdots$	$m(4,w_4-1)$	$m(4, w_4)$	$\cdots$	$m(4,C-1)$	$m(4,C)$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- **自底向上计算优化解的代价**
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

$$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ \ j \ge w_i$$
$$m(n, j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n, j) = v_n,\quad j \ge w_n$$

令w_i=整数, $n=4$

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

$m(1,C)$

$m(2, 0)$	…	$m(2,w_2-1)$	$m(2, w_2)$	…	$m(2,C-1)$	$m(2,C)$
$m(3, 0)$	…	$m(3,w_3-1)$	$m(3, w_3)$	…	$m(3,C-1)$	$m(3,C)$
$m(4, 0)$	…	$m(4,w_4-1)$	$m(4, w_4)$	…	$m(4,C-1)$	$m(4,C)$

• 算法

(设 w_i-1<C)

$$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ \ j \ge w_i$$
$$m(n, j) = 0,\ \ \ 0 \le j < w_n$$
$$m(n, j) = v_n,\ \ \ j \ge w_n$$

						$m(1,C)$
$m(2, 0)$	…	$m(2,w_2-1)$	$m(2, w_2)$	…	$m(2,C-1)$	$m(2,C)$
$m(3, 0)$	…	$m(3,w_3-1)$	$m(3, w_3)$	…	$m(3,C-1)$	$m(3,C)$
$m(4, 0)$	…	$m(4,w_4-1)$	$m(4, w_4)$	…	$m(4,C-1)$	$m(4,C)$

For $j=0$ To w_n-1 Do
    $m[n, j] = 0;$
For $j=w_n$ To C Do
    $m[n, j] = v_n;$
For $i=n-1$ To 2 Do
    For $j=0$ To w_i-1 Do
        $m[i, j] = m[i+1, j];$
    For $j=w_i$ To C Do
        $m[i, j]=\max\{m[i+1, j], m[i+1, j-w_i]+v_i\};$
If $C<w_1$ Then $m[1, C]=m[2, C];$
    Else $m[1, C]=\max\{m[2, C], m[2, C-w_1]+v_1\};$

For $j=0$ To $\min(w_n\text{-}1, C)$ Do

$m[n, j] = 0$;

For $j=w_n$ To C Do

$m[n, j] = v_n$;

For $i=n\text{-}1$ To 2 Do

For $j=0$ To $\min(w_i\text{-}1, C)$ Do

$m[i, j] = m[i+1, j]$;

For $j=w_i$ To C Do

$m[i, j]=\max\{m[i+1, j], m[i+1, j\text{-}w_i]+v_i\}$;

If $C<w_1$ Then $m[1, C]=m[2, C]$;

Else $m[1, C]=\max\{m[2, C], m[2, C\text{-}w_1]+v_1\}$;

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价记录优化解的构造信息
- 构造优化解

构造优化解

1. $m(1, C)$是最优解代价值，相应解计算如下：

If $m(1, C) = m(2, C)$

Then $x_1 = 0$;

Else $x_1 = 1$;

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

2. 如果 $x_1=0$，由$m(2, C)$继续构造最优解；

3. 如果 $x_1=1$，由$m(2, C-w_1)$继续构造最优解.

$m(1,C)$

$m(2,C-w_1)$ … $m(2,C)$

$m(3, C-w_1-w_2)$ $m(3,C-w_1)$ $m(3,C-w_2)$ … $m(3,C)$

… $m(4, C-w_2-w_3)$ … $m(4,C-w_2)$ $m(4,C-w_3)$ $m(4,C)$

算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价时间
    - $O(Cn)$
  - 构造最优解时间：$O(n)$
  - 总时间复杂性为：$O(Cn)$
- 空间复杂性
  - 使用数组m
  - 需要空间$O(Cn)$

For $j=0$ To $\min(w_n-1, C)$ Do
　　$m[n, j] = 0;$
For $j=w_n$ To C Do
　　$m[n, j] = v_n;$
For $i=n-1$ To 2 Do
　　For $j=0$ To $\min(w_i-1, C)$ Do

If

};

这是一个伪多项式算法！

当$C=2^n$时：

$T(n)=O(n2^n)$

当w_i不限定为正整数时：

可以设计分治算法，

$T(n)=O(2^n)$

3. If $x_1=1$，由$m(2, C-w_1)$继续构造x_2;

……

©

部分背包问题?

