n 分木の均衡値

栗田 亮也　 清水 泰良
（東京都立大学 理学研究科 数理科学専攻）

令和 3 年 5 月 10 日

1　定義

各ノードの子が n 個である木 T_n の部分木を左から $t_1,\ t_2, \cdots,\ t_n$
$root$ の値が 0 であるときの T_n の均衡値を $d_0(T_n)$ と表す
同様に $root$ の値が 1 であるときの T_n の均衡値を $d_1(T_n)$ と表す
$t_1,\ t_2, \cdots,\ t_n$ の $root$ が 0 をとるコストを左から、$a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$
$t_1,\ t_2, \cdots,\ t_n$ の $root$ が 1 をとるコストを左から、$b_1,\ b_2, \cdots,\ b_n$

t_i の値が 0 であるときの探索コストを $\mathrm{W_i}$ と表す
(それぞれの部分木は $r.d.a$ で最適なアルゴリズムで探索されるものとする)

調べ方は $n!$ 通りあり、それぞれの調べ方に対する重みを $p_1,\ p_2, \cdots,\ p_m \quad (m \ = \ n!)$ と表す

$r.d.a$ 全体の集合を $\mathcal{A}$

主結果を示すに、以下の関数を定義する

$$\Psi_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ + \sum_{i=1,j=1}^{n} b_i b_j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i} \quad (i \neq j)$$

2　本稿の主結果

定理

任意の整数 $i,\ j$ $(i \neq j,\ 1 \leqq i, j \leqq n)$ に対して、$a_i \leqq b_i + a_j$　かつ　$a_j \leqq a_i + b_j$ を満たすとき

$$d_0(T_n) \ = \ \Psi_n$$

これを示すために 2 分木から考察する

$\underline{n = 2}$

こちらに関しては、Saks-Wigderson が示しており

$$d_0(T_2) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \Psi_2$$

$\underline{n=3}$

$n=3$ のとき、p_1，...，p_6 を以下のように定める

	アルゴリズム	コスト		
重み	探索する順番	W_1	W_2	W_1
p_1	t_1,t_2,t_3	a_1	b_1+a_2	$b_1+b_2+a_3$
p_2	t_2,t_3,t_1	$a_1+b_2+b_3$	a_2	b_2+a_3
p_3	t_3,t_1,t_2	a_1+b_3	$b_1+a_2+b_3$	a_3
p_4	t_2,t_1,t_3	a_1+b_2	a_2	$b_1+b_2+a_3$
p_5	t_1,t_3,t_2	a_1	$b_1+a_2+b_3$	b_1+a_3
p_6	t_3,t_2,t_1	$a_1+b_2+b_3$	a_2+b_3	a_3

このときのコスト期待値 W_1，W_2，W_3 は

$$\mathrm{W}_1=a_1+(b_2+b_3)p_2+b_3p_3+b_2p_4+(b_2+b_3)p_6 \tag{1.1}$$
$$\mathrm{W}_2=b_1p_1+a_2+(b_1+b_3)p_3+(b_1+b_3)p_5+b_3p_6 \tag{1.2}$$
$$\mathrm{W}_3=(b_1+b_2)p_1+b_2p_2+a_3+(b_1+b_2)p_4+b_1p_5 \tag{1.3}$$

と表すことができる

また、ここでいくつかの主張を示す

主張 1-1

$\mathrm{W}_1=\mathrm{W}_2 \Leftrightarrow p_2=\frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4+b_3p_5-(b_1+b_2)p_6\}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1)$

(証明)

$\mathrm{W}_1=\mathrm{W}_2 \Rightarrow p_2=\frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4+b_3p_5-(b_1+b_2)p_6\}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1)$ を示す。

