

3

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES



Si un ciclista recorre una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?



¿Qué determina dónde cae una pelota de béisbol bateada? ¿Cómo se describe el movimiento de un carro de la montaña rusa en una curva, o el vuelo de un halcón que describe círculos? ¿Cuál golpea el suelo primero: una pelota de béisbol que simplemente se deja caer o una que se arroja horizontalmente?

No podemos contestar estas preguntas usando las técnicas del capítulo 2, donde se consideró que las partículas se movían solo en línea recta. En lugar de ello, es necesario ampliar nuestras descripciones del movimiento a situaciones en dos y en tres dimensiones. Seguiremos empleando las cantidades vectoriales de desplazamiento, velocidad y aceleración; sin embargo, ahora no estarán a lo largo de una sola línea. Veremos que muchas clases de movimientos importantes se dan solo en dos dimensiones, es decir, en un *plano*, y pueden describirse con dos componentes de posición, velocidad y aceleración.

También necesitamos considerar cómo describen el movimiento de una partícula observadores diferentes que se mueven unos con respecto a otros. El concepto de *velocidad relativa* desempeñará un papel importante más adelante en este libro, cuando estudiemos colisiones, cuando exploremos los fenómenos electromagnéticos, y cuando presentemos la teoría especial de la relatividad de Einstein.

En este capítulo se conjunta el lenguaje de vectores que vimos en el capítulo 1 con el lenguaje de la cinemática del capítulo 2. Como antes, nos interesa describir el movimiento, no analizar sus causas. No obstante, el lenguaje que aprenderemos aquí será una herramienta esencial en capítulos posteriores, al estudiar la relación entre fuerza y movimiento.

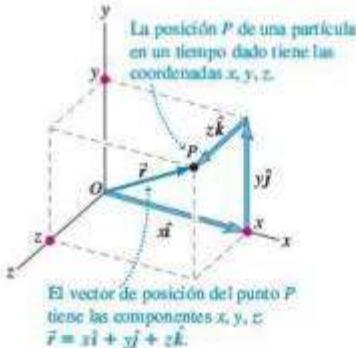
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

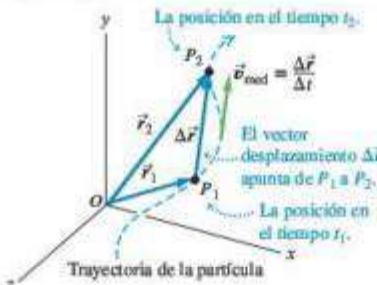
- Cómo representar la posición de un cuerpo, usando vectores, en dos o tres dimensiones.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.
- Cómo interpretar las componentes de la aceleración de un cuerpo paralela y perpendicular a su trayectoria.
- Cómo describir la trayectoria curva que sigue un proyectil.
- Las ideas clave detrás del movimiento en una trayectoria circular, con rapidez constante o variable.
- Cómo relacionar la velocidad de un cuerpo en movimiento visto desde dos marcos de referencia distintos.

3.1 Vectores de posición y velocidad

3.1 El vector de posición \vec{r} del origen al punto P tiene componentes x, y y z . La trayectoria que sigue la partícula en el espacio es, en general, una curva (figura 3.2).



3.2 La velocidad media \vec{v}_{med} entre los puntos P_1 y P_2 tiene la misma dirección que el desplazamiento $\Delta \vec{r}$.



3.3 Los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son las velocidades instantáneas en los puntos P_1 y P_2 , como se muestra en la figura 3.2.



Para describir el *movimiento* de una partícula en el espacio, primero tenemos que describir su *posición*. Considere una partícula que está en el punto P en cierto instante. El **vector de posición** \vec{r} de la partícula en ese instante es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto P (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas x, y y z de P son las componentes x, y y z del vector \vec{r} . Usando los vectores unitarios que presentamos en la sección 1.9, podemos escribir

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (\text{vector de posición}) \quad (3.1)$$

Durante un intervalo de tiempo Δt , la partícula se mueve de P_1 , donde su vector de posición es \vec{r}_1 , a P_2 , donde su vector de posición es \vec{r}_2 . El cambio de posición (el desplazamiento) durante este intervalo es $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos la **velocidad media** \vec{v}_{med} durante este intervalo igual que en el capítulo 2 para movimiento rectilíneo, como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (\text{vector velocidad media}) \quad (3.2)$$

Dividir un vector entre un escalar es en realidad un caso especial de *multiplicación* de un vector por un escalar, descrito en la sección 1.7; la velocidad media \vec{v}_{med} es igual al vector desplazamiento $\Delta \vec{r}$ multiplicado por $1/\Delta t$, el recíproco del intervalo de tiempo. Observe que la componente x de la ecuación (3.2) es $v_{\text{med},x} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$. Esta es precisamente la ecuación (2.2), la expresión para la velocidad media que dedujimos en la sección 2.1 para el movimiento unidimensional.

Aquí definimos la **velocidad instantánea** igual que en el capítulo 2: como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se approxima a cero, y es la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo. La diferencia clave es que tanto la posición \vec{r} como la velocidad instantánea \vec{v} ahora son los vectores:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{vector velocidad instantánea}) \quad (3.3)$$

La **magnitude** del vector \vec{v} en cualquier instante es la *rapidez* v de la partícula en ese instante. La **dirección** de \vec{v} en cualquier instante es la dirección en que la partícula se mueve en ese instante.

Observe que conforme $\Delta t \rightarrow 0$, los puntos P_1 y P_2 de la figura 3.2 se acercan cada vez más. En el límite, el vector $\Delta \vec{r}$ se vuelve tangente a la trayectoria. La dirección de $\Delta \vec{r}$ en este límite también es la dirección de la velocidad instantánea \vec{v} . Esto conduce a una conclusión importante: *En cualquier punto de la trayectoria, el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en ese punto* (figura 3.3).

A menudo es más sencillo calcular el vector velocidad instantánea empleando componentes. Durante cualquier desplazamiento $\Delta \vec{r}$, los cambios $\Delta x, \Delta y$ y Δz en las tres coordenadas de la partícula son las **componentes** de $\Delta \vec{r}$. Por lo tanto, las componentes v_x, v_y y v_z de la velocidad instantánea \vec{v} son simplemente las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas x, y y z . Es decir,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (\text{componentes de la velocidad instantánea}) \quad (3.4)$$

La componente x de \vec{v} es $v_x = dx/dt$, que es la ecuación (2.3): la expresión para la velocidad instantánea en movimiento rectilíneo que obtuvimos en la sección 2.2. De manera que la ecuación (3.4) es una ampliación directa de la idea de velocidad instantánea para el movimiento en tres dimensiones.

También podemos obtener la ecuación (3.4) derivando la ecuación (3.1). Los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} tienen magnitud y dirección constantes, de modo que sus derivadas son iguales a cero; entonces,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (3.5)$$

Esto muestra otra vez que las componentes de \vec{v} son dx/dt , dy/dt y dz/dt .

La magnitud del vector velocidad instantánea \vec{v} es decir, la rapidez, se obtiene en términos de las componentes v_x , v_y y v_z aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (3.6)$$

La figura 3.4 muestra la situación cuando la partícula se mueve en el plano xy . En este caso, z y v_z son iguales a cero, y la rapidez (la magnitud de \vec{v}) es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

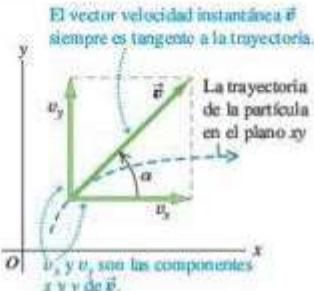
y la dirección de la velocidad instantánea \vec{v} está dada por el ángulo α (la letra griega alfa) de la figura. Vemos que

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (3.7)$$

(Siempre se usan letras griegas para los ángulos. Se utiliza α para la dirección del vector velocidad instantánea con la finalidad de evitar confusiones con la dirección θ del vector de posición de la partícula).

El vector velocidad instantánea suele ser más interesante y útil que el de la velocidad media. De ahora en adelante, al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos al vector velocidad instantánea \vec{v} (no al vector velocidad media). Por lo regular, ni siquiera nos molestaremos en llamar vector a \vec{v} ; el lector debe recordar que la velocidad es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

3.4 Las dos componentes de velocidad para movimiento en el plano xy .



Ejemplo 3.1 Cálculo de la velocidad media e instantánea



Un vehículo robot está explorando la superficie de Marte. El módulo de descenso estacionario es el origen de las coordenadas; y la superficie marciana circundante está en el plano xy . El vehículo, que representamos como un punto, tiene coordenadas x y y que varían con el tiempo:

$$x = 2.0 \text{ m} - (0.25 \text{ m/s}^2)t^2$$

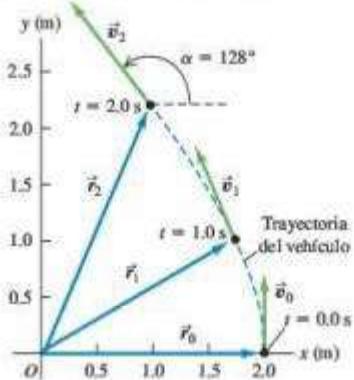
$$y = (1.0 \text{ m/s})t + (0.025 \text{ m/s}^3)t^3$$

- a) Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia con respecto al módulo en $t = 2.0 \text{ s}$. b) Obtenga los vectores desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t = 0.0 \text{ s}$ y $t = 2.0 \text{ s}$. c) Deduzca una expresión general para el vector velocidad instantánea \vec{v} del vehículo. Exprese \vec{v} en $t = 2.0 \text{ s}$ en forma de componentes y en términos de magnitud y dirección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica movimiento en dos dimensiones, por lo que debemos usar las ecuaciones vectoriales obtenidas en esta sección. En la figura 3.5 se muestra la trayectoria del vehículo (línea punteada). Usaremos la ecuación (3.1) para la posición \vec{r} , la expresión $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para el desplazamiento, la ecuación (3.2) para la velocidad media y las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) para

3.5 En $t = 0.0 \text{ s}$ el vehículo tiene el vector de posición \vec{r}_0 y el vector velocidad instantánea es \vec{v}_0 . Asimismo, \vec{r}_1 y \vec{v}_1 son los vectores en $t = 1.0 \text{ s}$; \vec{r}_2 y \vec{v}_2 son los vectores en $t = 2.0 \text{ s}$.



Continúa

la velocidad instantánea y su dirección y magnitud. Las incógnitas están definidas en el enunciado del problema.

EJECUTAR: a) En el instante $t = 2.0\text{ s}$ las coordenadas del vehículo son

$$\begin{aligned}x &= 2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 1.0\text{ m} \\y &= (1.0\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + (0.025\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^3 = 2.2\text{ m}\end{aligned}$$

La distancia del vehículo al origen en este instante es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.0\text{ m})^2 + (2.2\text{ m})^2} = 2.4\text{ m}$$

b) Para obtener el desplazamiento y la velocidad media durante el intervalo dado, primero expresamos el vector de posición \vec{r} en función del tiempo t . De acuerdo con la ecuación (3.1), este es:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= xi\hat{i} + yj\hat{j} \\&= [2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)t^2]\hat{i} \\&\quad + [(1.0\text{ m/s})t + (0.025\text{ m/s}^3)t^3]\hat{j}\end{aligned}$$

En el instante $t = 0.0\text{ s}$ el vector de posición \vec{r}_0 es

$$\vec{r}_0 = (2.0\text{ m})\hat{i} + (0.0\text{ m})\hat{j}$$

Del inciso a) sabemos que, en $t = 2.0\text{ s}$, el vector de posición \vec{r}_2 es

$$\vec{r}_2 = (1.0\text{ m})\hat{i} + (2.2\text{ m})\hat{j}$$

Por lo tanto, el desplazamiento entre $t = 0.0\text{ s}$ y $t = 2.0\text{ s}$ es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (1.0\text{ m})\hat{i} + (2.2\text{ m})\hat{j} - (2.0\text{ m})\hat{i} \\&= (-1.0\text{ m})\hat{i} + (2.2\text{ m})\hat{j}\end{aligned}$$

Durante este intervalo el vehículo se desplazó 1.0 m en la dirección negativa de x y 2.2 m en la dirección positiva de y . De acuerdo con la ecuación (3.2), la velocidad media en este intervalo es el desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{med}} &= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-1.0\text{ m})\hat{i} + (2.2\text{ m})\hat{j}}{2.0\text{ s} - 0.0\text{ s}} \\&= (-0.50\text{ m/s})\hat{i} + (1.1\text{ m/s})\hat{j}\end{aligned}$$

Las componentes de esta velocidad media son $v_{\text{med},x} = -0.50\text{ m/s}$ y $v_{\text{med},y} = 1.1\text{ m/s}$.

c) De acuerdo con la ecuación (3.4), las componentes de la velocidad *instantánea* son las derivadas de las coordenadas respecto a t :

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = (-0.25\text{ m/s}^2)(2t) \\v_y &= \frac{dy}{dt} = 1.0\text{ m/s} + (0.025\text{ m/s}^3)(3t^2)\end{aligned}$$

Así, el vector velocidad instantánea es

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-0.50\text{ m/s}^2)\hat{i} \\&\quad + [1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)t^2]\hat{j}\end{aligned}$$

En el tiempo $t = 2.0\text{ s}$, las componentes del vector velocidad \vec{v}_2 son

$$\begin{aligned}v_{2x} &= (-0.50\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = -1.0\text{ m/s} \\v_{2y} &= 1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^2 = 1.3\text{ m/s}\end{aligned}$$

La magnitud de la velocidad instantánea (es decir, la rapidez) en $t = 2.0\text{ s}$ es

$$\begin{aligned}v_2 &= \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{(-1.0\text{ m/s})^2 + (1.3\text{ m/s})^2} \\&= 1.6\text{ m/s}\end{aligned}$$

La figura 3.5 muestra la dirección del vector velocidad \vec{v}_2 , el cual tiene un ángulo α entre 90° y 180° con respecto al eje positivo x . De la ecuación (3.7) tenemos

$$\arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{1.3\text{ m/s}}{-1.0\text{ m/s}} = -52^\circ$$

El ángulo es menor que 180° ; de manera que el valor correcto del ángulo es $\alpha = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$, o 38° al oeste del norte.

EVALUAR: Compare las componentes de la velocidad *media* que obtuvimos en el inciso b) para el intervalo de $t = 0.0\text{ s}$ a $t = 2.0\text{ s}$ ($v_{\text{med},x} = -0.50\text{ m/s}$, $v_{\text{med},y} = 1.1\text{ m/s}$) con las componentes de la velocidad *instantánea* en $t = 2.0\text{ s}$ que obtuvimos en el inciso c) ($v_{2x} = -1.0\text{ m/s}$, $v_{2y} = 1.3\text{ m/s}$). La comparación indica que, al igual que sucede en una sola dimensión, el vector velocidad media \vec{v}_{med} durante un intervalo, en general, no es igual a la velocidad instantánea \vec{v} al final del intervalo (véase el ejemplo 2.1).

La figura 3.5 muestra los vectores de posición \vec{r} y los vectores velocidad instantánea en $t = 0.0\text{ s}$, 1.0 s y 2.0 s . (Se invita al lector a calcular estas cantidades en $t = 0.0\text{ s}$ y $t = 1.0\text{ s}$). Observe que \vec{v} es tangente a la trayectoria en todos los puntos. La magnitud de \vec{v} aumenta conforme el vehículo avanza, lo que indica que su rapidez está aumentando.

Evalué su comprensión de la sección 3.1 ¿En cuál de las siguientes situaciones el vector velocidad media \vec{v}_{med} en un intervalo sería igual a la velocidad instantánea \vec{v} al final del intervalo? I. Un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva a rapidez constante; II. un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva y aumenta su rapidez; III. un cuerpo que se mueve en línea recta a rapidez constante; IV. un cuerpo que se mueve en línea recta y aumenta su rapidez.



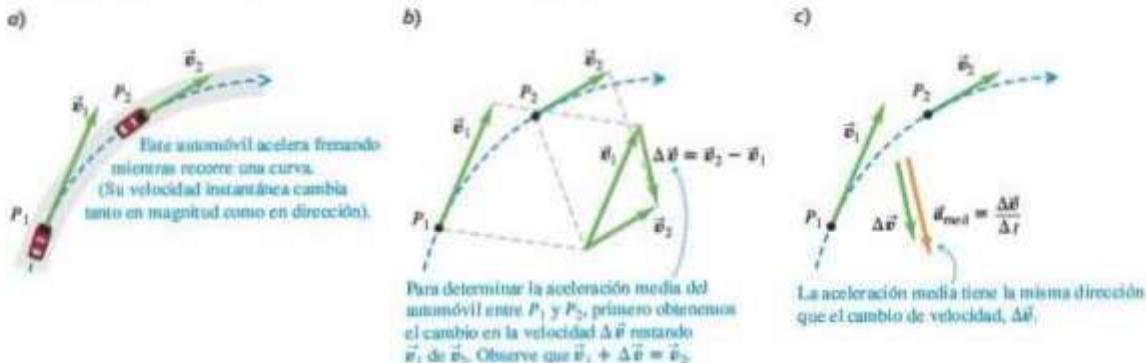
3.2 El vector aceleración

Consideremos ahora la *aceleración* de una partícula que se mueve en el espacio. Al igual que en el movimiento rectilíneo, la aceleración describe cómo cambia la velocidad de la partícula; pero como ahora tratamos la velocidad como un vector, la aceleración describirá los cambios tanto en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) como en la dirección de la velocidad (esto es, la dirección en que se mueve la partícula).

En la figura 3.6a, un automóvil (tratado como partícula) se desplaza en una trayectoria curva. Los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 representan las velocidades instantáneas del auto en

- 3.6** a) Un automóvil se mueve a lo largo de una curva de P_1 a P_2 . b) Cómo obtener $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ mediante resta de vectores.

c) El vector $\vec{a}_{med} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa la aceleración media entre P_1 y P_2 .



el instante t_1 , cuando el automóvil está en el punto P_1 , y en t_2 cuando se encuentra en el punto P_2 . Las dos velocidades pueden diferir tanto en magnitud como en dirección. Durante el intervalo de t_1 a t_2 , el *cambio vectorial de velocidad* es $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$, de modo que $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$ (figura 3.6b). Definimos la **aceleración media** \vec{a}_{med} del automóvil en este intervalo como el cambio de velocidad dividido entre el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{vector aceleración media}) \quad (3.8)$$

La aceleración media es una cantidad *vectorial* en la misma dirección que el vector $\Delta\vec{v}$ (figura 3.6c). La componente x de la ecuación (3.8) es $a_{med,x} = (v_{2x} - v_{1x})/(t_2 - t_1) = \Delta v_x/\Delta t$, que es exactamente la ecuación (2.4) para la aceleración media en movimiento rectilíneo.

Al igual que en el capítulo 2, definimos la **aceleración instantánea** \vec{a} (una cantidad *vectorial*) en el punto P_1 como el límite de la aceleración media cuando el punto P_2 se acerca a P_1 , de modo que $\Delta\vec{v}$ y Δt se acercan a cero (figura 3.7). La aceleración instantánea también es igual a la tasa instantánea de cambio de velocidad con el tiempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{vector aceleración instantánea}) \quad (3.9)$$

El vector velocidad \vec{v} , como vimos, es tangente a la trayectoria de la partícula. No obstante, el vector aceleración instantánea \vec{a} , *no* tiene que ser tangente a la trayectoria. La figura 3.7a muestra que si la trayectoria es curva, \vec{a} apunta hacia el lado cónvexo de la trayectoria, es decir, hacia el interior de la curva descrita por la partícula. La aceleración es tangente a la trayectoria solo si la partícula se mueve en línea recta (figura 3.7b).

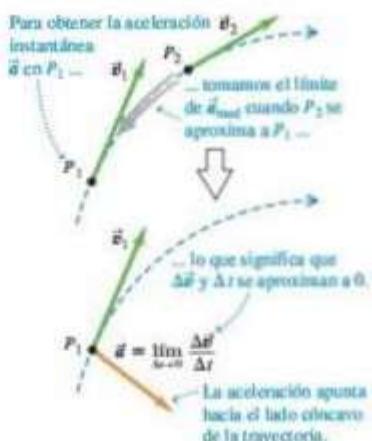
CUIDADO Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva **está acelerando**. Cuando una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración siempre es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizás esta conclusión es contraria a la intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para indicar que la velocidad aumenta. La definición más precisa de la ecuación (3.9) indica que la aceleración es diferente de cero cuando el vector velocidad cambia de cualquier forma, ya sea en su magnitud, dirección o en ambas.