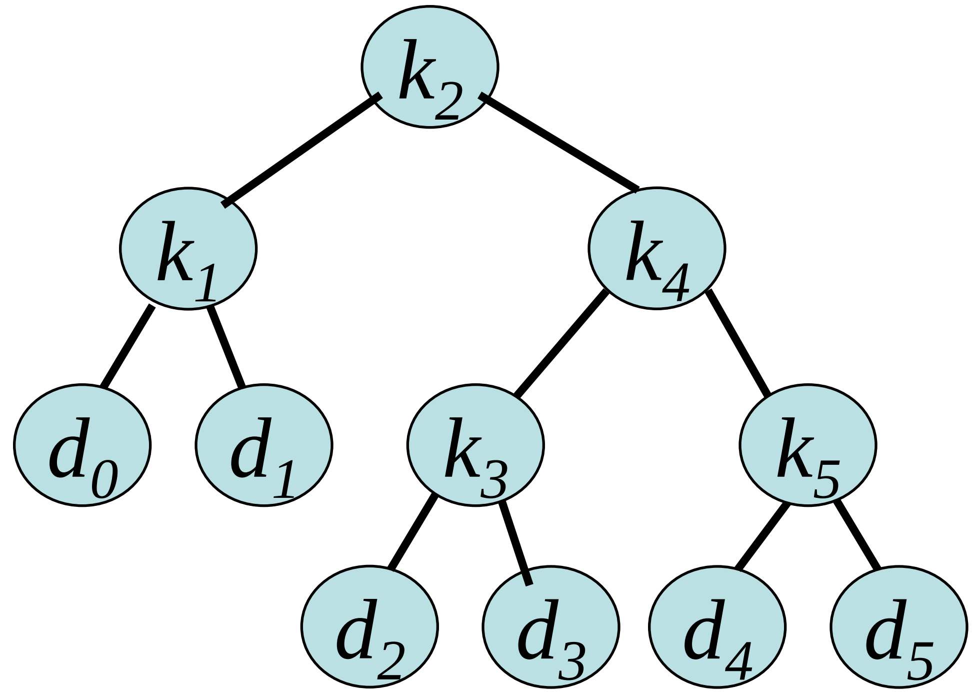
4.5 The Optimal Binary Search Trees

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解代价的递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

问题的定义

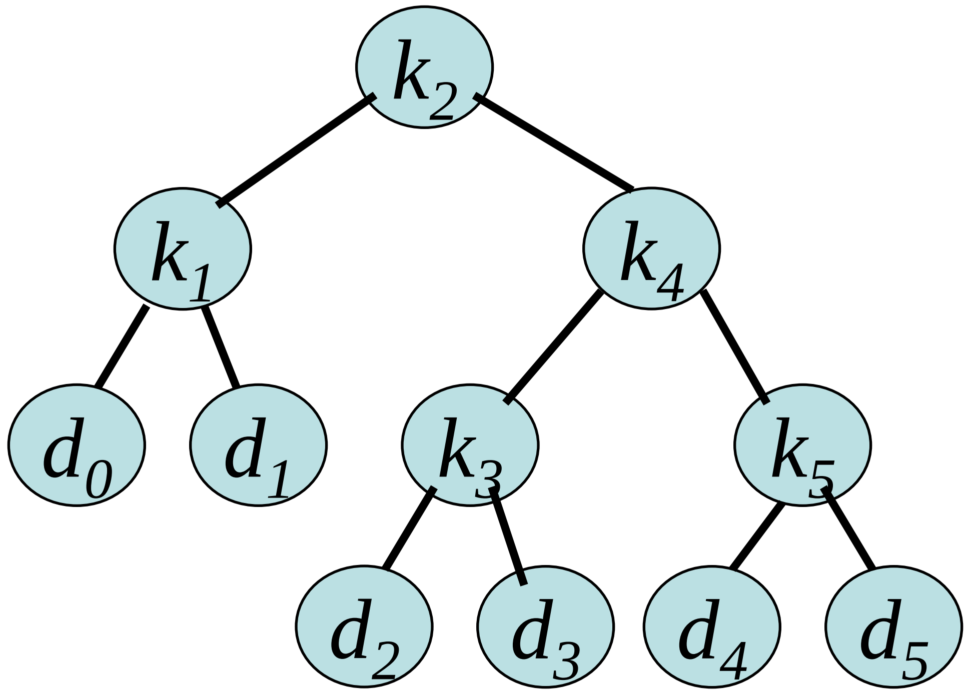
- 二叉搜索树 T
  - 结点
    - $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$
    - $D=\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$
    - d_i对应区间(k_i, k_{i+1})
      d_0对应区间$(-\infty, k_1)$
      d_n对应区间$(k_n, +\infty)$
  - 附加信息
    - 搜索k_i的概率为p_i
    - 搜索d_i的概率为q_i

