

## 算法设计与分析第二次作业

1. 对于两个二维数据元素 $p = (x_p, y_p)$ 和 $q = (x_q, y_q)$ , 如果(1)  $x_p \geq x_q, y_p > y_q$  或者 (2)  $x_p > x_q, y_p \geq y_q$ , 则 $p$ 支配 $q$ , 记为 $p \rightarrow q$ 。二维数据集 $D$ 的Skyline定义如下:  $SKL(D) = \{p | p \in D, \nexists q \in D, q \rightarrow p\}$ 。设计基于分治的二维数据 Skyline 求解算法。  
请写出 (1) 算法设计的思路, 包括边界条件、Divide、Conquer 和 Merge 的基本过程; (2) 算法的伪代码; (3) 算法的时间复杂度。
2. 如果一个数组  $A[1..n]$  中某个元素的数量超过其元素数量的一半, 称其包含主元素, 假设比较两个元素大小的时间不是常数但判定两个元素是否相等的时间是常数, 要求对于给定数组  $A$ , 设计算法判定其是否有主元素, 如果有, 找到该元素。
  - 1) 设计时间复杂性为  $O(n \log n)$  的算法完成该任务, 并给出所设计算法的时间复杂度分析和正确性分析。
  - 2) 设计时间复杂性为  $O(n)$  的算法完成该任务, 并给出所设计算法的时间复杂度分析和正确性分析。
3. 证明: 在有  $n$  个数的序列中找出最大的数至少需要  $n-1$  次比较
4. 证明: 对于任何只基于比较的查找算法, 二分查找是最优的。
5. 设计一个对 7 个元素进行排序的方法, 保证其平均比较次数最少, 要求证明这个结论。
6. 有  $n$  个大小不同的杯子和与之匹配的  $n$  个杯盖, 你可以尝试一个杯子和一个杯盖是否匹配, 尝试结果有三种: (1) 杯子太大; (2) 匹配成功; (3) 杯盖太大. 除此之外, 无法直接比较杯子与杯子之间的大小关系, 也无法直接比较杯盖和杯盖之间的大小关系. 请设计一个分治算法完成所有杯子和杯盖的匹配, 算法的时间复杂性用匹配尝试的次数来衡量。  
请写出 (1) 算法设计的思路, 包括边界条件、Divide、Conquer 和 Merge 的基本过程; (2) 算法的伪代码; (3) 算法的时间复杂度。
7.  $X[0:n-1]$  和  $Y[0:n-1]$  为两个数组, 每个数组中的  $n$  个元素都已经从小到大排序, 试设计一个  $O(\log n)$  的分 (减) 治算法, 找出  $X$  和  $Y$  中  $2n$  个数的中位数。(注:  $2n$  个数的中位数是排序后第  $n$  个和第  $n+1$  个数)  
请写出 (1) 叙述算法设计思路; (2) 写出算法伪代码; (3) 分析算法的时间复杂性。