Para convencerse de que una partícula no tiene aceleración cero cuando se mueve en una trayectoria curva con rapidez constante, piense en lo que siente cuando viaja en automóvil. Si el auto acelera, usted tiende a moverse en dirección



- 3.7** a) Aceleración instantánea \vec{a} en el punto P_1 de la figura 3.6. b) Aceleración instantánea para movimiento rectilíneo.

a) Aceleración: trayectoria curva



b) Aceleración: trayectoria en línea recta

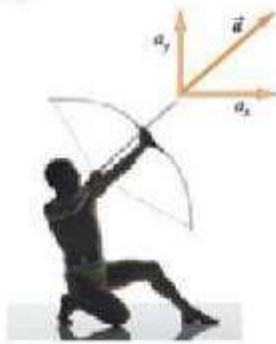


Aplicación Caballos en una trayectoria curva

Al inclinarse y al golpear el suelo con sus cascos a cierto ángulo, estos caballos adquieren la aceleración lateral necesaria para realizar un cambio repentino de dirección.



3.8 Cuando se dispara la flecha, su vector aceleración tiene tanto una componente horizontal (a_x) como una componente vertical (a_y).

**Ejemplo 3.2 Cálculo de la aceleración media e instantánea**

Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del ejemplo 3.1.
a) Obtenga las componentes de la aceleración media de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s. b) Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 3.1, obtuvimos las componentes de la velocidad instantánea del vehículo en el tiempo t :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = (-0.25 \text{ m/s}^2)(2t) = (-0.50 \text{ m/s}^2)t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 1.0 \text{ m/s} + (0.025 \text{ m/s}^3)(3t^2) \\ &= 1.0 \text{ m/s} + (0.075 \text{ m/s}^3)t^2 \end{aligned}$$

Utilizaremos las relaciones vectoriales entre velocidad, aceleración media y aceleración instantánea. En el inciso a), determinaremos los valores de v_x y v_y al principio y al final del intervalo, y después usaremos la ecuación (3.8) para calcular las componentes de la aceleración

opuesta a la aceleración del vehículo. (Veremos por qué en el capítulo 4). Así, tendremos a movernos hacia atrás cuando el automóvil acelera hacia adelante (aumenta su velocidad), y hacia el frente cuando el automóvil acelera hacia atrás (es decir, cuando frena). Si el automóvil da vuelta en un camino horizontal, tendremos a deslizarnos hacia afuera de la curva; por lo tanto, el auto tiene una aceleración hacia adentro de la curva.

Normalmente nos interesarán la aceleración instantánea, no la media. A partir de ahora, usaremos el término "aceleración" para referirnos al vector aceleración instantánea \vec{a} .

Cada componente del vector aceleración es la derivada de la componente correspondiente de la velocidad:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (\text{componentes de la aceleración instantánea}) \quad (3.10)$$

En términos de vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} \quad (3.11)$$

La componente x de las ecuaciones (3.10) y (3.11), $a_x = dv_x/dt$, es la expresión de la sección 2.3 para la aceleración instantánea en una dimensión, ecuación (2.5). La figura 3.8 muestra un ejemplo de vector aceleración que tiene componentes tanto x como y .

Como cada componente de velocidad es la derivada de la coordenada correspondiente, expresamos las componentes a_x , a_y y a_z del vector aceleración \vec{a} como

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (3.12)$$

y al vector aceleración \vec{a} como

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k} \quad (3.13)$$

Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del ejemplo 3.1. a) Obtenga las componentes de la aceleración media de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s. b) Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0$ s.

EJECUTAR: a) En el ejemplo 3.1 vimos que para $t = 0.0$ s las componentes de velocidad son

$$v_x = 0.0 \text{ m/s} \quad v_y = 1.0 \text{ m/s}$$

a que en $t = 2.00$ s las componentes son

$$v_x = -1.0 \text{ m/s} \quad v_y = 1.3 \text{ m/s}$$

Así, las componentes de la aceleración media en el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s son

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1.0 \text{ m/s} - 0.0 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s} - 0.0 \text{ s}} = -0.50 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\text{med-}y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1.3 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s} - 0.0 \text{ s}} = 0.15 \text{ m/s}^2$$

b) Con las ecuaciones (3.10), obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0.50 \text{ m/s}^2 \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0.075 \text{ m/s}^3)(2t)$$

De modo que el vector aceleración instantánea \vec{a} en el tiempo t es

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = (-0.50 \text{ m/s}^2) \hat{i} + (0.15 \text{ m/s}^3) \hat{j}$$

En el instante $t = 2.0 \text{ s}$, las componentes de la aceleración y el vector aceleración son

$$a_x = -0.50 \text{ m/s}^2 \quad a_y = (0.15 \text{ m/s}^3)(2.0 \text{ s}) = 0.30 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = (-0.50 \text{ m/s}^2) \hat{i} + (0.30 \text{ m/s}^2) \hat{j}$$

La magnitud de la aceleración en este instante es

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$= \sqrt{(-0.50 \text{ m/s}^2)^2 + (0.30 \text{ m/s}^2)^2} = 0.58 \text{ m/s}^2$$

Un diagrama de este vector (figura 3.9) muestra que el ángulo β de la dirección de \vec{a} con respecto al eje x positivo está entre 90° y 180° . Con la ecuación (3.7), tenemos

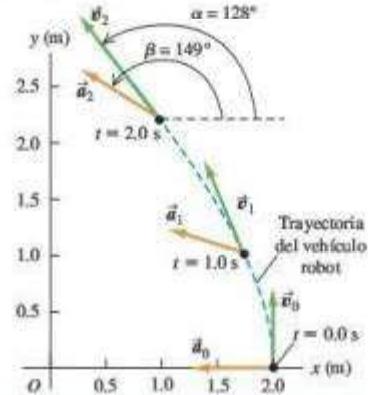
$$\arctan \frac{a_y}{a_x} = \arctan \frac{0.30 \text{ m/s}^2}{-0.50 \text{ m/s}^2} = -31^\circ$$

Así que $\beta = 180^\circ + (-31^\circ) = 149^\circ$.

EVALUAR: La figura 3.9 muestra la trayectoria y los vectores velocidad y aceleración del vehículo en $t = 0.0 \text{ s}$, 1.0 s y 2.0 s . (Se invita al

lector a utilizar los resultados del inciso b) para calcular la aceleración instantánea en $t = 0.0 \text{ s}$ y $t = 1.0 \text{ s}$). Observe que \vec{v} y \vec{a} no están en la misma dirección en ninguno de estos momentos. El vector velocidad \vec{v} es tangente a la trayectoria en cada punto (como siempre), y el de aceleración \vec{a} apunta hacia el lado cóncavo de esta.

3.9 Trayectoria del vehículo robot que muestra la velocidad y aceleración en $t = 0.0 \text{ s}$ (\vec{v}_0 y \vec{a}_0), $t = 1.0 \text{ s}$ (\vec{v}_1 y \vec{a}_1), y $t = 2.0 \text{ s}$ (\vec{v}_2 y \vec{a}_2).



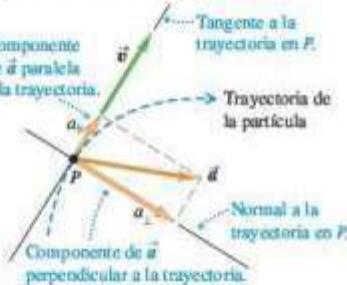
Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

Las ecuaciones (3.10) nos hablan acerca de las componentes del vector \vec{a} aceleración instantánea de una partícula a lo largo de los ejes x , y y z . Otra manera útil de visualizar \vec{a} es en términos de su componente *paralela* a la trayectoria de la partícula, es decir, paralela a la velocidad, y su componente *perpendicular* a la trayectoria, y por lo tanto, perpendicular a la velocidad (figura 3.10). Esto es porque la componente paralela a_t nos habla acerca de los cambios en la *rapidez* de la partícula; mientras que la componente perpendicular a_\perp nos indica los cambios en la *dirección del movimiento* de la partícula. Para ver por qué las componentes paralela y perpendicular de \vec{a} tienen tales propiedades, consideremos dos casos especiales.

En la figura 3.11a, el vector aceleración tiene la misma dirección que la velocidad \vec{v}_1 , de manera que \vec{a} tiene solo una componente paralela a_t (es decir, $a_\perp = 0$). El cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ en un intervalo pequeño Δt tiene la misma dirección que \vec{a} y, por lo tanto, que \vec{v}_2 . La velocidad \vec{v}_2 al final de Δt está en la misma dirección que \vec{v}_1 pero tiene mayor magnitud. Es decir, durante el intervalo Δt la partícula de la figura 3.11a se movió en línea recta con rapidez creciente (compare con la figura 3.7b).

En la figura 3.11b, la aceleración es *perpendicular* a la velocidad, de manera que \vec{a} tiene solo una componente perpendicular a_\perp (es decir, $a_t = 0$). En un intervalo

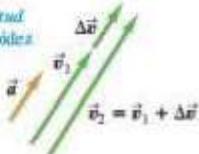
3.10 La aceleración puede descomponerse en una componente a_t paralela a la trayectoria (es decir, a lo largo de la tangente a la trayectoria) y una componente a_\perp perpendicular a la trayectoria (es decir, a lo largo de la normal a la trayectoria).



3.11 El efecto de la aceleración con dirección a) paralela y b) perpendicular a la velocidad de la partícula.

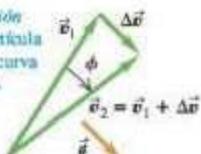
a) Aceleración paralela a la velocidad:

Solo cambia la *magnitud* de la velocidad; la rapidez cambia, pero no la dirección.



b) Aceleración perpendicular a la velocidad:

Solo cambia la *dirección* de la velocidad; la partícula sigue una trayectoria curva con rapidez constante.



pequeño Δt , el cambio de velocidad $\Delta \vec{v}$ es muy cercanamente perpendicular a \vec{v}_1 , por lo que \vec{v}_1 y \vec{v}_2 tienen direcciones diferentes. Al aproximarse el intervalo Δt a cero, el ángulo ϕ en la figura también se acerca a cero, $\Delta \vec{v}$ se vuelve perpendicular tanto a \vec{v}_1 como a \vec{v}_2 , y \vec{v}_1 y \vec{v}_2 tienen la misma magnitud. Dicho de otro modo, la rapidez de la partícula no cambia, pero la dirección del movimiento se modifica y la trayectoria de la partícula se curva.

En el caso más general, la aceleración \vec{a} tiene componentes tanto paralela como perpendicular a la velocidad \vec{v} , como en la figura 3.10. Entonces, cambiarán la rapidez de la partícula (describida por la componente paralela a_t) y su dirección (describida por la componente perpendicular a_\perp) por lo que seguirá una trayectoria curva.

La figura 3.12 muestra una partícula que se mueve sobre una trayectoria curva en tres situaciones distintas: rapidez constante, creciente y decreciente. Si la rapidez es constante, \vec{a} es perpendicular, o *normal*, a la trayectoria y a \vec{v} y apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (figura 3.12a). Si la rapidez aumenta, todavía hay una componente perpendicular de \vec{a} , pero también una paralela con la misma dirección que \vec{v} (figura 3.12b). Entonces \vec{a} apunta hacia adelante de la normal a la trayectoria (como en el ejemplo 3.2). Si la rapidez disminuye, la componente paralela tiene dirección opuesta a \vec{v} , y \vec{a} apunta hacia atrás de la normal a la trayectoria (figura 3.12c; compare con la figura 3.7a). Usaremos otra vez estas ideas en la sección 3.4 al estudiar el caso especial de movimiento en un círculo.



PhET: Maze Game

3.12 Vectores de velocidad y aceleración de una partícula que pasa por un punto P en una trayectoria curva con rapidez a) constante, b) creciente y c) decreciente.

a) Cuando la rapidez es constante en una trayectoria curva ...



b) Cuando la rapidez se incrementa en una trayectoria curva ...



c) Cuando la rapidez disminuye en una trayectoria curva ...



Ejemplo 3.3 Cálculo de las componentes paralela y perpendicular de la aceleración



Para el vehículo de los ejemplos 3.1 y 3.2, obtenga las componentes paralela y perpendicular de la aceleración en $t = 2.0$ s.

3.13 Componentes paralela y perpendicular de la aceleración del vehículo en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Queremos obtener las componentes del vector aceleración \vec{a} que sean paralela y perpendicular al vector velocidad \vec{v} . En los ejemplos 3.1 y 3.2 obtuvimos las direcciones de \vec{v} y \vec{a} respectivamente; la figura 3.9 muestra los resultados. Con estas direcciones podemos determinar el ángulo entre los dos vectores y las componentes de \vec{a} con respecto a la dirección de \vec{v} .

EJECUTAR: En el ejemplo 3.2 vimos que en $t = 2.0$ s la partícula tiene una aceleración de magnitud 0.58 m/s^2 con un ángulo de 149° con respecto al eje $+x$. Por el ejemplo 3.1, sabemos que en ese instante el vector velocidad tiene un ángulo de 128° con respecto al eje $+x$. Por lo tanto, el ángulo entre \vec{a} y \vec{v} es $149^\circ - 128^\circ = 21^\circ$ (figura 3.13). De modo que las componentes de aceleración paralela y perpendicular a \vec{v} son

$$a_t = a \cos 21^\circ = (0.58 \text{ m/s}^2) \cos 21^\circ = 0.54 \text{ m/s}^2$$

$$a_\perp = a \sin 21^\circ = (0.58 \text{ m/s}^2) \sin 21^\circ = 0.21 \text{ m/s}^2$$



EVALUAR: La componente paralela a_t es positiva (tiene la misma dirección que \vec{v}), lo cual indica que la rapidez aumenta en ese instante. El valor de $a_t = +0.54 \text{ m/s}^2$ significa que la rapidez está aumentando en ese instante a una tasa de 0.54 m/s por segundo. La componente perpendicular a_\perp no es cero, lo que significa que en ese instante el vehículo está dando vuelta; es decir, el vehículo cambia de dirección y sigue una trayectoria curva.

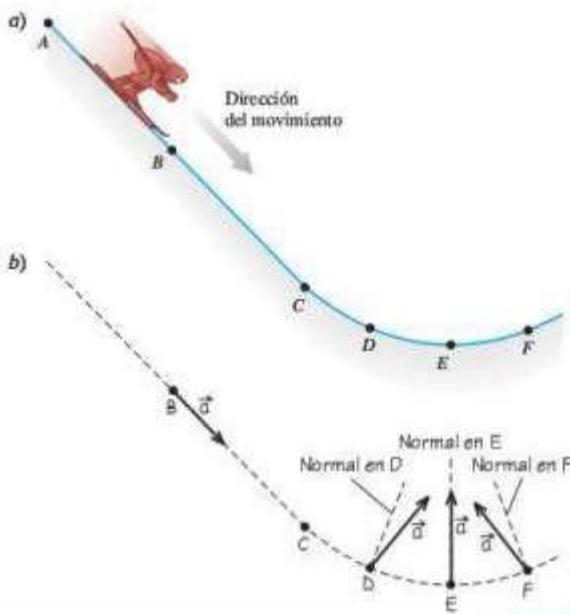
Ejemplo conceptual 3.4 Aceleración de un esquiador

Un esquiador se desplaza sobre una rampa de salto (figura 3.14a). La rampa es recta entre A y C, y curva a partir de C. La rapidez del esquiador aumenta al moverse pendiente abajo del punto A al punto E, donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector aceleración en los puntos B, D, E y F.

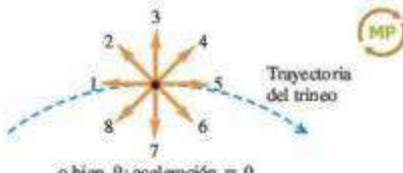
SOLUCIÓN

La figura 3.14b muestra la solución. En el punto B, el esquiador se desplaza en línea recta con rapidez creciente, así que su aceleración apunta cuesta abajo, en la misma dirección que su velocidad. En los puntos D, E y F, el esquiador sigue una trayectoria curva, así que su aceleración tiene una componente perpendicular a la trayectoria (hacia el lado cóncavo de la misma) en cada uno de estos puntos. En el punto D también existe una componente de la aceleración en la dirección del movimiento porque su rapidez aún va en aumento. Por lo tanto, el vector aceleración apunta *adelante* de la normal a su trayectoria en el punto D, como se muestra en la figura 3.14b. La rapidez del esquiador no cambia instantáneamente en E; la rapidez es máxima en este punto, así que su derivada es cero. Por lo tanto, no hay componente paralela de \vec{a} , y la aceleración es perpendicular al movimiento. En el punto F la aceleración tiene una componente *opuesta* a la dirección de su movimiento porque la rapidez está disminuyendo. De manera que el vector aceleración apunta *hacia atrás* de la normal a la trayectoria.

En la siguiente sección examinaremos la aceleración del esquiador después de salir de la rampa.

**3.14** a) La trayectoria del esquiador. b) Nuestra solución.**Evalue su comprensión de la sección 3.2**

Un trineo viaja por la cima de una colina cubierta de nieve. El trineo disminuye su rapidez conforme asciende por un lado de la colina y la aumenta cuando desciende por el otro lado. ¿Cuál de los vectores (1 a 9) en la figura muestra correctamente la dirección de la aceleración del trineo en la cima? (Considere el 9 como la aceleración cero).



o bien, 9: aceleración = 0

MP

3.3 Movimiento de proyectiles

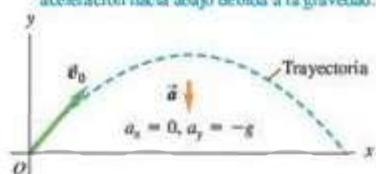
Un **proyectil** es un cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada completamente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón de fútbol lanzado, un paquete que se deja caer desde un avión y una bala disparada por un rifle son proyectiles. El camino que sigue un proyectil se conoce como su **trayectoria**.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración constante (debida a la gravedad) tanto en magnitud como en dirección. Se ignoran los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación de la Tierra. Como todos los modelos, este tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance; asimismo, la resistencia del aire es de importancia vital para un paracaidista. No obstante, podemos aprender mucho analizando este modelo sencillo. En el resto del capítulo, la frase "movimiento de proyectil" implicará que se desprecia la resistencia del aire. En el capítulo 5 veremos qué sucede cuando la resistencia no puede ignorarse.

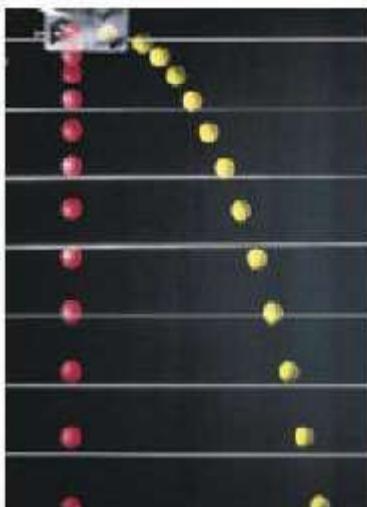
El movimiento de un proyectil siempre se limita a un plano vertical, determinado por la dirección de la velocidad inicial (figura 3.15). Esto se debe a que la aceleración

**3.15** Trayectoria idealizada de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial \vec{v}_0 .
- Su trayectoria depende solo de \vec{v}_0 y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición y , velocidad y y aceleración y , a pesar de tener diferentes posición y velocidad en x .



MasteringPHYSICS

- ActivPhysics 3.1: Solving Projectile Motion Problems
- ActivPhysics 3.2: Two Balls Falling
- ActivPhysics 3.3: Changing the x -velocity
- ActivPhysics 3.4: Projecting x - y -Accelerations



Video Tutor Demo



Video Tutor Demo



Video Tutor Demo

- 3.17** Si se ignora la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.



causada por la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede acelerar al proyectil de forma lateral. Por lo tanto, este movimiento es *bidimensional*. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas xy , con el eje x horizontal y el eje y vertical hacia arriba.

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar por separado las coordenadas x y y . La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (Por definición, g siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, a_y es negativa). Entonces, podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante. La figura 3.16 muestra dos proyectiles con movimientos diferentes en x , pero con idéntico movimiento en y ; uno se deja caer desde el reposo y el otro se proyecta horizontalmente, aunque ambos proyectiles caen la misma distancia en el mismo tiempo.