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_1 &= \mathrm{W}_2\\
a_1+(b_2+b_3)p_2+b_3p_3+b_2p_4+(b_2+b_3)p_6 &= b_1p_1+a_2+(b_1+b_3)p_3+(b_1+b_3)p_5+b_3p_6\\
-b_1p_1+(b_2+b_3)p_2-b_1p_3 &= -b_2p_4+(b_1+b_3)p_5-b_2p_6+a_2-a_1\\
-b_1(p_1+p_3)+(b_2+b_3)p_2 &= -b_2p_4+(b_1+b_3)p_5-b_2p_6+a_2-a_1\\
-b_1(1-p_2-p_4-p_5-p_6)+(b_2+b_3)p_2 &= -b_2p_4+(b_1+b_3)p_5-b_2p_4+a_2-a_1\\
(b_1+b_2+b_3)p_2 &= -(b_1+b_2)p_4+b_3p_5-(b_1+b_2)p_6+a_2+b_1-a_1
\end{aligned}$$

次に
$p_2=\frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4+b_3p_5-(b_1+b_2)p_6\}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1)\Rightarrow \mathrm{W}_1=\mathrm{W}_2$ を示す

$p_2=\frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4+b_3p_5-(b_1+b_2)p_6\}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1)$ を (1.1),(1.2) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}_1 &= a_1+(b_2+b_3)p_2+b_3p_3+b_2p_4+(b_2+b_3)p_6\\
&= a_1+(b_2+b_3)\left(\frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4+b_3p_5-(b_1+b_2)p_6\}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1)\right)\\
&\qquad +b_3p_3+b_2p_4+(b_2+b_3)p_6\\
&= a_1+b_3p_3+\left(\frac{-(b_2+b_3)(b_1+b_2)}{b_1+b_2+b_3}+b_2\right)p_4+\frac{b_3(b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}p_5\\
&\qquad +\left(-\frac{(b_2+b_3)(b_1+b_2)}{b_1+b_2+b_3}+(b_2+b_3)\right)p_6+\frac{(b_2+b_3)(a_2+b_1-a_1)}{b_1+b_2+b_3}\\
&= a_1+b_3p_3-\frac{b_1b_3}{b_1+b_2+b_3}p_4+\frac{b_3(b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}p_5+\frac{b_3(b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}p_6+\frac{(b_2+b_3)(a_2+b_1-a_1)}{b_1+b_2+b_3}\\
&= \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_2b_3+b_1b_2+b_1b_3}{b_1+b_2+b_3}+b_3p_3-\frac{b_1b_3}{b_1+b_2+b_3}p_4+\frac{b_3(b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}p_5+\frac{b_3(b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}p_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}_2 &= b_1p_1+a_2+(b_1+b_3)p_3+(b_1+b_3)p_5+b_3p_6\\
&= b_1(p_1+p_3)+a_2+b_3p_3+(b_1+b_3)p_5+b_3p_6\\
&= b_1(1-p_2-p_4-p_5-p_6)+a_2+b_3p_3+(b_1+b_3)p_5+b_3p_6\\
&= b_1+a_2-b_1p_2+b_3p_3-b_1p_4+b_3p_5+(-b_1+b_3)p_6\\
&= b_1+a_2-b_1\left(\frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4+b_3p_5-(b_1+b_2)p_6\}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1)\right)\\
&\qquad +b_3p_3-b_1p_4+b_3p_5+(-b_1+b_3)p_6\\
&= b_1+a_2-\frac{b_1(a_2+b_1-a_1)}{b_1+b_2+b_3}+b_3p_3+\left(\frac{b_1(b_1+b_2)}{b_1+b_2+b_3}-b_1\right)p_4+\left(-\frac{b_1b_3}{b_1+b_2+b_3}+b_3\right)p_5\\
&\qquad +\left(\frac{b_1(b_1+b_2)}{b_1+b_2+b_3}+(-b_1+b_3)\right)p_6\\
&= \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_2b_3+b_1b_2+b_1b_3}{b_1+b_2+b_3}+b_3p_3-\frac{b_1b_3}{b_1+b_2+b_3}p_4+\frac{b_3(b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}p_5+\frac{b_3(b_2+b_3)}{b_1+b_2+b_3}p_6
\end{aligned}
$$

よって, $\mathrm{W}_1=\mathrm{W}_2$
以上より、主張が言えた
同様の方法で以下の主張 1-2, 1-3 も示すことができる

主張 1-2

$\mathrm{W}_2=\mathrm{W}_3\Leftrightarrow p_3=\frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{b_1p_4-(b_2+b_3)p_5-(b_2+b_3)p_6\}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_3+b_2-a_2)$

