微积分与概率论基础

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

复习微积分：两边夹定理

- 当 $x \in U(x_0, r)$ 时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ 成立，并且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，那么

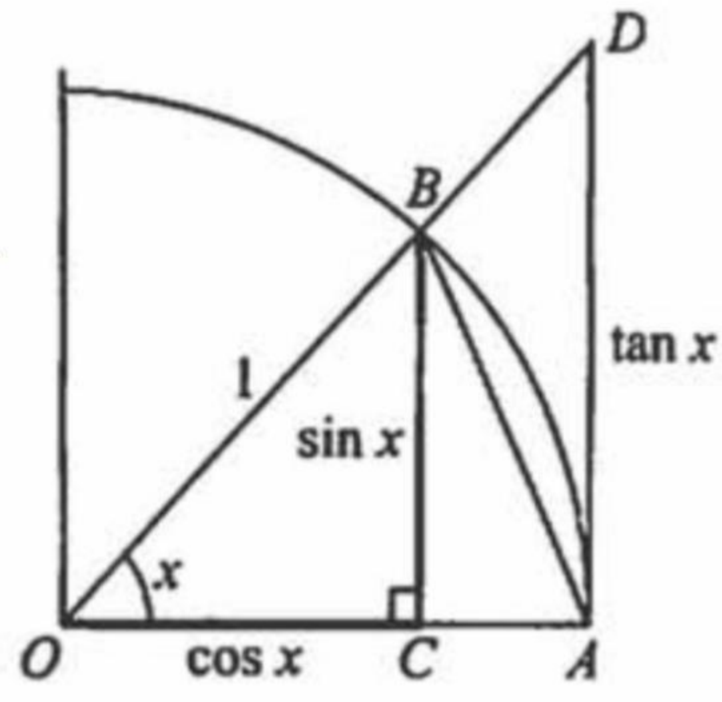
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

极限

- 由右图： $\sin x < x < \tan x$，
  $x \in U(0, \varepsilon)$
- 从而： $1 < x/\sin x < 1/\cos x$
- 即： $\cos x < \sin x/x < 1$
- 因为： $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$
- 从而：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- 该式将三角函数和多项式建立了极限关系



不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

导数

- 简单的说，导数就是曲线的斜率，是曲线变化快慢的反应
- 二阶导数是斜率变化快慢的反应，表征曲线的凸凹性
  - 在GIS中，往往一条二阶导数连续的曲线，我们称之为“光顺”的。
  - 还记得高中物理老师时常念叨的吗：加速度的方向总是指向轨迹曲线凹的一侧

常用函数的导数

(1) $C'=0$ (C 为常数)； (2) $(x^n)'=nx^{n-1}$ ($n\in Q$)；

(3) $(\sin x)'=\cos x$； (4) $(\cos x)'=-\sin x$；

(5) $(a^x)'=a^x\ln a$； (6) $(e^x)'=e^x$；

(7) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$； (8) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

$$(u+v)'=u'+v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

应用

- 已知函数$f(x)=x^x$，$x>0$
- 求$f(x)$的最小值
  - 领会**幂指函数**的一般处理套路

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

求解x^x

$$t = x^x$$

$$\to \ln t = x \ln x$$

$$\xrightarrow{\text{两边对x求导}} \frac{1}{t} t' = \ln x + 1$$

$$\xrightarrow{\text{令 } t'=0} \ln x + 1 = 0$$

$$\to x = e^{-1}$$

$$\to t = e^{-\frac{1}{e}}$$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

方向导数

- 如果函数z=f(x,y)在点P(x,y)是可微分的，那么，函数在该点沿任一方向L的方向导数都存在，且有：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

- 其中，ψ为x轴到方向L的转角。

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

梯度

- 设函数z=f(x,y)在平面区域D内具有一阶连续偏导数，则对于每一个点P(x,y)∈D，向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

为函数z=f(x,y)在点P的梯度，记做**grad**f(x,y)