Entonces podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil con ecuaciones independientes para las componentes horizontal y vertical. Las componentes de \vec{a} son

$$a_x = 0 \quad a_y = -g \text{ (movimiento de proyectiles, sin resistencia del aire)} \quad (3.14)$$

Como las aceleraciones x y y son constantes, podemos usar las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) directamente. Por ejemplo, suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y que en este instante sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y} . Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento en x , sustituimos a_x por 0 en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

$$v_x = v_{0x} \quad (3.15)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (3.16)$$

Para el movimiento en y , sustituimos x por y , v_x por v_y , v_{0x} por v_{0y} , y a_x por $a_y = -g$:

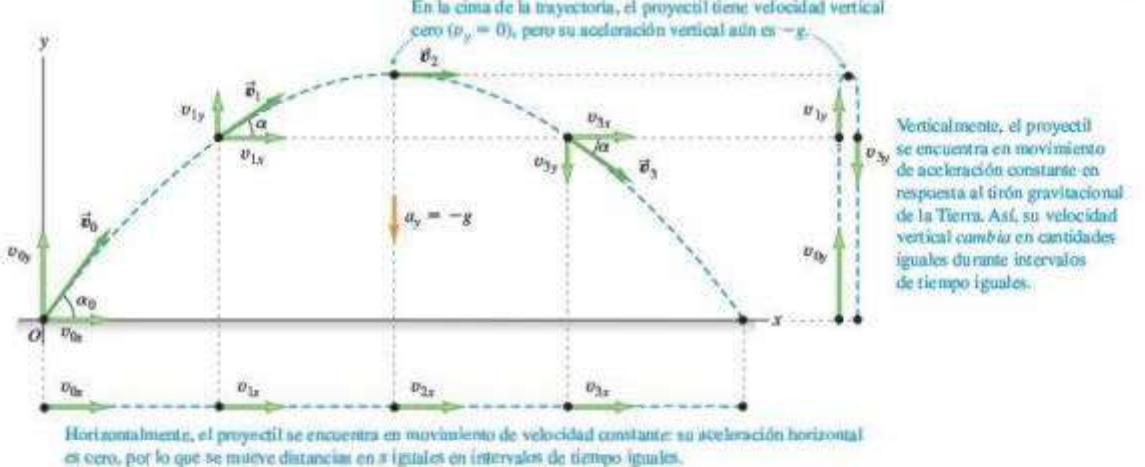
$$v_y = v_{0y} - gt \quad (3.17)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.18)$$

Por lo general, lo más sencillo es tomar la posición inicial (en $t = 0$) como el origen; así, $x_0 = y_0 = 0$. Este punto podría ser la posición de una pelota en el instante t cuando abandona la mano del lanzador, o la posición de una bala cuando sale del cañón de un arma.

La figura 3.17 muestra la trayectoria de un proyectil que parte de (o pasa por) el origen en el tiempo $t = 0$, junto con su posición, velocidad y componentes de veloci-

- 3.17** Si se ignora la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.



dad en intervalos iguales. La componente x de la aceleración es cero, así que v_x es constante. La componente y de la aceleración es constante y diferente de cero, así que v_y cambia cantidades iguales en intervalos iguales, exactamente como si el proyectil fuera lanzado verticalmente con la misma velocidad y inicial.

También podemos representar la velocidad inicial \vec{v}_0 con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo α_0 con el eje $+x$ (figura 3.18). En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0 \quad (3.19)$$

Si sustituimos estas relaciones en las ecuaciones (3.15) a (3.18), haciendo $x_0 = y_0 = 0$, tenemos

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t \quad (\text{movimiento de un proyectil}) \quad (3.20)$$

$$y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{movimiento de un proyectil}) \quad (3.21)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 \quad (\text{movimiento de un proyectil}) \quad (3.22)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt \quad (\text{movimiento de un proyectil}) \quad (3.23)$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil de la figura 3.17 en cualquier instante t .

Podemos obtener mucha información de las ecuaciones (3.20) a (3.23). Por ejemplo, en cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición \vec{r}) está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.24)$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.25)$$

La dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$ (véase la figura 3.17), está dada por

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (3.26)$$

El vector velocidad \vec{v} es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t . De las ecuaciones (3.20) y (3.21), que suponen que $x_0 = y_0 = 0$, obtenemos $t = x/(v_0 \cos \alpha_0)$ y

$$y = (\tan \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2 \quad (3.27)$$

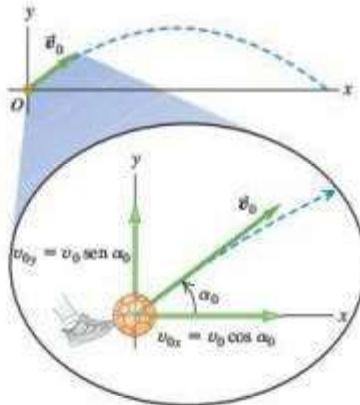
No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Como v_0 , $\tan \alpha_0$, $\cos \alpha_0$ y g son constantes, la ecuación (3.27) tiene la forma

$$y = bx - cx^2$$

donde b y c son constantes. Esta es la ecuación de una *parábola*. En el modelo simplificado de movimiento de proyectiles, la trayectoria siempre es una parábola (figura 3.19).

Cuando la resistencia del aire *no es* insignificante y debe considerarse, el cálculo de la trayectoria se vuelve mucho más complicado; los efectos de dicha resistencia dependen de la velocidad, por lo que la aceleración ya no es constante. La figura 3.20

3.18 Las componentes de la velocidad inicial v_{0x} y v_{0y} de un proyectil (como un balón de fútbol que se patea) se relacionan con la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial α_0 .



MasteringPHYSICS

PNET: Projectile Motion

ActivPhysics 3.5: Initial Velocity Components

ActivPhysics 3.6: Target Practice I

ActivPhysics 3.7: Target Practice II



3.19 Las trayectorias casi parabólicas *a*) de una pelota que rebota y *b*) de borbotones de roca fundida expulsada por un volcán.

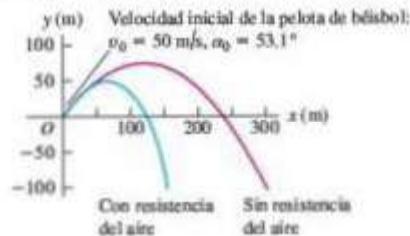
a) Las imágenes sucesivas de la pelota están separadas por intervalos iguales.



b)



3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



muestra una simulación computarizada de la trayectoria de una pelota de béisbol tanto sin resistencia del aire como con una resistencia proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota. Vemos que el efecto de la resistencia es muy grande, la altura máxima y el alcance se reducen, y la trayectoria ya no es una parábola. (Si se observa cuidadosamente la figura 3.19b, se ve que las trayectorias de los borbotones volcánicos se desvían de una forma similar a una parábola).

Ejemplo conceptual 3.5 Aceleración de un esquiador (continuación)



Consideremos de nuevo al esquiador del ejemplo conceptual 3.4. ¿Qué aceleración tiene en los puntos *G*, *H* e *I* de la figura 3.21a después de que sale de la rampa? Ignore la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

La figura 3.21b muestra la respuesta. La aceleración del esquiador cambió de un punto a otro mientras estaba en la rampa, pero tan pronto

como sale de esta, se convierte en un proyectil. Así, en los puntos *G*, *H* e *I*, y de hecho en todos los puntos después de salir de la rampa, la aceleración del esquiador apunta verticalmente hacia abajo y tiene magnitud g . Por más compleja que sea la aceleración de una partícula antes de convertirse en proyectil, su aceleración como proyectil está dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

3.21 a) Trayectoria del esquiador durante el salto. b) La solución.



Estrategia para resolver problemas 3.1 Movimiento de proyectiles



NOTA: Las estrategias utilizadas en las secciones 2.4 y 2.5 para problemas de aceleración constante en línea recta también sirven aquí.

IDENTIFICAR los conceptos relevantes: El concepto clave que debemos recordar es que durante el movimiento de un proyectil, la aceleración es hacia abajo y tiene magnitud constante g . Observe que las ecuaciones para el movimiento de proyectiles no son válidas durante el *lanzamiento* de una pelota, porque durante el lanzamiento actúan tanto la mano del lanzador como la gravedad. Las ecuaciones solo se aplican *después* de que la pelota sale de la mano del lanzador.

PLANTEAR el problema con los siguientes pasos:

- Defina su sistema de coordenadas y dibuje sus ejes. Normalmente lo más sencillo es tomar el eje x como horizontal y el eje y hacia arriba, y colocar el origen en la posición inicial ($t = 0$), donde el cuerpo se vuelve un proyectil (como cuando la pelota sale de la mano del lanzador). Entonces, las componentes de la aceleración (constante) son $a_x = 0$, $a_y = -g$, y la posición inicial es $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.
- Elabore una lista de las cantidades conocidas e incógnitas, y determine cuáles incógnitas son sus objetivos. Por ejemplo, en algunos problemas se da la velocidad inicial (ya sea las componentes, o la magnitud y dirección) y se pide obtener las coordenadas y compo-

nentes de velocidad en un instante posterior. En cualquier caso, usar las ecuaciones (3.20) a (3.23). [Las ecuaciones (3.24) a (3.27) también podrían ser útiles]. Asegúrese de tener tantas ecuaciones como incógnitas por determinar.

- Plantee el problema con palabras y luego tradúcelo a símbolos. Por ejemplo, ¿cuándo llega la partícula a cierto punto? (Es decir, ¿en qué valor de t ?). ¿Dónde está la partícula cuando la velocidad tiene cierto valor? (Es decir, ¿cuánto valen x y y cuando v_x o v_y tienen ese valor?). Puesto que $v_y = 0$ en el punto más alto de la trayectoria, la pregunta "¿cuándo alcanza el proyectil su punto más alto?" equivale a "¿cuándo vale t cuando $v_y = 0$?", Asimismo, la pregunta "¿cuándo vuelve el proyectil a su altura inicial?" equivale a "¿cuándo vale t cuando $y = y_0$?"

EJECUTAR la solución: Use las ecuaciones elegidas para obtener las incógnitas. Resista la tentación de dividir la trayectoria en segmentos y analizarlos individualmente. ¡No hay que volver a comenzar cuando el proyectil llega a su altura máxima! Lo más fácil suele ser usar los mismos ejes y escala de tiempo durante todo el problema. Si necesita valores numéricos, utilice $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

EVALUAR la respuesta: Como siempre, examine sus resultados para ver si son lógicos y si los valores numéricos son razonables.

Ejemplo 3.6 Cuerpo que se proyecta horizontalmente

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 3.22 muestra el diagrama de la trayectoria del motociclista. Una vez que el acróbata sale del risco, se mueve como un proyectil. Elegimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el borde del risco, así que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. La velocidad inicial \vec{v}_0 en el borde del risco es horizontal (es decir, $\alpha_0 = 0^\circ$), así que sus componentes son $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = 9.0 \text{ m/s}$ y $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0 = 0$. Para determinar la posición de la motocicleta en $t = 0.50 \text{ s}$, usamos las ecuaciones (3.20) y (3.21), luego calculamos la distancia al origen con la ecuación (3.24). Por último, usamos las ecuaciones (3.22) y (3.23) para determinar las componentes de velocidad en $t = 0.50 \text{ s}$.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas x y y en $t = 0.50 \text{ s}$ son

$$x = v_{0x}t = (9.0 \text{ m/s})(0.50 \text{ s}) = 4.5 \text{ m}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s})^2 = -1.2 \text{ m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está por debajo de su punto inicial.

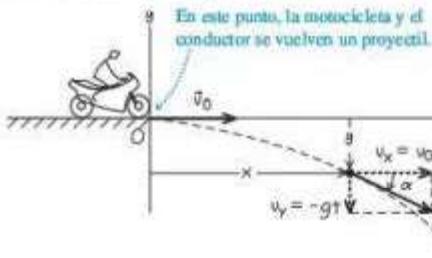
De acuerdo con la ecuación (3.24), la distancia de la motocicleta al origen en $t = 0.50 \text{ s}$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (-1.2 \text{ m})^2} = 4.7 \text{ m}$$

Según las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en $t = 0.50 \text{ s}$ son

$$v_x = v_{0x} = 9.0 \text{ m/s}$$

$$v_y = -gt = (-9.80 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s}) = -4.9 \text{ m/s}$$

**3.22** Diagrama de este problema.

En este punto, la motocicleta y el conductor se vuelven un proyectil.

La motocicleta tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando salió del risco en $t = 0$, pero, además, hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (negativa). El vector velocidad en $t = 0.50 \text{ s}$ es

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (9.0 \text{ m/s}) \hat{i} + (-4.9 \text{ m/s}) \hat{j}$$

A partir de la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en $t = 0.50 \text{ s}$ es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ = \sqrt{(9.0 \text{ m/s})^2 + (-4.9 \text{ m/s})^2} = 10.2 \text{ m/s}$$

De acuerdo con la ecuación (3.26), el ángulo α del vector velocidad es

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \left(\frac{-4.9 \text{ m/s}}{9.0 \text{ m/s}} \right) = -29^\circ$$

La velocidad está dirigida 29° por abajo de la horizontal.

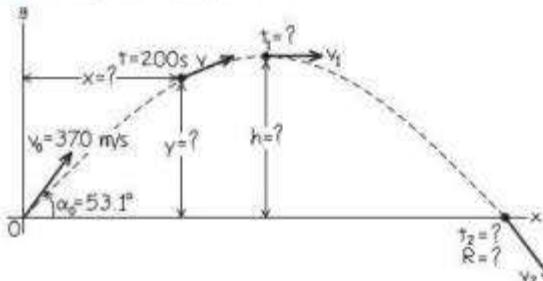
EVALUAR: Al igual que en la figura 3.17, el movimiento horizontal de la motocicleta no cambia por la gravedad: la motocicleta se sigue moviendo horizontalmente a 9.0 m/s, cubriendo 4.5 m en 0.50 s. La motocicleta tiene cero velocidad inicial vertical, de modo que cae verticalmente igual que un objeto que se deja caer desde el reposo y desciende una distancia de $\frac{1}{2}gt^2 = 1.2 \text{ m}$ en 0.50 s.

Ejemplo 3.7 Altura y alcance de un proyectil I: una pelota de béisbol bateada

Un bateador golpea una pelota de béisbol de modo que esta sale del bate a una rapidez $v_0 = 37.0 \text{ m/s}$ con un ángulo $\alpha_0 = 53.1^\circ$. a) Calcule la posición de la pelota y su velocidad (magnitud y dirección) cuando $t = 2.00 \text{ s}$. b) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto de su vuelo y su altura h en ese punto. c) Obtenga el *alcance horizontal R*, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como muestra la figura 3.20, la resistencia del aire afecta significativamente el movimiento de una pelota de béisbol; no obstante, por sencillez, en este ejemplo la ignoraremos y usaremos las ecuaciones del movimiento de proyectiles para describir el movimiento. La pelota sale del bate en $t = 0$ a un metro más o menos arriba del suelo, pero ignoraremos esta distancia y supondremos que sale del nivel del suelo ($y_0 = 0$). La figura 3.23 muestra el diagrama de

3.23 Diagrama de este problema.

la trayectoria de la pelota. Usaremos el mismo sistema de coordenadas que en las figuras 3.17 y 3.18, de modo que podremos usar las ecua-

Continúa

ciones (3.20) a (3.23). Las incógnitas son *a)* la posición *y* y velocidad de la pelota 2.00 s después de perder contacto con el bate; *b)* el tiempo *t* cuando la pelota alcanza su altura máxima (es decir, cuando $v_y = 0$) y la coordenada *x* en ese momento, y *c)* la coordenada *x* cuando la pelota vuelve a tocar el suelo ($y = 0$).

EJECUTAR: *a)* Queremos obtener x , y , v_x y v_y en $t = 2.00$ s. La velocidad inicial de la pelota tiene las componentes

$$\begin{aligned}v_{0x} &= v_0 \cos \alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \cos 53.1^\circ = 22.2 \text{ m/s} \\v_{0y} &= v_0 \sin \alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \sin 53.1^\circ = 29.6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

De acuerdo con las ecuaciones (3.20) a (3.23),

$$\begin{aligned}x &= v_{0x}t = (22.2 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) = 44.4 \text{ m} \\y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\&= (29.6 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 \\&= 39.6 \text{ m} \\v_x &= v_{0x} = 22.2 \text{ m/s} \\v_y &= v_{0y} - gt = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) \\&= 10.0 \text{ m/s}\end{aligned}$$

La componente *y* de la velocidad es positiva en $t = 2.00$ s, de modo que la pelota todavía va en ascenso (figura 3.23). La magnitud y dirección de la velocidad se obtienen de las ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2 \text{ m/s})^2 + (10.0 \text{ m/s})^2} \\&= 24.4 \text{ m/s} \\ \alpha &= \arctan \left(\frac{10.0 \text{ m/s}}{22.2 \text{ m/s}} \right) = \arctan 0.450 = 24.2^\circ\end{aligned}$$

La dirección de la velocidad (es decir, la dirección del movimiento) es 24.2° arriba de la horizontal.

b) En el punto más alto, la velocidad vertical v_y es cero. Sea ese instante t_1 ; entonces,

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0y} - gt_1 = 0 \\t_1 &= \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 3.02 \text{ s}\end{aligned}$$

La altura *h* en el punto más alto es el valor de *y* cuando $t = t_1$:

$$\begin{aligned}h &= v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \\&= (29.6 \text{ m/s})(3.02 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(3.02 \text{ s})^2 \\&= 44.7 \text{ m}\end{aligned}$$

c) Obtendremos el alcance horizontal en dos pasos. Primero, determinamos el tiempo t_2 cuando $y = 0$ (la pelota está en el suelo):

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2)$$

Esta es una ecuación cuadrática en t_2 , con dos raíces:

$$t_2 = 0 \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6 \text{ m/s})}{9.80 \text{ m/s}^2} = 6.04 \text{ s}$$

La pelota está en $y = 0$ en estos dos tiempos. La pelota abandona el suelo en $t_2 = 0$, y en $t_2 = 2v_{0y}/g = 6.04$ s es cuando regresa al suelo.

El alcance horizontal *R* es el valor de *x* cuando la pelota vuelve al suelo, en $t_2 = 6.04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22.2 \text{ m/s})(6.04 \text{ s}) = 134 \text{ m}$$

La componente vertical de la velocidad cuando la pelota toca el suelo es

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0y} - gt_2 = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(6.04 \text{ s}) \\&= -29.6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Es decir, v_y tiene la misma magnitud que la velocidad vertical inicial v_{0y} pero dirección opuesta (hacia abajo). Como v_x es constante, el ángulo $\alpha = -53.1^\circ$ (debajo de la horizontal) en este punto es el negativo del ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1^\circ$.

EVALUAR: A menudo es útil verificar los resultados obteniéndolos de una forma distinta. Por ejemplo, también podemos obtener la altura máxima del inciso *b*) aplicando la fórmula de aceleración constante, la ecuación (2.13), para el movimiento en *y*:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

En el punto más alto, $v_y = 0$ y $y = h$. Se debe despejar *h* de esta ecuación y obtener el mismo resultado calculado en el inciso *b*). ¿Es así?

Observe que el tiempo en que la pelota golpea el suelo, $t_2 = 6.04$ s, es exactamente el doble del tiempo en que alcanza su punto más alto, $t_1 = 3.02$ s. De modo que el tiempo de bajada es igual al tiempo de subida. Esto siempre es así, si los puntos inicial y final tienen la misma elevación y se ignora la resistencia del aire.

Observe también que $h = 44.7$ m del inciso *b*) es comparable con la altura de 52.4 m del techo sobre el campo de juego en el Metrodome Hubert H. Humphrey en Minneapolis, y el alcance horizontal *R* = 134 m del inciso *c*) es mayor que la distancia de 99.7 m entre *home* y la barra del jardín derecho del Campo Safeco en Seattle. En realidad, debido a la resistencia del aire (la cual se ignoró), una pelota bateada con la velocidad inicial y el ángulo utilizados aquí no subirá tan alto ni llegará tan lejos como hemos calculado (véase la figura 3.20).

Ejemplo 3.8 Altura y alcance de un proyectil II: Altura máxima, alcance máximo

Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 a un ángulo inicial α_0 entre 0° y 90° , obtenga la altura máxima *h* y el alcance horizontal *R* (véase la figura 3.23). Para una v_0 dada, ¿qué valor de α_0 da la altura máxima? ¿Y qué valor da el alcance horizontal máximo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Estos son casi los mismos incisos *b*) y *c*) del ejemplo 3.7, excepto que ahora buscamos expresiones generales para *h* y *R*. También nos interesan los valores de α_0 que dan los valores



máximos de h y R . En el inciso b) del ejemplo 3.7 vimos que el proyectil alcanza el punto máximo de su trayectoria (de manera que $v_y = 0$) en el tiempo $t_1 = v_0/g$, y en el inciso c) determinamos que el proyectil regresa a su altura inicial (por lo que $y = y_0$) en el tiempo $t_2 = 2v_0/g = 2t_1$. Usaremos la ecuación (3.21) para determinar la coordenada y de h en t_1 , y la ecuación (3.20) para calcular la coordenada x de R en t_2 . Expressaremos nuestras respuestas en términos de la rapidez de lanzamiento v_0 y el ángulo de disparo α_0 usando las ecuaciones (3.19).

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (3.19), $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ y $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$. Por lo tanto, podemos escribir el tiempo t_1 en que $v_y = 0$ como

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

La ecuación (3.21) nos da la altura $y = h$ en ese instante:

$$\begin{aligned} h &= (v_0 \sin \alpha_0) \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} \end{aligned}$$

Para una rapidez de lanzamiento dada v_0 , el valor máximo de h se da con $\sin \alpha_0 = 1$ y $\alpha_0 = 90^\circ$; es decir, cuando el proyectil se lanza verticalmente hacia arriba. (Si se lanza horizontalmente, como en el ejemplo 3.6, $\alpha_0 = 0^\circ$ y la altura máxima es cero!).