主張 1-3

$\mathrm{W}_3 = \mathrm{W}_1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_3)p_4 - (b_1+b_3)p_5 + b_2 p_6\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_1+b_3-a_3)$

また、以上の主張 1-1, 1-2, 1-3 より以下の主張 1-4 を導き出せる

主張 1-4

$\mathrm{W}_1 = \mathrm{W}_2 = \mathrm{W}_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\begin{pmatrix} -(b_1+b_3) & -(b_1+b_3) & b_2 \\ -(b_1+b_2) & b_3 & -(b_1+b_2) \\ b_1 & -(b_2+b_3) & -(b_2+b_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\begin{pmatrix} a_1+b_3-a_3 \\ a_2+b_1-a_1 \\ a_3+b_2-a_2 \end{pmatrix}$$

主張 1-4 を変形すると以下の主張が導き出せる

主張 1-5

$\mathrm{W}_1 = \mathrm{W}_2 = \mathrm{W}_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\begin{pmatrix} -(b_2+b_3) & -(b_2+b_3) & b_1 \\ -(b_1+b_2) & b_3 & -(b_1+b_2) \\ b_2 & -(b_1+b_3) & -(b_1+b_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\begin{pmatrix} a_2+b_3-a_3 \\ a_1+b_2-a_2 \\ a_3+b_1-a_1 \end{pmatrix}$$

主張 1-4, 1-5 より以下の主張が導き出せる

主張 2-1

$\mathrm{W}_1 \geqq \mathrm{W}_2 \Leftrightarrow p_2 \geqq \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4 + b_3 p_5 - (b_1+b_2)p_6\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1)$

主張 2-2

$\mathrm{W}_2 \geqq \mathrm{W}_3 \Leftrightarrow p_3 \geqq \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{b_1 p_4 - (b_2+b_3)p_5 - (b_2+b_3)p_6\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_3+b_2-a_2)$

主張 2-3

$\mathrm{W}_3 \geqq \mathrm{W}_2 \Leftrightarrow p_1 \geqq \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_3)p_4 - (b_1+b_3)p_5 + b_2 p_6\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_1+b_3-a_3)$

主張 2-4

$\mathrm{W}_2 \geqq \mathrm{W}_3 \Leftrightarrow p_5 \geqq \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_2+b_1)p_1 + b_3 p_2 - (b_2+b_1)p_3\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_1+b_2-a_2)$

主張 2-5

$\mathrm{W}_3 \geqq \mathrm{W}_2 \Leftrightarrow p_4 \geqq \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_3+b_2)p_1 - (b_3+b_2)p_2 + b_1 p_3\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_3-a_3)$

主張 2-6

$\mathrm{W}_1 \geqq \mathrm{W}_3 \Leftrightarrow p_6 \geqq \frac{1}{b_1+b_2+b_3}\{b_2 p_1 - (b_1+b_3)p_2 - (b_1+b_3)p_3\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_3+b_3-a_1)$

以上の主張を踏まえて、$d_0(T_3) = \Psi_3$ を示していく

まず、主張 1-4 の右辺を満たすアルゴリズム全体の集合を P と置く。
ここで、任意のアルゴリズム $A \in P$ の下では、$\mathrm{W}_1 = \mathrm{W}_2 = \mathrm{W}_3$ となるため
W_1, W_2, W_3 のそれぞれに 主張 1-4 右辺の p_1, p_2, p_3を代入すると

$$\mathrm{W}_1 = \mathrm{W}_2 = \mathrm{W}_3 = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1}{b_1 + b_2 + b_3} = \Psi_3$$

となる

また、主張 1-4の右辺を満たさないアルゴリズム全体の集合を Q と置く。
任意のアルゴリズム $B \in Q$ の下で、W_1, W_2, W_3 は、以下の大小関係のいずれかで表される

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{W}_1 & \geqq & \mathrm{W}_2 & \geqq & \mathrm{W}_3 \\
\mathrm{W}_2 & \geqq & \mathrm{W}_3 & \geqq & \mathrm{W}_1 \\
\mathrm{W}_3 & \geqq & \mathrm{W}_1 & \geqq & \mathrm{W}_2 \\
\mathrm{W}_1 & \geqq & \mathrm{W}_3 & \geqq & \mathrm{W}_2 \\
\mathrm{W}_2 & \geqq & \mathrm{W}_1 & \geqq & \mathrm{W}_3 \\
\mathrm{W}_3 & \geqq & \mathrm{W}_2 & \geqq & \mathrm{W}_1
\end{array}$$