顺序：$d_0, k_1, d_1, k_2, d_2, \ldots, k_n, d_n$



$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=0}^{n} q_j = 1$$

- 搜索树的期望代价(用检查树顶点的个数衡量)



$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i+\sum_{i=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

- 问题的定义

输入：$K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}, k_1< k_2< \ldots < k_n,$

$P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, p_i$为搜索$k_i$的概率

$Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}, q_i$为搜索值$d_i$的概率

输出：构造K的二叉搜索树T，最小化

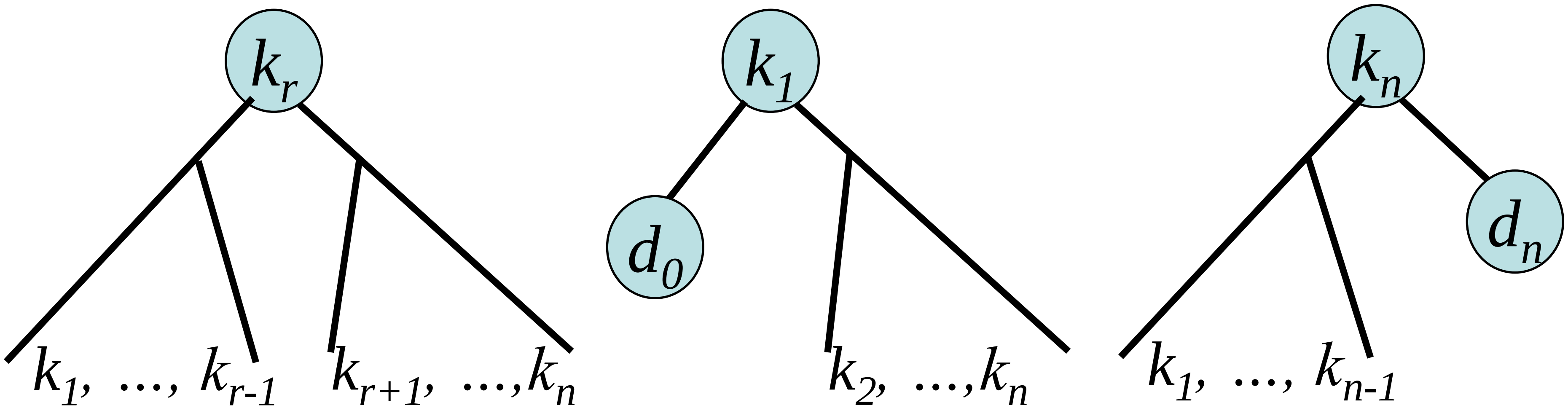
$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i+\sum_{i=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

优化二叉搜索树结构的分析

- 优化解的结构观察

  $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$的优化解的根必为$K$中某个$k_r$



如果$r=1$, 左子树仅包含d_0

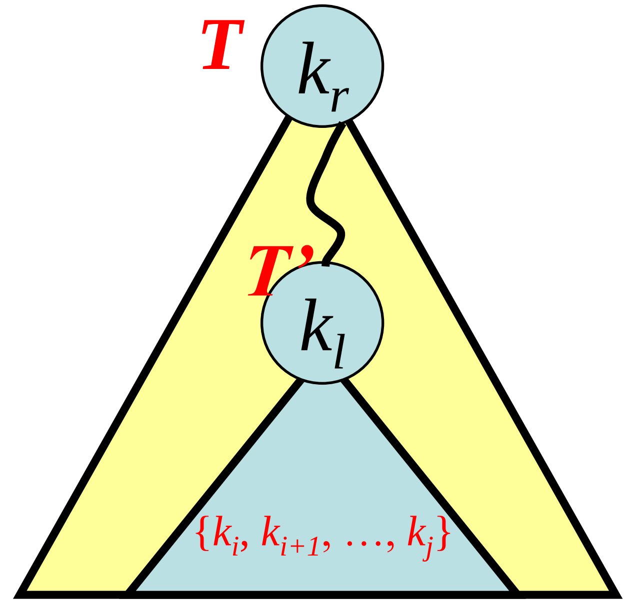
如果$r=n$, 右子树仅包含d_n

$$E_{T'}(T)=\sum_{x=i}^{j}(DEP_T(k_x)+1)p_x+\sum_{x=i-1}^{j}(DEP_T(d_x)+1)q_x$$

$$=\underbrace{\sum_{x=i}^{j}(DEP_{T'}(k_x)+1)p_x+\sum_{x=i-1}^{j}(DEP_{T'}(d_x)+1)q_x}_{E(T')}+\underbrace{(DEP_T(k_l)-DEP_{T'}(k_l))(\sum_{x=i}^{j}p_x+\sum_{x=i-1}^{j}q_x)}_{\text{与}T'\text{无关的常量}}$$

- 优化子结构

定理. 如果优化二叉搜索树T具有包含关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子树$T'$，则$T'$是关于关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子问题的优化解.