El tiempo t_2 en que el proyectil regresa al suelo es

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

El alcance horizontal R es el valor de x en este instante. De acuerdo con la ecuación (3.20), este es

$$\begin{aligned} R &= (v_0 \cos \alpha_0)t_2 = (v_0 \cos \alpha_0) \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9 Alturas inicial y final distintas

Usted lanza una pelota desde una ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° abajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana llegaría la pelota al piso? Ignore la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al igual que en los ejemplos 3.7 y 3.8, queremos determinar la coordenada horizontal de un proyectil cuando tiene un valor determinado de y . La diferencia en este caso es que el valor de y no es el mismo que el valor inicial. Una vez más, elegimos el eje x como horizontal, y el eje y hacia arriba, y colocamos el origen de las coordenadas en el punto donde la pelota sale de su mano (figura 3.25). Así, tenemos $v_0 = 10.0 \text{ m/s}$ y $\alpha_0 = -20^\circ$ (el ángulo es negativo porque la velocidad inicial está debajo de la horizontal). Nuestra incógnita es el valor de x cuando la pelota llega al suelo en $y = -8.0 \text{ m}$. Usamos la ecuación (3.21) para obtener el instante t cuando esto sucede; después, calculamos el valor de x en ese instante con la ecuación (3.20).

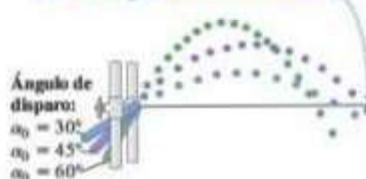
(Se usa la identidad trigonométrica $2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = \sin 2\alpha_0$, que se encuentra en el apéndice B). El valor máximo de $\sin 2\alpha_0$ es 1; esto ocurre cuando $2\alpha_0 = 90^\circ$, o bien, $\alpha_0 = 45^\circ$. Este ángulo da el alcance máximo para una rapidez inicial dada si se ignora la resistencia del aire.

VERIFICAR: La figura 3.24 se basa en una fotografía compuesta de tres trayectorias de una pelota proyectada desde un cañón de resorte con ángulos de 30° , 45° y 60° . La rapidez inicial v_0 es aproximadamente igual en los tres casos. El alcance horizontal es mayor para el ángulo de 45° . Los alcances son aproximadamente los mismos para los ángulos de 30° y 60° . ¿Puede usted demostrar que, para un valor dado de v_0 , el alcance es igual para un ángulo inicial α_0 y para un ángulo inicial de $90^\circ - \alpha_0$? (Este no es el caso de la figura 3.24 debido a la resistencia del aire).

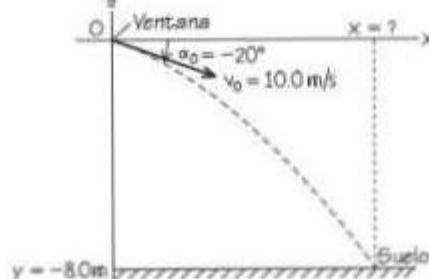
CUBABO *Altura y alcance de un proyectil* No recomendamos memorizar las expresiones anteriores para h , R y R_{\max} . Son aplicables solo en las circunstancias especiales que describimos. En particular, las expresiones para el alcance R y alcance máximo R_{\max} solo pueden utilizarse cuando las alturas de lanzamiento y aterrizaje son iguales. En muchos de los problemas al final de este capítulo, estas ecuaciones *no* deben aplicarse.

3.24 Un ángulo de disparo de 45° produce el alcance horizontal máximo. El alcance es menor con ángulos de 30° y 60° .

Un ángulo de disparo de 45° produce el máximo alcance; con otros ángulos, el alcance es menor.



3.25 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: Para determinar t , escribimos la ecuación (3.21) en la forma normal de una ecuación cuadrática en t :

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \sin \alpha_0)t + y_0 = 0$$

Continúa

Las raíces de esta ecuación son

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)^2 - 4(\frac{1}{2}g)y}}{2(\frac{1}{2}g)} \\ &= \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 - 2gy}}{g} \\ &= \frac{[(10.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(-20^\circ)] \pm \sqrt{(10.0 \text{ m/s})^2 \operatorname{sen}^2(-20^\circ) - 2(9.80 \text{ m/s}^2)(-8.0 \text{ m})}}{9.80 \text{ m/s}^2} \\ &= -1.7 \text{ s} \quad \text{o} \quad 0.98 \text{ s} \end{aligned}$$

Desechamos la raíz negativa, ya que se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos indica que la pelota llega al suelo en $t = 0.98 \text{ s}$. De acuerdo con la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \alpha_0)t = (10.0 \text{ m/s})[\cos(-20^\circ)](0.98 \text{ s}) \\ &= 9.2 \text{ m} \end{aligned}$$

La pelota llega al suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

EVALUAR: La raíz $t = -1.7 \text{ s}$ es un ejemplo de solución "ficticia" para una ecuación cuadrática. Ya vimos esto en el ejemplo 2.8 de la sección 2.5; le recomendamos repasarlo.

Ejemplo 3.10 El cuidador del zoológico y el mono



Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como el cuidador no logra atraerlo, dispara un dardo sedante directamente hacia el mono (figura 3.26). El mono salta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle. Demuestre que el dardo golpeará al mono, *siempre* que lo alcance antes de que este llegue al piso y se aleje.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Tenemos *dos* cuerpos que se mueven como proyectiles: el dardo y el mono. Ambos tienen posición y velocidad iniciales distintas; sin embargo, entran en movimiento de proyectil al mismo tiempo $t = 0$. Primero usaremos la ecuación (3.20) para encontrar el tiempo t en que las coordenadas x_{mono} y x_{dardo} son iguales. Luego, usaremos la ecuación (3.21) para verificar si y_{mono} y y_{dardo} también son iguales en ese instante; si lo son, el dardo golpeará al mono.

Elegimos las direcciones x y y acostumbradas, y colocamos el origen de las coordenadas en el extremo del cañón del rifle (figura 3.26).

EJECUTAR: El mono cae verticalmente, así que $x_{\text{mono}} = d$ en todo momento. La ecuación (3.20) nos indica que $x_{\text{dardo}} = (v_0 \cos \alpha_0)t$. Despejamos el tiempo t cuando las coordenadas x son iguales:

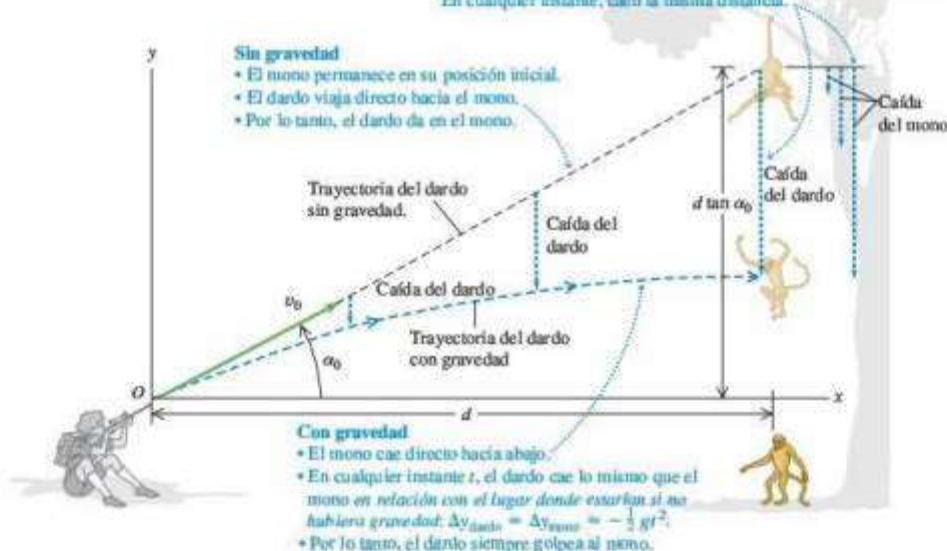
$$d = (v_0 \cos \alpha_0)t \quad \text{así que} \quad t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha_0}$$

Se debe demostrar ahora que $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$ en este instante. El mono está en caída libre unidimensional; su posición en cualquier momento está dada por la ecuación (2.12) cambiando debidamente los símbolos. La figura 3.26 muestra que la altura inicial del mono arriba del cañón del rifle es $y_{\text{mono},0} = d \tan \alpha_0$, así que

$$y_{\text{mono}} = d \tan \alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

3.26 El dardo con sedante golpea al mono que cae.

Las flechas punteadas muestran qué tanto han caído el mono y el dardo en tiempos específicos, en relación con el lugar donde estarían si no hubiera gravedad. En cualquier instante, caen la misma distancia.



De acuerdo con la ecuación (3.21),

$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Comparando estas dos ecuaciones, vemos que si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \sin \alpha_0)t$ en el instante en que las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$ (el dardo habrá acertado). Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$. Con seguridad, obtenemos

$$(v_0 \sin \alpha_0)t = (v_0 \sin \alpha_0) \frac{d}{v_0 \cos \alpha_0} = d \tan \alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas y del dardo y el mono son iguales en el mismo instante, las coordenadas x también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono *siempre* lo golpeará, sin importar v_0 (siempre que el mono no llegue al suelo primero). Este resultado es independiente de g , la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad ($g = 0$), el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos "caen" la misma distancia $g t^2 / 2$ por debajo de sus posiciones cuando $t = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono (figura 3.26).

Evaluó su comprensión de la sección 3.3

En el ejemplo 3.10, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono, como se indica en la figura. Cuando el dardo está en P , ¿el mono estará en i, el punto A (más alto que P), ii, el punto B (a la misma altura que P) o iii, en el punto C (más abajo que P)? Ignore la resistencia del aire.



3.4 Movimiento en círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto significa que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el importante caso especial de movimiento en círculo.

Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, el movimiento se conoce como **movimiento circular uniforme**. Un automóvil que da vuelta en una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento (figura 3.27c; compárela con la figura 3.12a). No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (¡nunca hacia afuera!), al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin que cambie la rapidez.

3.27 Un automóvil con movimiento circular. Si el automóvil tiene movimiento circular uniforme como en c), la rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular (compare con la figura 3.12).

a) El automóvil aumenta su rapidez en una trayectoria circular

Componente de aceleración paralela a la velocidad: cambia la rapidez del automóvil.



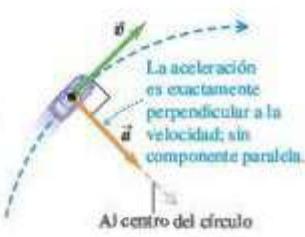
Componente de aceleración perpendicular a la velocidad: cambia la dirección del automóvil.

b) El automóvil disminuye su rapidez en una trayectoria circular



Componente de aceleración perpendicular a la velocidad: cambia la dirección del automóvil.
Componente de aceleración paralela a la velocidad: cambia la rapidez del automóvil.

c) Movimiento circular uniforme: Rapidez constante en una trayectoria circular

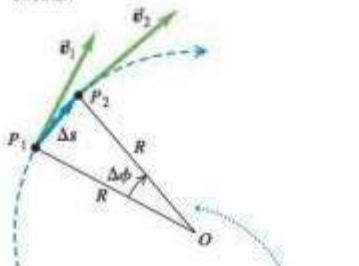


La aceleración es exactamente perpendicular a la velocidad; sin componente paralela.

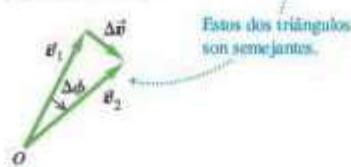
Al centro del círculo

3.28 Determinación del cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$, aceleración media \vec{a}_{med} , y aceleración instantánea \vec{a}_{rad} de una partícula que se mueve en círculo con rapidez constante.

- a) Una partícula se mueve una distancia Δs con rapidez constante en una trayectoria circular.



- b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



- c) Aceleración instantánea



Se puede obtener una relación sencilla para la magnitud de la aceleración en movimiento circular uniforme. Iniciamos con la figura 3.28a, la cual muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O . La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt . El cambio vectorial en la velocidad $\Delta\vec{v}$ durante este tiempo se muestra en la figura 3.28b.

Los ángulos identificados como $\Delta\phi$ en las figuras 3.28a y 3.28b son iguales porque \vec{v}_1 es perpendicular a la línea OP_1 , y \vec{v}_2 es perpendicular a la línea OP_2 . Por lo tanto, los triángulos en las figuras 3.28a y 3.28b son *semejantes*. Las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \quad \text{o bien,} \quad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R} \Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es, entonces,

$$a_{\text{med}} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración *instantánea* \vec{a} en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1 :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si el intervalo Δt es muy corto, Δs es la distancia que se mueve la partícula en la trayectoria curva. De modo que el límite de $\Delta s/\Delta t$ es la rapidez v_1 en el punto P_1 . Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y representar con v la rapidez en cualquier punto. Entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{movimiento circular uniforme}) \quad (3.28)$$

Se agrega el subíndice “rad” para recordar que la dirección de la aceleración instantánea en cualquier punto siempre se encuentra a lo largo de un radio del círculo (hacia el centro; véase las figuras 3.27c y 3.28c). En conclusión, *en el movimiento circular uniforme, la magnitud a_{rad} de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la rapidez v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a \vec{v} y hacia adentro sobre el radio*.

Como la aceleración en el movimiento circular uniforme siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama **aceleración centrípeta**. La palabra “centrípeta” se deriva de dos vocablos griegos que significan “que busca el centro”. La figura 3.29a muestra las direcciones de los vectores velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme.

3.29 Aceleración y velocidad a) de una partícula con movimiento circular uniforme y b) de un proyectil sin resistencia del aire.

- a) Movimiento circular uniforme



- b) Movimiento de un proyectil



CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra movimiento de proyectiles** La aceleración en el movimiento circular uniforme (figura 3.29a) tiene algunas similitudes con la aceleración en el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire (figura 3.29b), pero también existen algunas diferencias importantes. En ambas clases de movimiento la *magnitud* de la aceleración siempre es la misma. Sin embargo, en el movimiento circular uniforme la *dirección* de \vec{a} cambia continuamente, de manera que siempre apunta hacia el centro del círculo. (En la parte superior del círculo, la aceleración apunta hacia abajo; en la parte inferior del círculo, la aceleración apunta hacia arriba). En contraste, en el movimiento de proyectiles, la dirección de \vec{a} es la misma en todo momento.

También podemos expresar la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, es decir, el tiempo que dura una revolución (una vuelta completa alrededor del círculo). En un tiempo T , la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$, así que su rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (3.29)$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.28), obtenemos la expresión alternativa

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (\text{movimiento circular uniforme}) \quad (3.30)$$



PhET: Ladybug Revolution
PhET: Motion in 2D

Ejemplo 3.11 Aceleración centrípeta en un camino curvo

Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una “aceleración lateral” de $0.96g = (0.96)(9.8 \text{ m/s}^2) = 9.4 \text{ m/s}^2$. Esta es la aceleración centrípeta máxima que puede tener el automóvil sin salirse desplazando de la trayectoria curva. Si el automóvil viaja a 40 m/s (cerca de 89 mi/h o 144 km/h), en una pista plana, ¿cuál es el radio R mínimo de curva sin peralte que puede tomar?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: El automóvil tiene movimiento circular uniforme porque se desplaza con rapidez constante en una curva, que es un segmento de un círculo. Se usa la ecuación (3.28) para obtener la incógnita R en términos de la aceleración centrípeta

dada a_{rad} y la rapidez v :

$$R = \frac{v^2}{a_{\text{rad}}} = \frac{(40 \text{ m/s})^2}{9.4 \text{ m/s}^2} = 170 \text{ m (aproximadamente 560 ft)}$$

Este es el radio *mínimo* porque a_{rad} es la aceleración centrípeta *máxima*.

EVALUAR: El radio de giro mínimo R es proporcional al cuadrado de la rapidez; por lo tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá un 36% (de 170 a 109 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.

Ejemplo 3.12 Aceleración centrípeta en un juego mecánico

En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante en un círculo horizontal de 5.0 m de radio, dando una vuelta completa cada 4.0 s . ¿Qué aceleración tienen?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La rapidez es constante, así que se trata de movimiento circular uniforme. Nos dan el radio $R = 5.0 \text{ m}$ y el periodo $T = 4.0 \text{ s}$, así que se puede usar la ecuación (3.30) para calcular la aceleración directamente, o se puede calcular v con la ecuación (3.29) y luego obtener la aceleración con la ecuación (3.28).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (3.30),

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2(5.0 \text{ m})}{(4.0 \text{ s})^2} = 12 \text{ m/s}^2 = 1.3g$$

Verificamos esta respuesta usando el segundo enfoque indirecto. A partir de la ecuación (3.29), la rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5.0 \text{ m})}{4.0 \text{ s}} = 7.9 \text{ m/s}$$

La aceleración centrípeta es entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.9 \text{ m/s})^2}{5.0 \text{ m}} = 12 \text{ m/s}^2$$

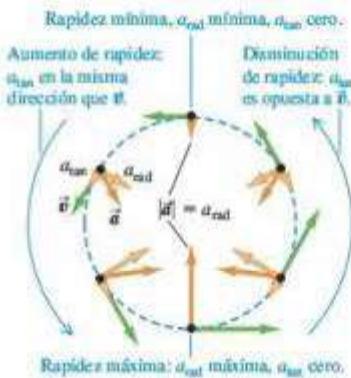
EVALUAR: Al igual que en el ejemplo 3.11, la dirección de \vec{a} siempre es hacia el centro del círculo. La magnitud de \vec{a} es relativamente suave conforme el juego mecánico avanza; algunas montañas rusas someten a sus pasajeros a aceleraciones de hasta $4g$.

Aplicación Cuidado: ¡Se aproximan curvas cerradas!

Estos carros de la montaña rusa tienen movimiento circular no uniforme: frenan y aceleran conforme se mueven alrededor de un lazo vertical. Las grandes aceleraciones implicadas en un viaje a alta velocidad alrededor de un lazo ajustado significan un esfuerzo adicional en los sistemas circulatorios de los pasajeros; por esa razón, las personas con condiciones cardíacas deben abstenerse de subirse a la montaña rusa.



3.30 Partícula que se mueve en un lazo vertical, como un carro de montaña rusa, con rapidez variable.

**Movimiento circular no uniforme**

En esta sección, hemos supuesto que la rapidez de la partícula es constante conforme viaja alrededor de un círculo. Si la rapidez varía, tenemos un **movimiento circular no uniforme**. En el movimiento circular no uniforme, la ecuación (3.28) nos sigue dando la componente *radial* de la aceleración $a_{\text{rad}} = v^2/R$, que siempre es *perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, puesto que la rapidez v tiene valores distintos en diferentes puntos del movimiento, el valor de a_{rad} no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor en el punto del círculo donde la rapidez es mayor.

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración *paralela* a la velocidad instantánea (véase las figuras 3.27a y 3.27b). Esta es la componente a_t que vimos en la sección 3.2, y aquí la llamamos a_{\tan} para destacar que es *tangente* al círculo. La componente de aceleración tangencial a_{\tan} es igual a la tasa de cambio de la *rapidez*. Entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_{\tan} = \frac{d|v|}{dt} \quad (\text{movimiento circular no uniforme}) \quad (3.31)$$

La componente tangencial tiene la misma dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando (figura 3.30). Si la rapidez de la partícula es constante, $a_{\tan} = 0$.

CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra no uniforme** Observe que las dos cantidades

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \quad \text{y} \quad \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$$

no son iguales. La primera, igual a la aceleración tangencial, es la tasa de cambio de la rapidez; es igual a cero siempre que una partícula se mueve con rapidez constante, incluso cuando cambia la dirección de su movimiento (como en el movimiento circular *uniforme*). La segunda es la magnitud de la aceleración vectorial; es igual a cero solo cuando el *vector* aceleración es cero, es decir, cuando la partícula se mueve en línea recta con rapidez constante. En el movimiento circular *uniforme* $|d\vec{v}/dt| = a_{\text{rad}} = v^2/r$; en el movimiento circular *no uniforme* también existe una componente tangencial de la aceleración, de manera que $|d\vec{v}/dt| = \sqrt{a_{\text{rad}}^2 + a_{\tan}^2}$.

EVALÚE SU COMPRENSIÓN DE LA SECCIÓN 3.4 Suponga que la partícula de la figura 3.30 experimenta una aceleración cuatro veces mayor en la parte inferior del lazo que en la parte superior del mismo. En comparación con la rapidez en la parte superior del lazo, ¿la rapidez en la parte inferior del lazo es i. $\sqrt{2}$ veces mayor; ii. 2 veces mayor; iii. $2\sqrt{2}$ veces mayor; iv. 4 veces mayor; o v. 16 veces mayor?