ここで、それぞれの大小関係に対して、Ψ_3 と W_1, W_2, W_3との関係を考える

<u>*case1*</u>　$\mathrm{W}_1 \geqq \mathrm{W}_2 \geqq \mathrm{W}_3$ のとき
$\mathrm{W}_1 \geqq \mathrm{W}_2$, $\mathrm{W}_2 \geqq \mathrm{W}_3$であるから、主張 $1, 2$ より、

$$\begin{aligned}
p_2 &\geqq \tfrac{1}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4 + b_3p_5 - (b_1+b_2)p_6\} + \tfrac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2 + b_1 - a_1) \\
p_3 &\geqq \tfrac{1}{b_1+b_2+b_3}\{b_1p_4 - (b_2+b_3)p_5 - (b_2+b_3)p_6\} + \tfrac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_3 + b_2 - a_2)
\end{aligned}$$

が成立、よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_1 &= a_1 + (b_2+b_3)p_2 + b_3p_3 + b_2p_4 + (b_2+b_3)p_6 \\
&\geqq a_1 + \frac{b_2+b_3}{b_1+b_2+b_3}\{-(b_1+b_2)p_4 + b_3p_5 - (b_1+b_2)p_6\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_2+b_1-a_1) \\
&\quad + \frac{b_3}{b_1+b_2+b_3}\{b_1p_4 - (b_2+b_3)p_5 - (b_2+b_3)p_6\} + \frac{1}{b_1+b_2+b_3}(a_3+b_2-a_2) + b_2p_4 + (b_2+b_3)p_6 \\
&= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1}{b_1+b_2+b_3} \\
&= \Psi_3
\end{aligned}$$

同様に、

<u>$case2$</u>　$\mathrm{W}_2 \geqq \mathrm{W}_3 \geqq \mathrm{W}_1$ のとき

$$\mathrm{W}_2 \geqq \Psi_3$$

<u>$case3$</u>　$\mathrm{W}_3 \geqq \mathrm{W}_1 \geqq \mathrm{W}_2$ のとき

$$\mathrm{W}_3 \geqq \Psi_3$$

<u>$case4$</u>　$\mathrm{W}_1 \geqq \mathrm{W}_3 \geqq \mathrm{W}_2$ のとき

$$\mathrm{W}_1 \geqq \Psi_3$$

<u>$case5$</u>　$\mathrm{W}_2 \geqq \mathrm{W}_1 \geqq \mathrm{W}_3$ のとき

$$\mathrm{W}_2 \geqq \Psi_3$$

<u>$case6$</u>　$\mathrm{W}_3 \geqq \mathrm{W}_2 \geqq \mathrm{W}_1$ のとき

$$\mathrm{W}_3 \geqq \Psi_3$$

以上より、任意の $B \in Q$ に対して、$\max\{\mathrm{W}_1,\ \mathrm{W}_2,\ \mathrm{W}_3\} \geqq \Psi_3$ となるため

$$d_0(T_3) = \Psi_3$$

$d_0(T_n) = \Psi_n$ を示す

まず、$d_0(T_n) \leqq \Psi_n$ を帰納法で示す

$k = 2$ のとき

$$d_0(T_2) = \Psi_2 \text{ は既に示されている}$$

$k = n-1$ のとき

$$d_0(T_{n-1}) = \Psi_{n-1} \text{ が成立すると仮定する}$$

最初に t_n を調べるアルゴリズム全体の集合を V とする
T_nを t_nと残り $n-1$ 個の部分木の 2 分木だと捉えると

	アルゴリズム	コスト	
重み	探索する順番	$\mathrm{W_1} = \cdots = \mathrm{W_{n-1}}$	$\mathrm{W_n}$
p_1	t_1, t_2	Ψ_{n-1}	$b_1 + \cdots + b_{n-1} + a_n$
$1-p_1$	t_2, t_1	$b_1 + \Psi_{n-1}$	a_n