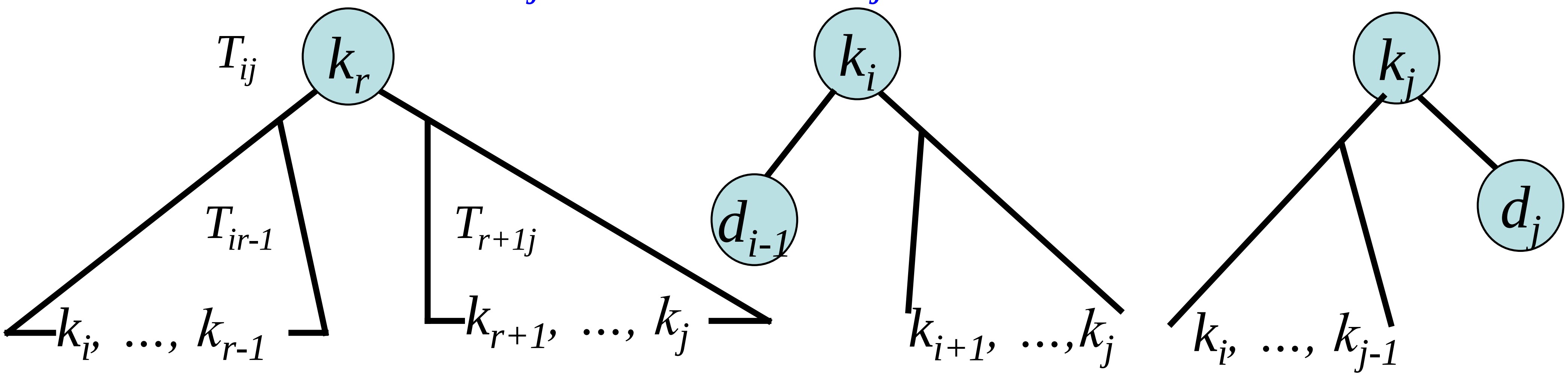


证明： 若不然，必有关键字集$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$子树$T''$，$T''$的期望搜索代价低于$T'$.

用T''替换T中的T'，可以得到一个期望搜索代价比T小的原始问题的二叉搜索树。与T是最优解矛盾.

- 用优化子结构从子问题优化解构造优化解

$K=\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的优化解$T_{ij}$的根必为$K$中某个$k_r$