- 梯度的方向是函数在该点变化最快的方向
  - 考虑一座解析式为H(x,y)的山。在(x0,y0)点的梯度是在该点坡度最陡的方向。
- 梯度下降法
  - 思考：如果下山方向和梯度呈θ夹角，下降速度是多少？

凸函数

- $f(x)$在区间I上连续，如果对I上任意两点$x1$，$x2$，恒有$f((x1+x2)/2)<(f(x1)+f(x2))/2$，则称$f(x)$在I上是凸的。

- 注：中国大陆数学界某些机构关于函数凹凸性定义和国外的定义是相反的。Convex Function在某些中国大陆的数学书中指凹函数。Concave Function指凸函数。但在中国大陆涉及经济学的很多书中，凹凸性的提法和其他国家的提法是一致的，也就是和数学教材是反的。举个例子，同济大学高等数学教材对函数的凹凸性定义与习惯定义正好相反。另外，也有些教材会把凸定义为上凸，凹定义为下凸。

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

凸函数的判定

- 定理：$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，那么：
  - 若$f''(x)>0$，则$f(x)$是凸的；
  - 若$f''(x)<0$，则$f(x)$是凹的

- 即：一元二阶可微的函数在区间上是凸的，当且仅当它的二阶导数是非负的

概率论

- 对概率的认识：P∈[0,1]
  - P=0
    - 事件出现的概率为0→事件不会发生？
  - 将位于[0,1]的函数y=f(x)看成x对应y事件的概率
    - 要求f(x)在定义域[0,1]的积分为1
- 古典概型
  - 排列组合
- 概率密度函数Probability Density Function
- 累计分布函数

古典概型

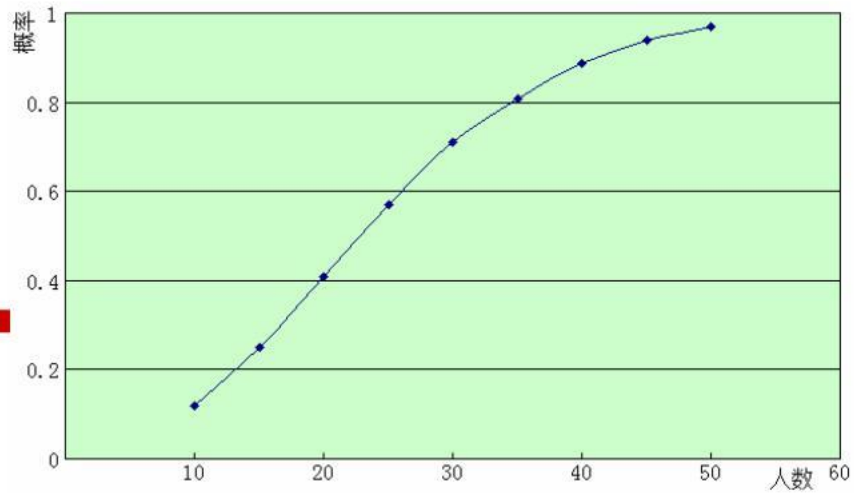
- 举例：将n个不同的球放入$N(N\geqslant n)$个盒子中，假设盒子容量无限，求事件A={每个盒子至多有1个球}的概率。

解 $P(A)=\dfrac{P_N^n}{N^n}$

- 基本事件总数：
  - 第1个球，有N种放法；
  - 第2个球，有N种放法；
  - ……
  - 共：N^n种放法。
- 每个盒子至多放1个球的事件数：
  - 第1个球，有N种放法；
  - 第2个球，有N-1种放法；
  - 第3个球，有N-2种放法；
  - ……
  - 共：$N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)=P_N^n$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

实际问题



- 某班上有50位同学，至少有2人生日相同的概率是多少？

n	10	15	20	25	30	35	40	45	50
P	0.12	0.25	0.41	0.57	0.71	0.81	0.89	0.94	0.97

先算出50个人生日各不相同的概率为：
(365/365)*(364/365)*…*(316/365)
约=0.03

装箱问题

- 将12件正品和3件次品随机装在3个箱子中,每箱5件。每箱中恰有1件次品的概率是多少?