**3.5 Velocidad relativa**

Sin duda, usted ha observado que un automóvil que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo en movimiento, obtienen diferentes resultados si uno de ellos se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador determinado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente la **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación donde la comprensión de la velocidad relativa es extremadamente importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos para un plano.

Velocidad relativa en una dimensión

Una pasajera camina con una velocidad de 1.0 m/s por el pasillo del vagón de un ferrocarril que se mueve a 3.0 m/s (figura 3.32a). ¿Cuál es la velocidad de la pasajera?

Esta es una pregunta sencilla, pero no tiene una sola respuesta. Para un segundo pasajero sentado en el tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s. Para un ciclista que está detenido junto al tren, la pasajera se mueve a $1.0 \text{ m/s} + 3.0 \text{ m/s} = 4.0 \text{ m/s}$. Un observador en otro tren que va en la dirección opuesta daría otra respuesta. Debemos especificar quién es el observador y dar la velocidad *relativa* a él. La velocidad de la pasajera relativa al tren es 1.0 m/s, la velocidad relativa al ciclista es 4.0 m/s, etcétera. Cada observador, equipado en principio con un metro y un cronómetro, constituye lo que llamamos un **marco de referencia**. Así, un marco de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo.

Sea A el marco de referencia del ciclista (en reposo con respecto al suelo) y B el marco de referencia del tren en movimiento. En el movimiento rectilíneo, la posición de un punto P relativa al marco de referencia A está dada por $x_{P/A}$ (la posición de P con respecto a A), y la posición de P con respecto al marco B está dada por $x_{P/B}$ (véase la figura 3.32b). La distancia del origen de B respecto al origen de A es $x_{B/A}$. La figura 3.32b indica que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \quad (3.32)$$

En palabras, la coordenada de P en relación con A es igual a la coordenada de P en relación con B más la coordenada de B en relación con A .

La velocidad de P relativa al marco A , denotada con $v_{P/A-x}$, es la derivada de $x_{P/A}$ con respecto al tiempo. Las otras velocidades se obtienen de igual manera, así que la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.32) nos da la relación entre las velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \quad \text{o bien,}$$

$$v_{P/A-x} = v_{P/B-x} + v_{B/A-x} \quad (\text{velocidad relativa en una línea}) \quad (3.33)$$

Volviendo al caso de la pasajera en el tren de la figura 3.32, vemos que A es el marco de referencia del ciclista, B es el marco de referencia del tren y el punto P representa a la mujer. Usando la notación anterior, tenemos

$$v_{P/B-x} = +1.0 \text{ m/s} \quad v_{B/A-x} = +3.0 \text{ m/s}$$

De acuerdo con la ecuación (3.33), la velocidad $v_{P/A-x}$ de la pasajera relativa al ciclista es

$$v_{P/A-x} = +1.0 \text{ m/s} + 3.0 \text{ m/s} = +4.0 \text{ m/s}$$

como ya sabíamos.

En este ejemplo, ambas velocidades van hacia la derecha, y hemos tomado esta dirección como positiva. Si la pasajera camina hacia la *izquierda* en relación con el tren, entonces, $v_{P/B-x} = -1.0 \text{ m/s}$, y su velocidad relativa al ciclista es $v_{P/A-x} = -1.0 \text{ m/s} + 3.0 \text{ m/s} = +2.0 \text{ m/s}$. La suma de la ecuación (3.33) siempre es algebraica, y cualquiera o todas las velocidades pueden ser negativas.

Si la pasajera se asoma por la ventana, le parecerá que el ciclista estacionario se mueve hacia atrás; llamamos $v_{A/P-x}$ a la velocidad del ciclista relativa a ella. Es evidente que esta es el negativo de la velocidad de la *pasajera* en relación con el ciclista, $v_{P/A-x}$. En general, si A y B son dos puntos o marcos de referencia cualesquiera,

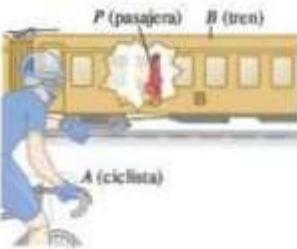
$$v_{A/B-x} = -v_{B/A-x} \quad (3.34)$$

3.31 Los pilotos de acrobacias aéreas enfrentan un complicado problema de velocidades relativas. Deben estar pendientes de su movimiento en relación con el aire (y así mantener un flujo suficiente de aire sobre las alas para la sustentación), su movimiento en relación con los otros aviones (para mantener una formación cerrada sin chocar) y su movimiento en relación con el público (para que los espectadores no los pierdan de vista).



3.32 a) Una pasajera camina dentro de un tren. b) La posición de la mujer relativa al marco de referencia del ciclista y al marco de referencia del tren.

a)



b)



Estrategia para resolver problemas 3.2 *Velocidad relativa*

IDENTIFICAR los conceptos relevantes: Siempre que lea la frase "velocidad relativa a" o "velocidad con respecto a", seguramente le resultarán útiles los conceptos de velocidad relativa.

PLANTEAR el problema: Dibuje e identifique todos los marcos de referencia del problema. Cada cuerpo en movimiento tiene su propio marco de referencia; además, casi siempre se tiene que incluir el marco de referencia de la superficie terrestre. (Enunciados como "el automóvil viaja al norte a 90 km/h" se refieren implícitamente a la velocidad del auto relativa a la superficie terrestre). Use los títulos para identificar la incógnita. Por ejemplo, si quiere obtener la velocidad de un automóvil (*C*) con respecto a un autobús (*B*), la incógnita es $v_{C/B-x}$.

EJECUTAR la solución: Despeje la incógnita empleando la ecuación (3.33). (Si las velocidades no tienen la misma dirección, será preciso usar la forma vectorial de esta ecuación, que deduciremos más adelante en esta misma sección). Es importante observar el orden de los

dobles subíndices en la ecuación (3.33): $v_{B/A-x}$ significa "velocidad de *B* relativa a *A*". Estos subíndices obedecen a un tipo de álgebra, como muestra la ecuación (3.33). Si consideramos a cada uno como una fracción, la fracción del miembro izquierdo es el *producto* de las fracciones del miembro derecho: $P/A = (P/B)(B/A)$. Se puede aplicar esta regla a cualquier cantidad de marcos de referencia. Por ejemplo, si hay tres marcos de referencia distintos *A*, *B* y *C*, la ecuación (3.33) se convierte en

$$v_{P/A-x} = v_{P/C-x} + v_{C/B-x} + v_{B/A-x}$$

EVALUAR la respuesta: Esté pendiente de los signos menos (-) en su respuesta. Si la incógnita es la velocidad de un automóvil relativa a un autobús ($v_{C/B-x}$), asegúrese de no haber calculado por equivocación la velocidad del autobús relativa al automóvil ($v_{B/C-x}$). Si cometió este error, la ecuación (3.34) le dará la respuesta correcta.

Ejemplo 3.13 *Velocidad relativa en un camino recto*

Usted viaja al norte en un camino recto de dos carriles con rapidez constante de 88 km/h. Un camión que viaja con rapidez constante de 104 km/h se acerca a usted en el otro carril (figura 3.33). Obtenga a) la velocidad del camión relativa a usted y b) su velocidad relativa al camión. c) ¿Cómo cambian las velocidades relativas una vez que los dos vehículos se han pasado? Considere este problema como unidimensional.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y **PLANTEAR**: En este problema sobre velocidades relativas en una recta, hay tres marcos de referencia: usted (*Y*), el camión (*T*) y la superficie de la Tierra (*E*). Fijemos la dirección positiva hacia el norte (figura 3.33). Entonces, su velocidad relativa a la Tierra es $v_{Y/E-x} = +88$ km/h. En un principio, el camión se acerca a usted, así que debe ir hacia el sur, y su velocidad relativa a la Tierra es $v_{T/E-x} = -104$ km/h. Las incógnitas de los incisos a) y b) son $v_{T/Y-x}$ y $v_{Y/T-x}$, respectivamente. Utilizaremos la ecuación (3.33) para obtener la primera incógnita, y la ecuación (3.34) para obtener la segunda.

EJECUTAR: a) Para obtener $v_{T/Y-x}$, escribimos la ecuación (3.33) para la velocidad conocida $v_{T/E-x}$ y reacomodamos:

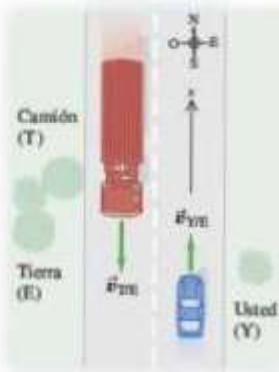
$$\begin{aligned} v_{T/E-x} &= v_{T/Y-x} + v_{Y/E-x} \\ v_{T/Y-x} &= v_{T/E-x} - v_{Y/E-x} \\ &= -104 \text{ km/h} - 88 \text{ km/h} = -192 \text{ km/h} \end{aligned}$$

El camión se desplaza a 192 km/h en la dirección negativa (al sur) en relación con usted.

b) De acuerdo con la ecuación (3.34),

$$v_{Y/T-x} = -v_{T/Y-x} = -(-192 \text{ km/h}) = +192 \text{ km/h}$$

3.33 Marcos de referencia para usted y el camión.



Usted se desplaza a 192 km/h en la dirección positiva (al norte) en relación con el camión.

c) Las velocidades relativas no cambian después de que los vehículos se pasan. Las posiciones relativas de los cuerpos no importan. Después de que el camión lo pasa, aún se desplaza a 192 km/h hacia el sur en relación con usted, pero ahora se aleja en vez de acercarse.

EVALUAR: Para comprobar la respuesta del inciso b), se usa la ecuación (3.33) directamente en la forma $v_{Y/T-x} = v_{Y/E-x} + v_{E/T-x}$. (La velocidad de la Tierra relativa al camión es opuesta a la velocidad del camión con respecto a la Tierra: $v_{E/T-x} = -v_{T/E-x}$). ¿Obtuvo el mismo resultado?

Velocidad relativa en dos o tres dimensiones

Podemos ampliar el concepto de velocidad relativa para incluir el movimiento en un plano o en el espacio, usando la suma vectorial para combinar velocidades. Suponga que la mujer de la figura 3.32a camina no por el pasillo del vagón, sino de un costado al otro, con rapidez de 1.0 m/s (figura 3.34a). Nuevamente podemos describir la posición *P* de la pasajera en dos marcos de referencia distintos: *A* para el observador

detenido al lado del tren y B para el tren en movimiento; pero en lugar de las coordenadas x usamos vectores de posición \vec{r} porque el problema es bidimensional. Entonces, como muestra la figura 3.34b,

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \quad (3.35)$$

Igual que antes, tomamos la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación para obtener una relación entre las velocidades; la velocidad de P relativa a A es $\vec{v}_{P/A} = d\vec{r}_{P/A}/dt$ y así para las demás velocidades. Obtenemos

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \quad (\text{velocidad relativa en el espacio}) \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) se conoce como *transformación galileana de la velocidad* y relaciona la velocidad de un cuerpo P con respecto al marco A y su velocidad con respecto al marco B ($\vec{v}_{P/A}$ y $\vec{v}_{P/B}$, respectivamente), con la velocidad del marco B con respecto al marco A ($\vec{v}_{B/A}$). Si las tres velocidades están en la misma línea, entonces la ecuación (3.36) se reduce a la ecuación (3.33) para las componentes de las velocidades a lo largo de esa línea.

Si el tren se desplaza a una $v_{B/A} = 3.0 \text{ m/s}$ en relación con el suelo y la velocidad de la mujer relativa al vagón tiene magnitud $v_{P/B} = 1.0 \text{ m/s}$, su vector velocidad $\vec{v}_{P/A}$ relativo al suelo es como se muestra en la figura 3.34c. Entonces, el teorema de Pitágoras nos da

$$v_{P/A} = \sqrt{(3.0 \text{ m/s})^2 + (1.0 \text{ m/s})^2} = \sqrt{10 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 3.2 \text{ m/s}$$

La figura 3.34c también indica que la *dirección* del vector velocidad de la mujer relativa al suelo forma un ángulo ϕ con el vector velocidad del tren $\vec{v}_{B/A}$, donde

$$\tan \phi = \frac{v_{P/B}}{v_{B/A}} = \frac{1.0 \text{ m/s}}{3.0 \text{ m/s}} \quad \text{y} \quad \phi = 18^\circ$$

Como en el caso del movimiento rectilíneo, tenemos la regla general de que si A y B son dos puntos o marcos de referencia *cualesquiera*,

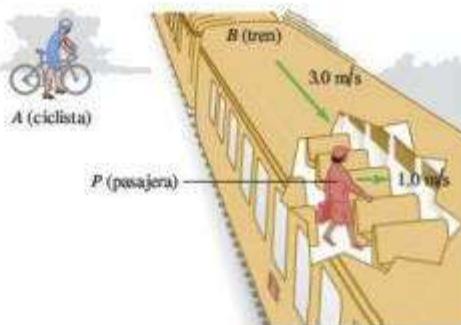
$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \quad (3.37)$$

La velocidad de la mujer con respecto al tren es el negativo de la velocidad del tren con respecto a ella, etcétera.

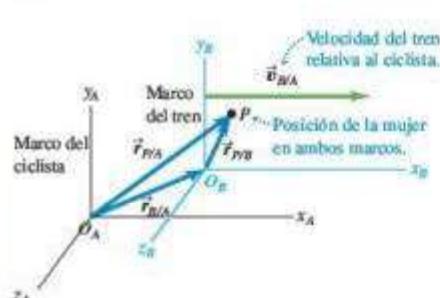
A principios del siglo XX, en su teoría especial de la relatividad, Albert Einstein demostró que la relación de la suma de velocidades establecida en la ecuación (3.36) se debe modificar cuando la rapidez se approxima a la rapidez de la luz, que se denota con c . Resulta que si la mujer de la figura 3.32a pudiera caminar por el pasillo a 0.30c y el tren pudiera viajar a 0.90c, entonces la rapidez de la mujer relativa al suelo no sería de 1.20c sino de 0.94c. ¡Nada puede viajar más rápido que la luz! Regresaremos a la teoría especial de la relatividad en el capítulo 37 del volumen 2.

3.34 a) Una pasajera camina a lo ancho de un vagón de ferrocarril. b) Posición de la mujer relativa al marco de referencia del ciclista y al marco del tren. c) Diagrama vectorial para la velocidad de la mujer relativa al suelo (el marco del ciclista), $\vec{v}_{P/A}$.

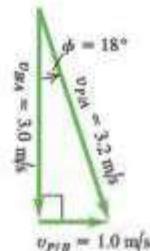
a)



b)



c) Velocidades relativas
(vistas desde arriba)



**Ejemplo 3.14** Vuelo con viento cruzado

La brújula de un avión indica que se dirige hacia el norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se trata de un problema de velocidad en dos dimensiones (hacia el norte y hacia el este), así que tenemos un problema de velocidad relativa usando vectores. Nos dan la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa al aire (A), así como la magnitud y dirección de la velocidad del viento, que es la velocidad del aire A con respecto a la Tierra (E):

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P/A} &= 240 \text{ km/h} && \text{al norte} \\ \vec{v}_{A/E} &= 100 \text{ km/h} && \text{al este}\end{aligned}$$

Usaremos la ecuación (3.36) para obtener nuestras incógnitas: la magnitud y dirección de la velocidad $\vec{v}_{P/E}$ del avión relativa a la Tierra.

EJECUTAR: Usando la ecuación (3.36), tenemos

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

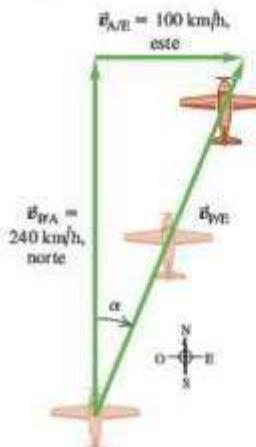
La figura 3.35 muestra las tres velocidades relativas en el triángulo rectángulo obtenido de esta suma vectorial; las incógnitas son la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo α . Del diagrama obtenemos

$$v_{P/E} = \sqrt{(240 \text{ km/h})^2 + (100 \text{ km/h})^2} = 260 \text{ km/h}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{100 \text{ km/h}}{240 \text{ km/h}}\right) = 23^\circ \text{ E del N}$$

EVALUAR: Se pueden verificar los resultados haciendo mediciones a escala del dibujo de la figura 3.35. El viento lateral aumenta la rapidez del avión relativa al suelo, pero desvía a la nave de su curso.

3.35 El avión apunta al norte, pero el viento sopla al este, dando la velocidad resultante $\vec{v}_{P/E}$ relativa a la Tierra.

**Ejemplo 3.15** Corrección por viento cruzado

Considerando el viento y la rapidez del avión del ejemplo 3.14, ¿qué dirección debería tomar el piloto para viajar al norte? ¿Cuál será su velocidad relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como en el ejemplo 3.14, este es un problema de velocidad relativa con vectores. La figura 3.36 es un dibujo a escala de la situación. Nuevamente, los vectores se suman de acuerdo con la ecuación (3.36) y se forma un triángulo rectángulo:

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

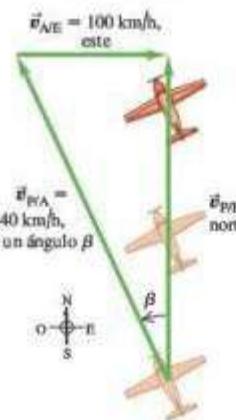
Como muestra la figura 3.36, el piloto apunta la nariz del avión con un ángulo β hacia el viento para compensar su efecto. Este ángulo, que nos da la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ (la velocidad del avión relativa al aire), es una de nuestras incógnitas. La otra es la rapidez del avión sobre el suelo, que es la magnitud del vector $\vec{v}_{P/E}$ (la velocidad del avión relativa a la Tierra). Veamos las cantidades que conocemos y las que desconocemos:

$$\vec{v}_{P/E} = \text{magnitud desconocida} \quad \text{al norte}$$

$$\vec{v}_{P/A} = 240 \text{ km/h} \quad \text{dirección desconocida}$$

$$\vec{v}_{A/E} = 100 \text{ km/h} \quad \text{al este}$$

3.36 El piloto debe apuntar el avión en la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ para viajar al norte en relación con la Tierra.



Podemos calcular las incógnitas empleando la figura 3.36 y trigonometría.

EJECUTAR: Por la figura 3.36, la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo β son

$$v_{P/E} = \sqrt{(240 \text{ km/h})^2 - (100 \text{ km/h})^2} = 218 \text{ km/h}$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{100 \text{ km/h}}{240 \text{ km/h}}\right) = 25^\circ$$

El piloto debe dirigirse 25° al oeste del norte, y su rapidez con respecto al suelo es entonces de 218 km/h.

EVALUAR: Observe que había dos incógnitas, la magnitud de un vector y la dirección de un vector, tanto en este ejemplo como en el 3.14. La diferencia es que, en el ejemplo 3.14, la magnitud y dirección se referían al *mismo* vector ($\vec{v}_{P/E}$); en tanto que en este ejemplo se refieren a vectores *distintos* ($\vec{v}_{P/E}$ y $\vec{v}_{P/A}$).

Mientras se espera que un *viento de frente* reduzca la rapidez de un avión en relación con el suelo, este ejemplo demuestra que un *viento cruzado* también lo hace. Es una triste realidad de la industria aeronáutica.

Evalué su comprensión de la sección 3.5 Suponga que la nariz de un avión apunta al este y que la nave tiene una velocidad de vuelo de 150 km/h. Debido al viento, el avión se mueve al *norte* en relación con el suelo y su rapidez relativa al suelo es de 150 km/h. ¿Cuál es la velocidad del aire relativa a la Tierra? I. 150 km/h de este a oeste; II. 150 km/h de sur a norte; III. 150 km/h de sureste a noroeste; IV. 212 km/h de este a oeste; V. 212 km/h de sur a norte; VI. 212 km/h de sureste a noroeste; VII. no hay velocidad del aire posible que cause esto.



I



Vectores de posición, velocidad y aceleración: El vector de posición \vec{r} de un punto P en el espacio es el vector del origen a P . Sus componentes son las coordenadas x , y y z .

El vector velocidad media \vec{v}_{med} durante el intervalo Δt es el desplazamiento $\Delta \vec{r}$ (el cambio del vector de posición \vec{r}) dividido entre Δt . El vector velocidad instantánea \vec{v} es la derivada de \vec{r} , con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de x , y y z con respecto al tiempo. La rapidez instantánea es la magnitud de \vec{v} . La velocidad \vec{v} de una partícula siempre es tangente a la trayectoria de la partícula. (Véase el ejemplo 3.1).

El vector aceleración media \vec{a}_{med} durante el intervalo de tiempo Δt es igual a $\Delta \vec{v}$ (el cambio en el vector velocidad \vec{v}) dividido entre Δt . El vector aceleración instantánea \vec{a} es la derivada de \vec{v} , con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de v_x , v_y y v_z con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 3.2).