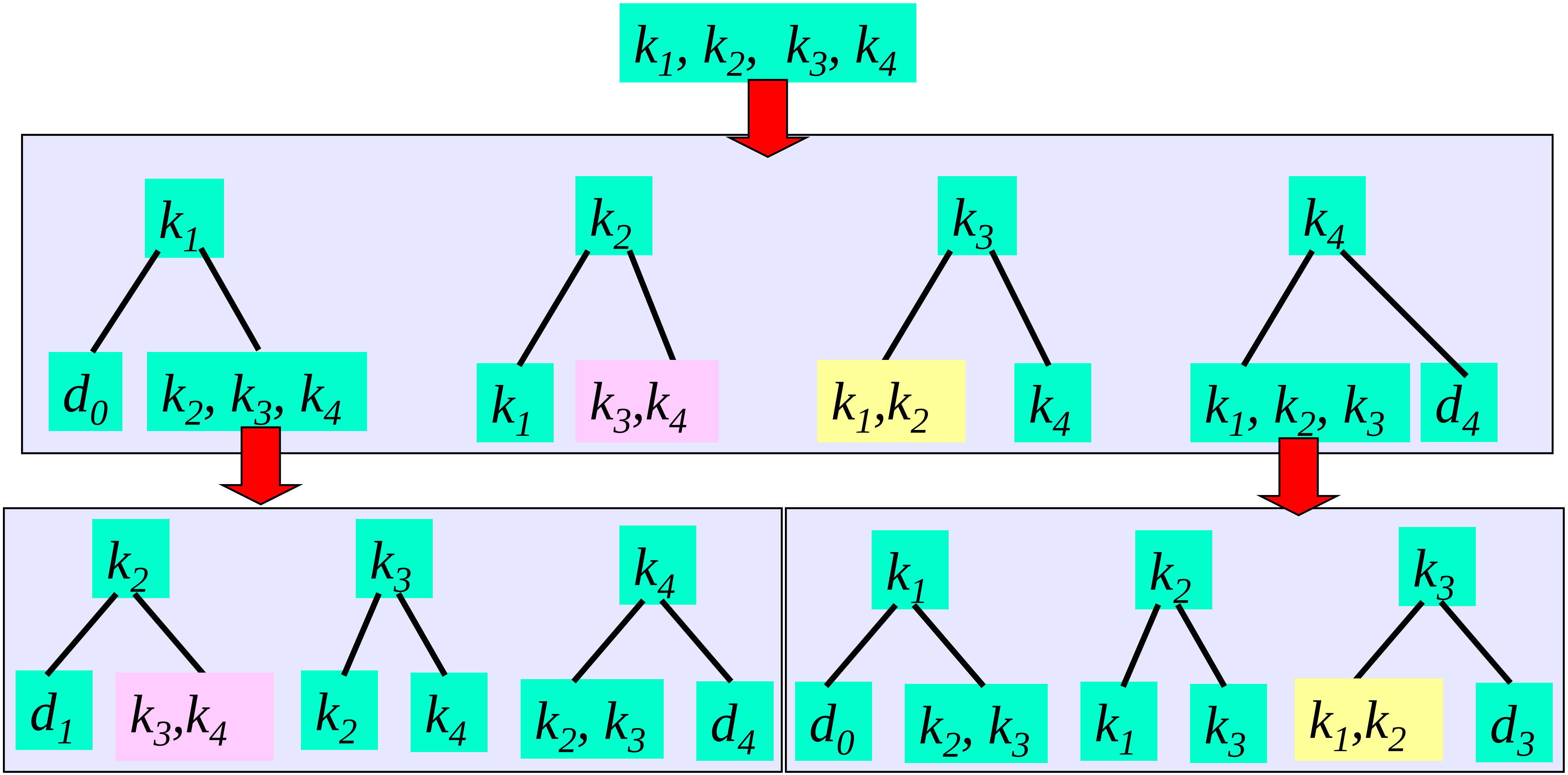


只要对于每个$k_r \in K$，确定$\{k_i, \ldots, k_{r-1}\}$和$\{k_{r+1}, \ldots, k_j\}$的优化解，我们就可以求出K的优化解.

如果$r=i$，左子树$T_{ii-1}=\{k_i, \ldots, k_{i-1}\}$仅包含$d_{i-1}$

如果$r=j$，右子树$T_{j+1j}=\{k_{j+1}, \ldots, k_j\}$仅包含$d_j$

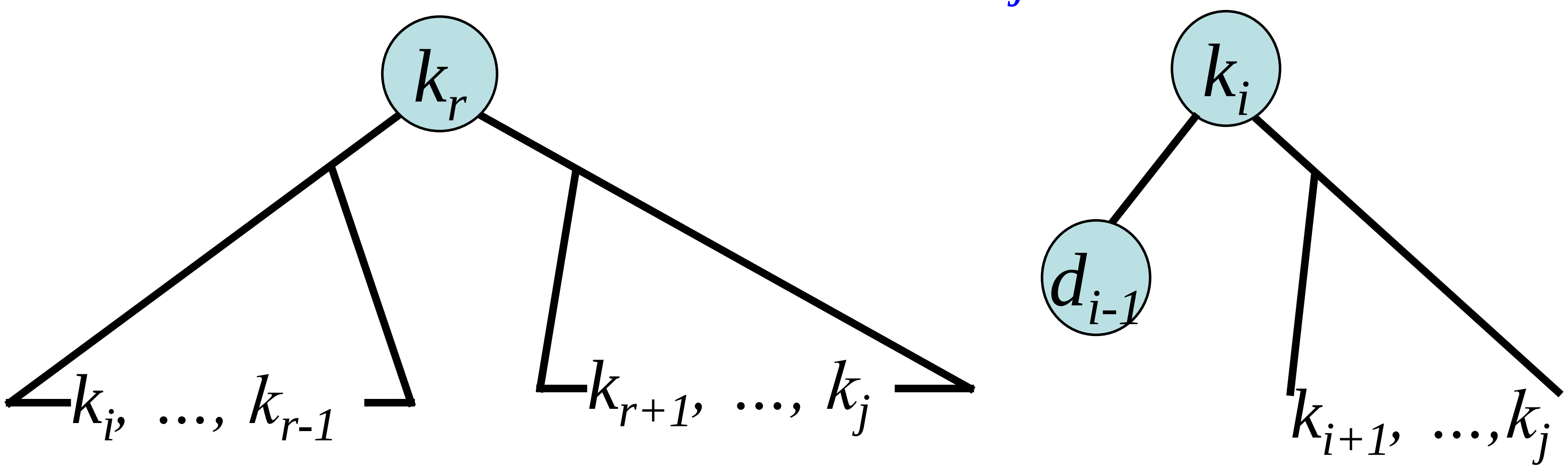
子问题重叠性


k_1, k_2, k_3, k_4
k_1
d_0
k_2, k_3, k_4
k_2
k_1
k_3,k_4
k_3
k_1,k_2
k_4
k_4
k_1, k_2, k_3
d_4
k_2
d_1
k_3,k_4
k_3
k_2
k_4
k_4
k_2, k_3
d_4
k_1
d_0
k_2, k_3
k_2
k_1
k_3
k_3
k_1,k_2
d_3

