root が $\wedge$ の 3 分木 T を考える.

root の子を左から a, b, c とする,

この時,$d_0(a) = a_0,\ d_1(a) = a$ と表す.b, c も同様にして定める.

	アルゴリズム	コスト		
重み	探索する順番	$(a,b,c) = (0,1,1)$	(1,0,1)	(1,1,0)
p_1	a, b, c	a_0	$a + b_0$	$a + b + c_0$
p_2	b, c, a	$a_0 + b + c$	b_0	$b + c_0$
p_3	c, a, b	$a_0 + c$	$a + b_0 + c$	c_0
p_4	b, a, c	$a_0 + b$	b_0	$a + b + c_0$
p_5	a, c, b	a_0	$a + b_0 + c$	$a + c_0$
p_6	c, b, a	$a_0 + b + c$	$b_0 + c$	c_0

$(a,b,c) = (0,1,1)$ である時のコストを W_{011}, 他同様にして W_{101}, W_{110} とすると,

$$\mathrm{W}_{011} = a_0 + (b+c)p_2 + cp_3 + bp_4 + (b+c)p_6 \qquad (1.1)$$
$$\mathrm{W}_{101} = ap_1 + b_0 + (a+c)p_3 + (a+c)p_5 + cp_6 \qquad (1.2)$$
$$\mathrm{W}_{110} = (a+b)p_1 + bp_2 + c_0 + (a+b)p_4 + ap_5 \qquad (1.3)$$

ここで、$a_0 = b_0 = c_0$ かつ $a = b = c$ のときは $d_0(T) = \Psi'$を示せている

proof

背理法で示す. 即ち, $\Psi' > d_0(T)$ となる様な, $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_6)$ が存在すると仮定.

この時, $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_6)$ の下での, $\mathrm{W}_{011}, \mathrm{W}_{101}, \mathrm{W}_{110}$ を ${\mathrm{W}_{011}}', {\mathrm{W}_{101}}', {\mathrm{W}_{110}}'$ と表すと,

以下のようになる.

${\mathrm{W}_{011}}' = a_0 + a + a(p'_2 + p'_6) - a(p'_1 + p'_5)$

${\mathrm{W}_{101}}' = a_0 + a + a(p'_3 + p'_5) - a(p'_2 + p'_4)$

${\mathrm{W}_{011}}' = a_0 + a + a(p'_1 + p'_4) - a(p'_3 + p'_6)$

この時, $\Psi' > d_0(T)$ より,

$$\Psi' > {\mathrm{W}_{011}}' \text{ かつ } \Psi' > {\mathrm{W}_{101}}' \text{ かつ } \Psi' > {\mathrm{W}_{110}}'.$$

であることに注意すると, $\Psi' > d_0(T)$ となる様な, $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_6)$ が存在する為の必要十分条件は,

$$(p'_1 + p'_5) > (p'_2 + p'_6) \text{ かつ } (p'_2 + p'_4) > (p'_3 + p'_5) \text{ かつ } (p'_3 + p'_6) > (p'_1 + p'_4).$$

一方,

$$\begin{gathered}(p'_1 + p'_5) + (p'_2 + p'_4) + (p'_3 + p'_6) > (p'_2 + p'_6) + (p'_3 + p'_5) + (p'_1 + p'_4) \\ p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6 > p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6 \\ 1 > 1\end{gathered}$$

これは矛盾.
よって, $d_0(T) = \Psi'$

次に、$a = b = c$ のとき、$d_0(T) = \Psi'$ を示す

$proof$
前回までに、$d_0^*(T)$ を

$d_0^*(T)$: W_{011}, W_{101}, W_{110} の 3 式が等しい RDA に限定した $d_0(T)$

と定義したとき、$d_0^*(T) = \Psi'$ は示せている
ここで、$d_0^*(T) = d_0(T)$ を示す
この等式を示すには、W_{011}, W_{101}, W_{110} の 3 式が等しくなるような RDA の存在を言えばいい

主張 1

$$\mathrm{W}_{011} = \mathrm{W}_{101} \Leftrightarrow p_2 = \frac{1}{a+b+c}\{-(a+b)p_4 + cp_5 - (a+b)p_6\} + \frac{1}{a+b+c}(b_0 + a - a_0)$$

主張 2

$$\mathrm{W}_{101} = \mathrm{W}_{110} \Leftrightarrow p_3 = \frac{1}{a+b+c}\{ap_4 - (b+c)p_5 - (b+c)p_6\} + \frac{1}{a+b+c}(c_0 + b - b_0)$$

主張 3

$\mathrm{W}_{011} = \mathrm{W}_{110} \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{a+b+c}\{-(a+c)p_4 - (a+c)p_5 + bp_6\} + \frac{1}{a+b+c}(a_0 + c - c_0)$

以上の主張より、

$p_1 = \frac{1}{3}\{-ap_4 - ap_5 + p_6\} + \frac{1}{3a}(a_0 + a - c_0)$

$p_2 = \frac{1}{3}\{-ap_4 + p_5 - ap_6\} + \frac{1}{3a}(b_0 + a - a_0)$

$p_3 = \frac{1}{3}\{p_4 - ap_5 - ap_6\} + \frac{1}{3a}(c_0 + a - b_0)$

を満たすように、$(p_1, \ldots, p_6)$ の組み合わせをとれば、$\mathrm{W}_{011} = \mathrm{W}_{101} = \mathrm{W}_{110}$ が成り立つため、W_{011}，W_{101}，W_{110} の 3 式が等しくなるような RDA の存在を言えた

以上から、$d_0^*(T) = d_0(T)$ を示せた。

よって $a = b = c$ のとき $d_0(T) = \Psi'$

$a_0 = b_0 = c_0$のとき $d_0(T) = \Psi'$を示す

$proof$

前回までの内容より、以下の主張 4 が言えており

主張 4

$\mathrm{W}_{011} = \mathrm{W}_{101} = \mathrm{W}_{110}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} -(a+c) & -(a+c) & b \\ -(a+b) & c & -(a+b) \\ a & -(b+c) & -(b+c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} + \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} a_0 + c - c_0 \\ b_0 + a - a_0 \\ c_0 + b - b_0 \end{pmatrix}$$

$a_0 = b_0 = c_0$ のとき、以下の主張 4’ が成り立つ

主張 4'

$\mathrm{W}_{011} = \mathrm{W}_{101} = \mathrm{W}_{110}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} -(a+c) & -(a+c) & b \\ -(a+b) & c & -(a+b) \\ a & -(b+c) & -(b+c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} + \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

ここで

$p_1 = \frac{1}{a+b+c}\{-(a+c)p_4 - (a+c)p_5 + bp_6\} + \frac{c}{a+b+c}$
$p_2 = \frac{1}{a+b+c}\{-(a+b)p_4 + cp_5 - (a+b)p_6\} + \frac{a}{a+b+c}$
$p_3 = \frac{1}{a+b+c}\{ap_4 - (b+c)p_5 - (b+c)p_6\} + \frac{b}{a+b+c}$

を満たすように $(p_1, \ldots, p_6)$ の組み合わせをとれば
$\mathrm{W}_{011} = \mathrm{W}_{101} = \mathrm{W}_{110}$ を満たし、
$a_0 = b_0 = c_0$のとき $d_0(T) = \Psi'$を示せた