La componente de aceleración paralela a la dirección de la velocidad instantánea afecta la rapidez; en tanto que la componente de \vec{a} perpendicular a \vec{v} afecta la dirección del movimiento. (Véase los ejemplos 3.3 y 3.4).

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (3.1)$$

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3.2)$$

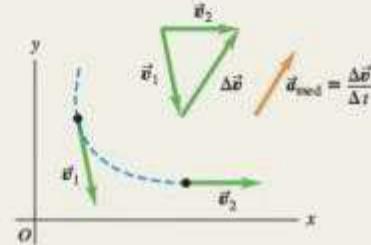
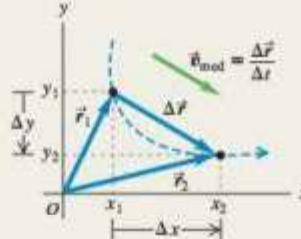
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.3)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \quad (3.4)$$

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (3.8)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.9)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (3.10)$$



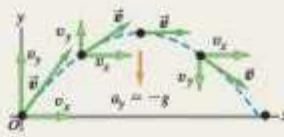
Movimiento de proyectiles: En el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire, $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Las coordenadas y componentes de la velocidad son funciones sencillas del tiempo, y la forma de la trayectoria siempre es una parábola. Normalmente, el origen se coloca en la posición inicial del proyectil. (Véase los ejemplos 3.5 a 3.10).

$$x = (v_0 \cos \alpha_0) t \quad (3.20)$$

$$y = (v_0 \sin \alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.21)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 \quad (3.22)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt \quad (3.23)$$



Movimiento circular uniforme y no uniforme: Cuando una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R con rapidez constante v (movimiento circular uniforme), su aceleración \vec{a} está dirigida hacia el centro del círculo y es perpendicular a \vec{v} . La magnitud a_{rad} de la aceleración se puede expresar en términos de v y R , o en términos de R y el período T (el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta), donde $v = 2\pi R/T$. (Véase los ejemplos 3.11 y 3.12).

Si la rapidez en un movimiento circular no es constante (movimiento circular no uniforme), habrá una componente radial de \vec{a} dada por la ecuación (3.28) o la ecuación (3.30), pero también habrá una componente de \vec{a} paralela (tangencial) a la trayectoria; esta componente tangencial es igual a la tasa de cambio de la rapidez, dv/dt .

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad (3.28)$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (3.30)$$



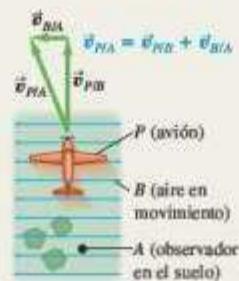
Velocidad relativa: Cuando un cuerpo P se mueve en relación con un cuerpo (o marco de referencia) B , y B se mueve en relación con A , denotamos la velocidad de P relativa a B con $\vec{v}_{P/B}$, la velocidad de P relativa a A con $\vec{v}_{P/A}$, y la velocidad de B relativa a A con $\vec{v}_{B/A}$. Si todas estas velocidades están en la misma línea, sus componentes sobre la línea están relacionadas por la ecuación (3.33). De forma más general, estas velocidades están relacionadas por la ecuación (3.36). (Véase los ejemplos 3.13 a 3.15).

$$v_{P/A-x} = v_{P/B-x} + v_{B/A-x} \quad (3.33)$$

(velocidad relativa en una línea)

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \quad (3.36)$$

(velocidad relativa en el espacio)



PROBLEMA PRÁCTICO**Lanzamiento hacia arriba de un plano inclinado**

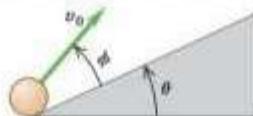
Se dispara una esfera con una velocidad inicial v_0 a un ángulo ϕ arriba de la superficie de un plano, que a su vez, está inclinado un ángulo θ por encima de la horizontal (figura 3.37). a) Calcule la distancia, medida a lo largo del plano inclinado, del punto de lanzamiento al punto donde la esfera golpea el plano inclinado. b) ¿Cuál es el ángulo ϕ que da el alcance máximo, medida a lo largo del plano inclinado? Ignore la resistencia del aire.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR**

- Como no hay resistencia del aire, este es un problema de movimiento de proyectiles. El objetivo es determinar el punto donde la trayectoria parabólica de la esfera cruza el plano inclinado.
- Elija los ejes x y y así como la posición del origen. Si tiene duda, use las sugerencias incluidas en la Estrategia de solución de problemas 3.1 de la sección 3.3.
- En las ecuaciones de proyectiles de la sección 3.3, el ángulo de disparo α_0 se mide a partir de la horizontal. ¿Cuál es este ángulo en términos de θ y ϕ ? ¿Cuáles son las componentes iniciales x y y de la velocidad inicial de la esfera?
- Será necesario escribir una ecuación que relacione x y y de los puntos a lo largo del plano inclinado. ¿Cuál es esta ecuación? (Esto es un asunto de geometría y trigonometría, no de física).

3.37 Lanzamiento de una esfera en una rampa inclinada.**EJECUTAR**

- Escriba las ecuaciones de las coordenadas x y y de la esfera en función del tiempo t .
- Cuando la esfera golpea el plano inclinado, x y y están relacionadas por la ecuación que se obtuvo en el paso 4. Con base en esto, ¿en qué tiempo t golpea la esfera el plano inclinado?
- Con base en la respuesta del paso 6, ¿en qué coordenadas x y y cae la esfera sobre el plano inclinado? ¿A qué distancia se encuentra este punto del punto de lanzamiento?
- ¿Qué valor de ϕ proporciona la distancia máxima del punto de lanzamiento al punto de llegada? (Use sus conocimientos de cálculo).

EVALUAR

- Verifique sus respuestas para el caso en que $\theta = 0$, lo que corresponde a que el plano sea horizontal en lugar de inclinado. (Usted ya conoce las respuestas para este caso. ¿Sabe por qué?).

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



*, **, ***: Problemas de dificultad creciente. MP: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores.
CALC: Problemas que requieren cálculo. BIO: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P3.1 Un péndulo simple (una masa que oscila en el extremo de una cuerda) oscila en un arco circular. ¿Qué dirección tiene la aceleración de la masa en los extremos del arco? ¿Y en el punto medio? En cada caso, explique cómo obtuvo su respuesta.

P3.2 Vuelva a dibujar la figura 3.1 la como si \vec{a} fuera antiparalela a \vec{v}_1 . ¿La partícula se mueve en línea recta? ¿Qué pasa con la rapidez?

P3.3 Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire. ¿Hay un punto donde \vec{a} sea paralela a \vec{v} ? ¿Y perpendicular a \vec{v} ? Explique su respuesta.

P3.4 Cuando se dispara un rifle a un blanco lejano, el cañón no se apunta exactamente al blanco. ¿Por qué? ¿El ángulo de corrección depende de la distancia al blanco?

P3.5 En el instante en que usted dispara una bala horizontalmente con un rifle, deja caer otra bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo? Explique su respuesta.

P3.6 Se deja caer un paquete desde un avión que vuela en línea recta con altitud y rapidez constantes. Si se ignora la resistencia del aire, ¿qué trayectoria del paquete observaría el piloto? ¿Y una persona situada en el suelo?

P3.7 Dibuje las seis gráficas de las componentes x y y de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo, para el movimiento de un proyectil con $x_0 = y_0 = 0$ y $0 < \alpha_0 < 90^\circ$.

P3.8 Si una rana puede saltar con la misma rapidez inicial sin importar la dirección (más adelante o hacia arriba), ¿cuál es la altura vertical máxima a la cual puede saltar en relación con su alcance horizontal máximo, $R_{\max} = v_0^2/g$?

P3.9 Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0 . Al llegar a su máxima altura, ¿cuáles son su vector velocidad, su rapidez y su vector aceleración?

P3.10 En el movimiento circular uniforme, ¿cuáles son la velocidad media y la aceleración media durante una revolución? Explique su respuesta.

P3.11 En el movimiento circular uniforme, ¿cómo cambia la aceleración cuando la rapidez aumenta al triple? ¿Y cuando el radio se reduce por un factor de 2, es decir, a la mitad?

P3.12 En el movimiento circular uniforme, la aceleración es perpendicular a la velocidad en todo instante. ¿Sigue siendo válido esto cuando el movimiento no es uniforme, es decir, cuando la rapidez no es constante?

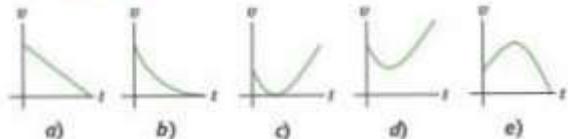
P3.13 Incluso sin viento, las gotas de lluvia suelen dejar rayas diagonales en las ventanas laterales de un automóvil en movimiento. ¿Por qué? ¿Es la misma explicación para las rayas diagonales en el parabrisas?

P3.14 En una tormenta con viento fuerte, ¿qué determina la orientación óptima para sostener un paraguas?

P3.15 Imagine que está en la ribera oeste de un río que fluye al norte a 1.2 m/s. Usted nada con rapidez de 1.5 m/s relativa al agua, y el río tiene 60 m de ancho. ¿Qué trayectoria relativa a la Tierra le permitirá cruzar el río en el menor tiempo? Explique su razonamiento.

P3.16 Se lanza una piedra hacia el aire con un ángulo por encima de la horizontal, y se ignora la resistencia del aire. ¿Cuál de las gráficas en la figura P3.16 describe mejor la *rapidez* o de la piedra en función del tiempo t mientras está en el aire?

Figura P3.16



EJERCICIOS

Sección 3.1 Vectores de posición y velocidad

3.1 • Una araña tiene coordenadas x y y (1.1 m , 3.4 m) en $t_1 = 0$, y coordenadas (5.3 m , -0.5 m) en $t_2 = 3.0 \text{ s}$. Para este intervalo, obtenga *a)* las componentes de la velocidad media, y *b)* la magnitud y dirección de esta velocidad.

3.2 • Un rinoceronte se encuentra en el origen de las coordenadas en $t_1 = 0$. Para el intervalo de $t_1 = 0$ a $t_2 = 12.0 \text{ s}$, la velocidad media del animal tiene una componente x de -3.8 m/s y una componente y de 4.9 m/s . En $t_2 = 12.0 \text{ s}$: *a)* ¿qué coordenadas x y y tiene el rinoceronte? *b)* A qué distancia está del origen?

3.3 • **CALC** Un diseñador de páginas Web crea una animación en la que un punto en una pantalla de computadora tiene una posición $\vec{r} = [4.0 \text{ cm} + (2.5 \text{ cm/s}^2)t^2]\hat{i} + (5.0 \text{ cm/s})t\hat{j}$. *a)* Determine la magnitud y dirección de la velocidad media del punto entre $t = 0$ y $t = 2.0 \text{ s}$. *b)* Calcule la magnitud y dirección de la velocidad instantánea en $t = 0$, en $t = 1.0 \text{ s}$ y en $t = 2.0 \text{ s}$. *c)* Dibuje la trayectoria del punto de $t = 0$ a $t = 2.0 \text{ s}$, y muestre las velocidades calculadas en el inciso *b*.

3.4 • **CALC** La posición de una ardilla que corre por un parque está dada por $\vec{r} = [(0.280 \text{ m/s})t + (0.0360 \text{ m/s}^2)t^2]\hat{i} + (0.0190 \text{ m/s}^2)t^2\hat{j}$. *a)* ¿Cuáles son $v_x(t)$ y $v_y(t)$, las componentes x y y de la velocidad de la ardilla, en función del tiempo? *b)* En $t = 5.00 \text{ s}$, ¿a qué distancia está la ardilla de su posición inicial? *c)* En $t = 5.00 \text{ s}$, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad de la ardilla?

Sección 3.2 El vector aceleración

3.5 • Un jet vuela con altitud constante. En el instante $t_1 = 0$, tiene componentes de velocidad $v_x = 90 \text{ m/s}$, $v_y = 110 \text{ m/s}$. En $t_2 = 30.0 \text{ s}$, las componentes son $v_x = -170 \text{ m/s}$, $v_y = 40 \text{ m/s}$. *a)* Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2 . ¿En qué difieren? Para este intervalo, calcule *b)* las componentes de la aceleración media, y *c)* la magnitud y dirección de dicha aceleración.

3.6 • Un perro que corre en un campo tiene componentes de velocidad $v_x = 2.6 \text{ m/s}$ y $v_y = -1.8 \text{ m/s}$ en $t_1 = 10.0 \text{ s}$. Para el intervalo de $t_1 = 10.0 \text{ s}$ a $t_2 = 20.0 \text{ s}$, la aceleración media del perro tiene magnitud de 0.45 m/s^2 y dirección de 31.0° medida del eje $+x$ al eje $+y$. En $t_2 = 20.0 \text{ s}$, *a)* ¿qué componentes x y y tiene la velocidad del perro? *b)* ¿Qué magnitud y dirección tiene esa velocidad? *c)* Dibuje los vectores velocidad en t_1 y t_2 . ¿En qué difieren?

3.7 • **CALC** Las coordenadas de un ave que vuela en el plano xy están dadas por $x(t) = \alpha t$ y $y(t) = 3.0 \text{ m} - \beta t^2$, donde $\alpha = 2.4 \text{ m/s}$ y $\beta = 1.2 \text{ m/s}^2$. *a)* Dibuje la trayectoria del ave entre $t = 0$ y $t = 2.0 \text{ s}$. *b)* Calcule los vectores velocidad y aceleración del ave en función de t . *c)* Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad y aceleración del ave en $t = 2.0 \text{ s}$. *d)* Dibuje los vectores velocidad y aceleración en $t = 2.0 \text{ s}$. En este instante, ¿el ave acelera, frena o su rapidez instantánea no cambia? ¿Está dando vuelta? Si es así, ¿en qué dirección?

Sección 3.3 Movimiento de proyectiles

3.8 • **CALC** Un automóvil controlado a distancia se mueve en un estacionamiento vacío. La velocidad del automóvil en función del tiempo está dada por $\vec{v} = [5.00 \text{ m/s} - (0.0180 \text{ m/s}^2)t^2]\hat{i} + [2.00 \text{ m/s} + (0.550 \text{ m/s}^2)t]\hat{j}$. *a)* ¿Cuáles son $v_x(t)$ y $v_y(t)$, las componentes x y y de la aceleración del auto en función del tiempo? *b)* ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad en $t = 8.00 \text{ s}$? *c)* ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la aceleración en $t = 8.00 \text{ s}$?

3.9 • Un libro de física que se desliza sobre una mesa horizontal a 1.10 m/s cae y llega al piso en 0.350 s . Ignore la resistencia del aire. Calcule *a)* la altura de la mesa con respecto al piso; *b)* la distancia horizontal del borde de la mesa al punto donde cae el libro; *c)* las componentes horizontal y vertical así como la magnitud y dirección de la velocidad del libro justo antes de tocar el piso. *d)* Dibuje las gráficas $x-t$, $y-t$, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.10 • Una intrépida nadadora Figura E3.10



de 510 N de peso se lanza desde un risco con un impulso horizontal, como se muestra en la figura E3.10. ¿Qué rapidez mínima debe tener al saltar de lo alto del risco para no chocar con la saliente en la base, que tiene una anchura de 1.75 m y está 9.00 m abajo del borde del risco?

3.11 • Dos grillos, Chirpy y Milada, saltan desde lo alto de un acantilado vertical. Chirpy simplemente se deja caer y llega al suelo en 3.50 s , en tanto que Milada salta horizontalmente con una rapidez inicial de 95.0 cm/s . ¿A qué distancia de la base del acantilado tocará Milada el suelo?

3.12 • Un mariscal de campo novato lanza un balón con una componente de velocidad inicial hacia arriba de 12.0 m/s y una componente de velocidad horizontal de 20.0 m/s . Ignore la resistencia del aire. *a)* ¿Cuánto tiempo tardará el balón en llegar al punto más alto de la trayectoria? *b)* A qué altura está este punto? *c)* ¿Cuánto tiempo pasa (desde que se lanza) para que el balón vuelve a su nivel original? ¿Cómo se compara este tiempo con el calculado en el inciso *a*? *d)* ¿Qué distancia horizontal viaja el balón en este tiempo? *e)* Dibuje las gráficas $x-t$, $y-t$, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.13 • **Salto del río I.** Un automóvil que viaja horizontalmente llega al borde de un puente durante una tormenta y el conductor descubre que el río arrastra el puente. El conductor debe llegar al otro lado, así que decide saltar la brecha con su automóvil. La orilla en la que se encuentra está 21.3 m arriba del río, mientras que la orilla opuesta está a solo 1.8 m sobre las aguas. El río es un torrente embravecido con una anchura de 61.0 m . *a)* ¿Qué tan rápido deberá ir el auto cuando llegue al borde para saltar el río y llegar a salvo al otro lado? *b)* ¿Qué rapidez tendrá el auto justo antes de que aterrice?

3.14 • **BB** El campeón saltador del mundo de los insectos. El *Philaenus spumarius*, tiene el récord mundial de salto entre los inse-

tos. Con un salto a un ángulo de 58.0° arriba de la horizontal, algunos de estos bichos pequeños alcanzan una altura máxima de 58.7 cm arriba del nivel del suelo. (Véase la revista *Nature*, vol. 424, del 31 de julio de 2003, p. 509). a) ¿Cuál es la velocidad de despegue en este salto? b) ¿Cuál es la distancia horizontal que cubrió el insecto en este récord mundial de salto?

3.15 • Dentro de una nave espacial en reposo sobre la Tierra, una pelota rueda desde la parte superior de una mesa horizontal y cae al piso a una distancia D de la pata de la mesa. Esta nave espacial ahora descende en el inexplorado planeta X. El comandante, el Capitán Curioso, hace rodar la misma pelota desde la misma mesa con la misma rapidez inicial que en la Tierra, y se da cuenta de que la pelota cae al piso a una distancia de $2.76D$ de la pata de la mesa. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en el planeta X?

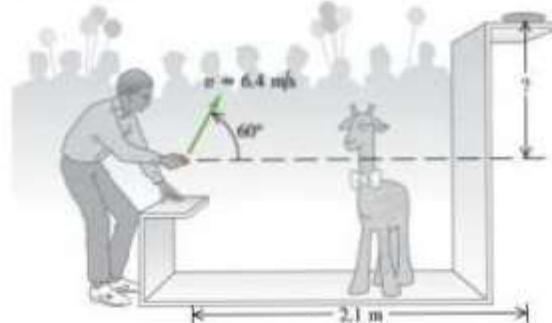
3.16 • Se dispara un proyectil desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 50.0 m/s a 60.0° por encima de la horizontal sin que sufra resistencia del aire. a) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial del proyectil. b) ¿Cuánto tarda el proyectil en alcanzar su punto más alto? c) Calcule su altura máxima por encima del suelo. d) ¿Qué tan lejos del punto de lanzamiento cae el proyectil al suelo? e) Determine las componentes horizontal y vertical de la aceleración y velocidad en el punto de su máxima altura.

3.17 • Un beisbolista de grandes ligas batea una pelota de modo que esta sale del bate con una rapidez de 30.0 m/s y un ángulo de 36.0° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire. a) ¿En cuáles dos instantes la pelota se encuentra a 10.0 m sobre el punto en que salió del bate? b) Obtenga las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la pelota en cada uno de los dos instantes calculados en el inciso a). c) ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad de la pelota al regresar al nivel en el que se bateó?

3.18 • Un atleta, lanzador de bala, arroja la bala a cierta altura sobre el nivel del suelo con velocidad de 12.0 m/s , 51.0° sobre la horizontal. La bala golpea el suelo 2.08 s después. Ignore la resistencia del aire. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración de la bala durante el vuelo? b) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la bala al principio y al final de su trayectoria? c) A qué distancia horizontal llegó la bala? d) ¿Por qué la expresión para R del ejemplo 3.8 no da la respuesta correcta para el inciso c)? e) A qué altura sobre el suelo se lanzó la bala? f) Dibuje las gráficas $x-t$, $y-t$, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.19 • Gane el premio. En una feria, se puede ganar una jirafa de peluche lanzando una moneda a un platito, el cual está sobre una repisa más arriba del punto en que la moneda sale de la mano y a una distancia horizontal de 2.1 m desde ese punto (figura E3.19). Si usted lanza la moneda con velocidad de 6.4 m/s , a un ángulo de 60° sobre la horizontal, la moneda caerá en el platito. Ignore la resistencia del aire. a)

Figura E3.19



¿A qué altura está la repisa sobre el punto donde se lanza la moneda? b) ¿Qué componente vertical tiene la velocidad de la moneda justo antes de caer en el platito?