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

建立优化解的搜索代价递归方程

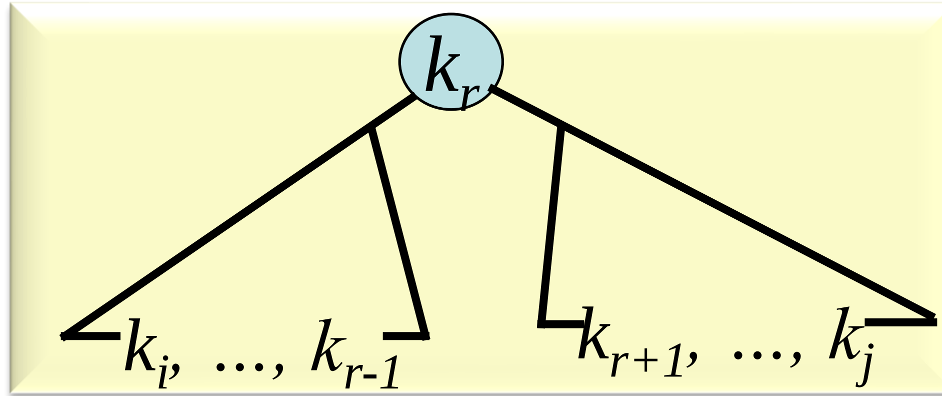
- 令$E(i, j)$为$\{k_i, \dots, k_j\}$的优化解T_{ij}的期望搜索代价
  - 当$j=i-1$时，T_{ij}中只有叶结点d_{i-1}, $E(i, i-1)=q_{i-1}$
  - 当$j \geq i$时，选择一个$k_r \in \{k_i, \dots, k_j\}$:



当把左右优化子树放进T_{ij}时，每个结点的深度增加1

$$E(i, j)=P_r + E(i, r-1) + W(i, r-1) + E(r+1, j) + W(r+1, j)$$

HITWH
SE



- 计算$W(i, r\text{-}1)$和$W(r+1, j)$

由 $E(LT+1)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{左}(k_l)+2)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{左}(d_l)+2)q_l$

$$E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{左}(k_l)+1)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{左}(d_l)+1)q_l$$

知 $W(i,r-1)=E(LT+1)-E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}q_l$

同理, $W(r+1,j)=\sum_{l=r+1}^{j}p_l+\sum_{l=r}^{j}q_l$

令 $W(i, j)=W(i, r\text{-}1) + W(r+1, j) + p_r=\sum_{l=i}^{j}p_l+\sum_{l=i-1}^{j}q_l=W(i, j\text{-}1)+p_j+q_j$

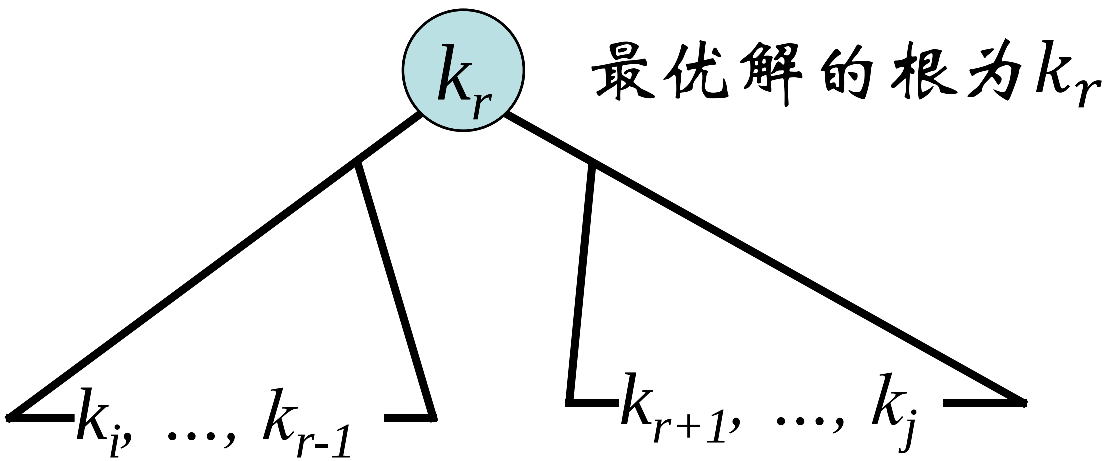
由$W(i,r-1)=\sum_{l=i}^{r-1}p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}q_l$ ， $W(i, i\text{-}1)=q_{i-1}$