このときのコスト期待値 $\mathrm{W_1}$, $\mathrm{W_n}$は

$$\begin{aligned}
\mathrm{W_1} &= p_1\Psi_{n-1} + (1-p_1)(b_n + \Psi_{n-1}) \\
&= (1-p_1)b_n + \Psi_{n-1} \\
\mathrm{W_n} &= p_1(b_1 + \cdots + b_{n-1} + a_n) + (1-p_1)a_n \\
&= p_1(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + a_n
\end{aligned}$$

$\mathrm{W_1} = \mathrm{W_n}$とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{W_1} &= \mathrm{W_n} \\
(1-p_1)b_n + \Psi_{n-1} &= p_1(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + a_n \\
p_1(b_1 + \cdots + b_n) &= \Psi_{n-1} - a_n + b_n \\
p_1 &= \frac{\Psi_{n-1} - a_n + b_n}{b_1 + \cdots + b_n}
\end{aligned}$$

ここで、$0 \leqq p_1 \leqq 1$ を示す

$$\Psi_{n-1} \leqq b_1 + \cdots + b_{n-1} + a_n$$
$$a_n \leqq \Psi_{n-1} + b_n$$

を示せばよい
帰納法の仮定より、$\mathrm{W_1}$, $\cdots$, $\mathrm{W_{n-1}}$は交点を持つ
また、仮定より $a_{n-1} \leqq b_{n-1} + a_n$ が成立するため

$$\begin{aligned} & min\ \mathrm{W_{n-1}} & \leqq & \ \Psi_{n-1} \leqq max\ \mathrm{W_{n-1}} \\ \Leftrightarrow & \quad a_{n-1} & \leqq & \ \Psi_{n-1} \leqq b_1 + \cdots + b_{n-2} + a_{n-1} \\ \Leftrightarrow & \quad a_{n-1} & \leqq & \ \Psi_{n-1} \leqq b_1 + \cdots + b_{n-2} + a_{n-1} \leqq b_1 + \cdots + b_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

よって、$\Psi_{n-1} \leqq b_1 + \cdots + b_{n-1} + a_n$ が成立

また、$a_n \leqq b_n + a_{n-1}$ より

$$\begin{aligned} & & min\ \mathrm{W_{n-1}} & \leqq \Psi_{n-1} \\ \Leftrightarrow & & a_{n-1} & \leqq \Psi_{n-1} \\ \Leftrightarrow & & a_{n-1} + b_n & \leqq \Psi_{n-1} + b_n \\ \Leftrightarrow & a_n \leqq & a_{n-1} + b_n & \leqq \Psi_{n-1} + b_n \end{aligned}$$

よって、$a_n \leqq \Psi_{n-1} + b_n$ が成立

以上より、$0 \leqq p_1 \leqq 1$ を示せた

$\mathrm{W_1}$, $\mathrm{W_n}$ に p_1 を代入すると

$$\mathrm{W_1} = \mathrm{W_n} = \Psi_n$$

以上から、V 上では、$d_0(T_n) = \Psi_n$が成立するため
$\mathcal{A}$ 上では、$d_0(T_n) \leqq \Psi_n$ が成立

次に、$d_0(T_n) \geqq \Psi_n$ を示す
Yao の minmax Lemma を利用する W_iの $Weight$?を $\dfrac{b_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j}$ とし

$$
\begin{aligned}
cost &= \frac{b_1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j} a_1 + \frac{b_2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j}(b_1 + a_2) + \cdots + \frac{b_n}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + a_n) \\
&= \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j}(a_1 b_1 + (a_2 b_2 + b_1 b_2) + \cdots + (a_n b_n + b_1 b_n + \cdots + b_{n-1} b_n)) \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ + \sum_{i=1,j=1}^{n} a_i b_j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i} \\
&= \Psi_n
\end{aligned}
$$

よって、Yao を使って下からおさえる

参考文献

[1] Michael Saks,Avi Wigderson「PROBABILISTIC BOOLEAN DECISIONTREES AND COMPLEXITY OF EVALUATING GAME TREES」

[2] 有本宗史「非対称な 2 分 AND-OR 木の探索コスト」