3.20 • Suponga que el ángulo de salida α_0 de la figura 3.26 es de 42.0° y la distancia d es de 3.00 m . ¿Dónde se encontrarán el dardo y el mono, si la rapidez inicial del dardo es de a) 12.0 m/s ? b) 8.0 m/s ? c) ¿Qué sucederá si la rapidez inicial del dardo es de 4.0 m/s ? Dibuje la trayectoria en cada caso.

3.21 • Un hombre está de pie en la azotea de un edificio de 15.0 m de altura y lanza una piedra con una velocidad de 30.0 m/s a un ángulo de 33.0° sobre la horizontal. Puede ignorar la resistencia del aire. Calcule a) la altura máxima que alcanza la piedra sobre la azotea; b) la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo; y c) la distancia horizontal desde la base del edificio hasta el punto donde la piedra golpea el suelo. d) Dibuje las gráficas $x-t$, $y-t$, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.22 • Los bomberos lanzan un chorro de agua a un edificio en llamas, utilizando una manguera de alta presión que imprime al agua una rapidez de 25.0 m/s al salir por la boquilla. Una vez que sale de la manguera, el agua se mueve como proyectil. Los bomberos ajustan el ángulo de elevación α de la manguera hasta que el agua tarda 3.00 s en llegar a un edificio que está a 45.0 m de distancia. Ignore la resistencia del aire y suponga que la boquilla de la manguera está a nivel del suelo. a) Calcule el ángulo de elevación α . b) Determine la rapidez y aceleración del agua en el punto más alto de su trayectoria. c) A qué altura sobre el suelo llega el agua sobre el edificio, y con qué rapidez lo hace?

3.23 • Un globo de 124 kg que lleva una canastilla de 22 kg desciende con velocidad constante de 20.0 m/s . Una piedra de 1.0 kg se lanza desde la canastilla con una velocidad inicial de 15.0 m/s perpendicular a la trayectoria del globo en descenso, medida en relación con una persona en reposo en la canastilla. Esta persona ve que la piedra choca contra el suelo 6.00 s después de lanzarse. Suponga que el globo continúa su descenso con la misma rapidez constante de 20.0 m/s . a) A qué altura estaba el globo cuando se lanzó la piedra? b) ¿Y cuando chocó contra el suelo? c) En el instante en que la piedra tocó el suelo, ¿a qué distancia estaba de la canastilla? d) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la piedra justo antes de chocar contra el suelo, relativas a un observador L en reposo en la canastilla; L, en reposo en el suelo.

Sección 3.4 Movimiento en círculo

3.24 • **Mareos.** Mantenemos el equilibrio, al menos en parte, gracias a la endolinfa del oído interno. El giro de la cabeza desplaza este líquido, produciendo mareos. Suponga que un bailarín (o un patinador) está girando muy rápido a 3.0 revoluciones por segundo alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de su cabeza. Aun cuando la distancia varía de una persona a otra, el oído interno se encuentra aproximadamente a 7.0 cm del eje de giro. ¿Cuál es la aceleración radial (m/s^2) y en función de g de la endolinfa?

3.25 • La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h . a) ¿Qué aceleración radial tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g . b) Si a_{rad} en el ecuador fuera mayor que g , los objetos saldrían volando hacia el espacio. (Veremos por qué en el capítulo 5). ¿Cuál tendría que ser el período de rotación de la Tierra para que esto sucediera?

3.26 • Un modelo de rotor de helicóptero tiene cuatro aspas, cada una de 3.40 m de longitud desde el eje central hasta la punta. El modelo gira en un túnel de viento a 550 rpm . a) ¿Qué rapidez lineal tiene la punta de la aspa en m/s ? b) ¿Qué aceleración radial tiene la punta de la aspa, expresada como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad, g ?

- 3.27 •** **Hipótesis** Desmayo de un piloto en un descenso en picada. Un jet vuela en picada como se muestra en la figura E3.27. La parte inferior de la trayectoria es un cuarto de círculo con un radio de curvatura de 350 m. De acuerdo con pruebas médicas, los pilotos pierden la conciencia a una aceleración de $5.5g$. ¿A qué rapidez (en m/s y en mph) perdería la conciencia el piloto en este descenso?

Figura E3.27



- 3.28 •** El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (suponiendo que fuera circular) es de 1.50×10^8 km, y la Tierra la recorre en 365 días. a) Calcule la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en m/s. b) Calcule la aceleración radial de la Tierra hacia el Sol en m/s^2 . c) Repita los incisos a) y b) para el movimiento del planeta Mercurio (radio orbital = 5.79×10^7 km, período orbital = 88.0 días).

- 3.29 •** Una rueda de la fortuna de 14.0 m de radio gira sobre un eje horizontal en su centro (figura E3.29). La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7.00 m/s. a) ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar a) por el punto más bajo de su movimiento circular? b) ¿Por el punto más alto de su movimiento circular? c) ¿Cuánto tiempo tarda una revolución de la rueda?

Figura E3.29



- 3.30 •** **Hipergravedad.** En el Centro de Investigación Ames de la NASA, se utiliza el enorme centrifugador "20-G" para probar los efectos de aceléraciones muy elevadas ("hipergravedad") sobre los pilotos y los astronautas. En este dispositivo, un brazo de 8.84 m de largo gira en torno a uno de sus extremos en un plano horizontal, mientras el astronauta se encuentra sujeto con una banda en el otro extremo. Supongamos que el astronauta está alineado en el brazo con su cabeza en el extremo exterior. La aceleración máxima sostenida a la que los seres humanos se han sometido en esta máquina comúnmente es de $12.5g$. a) ¿Qué tan rápido debe moverse la cabeza del astronauta para experimentar esta aceleración máxima? b) ¿Cuál es la diferencia entre la aceleración de su cabeza y pies, si el astronauta mide 2.00 m de altura? c) ¿Qué tan rápido, en rpm (rev/min), gira el brazo para producir la aceleración sostenida máxima?

Sección 3.5 Velocidad relativa

- 3.31 •** Una "banda móvil" en un aeropuerto se mueve a 1.0 m/s y tiene 35.0 m de largo. Si una mujer entra en un extremo y camina a 1.5 m/s en relación con la banda móvil, ¿cuánto tardará en llegar al otro extremo si camina a) en la misma dirección en que se mueve la banda? b) Y en la dirección opuesta?

- 3.32 •** La plataforma de un ferrocarril viaja a la derecha con rapidez de 13.0 m/s relativa a un observador que está de pie en tierra. Alguien se mueve en motoneta sobre la plataforma (figura E3.32). ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la motoneta relativa a la plataforma si su velocidad relativa al observador en el suelo es a) 18.0 m/s a la derecha? b) 3.0 m/s a la izquierda? c) Cero?

Figura E3.32



- 3.33 •** Una canoa tiene una velocidad de 0.40 m/s al sureste, relativa a la Tierra. La canoa está en un río que fluye al este a 0.50 m/s en relación con la Tierra. Calcule la velocidad (magnitud y dirección) de la canoa relativa al río.

- 3.34 •** Dos molinos, A y B, están situados en un río; B está 1500 m río abajo de A (figura E3.34). Dos amigos deben ir de A a B y regresar. Uno rema su bote con rapidez constante de 4.00 km/h relativa al agua; el otro camina por la orilla en tierra con rapidez constante de 4.00 km/h. La velocidad del río es 2.80 km/h en la dirección de A a B. ¿Cuánto tardará cada persona en hacer el viaje redondo?

Figura E3.34



- 3.35 •** **Cruce del río I.** Un río fluye al sur con rapidez de 2.0 m/s. Un hombre cruza el río en una lancha de motor con velocidad relativa al agua de 4.2 m/s al este. El río mide 800 m de ancho. a) ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la lancha relativa a la Tierra? b) ¿Cuánto tiempo tarda en cruzar el río? c) ¿A qué distancia al sur de su punto de partida llegaría a la otra orilla?

- 3.36 •** **Cruce del río II.** a) ¿Qué dirección debería tomar la lancha del ejercicio 3.35 para llegar a un punto en la orilla opuesta directamente al este de su punto de partida? (La rapidez de la lancha relativa al agua sigue siendo 4.2 m/s). b) ¿Qué velocidad tendrá la lancha relativa a la Tierra? c) ¿Cuánto tardaría en cruzar el río?

- 3.37 •** La nariz de un avión ultraligero apunta al sur, y el velocímetro indica 35 m/s. Hay un viento de 10 m/s que sopla al sudoeste relativo a la Tierra. a) Dibuje un diagrama de suma vectorial que muestre la relación de $\vec{v}_{P/E}$ (velocidad del avión relativa a la Tierra) con los dos vectores dados. b) Si x es al este y al norte, obtenga las componentes de $\vec{v}_{P/E}$. c) Obtenga la magnitud y dirección de $\vec{v}_{P/E}$.

- 3.38 •** Un piloto desea volar al oeste. Un viento de 80.0 km/h (aproximadamente 50 mi/h) sopla al sur. a) Si la rapidez (en aire estacionario) del avión es de 320.0 km/h (aproximadamente 200 mi/h), ¿qué dirección debe tomar el piloto? b) ¿Cuál es la rapidez del avión sobre el suelo? Ilustre con un diagrama vectorial.

- 3.39 •** **Aves migratorias.** Los gansos canadienses viajan principalmente en dirección norte-sur por mucho más de mil kilómetros en algunos casos, viajando a velocidades hasta de 100 km/h aproximadamente. Si una de estas aves vuela a 100 km/h en relación con el aire,

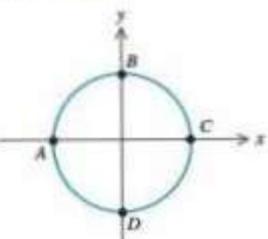
pero hay un viento de 40 km/h que sopla de oeste a este. a) ¿A qué ángulo en relación con la dirección norte-sur debería volar esta ave de modo que viaje directamente hacia el sur en relación con el suelo? b) ¿Cuánto tiempo le tomará al ganso cubrir una distancia terrestre de 500 km de norte a sur? (Nota: Incluso en noches nubladas, muchas aves pueden volar usando el campo magnético de la Tierra para identificar la dirección norte-sur).

PROBLEMAS

3.40 • Iniciando en el punto *A*, Figura P3.40

un atleta corre con una rapidez constante de 6.0 m/s alrededor de una pista circular de 100 m de diámetro, como se muestra en la figura P3.40. Obtenga las componentes *x* y *y* de la velocidad media de este corredor y la aceleración media entre los puntos a) *A* y *B*, b) *A* y *C*, c) *C* y *D* y d) *A* y *A* (una vuelta completa). e) Calcule la magnitud de la velocidad media del corredor entre *A* y *B*. f) La rapidez media es igual a la magnitud de su velocidad media? ¿Por qué?

f) ¿Cómo puede cambiar esta velocidad si está corriendo a rapidez constante?



3.41 • **CALC** Se realiza el lanzamiento de un cohete, con un ángulo específico, desde la parte superior de una torre, cuya altura es $h_0 = 50.0$ m. A causa del diseño de los motores, sus coordenadas de posición tienen la forma $x(t) = A + Bt^2$ y $y(t) = C + D^2$, donde *A*, *B*, *C* y *D* son constantes. Además, la aceleración del cohete 1.00 s después del lanzamiento es $\ddot{\mathbf{r}} = (4.00\hat{i} + 3.00\hat{j}) \text{ m/s}^2$. Considere que la base de la torre es el origen de las coordenadas. a) Determine las constantes *A*, *B*, *C* y *D*, incluyendo sus unidades en el SI. b) En el instante posterior al lanzamiento del cohete, ¿cuáles son sus vectores de aceleración y velocidad? c) ¿Cuáles son las componentes *x* y *y* de la velocidad del cohete 10.0 s después del lanzamiento, y qué tan rápido se mueve el cohete? d) ¿Cuál es el vector de posición del cohete 10.0 s después del lanzamiento?

3.42 • **CALC** Un cohete de modelo defectuoso se mueve en el plano *xy* (la dirección *+y* es vertical hacia arriba). La aceleración del cohete tiene componentes dadas por $a_x(t) = \alpha t^2$ y $a_y(t) = \beta - \gamma t$, donde $\alpha = 2.50 \text{ m/s}^4$, $\beta = 9.00 \text{ m/s}^2$ y $\gamma = 1.40 \text{ m/s}^3$. En $t = 0$ el cohete está en el origen y tiene velocidad $\dot{\mathbf{r}}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ con $v_{0x} = 1.00 \text{ m/s}$ y $v_{0y} = 7.00 \text{ m/s}$. a) Calcule los vectores de velocidad y posición en función del tiempo. b) ¿Qué altura máxima alcanza el cohete? c) Dibuje la trayectoria del cohete. d) ¿Qué desplazamiento horizontal tiene el cohete al volver a $y = 0$?

3.43 • **CALC** Si $\ddot{\mathbf{r}} = b t^2 \hat{i} + c t^3 \hat{j}$, donde *b* y *c* son constantes positivas, ¿cuándo el vector velocidad forma un ángulo de 45.0° con los ejes *x* y *y*?

3.44 • **CALC** La posición de una libélula que vuela paralela al suelo está dada en función del tiempo por $\ddot{\mathbf{r}} = [2.90 \text{ m} + (0.0900 \text{ m/s}^2) t^2] \hat{i} - (0.0150 \text{ m/s}^3) t^3 \hat{j}$. a) ¿En qué instante *t* el vector velocidad del insecto forma un ángulo de 30.0° en sentido horario a partir del eje *+x*? b) En el tiempo calculado en el inciso a), ¿cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración del insecto?

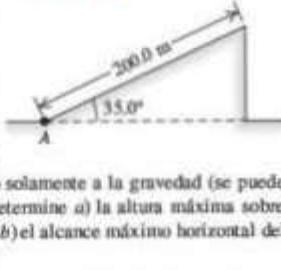
3.45 • **PR CALC** Un pequeño avión de juguete vuela en el plano *xy* paralelo al suelo. En el intervalo $t = 0$ a $t = 1.00 \text{ s}$, su velocidad en función del tiempo está dada por $\dot{\mathbf{r}} = (1.20 \text{ m/s}^2) t \hat{i} +$

$[12.0 \text{ m/s} - (2.00 \text{ m/s}^2) t] \hat{j}$. a) En qué valor de *t* la velocidad del avión es perpendicular a su aceleración?

3.46 • **CALC** Una ave vuela en el plano *xy* con un vector velocidad dado por $\dot{\mathbf{r}} = (\alpha - \beta t^2) \hat{i} + \gamma t \hat{j}$, donde $\alpha = 2.4 \text{ m/s}$, $\beta = 1.6 \text{ m/s}^2$ y $\gamma = 4.0 \text{ m/s}^2$. La dirección *+y* es vertical hacia arriba. En $t = 0$, la ave está en el origen. a) Calcule los vectores de posición y aceleración del ave en función del tiempo. b) ¿Qué altura (coordenada *y*) tiene el ave al volar sobre *x* = 0 por primera vez después de *t* = 0?

3.47 • **PR** Un cohete de prueba se lanza acelerándolo a 1.25 m/s^2 sobre un plano inclinado de 200.0 m , partiendo del reposo en el punto *A* (figura P3.47). El plano inclinado se eleva a 35.0° por encima de la horizontal, y en el instante en que el cohete sale del plano, sus motores se apagan y queda sujeto solamente a la gravedad (se puede ignorar la resistencia del aire). Determine a) la altura máxima sobre el suelo a la que llega el cohete, y b) el alcance máximo horizontal del cohete más allá del punto *A*.

Figura P3.47



3.48 • **Atletismo en Marte.** En el salto de longitud, una atleta se lanza en un ángulo por encima del suelo y cae a la misma altura, tratando de alcanzar la máxima distancia horizontal. Suponga que en la Tierra, ella permanece en el aire durante un tiempo *T*, alcanza una altura máxima *h* y una distancia horizontal *D*. Si ella saltara exactamente de la misma forma durante una competencia en Marte, donde g_{Marte} es igual a 0.379 del valor de *g* en la Tierra, determine su tiempo en el aire, su altura máxima y la distancia horizontal alcanzada. Exprese cada una de estas tres cantidades en términos de su valor en la Tierra. Ignore la resistencia del aire en ambos planetas.

3.49 • **Dinamita!** Una cuadrilla de demolición usa dinamita para derribar un edificio viejo. Los fragmentos del edificio salen disparados en todas direcciones, y después se encuentran a distancias de hasta 50 m de la explosión. Estime la rapidez máxima con que salieron disparados los fragmentos. Describa todas las suposiciones que haga.

3.50 • **Espiral ascendente.** Es común ver a las aves de presa ascender en corrientes calientes de aire. La trayectoria que siguen puede ser una trayectoria espiral. Es posible modelar un movimiento espiral como movimiento circular uniforme combinado con una velocidad constante hacia arriba. Suponga que un ave describe un círculo completo con radio de 6.00 m cada 5.00 s y asciende verticalmente a razón constante de 3.00 m/s. Determine lo siguiente: a) la rapidez del ave relativa al suelo; b) la aceleración del ave (magnitud y dirección); y c) el ángulo entre el vector velocidad del ave y la horizontal.

3.51 • **Un veterinario** está en la selva provisto de una cerbatana cargada con un dardo sedante. El veterinario y un mono astuto de 1.5 kg se encuentran a 25 m arriba del suelo en árboles separados 70 m. En el momento justo en que el veterinario dispara el dardo horizontalmente al mono, este se deja caer del árbol en un vano intento por escapar del dardo. ¿Qué velocidad de salida mínima debe tener el dardo para golpear al mono antes de que este llegue al suelo?

3.52 • **Una doble de cine** se deja caer desde un helicóptero que está a 30.0 m sobre el suelo y se mueve con una velocidad constante, cuyas componentes son de 10.0 m/s hacia arriba y 15.0 m/s horizontal hacia el sur. Ignore la resistencia del aire. a) ¿En qué punto del suelo (relativo a la posición del helicóptero cuando ella cae) se deberían haber colocado los cojines de hule espuma que amortiguan el golpe? b) Dibuje las gráficas *x-t*, *y-t*, *v_x-t* y *v_y-t* para su movimiento.

3.53 ** Al combatir los incendios forestales, los aviones apoyan a los equipos terrestres dejando caer agua sobre el fuego. Un piloto practica tirando un bote con tinte rojo, tratando de acertar a un blanco en el suelo. Si el avión vuela horizontalmente a 90.0 m de altura con rapidez de 64.0 m/s (143 mi/h), ¿a qué distancia horizontal del blanco el piloto debería soltar el bote? Ignore la resistencia del aire.

3.54 ** Un cañón, situado a 60.0 m de la base de un risco vertical de 25.0 m de altura, dispara un obús de 15 kg con un ángulo de 43.0° sobre la horizontal, hacia el risco. a) ¿Qué velocidad inicial mínima debe tener el obús para liberar el borde superior del risco? b) El suelo en la parte superior del risco es plano, con una altura constante de 25.0 m arriba del cañón. En las condiciones del inciso a), ¿a qué distancia del borde del risco cae el obús?

3.55 ** Un avión vuela con una velocidad de 90.0 m/s a un ángulo de 23.0° arriba de la horizontal. Cuando está 114 m directamente arriba de un perro parado en el suelo plano, se cae una maleta del compartimento de equipaje. ¿A qué distancia del perro caerá la maleta? Ignore la resistencia del aire.

3.56 *** Conforme un barco se acerca al muelle a 45.0 cm/s, es necesario lanzarle la pieza de un equipo importante para que pueda atracar. El equipo se lanza a 15.0 m/s a 60.0° por encima de la horizontal desde lo alto de una torre en la orilla del agua, a 8.75 m por encima de la cubierta del barco (figura P3.56). Para que el equipo caiga enfrente del barco, ¿a qué distancia D del muelle debería estar el barco cuando se lance el equipo? Se ignora la resistencia del aire.

Figura P3.56



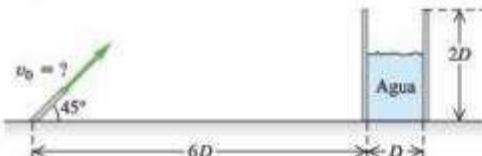
3.57 • IN CALC Un cohete de juguete es lanzado con una velocidad inicial de 12.0 m/s en dirección horizontal desde la azotea de un edificio de 30.0 m de alto. El motor del cohete produce una aceleración horizontal de $(1.60 \text{ m/s}^2)t$, en la misma dirección de la velocidad inicial, y en la dirección vertical actúa g , hacia abajo. Se puede ignorar la resistencia del aire. ¿Qué distancia horizontal viaja el cohete antes de llegar al suelo?

3.58 ** Una misión de auxilio. Un avión deja caer pacas de heno para el ganado atrapado en una ventisca en las Grandes Llanuras. El piloto libera las pacas a 150 m arriba del nivel del suelo cuando el avión vuela a 75 m/s en una dirección de 55° arriba de la horizontal. ¿A qué distancia enfrente del ganado debería el piloto tirar el heno para que las pacas caigan en el punto donde están atrapados los animales?