$$W(i, i\text{-}1) = q_{i-1}$$

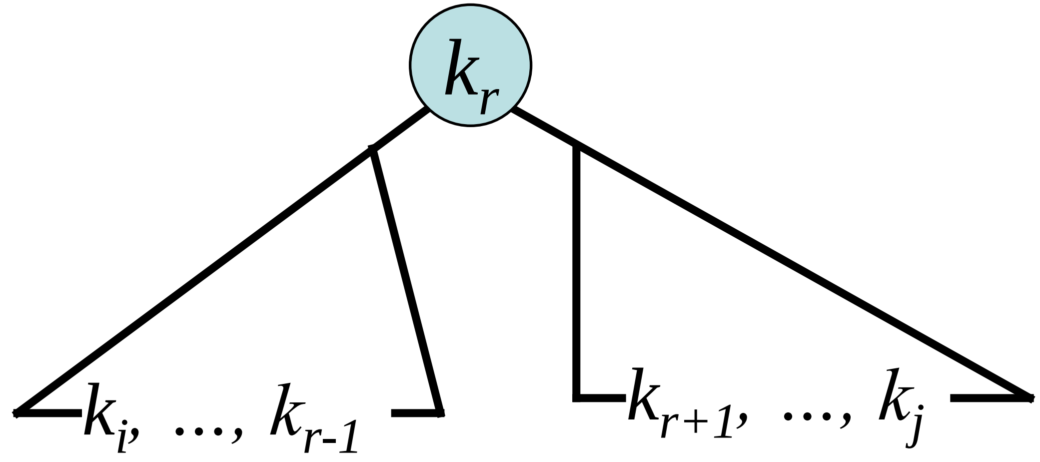
$$W(i, j) = W(i, r\text{-}1) + W(r+1, j) + p_r = W(i, j\text{-}1) + p_j + q_j$$

$$E(i, i\text{-}1) = q_{i-1}$$

$$E(i, j) = P_r + E(i, r\text{-}1) + W(i, r\text{-}1) + E(r+1, j) + W(r+1, j)$$



$$E(i, j) = E(i, r\text{-}1) + E(r+1, j) + W(i, j)$$



总之

$$W(i, i\text{-}1) = q_{i-1},$$
$$W(i, j) = W(i, j\text{-}1) + p_j + q_j$$

$$E(i, i\text{-}1)=q_{i-1}$$
$$E(i, j)=\min_{i \le r \le j}\{E(i,r\text{-}1)+E(r+1,j)+W(i, j)\} \quad If\ j \ge i$$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- **递归地划分子问题**
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

递归划分子问题

$$E(i, j)=q_{i-1} \quad \text{If } j=i-1$$

$$E(i, j)=\min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\} \quad \text{If } j\ge i$$

$E(i,i-1)$	$E(i,i)$	……	$E(i,j-1)$	$E(i, j)$
				$E(i+1, j)$
				$E(i+2, j)$
				……
				$E(j+1, j)$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- **自底向上计算优化解的代价记录优化解的构造信息**
- 构造优化解

自下而上计算优化解的代价

$$E(i,j)=q_{i-1} \quad \text{If } j=i-1$$

$$E(i,j)=\min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i,j)\} \quad \text{If } j\ge i$$

q_0 =	$E(1,0)$	$E(1,1)$	$E(1,2)$	$E(1,3)$	$E(1,4)$
	q_1 =	$E(2,1)$	$E(2,2)$	$E(2,3)$	$E(2,4)$
		q_2 =	$E(3,2)$	$E(3,3)$	$E(3,4)$
			q_3 =	$E(4,3)$	$E(4,4)$
				q_4 =	$E(5,4)$

- $W(i, i\text{-}1) = q_{i\text{-}1},\quad W(i, j) = W(i, j\text{-}1) + p_j + q_j$

$W(i, j\text{-}1)$	$W(i, j)$

$q_0 =$	$W(1,0)$	$W(1,1)$	$W(1,2)$	$W(1,3)$	$W(1,4)$
	$q_1 =$	$W(2,1)$	$W(2,2)$	$W(2,3)$	$W(2,4)$
		$q_2 =$	$W(3,2)$	$W(3,3)$	$W(3,4)$
			$q_3 =$	$W(4,3)$	$W(4,4)$
				$q_4 =$	$W(5,4)$