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

解

- 将15件产品装入3个箱子，每箱装5件，共有15!/(5!5!5!)种装法； 每个箱子5个是无序的，重复了，除以3个5的阶乘
- 先把3件次品放入3个箱子，有3!种装法。对于这样的每一种装法，把其余12件产品装入3个箱子，每箱装4件，共有12!/(4!4!4!)种装法；
- P(A)= (3!*12!/(4!4!4!)) / (15!/(5!5!5!)) = 25/91

与组合数的关系

- 把n个物品分成k组，使得每组物品的个数分别为n1,n2…nk，(n=n1+n2+…+nk)，则不同的分组方法有$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$种。

- 上述问题的简化版本，即n个物品分成2组，第一组m个，第二组n-m个，则分组方法有$\frac{n!}{m!(n-m)!}$，即：C_n^m。

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

概率

- 条件概率：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 全概率公式：

$$P(A)=\sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

- 贝叶斯(Bayes)公式：

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

思考题

□ 对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为55%。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为95%。试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是多少？

设 A 为事件“产品合格”，B 为事件“机器调整良好”。已知$P(A|B)=0.98$，$P(A|\overline{B})=0.55$，$P(B)=0.95$，$P(\overline{B})=0.05$，所需求的概率为$P(B|A)$。用贝叶斯公式来计算

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.98\times 0.95}{0.98\times 0.95+0.55\times 0.05}=0.97$$

这就是说，当生产出第一件产品是合格品时，此时机器调整良好的概率为 0.97。这里，概率 0.95 是由以往的数据分析得到的，叫做先验概率。而在得到信息（即生产出的第一件产品是合格品）之后再重新加以修正的概率（即 0.97）叫做后验概率。有了后验概率

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

分布

- 复习各种常见分布本身的统计量
- 常见分布是可以完美统一为一类分布

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

两点分布

0—1分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2=pq.$$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

二项分布 Bernoulli distribution

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，

(法一) 设X_i为第i 次试验中事件 A 发生的次数，$i=1,2,\cdots,n$

则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

显然，X_i相互独立均服从参数为 p 的0—1分布，

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np.$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p).$$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

二项分布

(法二) X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n),$$

则有 $E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{kn!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}=np$$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots, \quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda$$

泊松分布Poisson distribution

- 在实际事例中，当一个随机事件，以固定的平均瞬时速率 λ(或称密度)随机且独立地出现时，那么这个事件在单位时间(面积或体积)内出现的次数或个数就近似地服从泊松分布P(λ)。
  - 某一服务设施在一定时间内到达的人数
  - 电话交换机接到呼叫的次数
  - 汽车站台的候客人数
  - 机器出现的故障数
  - 自然灾害发生的次数
  - 一块产品上的缺陷数
  - 显微镜下单位分区内的细菌分布数
  - 某放射性物质单位时间发射出的粒子数

泊松分布

$$E(X^2) = E[X(X-1)+X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \cdot \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

泊松分布的期望和方差都等于参数λ.

均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \dfrac{1}{b-a}x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(a+b).$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

指数分布

设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad \text{其中 } \theta>0.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x$$

$$=-x\mathrm{e}^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x \quad =\theta$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x-\theta^2$$

$$=2\theta^2-\theta^2 \quad =\theta^2$$

指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

- 其中λ＞0是分布的一个参数，常被称为率参数(rate parameter)。即每单位时间内发生某事件的次数。指数分布的区间是[0,∞)。如果一个随机变量X呈指数分布，则可以写作：X~ Exponential(λ)。
- 指数分布可以用来表示独立随机事件发生的时间间隔，比如旅客进机场的时间间隔、软件更新的时间间隔等等。
- 许多电子产品的寿命分布一般服从指数分布。有的系统的寿命分布也可用指数分布来近似。它在可靠性研究中是最常用的一种分布形式。