- 算法
  - 数据结构
    - $E[1:n+1;\ 0:n]$: 存储优化解搜索代价
    - $W[1: n+1;\ 0:n]$: 存储代价增量
    - $Root[1:n; 1:n]$: $Root(i, j)$记录子问题 $\{k_i, \ldots, k_j\}$优化解的根

$E(i, j)=q_{i-1}$ If $j=i-1$

$E(i, j)=\min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$ If $j\ge i$

$W(i, i-1) = q_{i-1},\quad W(i, j) = W(i, j-1) + p_j + q_j$

$E(1,0)$	$E(1,1)$	$E(1,2)$	$E(1,3)$	$E(1,4)$
	$E(2,1)$	$E(2,2)$	$E(2,3)$	$E(2,4)$
		$E(3,2)$	$E(3,3)$	$E(3,4)$
			$E(4,3)$	$E(4,4)$
				$E(5,4)$

Optimal-BST(p, q, n)

For $i=1$ To $n+1$ Do

  $E(i, i-1) = q_{i-1}$; $W(i, i-1) = q_{i-1}$;

For $l=1$ To n Do

  For $i=1$ To $n-l+1$ Do

    $j=i+l-1$;

    $E(i, j)=\infty$;

    $W(i, j)=W(i, j-1)+p_j+q_j$;

    For $r=i$ *To* j Do

      $t=E(i, r-1)+E(r+1, j)+W(i, j)$;

      If $t<E(i, j)$

      Then $E(i, j)=t$; $Root(i, j)=r$;

Return E and $Root$

算法的复杂性

- 时间复杂性
  - (l, i, r)三层循环，每层循环至多n步
  - 时间复杂性为$O(n^3)$
- 空间复杂性
  - 二个$(n+1)\times(n+1)$数组，一个$n\times n$数组
  - $O(n^2)$

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

思考：完成优化解的构造算法

Optimal-BST(p, q, n)

For $i=1$ To $n+1$ Do

$E(i, i\text{-}1) = q_{i\text{-}1}$; $W(i, i\text{-}1) = q_{i\text{-}1}$;

For $l=1$ To n Do

For $i=1$ To $n\text{-}l+1$ Do

$j=i+l\text{-}1;$

$E(i, j)=\infty;$

$W(i, j)=W(i, j\text{-}1)+p_j+q_j;$

For $r=i$ *To* j Do

$t=E(i, r\text{-}1)+E(r+1, j)+W(i, j);$

If $t<E(i, j)$

Then $E(i, j)=t;$ $Root(i, j)=r;$

Return E and $Root$

使用递归

```
Extend(Root, n)
(i, j) ← n.range;
If i > j
    n.label ← d_j;
    Return;
n.Label ← k_{Root[i,j]};
L ← Root[i, j];
Initiate node lc;
lc.range ← (i, L-1);
n.leftChild ← lc;
Initiate node rc;
rc.range ← (L+1, j);
n.rightChild ← rc;
Extend(Root, lc);
Extend(Root, rc);
```

```
Construct-BST(Root)
Initiate an empty Tree T;
# ← Root.size;
Initiate node r;
r.range ← (1, #);
T.Root ← r;
Extend(Root, r);
Return T;
```

```
Node{
range;      // range of keys
label;      // k_i or d_j
leftChild;
rightChild; }
```

使用栈

```
Construct-BST(Root)
# ← Root.size;
Initiate node r;
r.range ← (1, #);
Stack S ← Ø;
S.push(r);
While S ≠ Ø
    n = S.pop();
    (i, j) ← n.range;
    If i > j
        n.label ← d_j;
        continue;
    L ← Root[i, j];
    n.Label ← k_L;
    Initiate node lc;
    lc.range ← (i, L-1);
    n.leftChild ← lc;
    Initiate node rc;
    rc.range ← (L+1, j);
    n.rightChild ← rc;
    S.push(lc);
    S.push(rc);
Initiate an empty Tree T;
T.root ← r;
Return T;
```

Node{
range; // range of keys
label; // k_i or d_j
leftChild;
rightChild; }

打印T

Print-BST(Root, i, j)
If i > j
    Print d_j;
    Return;
L ← Root[i, j];
Print (;
Print-BST(Root, i, L-1);
Print) ;
Print $k_{Root[i,j]}$;
Print (;
Print-BST(Root, L+1, j);
Print) ;

打印BST的语句：
Print-BST(Root, 1, Root.size);

总结

- 原始问题可以划分成一系列子问题，子问题之间不是相互独立的
- 不同子问题的数目常常只有多项式量级
- 优化子结构

总结

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解