正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

正态分布

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

正态分布

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

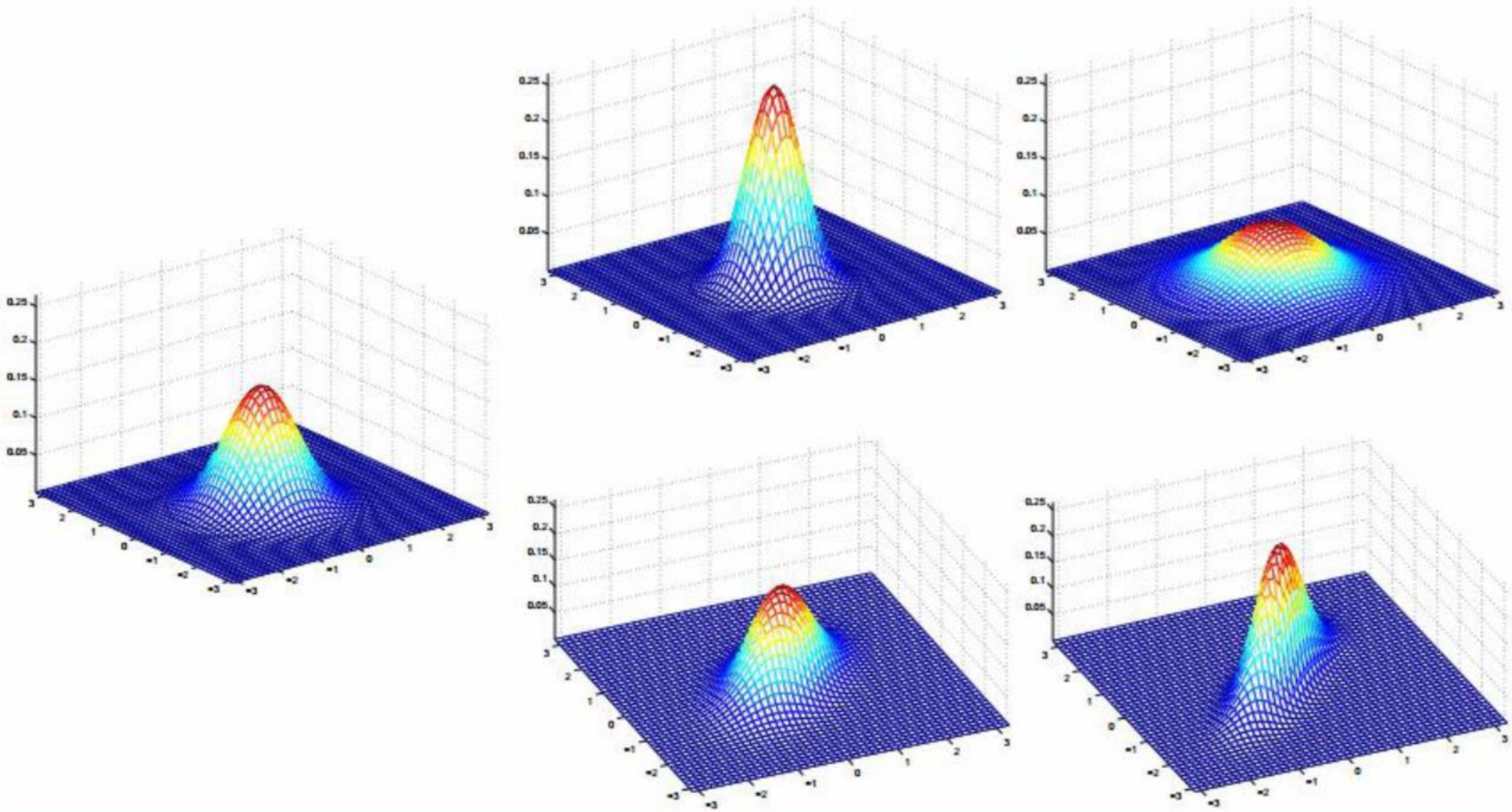
令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2.$$

二元正态分布



不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

总结

分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\geq 1,$ $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta>0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2

不掉发的羊驼老师
249084156@qq.com

感谢大家！

恳请大家批评指正！