3.59 * El jorón más largo.** Según el *Libro de récords Guinness*, el jorón más largo que se ha medido fue bateado por Roy "Dizzy" Carlyle en un juego de ligas menores. La pelota viajó 188 m (618 ft) antes de caer al suelo fuera del parque. a) Suponiendo que la velocidad inicial de la pelota estuviera a 45° sobre la horizontal e ignorando la resistencia del aire, ¿cuál debió ser la rapidez inicial de la pelota si se bateó en un punto a 0.9 m (3.0 ft) sobre el suelo? Suponga que el suelo es perfectamente plano. b) ¿A qué altura habría pasado la bola sobre una barda de 3.0 m (10 ft) situada a 116 m (380 ft) de home?

3.60 *** Se utiliza una manguera para llenar de agua un contenedor cilíndrico grande de diámetro D y altura $2D$. La manguera lanza el agua a 45° sobre la horizontal, desde el mismo nivel que la base del tanque, y se encuentra a una distancia de $6D$ (figura P3.60) de este. ¿En qué intervalo de rapideces de lanzamiento (v_0) el agua entrará en el contenedor? Ignore la resistencia del aire, y exprese su respuesta en términos de D y de g .

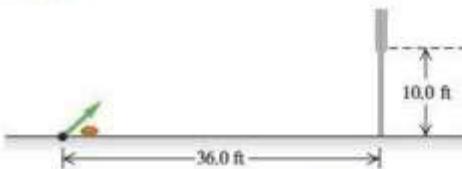
Figura P3.60



3.61 *** Se lanza un proyectil desde el nivel del suelo sin que haya resistencia del aire. Usted quiere evitar que el proyectil entre en una capa de inversión térmica en la atmósfera a una altura h por encima del suelo. a) ¿Cuál es la máxima rapidez de lanzamiento que se podría imprimir al proyectil si se lanza en línea recta hacia arriba? Expresa su respuesta en términos de h y g . b) Suponga que el lanzador disponible dispara los proyectiles al doble de la rapidez máxima de lanzamiento que usted determinó en el inciso a). ¿A qué ángulo máximo por encima de la horizontal debería lanzarse el proyectil? c) ¿A qué distancia (en términos de h) del lanzador cae al suelo el proyectil en el inciso b)?

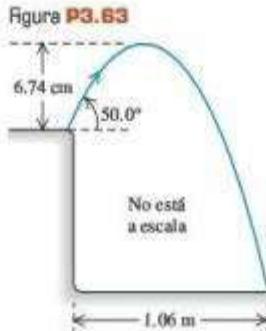
3.62 * Patear un gol de campo.** En fútbol americano, después de anotar un *touchdown*, el equipo tiene la oportunidad de ganar un punto más pateando el balón por encima de una barra sostenida entre dos postes. La barra está colocada en posición horizontal a 10.0 ft por encima del suelo, y el balón se patea desde el nivel del suelo a una distancia horizontal de 36.0 ft con respecto a la barra (figura P3.62). Las medidas del fútbol se indican en unidades del sistema inglés pero, para este problema, realice la conversión a unidades del sistema SI. a) Hay un ángulo mínimo por encima del suelo, de tal forma que si el balón se lanza por debajo de este ángulo, jamás podrá saltar por encima de la barra, sin importar la rapidez que le imprima la patada. ¿Cuál es ese ángulo? b) Si el balón se patea a 45.0° por encima de la horizontal, ¿cuál debe ser su rapidez inicial para apenas alcanzar la barra? Expresa tu respuesta en m/s y km/h.

Figura P3.62



3.63 *** Un saltamontes salta hacia el aire del borde de un risco vertical, como se muestra en la figura P3.63. Use la información de la figura para determinar a) la rapidez inicial del saltamontes y b) la altura del risco.

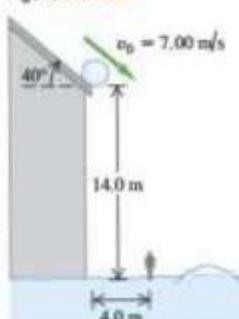
3.64 * Récord mundial.** En el lanzamiento de bala, un evento atlético de pista y campo, se lanza un objeto (la bala) de 7.3 kg a un ángulo aproximado de 40° en relación con la pierna izquierda recta del lanzador. El récord mundial de 23.11 m lo estableció Randy Barnes en 1990. Suponiendo



que Barnes lanzó la bala a 40° a una altura de 2.00 m arriba del suelo. ¿Con qué rapidez, en m/s y mph, la lanzó?

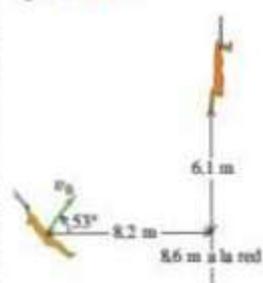
- 3.65 *** ¡Cuidado!** Una bola de nieve ruada del techo de un granero con una inclinación hacia abajo de 40° (figura P3.65). El borde del techo está a 14.0 m del suelo y la bola tiene una rapidez de 7.00 m/s al salir del techo. Ignore la resistencia del aire. a) A qué distancia del borde del granero golpea la bola el piso si no golpea otra cosa al caer? b) Dibuja las gráficas $x-t$, $y-t$, v_x-t y v_y-t para el movimiento del inciso a). c) Un hombre de 1.9 m de estatura está de pie a 4.0 m del borde del granero. ¿Le caerá encima la bola de nieve?

Figura P3.65



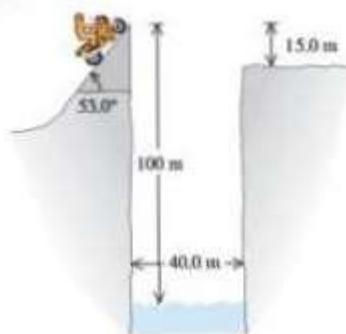
3.66 * En el trapecio volador.** Un nuevo acto circense se llama Los Acróbatas de Texas. La hermosa Mary Belle se mete en un trapecio y se proyecta con un ángulo de 53° , y se supone que es atrapada por Joe Bob, cuyas manos están 6.1 m arriba y 8.2 m adelante del punto de lanzamiento (figura P3.66). Puede ignorarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez inicial v_0 debe tener Mary Bell para alcanzar justamente a Joe Bob? b) Para la rapidez inicial calculada en el inciso a), ¿qué magnitud y dirección tiene la velocidad de Mary Belle cuando alcanza a Joe Bob? c) Suponiendo que Mary Belle tiene la rapidez inicial calculada en el inciso a), dibuja las gráficas $x-t$, $y-t$, v_x-t y v_y-t que muestren el movimiento de los dos trapecistas. Las gráficas deberán mostrar el movimiento hasta el momento en que Mary Belle llega a Joe Bob. d) La noche del debut, Joe Bob no atrapa a Mary Belle. ¿Qué distancia horizontal recorre ella, desde su punto de lanzamiento, antes de caer en la red que está 8.6 m debajo de dicho punto?

Figura P3.66



- 3.67 *** Salto del río II.** Un profesor de física hacia acrobacias audaces en su tiempo libre. Su última acrobacia fue un intento por saltar un río en motocicleta (figura P3.67). La rampa de despegue está inclinada 53.0° , el río mide 40.0 m de ancho y la ribera lejana está 15.0 m más abajo que la parte superior de la rampa. El río está a 100 m abajo de la rampa. Puede ignorarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez se necesita en la parte superior de la rampa para alcanzar apenas el borde de la ribera lejana? b) Si su rapidez es solo la mitad del valor obtenido en a), ¿dónde cayó?

Figura P3.67



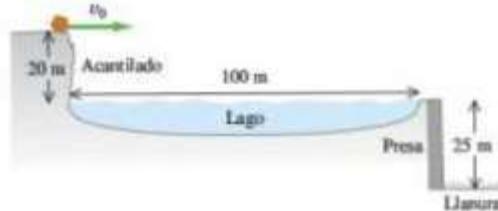
3.68 ** Se lanza una piedra de la azotea de un edificio con velocidad v_0 y ángulo α_0 con respecto a la horizontal. La altura del edificio es h . Puede ignorarse la resistencia del aire. Calcule la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de tocar el suelo, y demuestre que es independiente de α_0 .

- 3.69 *** Un carro de 5500 kg, que lleva un lanzador vertical de cohetes, avanza a la derecha con rapidez constante de 30.0 m/s por un camino horizontal. Se lanza un cohete de 45.0 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 40.0 m/s relativa al carro. a) ¿Qué altura alcanzará el cohete? b) A qué distancia del carro caerá el cohete a tierra? c) ¿Qué distancia avanza el carro mientras el cohete está en el aire? d) Con qué ángulo, relativo a la horizontal y medido por un observador en reposo en el suelo, viaja el cohete en el momento en que sale disparado? e) Dibuja la trayectoria del cohete vista por un observador: I. estacionario en el carro; II. estacionario en el suelo.

3.70 * Se lanza una pelota de 2.7 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 20.0 m/s desde el borde de un acantilado de 45.0 m de altura. En el instante de lanzamiento, una mujer comienza a correr alejándose de la base del acantilado con rapidez constante de 6.00 m/s. La mujer corre en línea recta sobre suelo plano, y puede ignorarse la acción de la resistencia del aire sobre la pelota. a) Con qué ángulo arriba de la horizontal deberá lanzarse la pelota para que la corredora la atrape justo antes de que toque el suelo, y qué distancia corre la mujer antes de atrapar la pelota? b) Dibuja la trayectoria de la pelota vista por: I. una persona en reposo en el suelo; II. la corredora.

- 3.71 *** Un pelasgo de 76.0 kg está rodando horizontalmente hacia el borde de un acantilado que está 20 m arriba de la superficie de un lago, como se indica en la figura P3.71. La parte superior de la cara vertical de una presa está a 100 m del pie del acantilado, al nivel de la superficie del lago. Hay una llanura 25 m debajo de la parte superior de la presa. a) ¿Qué rapidez mínima debe tener la roca al perder contacto con el acantilado para llegar hasta la llanura sin golpear la presa? b) A qué distancia del pie de la presa caerá la roca en la llanura?

Figura P3.71



3.72 * Lanzamiento de almuerzo.** Henrietta va a su clase de física trotando por la acera, a 3.05 m/s. Su esposo Bruce se da cuenta de que ella salió con tanta prisa que olvidó su almuerzo, así que corre a la ventana de su apartamento, que está a 38.0 m directamente arriba de la acera, para lanzárselo. Bruce lanza el almuerzo horizontalmente 9.00 s después que Henrietta pasó debajo de la ventana, y ella lo atrapa corriendo. Ignore la resistencia del aire. a) Con qué rapidez inicial debe haber lanzado Bruce el almuerzo para que Henrietta lo atrape justo antes de tocar la acera? b) Dónde está ella cuando atrapa el almuerzo?

- 3.73 ***** Dos tanques participan en un ejercicio de maniobras en terreno plano. El primero lanza una bala de práctica que se encuentra cargada con pintura, con rapidez de salida de 250 m/s a 10.0° sobre la horizontal, mientras avanza hacia el segundo tanque con una rapidez de 15.0 m/s relativa al suelo. El segundo tanque va en retirada a 35.0 m/s relativa al suelo, pero es alcanzado por la bala. Ignore la resistencia del aire y suponga que la bala golpea al tanque a la misma altura a la que fue disparada. Calcule la distancia entre los tanques a) cuando se disparó la bala y b) en el momento del impacto.

3.74 * P. ¡Bang!** Un estudiante está sentado en una plataforma a una altura h sobre el suelo. Lanza un petardo horizontalmente con una rapidez v . Sin embargo, un viento que sopla paralelo al suelo imprime al petardo una aceleración horizontal constante de magnitud a . El resultado es que el petardo cae al suelo directamente abajo del estudiante. Determine la altura h en términos de v , a y g . Ignore el efecto de la resistencia del aire sobre el movimiento vertical.

3.75 ** En una celebración del 4 de julio, se lanza un petardo desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 25.0 m/s a 30.0° con respecto a la vertical. Cuando alcanza su altura máxima, estalla en muchos fragmentos lanzando una ráfaga de chispas. Dos de esos fragmentos viajan hacia adelante inicialmente a 20.0 m/s a $\pm 53.0^\circ$ con respecto a la horizontal; ambas cantidades se miden *relativas al petardo original justo antes de que estalle*. ¿Con qué ángulos con respecto a la horizontal se mueven inicialmente los dos fragmentos justo después del estallido, según las mediciones de un espectador ubicado en el suelo?

3.76 Cuando se encuentra a 145 m por encima del suelo, un cohete, que viaja verticalmente hacia arriba a una rapidez constante de 8.50 m/s relativa al suelo, lanza un segundo cohete con una rapidez de 12.0 m/s a un ángulo de 53.0° por encima de la horizontal; ambas cantidades son resultado de las mediciones que realiza un astronauta que va sentado en el interior del primer cohete. Después de ser disparado, el segundo cohete entra en caída libre. *a)* En el momento en que se lanza el segundo cohete, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad en relación con *i*, el astronauta que va sentado dentro del cohete y *ii*, la estación de control de la misión ubicada en tierra? *b)* Determine la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento del segundo cohete de acuerdo con las mediciones del centro de control. *c)* ¿Cuál es la altura máxima por encima del suelo que alcanza el segundo cohete?

3.77 *** En una película de aventuras, el héroe debe lanzar una granada desde su auto, que viaja a 90.0 km/h, al de su enemigo, que viaja a 110 km/h. El auto del enemigo está 15.8 m adelante del auto del héroe cuando este suelta la granada. Si el héroe lanza la granada de manera que su velocidad inicial relativa al héroe esté a 45° sobre la horizontal, ¿qué magnitud de velocidad inicial deberá tener? Ambos autos viajan en la misma dirección en un camino plano, y puede ignorarse la resistencia del aire. Obtenga la magnitud de la velocidad relativa tanto al héroe como a la Tierra.

3.78 Un río de 400.0 m de ancho fluye de oeste a este a 30.0 m/min. La lancha donde usted viaja se desplaza a 100.0 m/min relativa al agua, sin importar la dirección en que apunte. Para cruzar el río, usted parte de un muelle en el punto *A* en la ribera sur. Hay una lancha que llega a tierra directamente en el sentido opuesto, en el punto *B* de la ribera norte, y también una que llega al punto *C*, 75.0 m corriente abajo desde *B* (figura P3.78). *a)* ¿A qué punto de la ribera norte llegaría usted a tierra, si su lancha apuntara perpendicularmente a la corriente del agua, y qué distancia viajaría? *b)* Si usted dirige inicialmente su lancha justo hacia el punto *C* y no cambiara ese rumbo en

relación con la orilla, ¿a qué punto de la ribera norte llegaría? *c)* Para llegar al punto *C*: *i*, ¿con qué rumbo debería dirigir su bote?, *ii*, ¿cuánto tiempo tardaría en cruzar el río?, *iii*, ¿qué distancia viajaría? y *iv*, ¿cuál sería la rapidez de su lancha según la medición de un observador situado en la ribera del río?

3.79 • CALC Cicloide. Una partícula se mueve en el plano *xy*. Sus coordenadas están dadas en función del tiempo por

$$x(t) = R(\omega t - \sin \omega t) \quad y(t) = R(1 - \cos \omega t)$$

donde R y ω son constantes. *a)* Dibuje la trayectoria de la partícula. (Es la trayectoria de un punto en el borde de un anillo que rueda con rapidez constante sobre una superficie horizontal. La curva descrita por el punto conforme se mueve en el espacio se llama *cicloide*). *b)* Determine las componentes de velocidad y de aceleración de la partícula en cualquier instante *t*. *c)* ¿En qué instantes la partícula está momentáneamente en reposo? ¿Qué coordenadas tiene la partícula en esos instantes? ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración en esos instantes? *d)* ¿La magnitud de la aceleración depende del tiempo? Compare este movimiento con el movimiento circular uniforme.

3.80 ** Se dispara un proyectil desde el punto *A* con un ángulo por encima de la horizontal. En su punto más alto, después de haber viajado una distancia horizontal *D* a partir de su punto de lanzamiento, explota súbitamente en dos fragmentos idénticos que viajan horizontalmente con velocidades iguales, pero en sentido opuesto, según las mediciones *relativas al proyectil justo antes de que explote*. Si un fragmento cae de regreso en el punto *A*, ¿qué distancia de *A* (en términos de *D*) caerá el otro fragmento?

3.81 ** El piloto de un avión fija un curso al oeste según la brújula y mantiene una rapidez de 220 km/h. Después de volar 0.500 h, el piloto se encuentra sobre una ciudad a 120 km al oeste y 20 km al sur de su punto de partida. *a)* Calcule la velocidad del viento (magnitud y dirección). *b)* Si dicha velocidad es de 40 km/h al sur, ¿qué curso debe fijar el piloto para viajar al oeste? Use la misma rapidez de vuelo de 220 km/h.

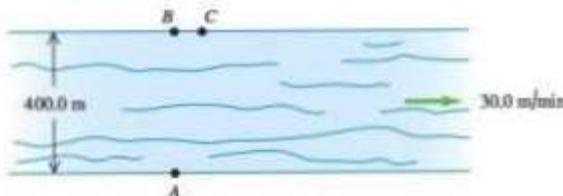
3.82 ** Gotas de lluvia. Cuando la velocidad de un tren es de 12.0 m/s al este, las gotas de lluvia que caen verticalmente con respecto a la Tierra dejan huellas inclinadas 30.0° con respecto a la vertical en las ventanillas del tren. *a)* ¿Qué componente horizontal tiene la velocidad de una gota con respecto a la Tierra? ¿Y con respecto al tren? *b)* ¿Qué magnitud tiene la velocidad de la gota con respecto a la Tierra? ¿Y con respecto al tren?

3.83 *** En un juego de la Copa Mundial de Fútbol, Juan corre al norte hacia la portería con una rapidez de 8.00 m/s relativa al suelo. Un compañero le pasa el balón, el cual lleva una rapidez de 12.0 m/s y se mueve en una dirección 37.0° al este del norte, relativa al suelo. ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad del balón relativa a Juan?

3.84 ** Un elevador sube con rapidez constante de 2.50 m/s. Un perno se afloja y cae del techo del elevador, ubicado 3.00 m arriba del piso. *a)* ¿Cuánto tarda en llegar al piso del elevador? *b)* ¿Qué rapidez tiene el perno justo cuando toca el piso según un observador en el elevador? *c)* ¿Y según un observador de pie en uno de los pisos del edificio? *d)* Según el observador del inciso *c*, ¿qué distancia recorrió el perno entre el techo y el piso del elevador?

3.85 • P. Suponga que el elevador del problema 3.84 parte del reposo y mantiene una aceleración constante hacia arriba de 4.00 m/s^2 , y que el perno se cae justo en el instante en que el elevador comienza a moverse. *a)* ¿Cuánto tiempo tarda el perno en tocar el piso del elevador? *b)* Justo cuando toca el piso, ¿qué tan rápido se mueve el perno de acuerdo con un observador *i*, en el elevador, *ii*, situado en un piso del edificio? *c)* De acuerdo con cada observador del inciso *b*, ¿qué distancia recorre el perno entre el techo y el piso del elevador?

Figura P3.78



3.86 Dos jugadoras de fútbol, Mia y Alice, corren mientras Alice pasa el balón a Mia. Esta última corre hacia el norte con una rapidez de 6.00 m/s. La velocidad del balón relativa a Mia es de 5.00 m/s en una dirección de 30° al este del sur. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la velocidad del balón relativa al suelo?

3.87 **Movimiento de proyectil en una pendiente.** Remítase al problema práctico del capítulo 3. a) Un arquero ubicado en un terreno con inclinación ascendente constante de 30.0° apunta hacia un blanco situado 60.0 m más arriba del plano inclinado. La flecha en el arco y el centro del blanco están ambos a 1.50 m sobre el suelo. Justo al salir del arco, la rapidez inicial de la flecha es de 32.0 m/s. ¿Con qué ángulo sobre la horizontal debería apuntar el arquero para dar en el blanco? Si hay dos ángulos, calcule el menor. Tal vez necesite resolver la ecuación del ángulo por iteración, es decir, por ensayo y error. Compare el ángulo con el que se necesita cuando el suelo está horizontal, con pendiente igual a 0. b) Repita el problema con una pendiente constante hacia abajo de 30.0° .

PROBLEMAS DE DESAFÍO

3.88 **CALC** Un proyectil se lanza desde un punto P . Su movimiento es tal que su distancia respecto a P siempre aumenta. Determine el ángulo máximo arriba de la horizontal con que pudo haberse lanzado. Ignore la resistencia del aire.

3.89 Dos estudiantes pasean en canoa por un río. Mientras van río arriba, dejan caer accidentalmente una botella vacía al agua, después de lo cual reman durante 60 minutos hasta llegar a un punto a 2.0 km río arriba. En ese momento, se dan cuenta de que la botella no está y,

preocupados por la ecología, se dan vuelta y reman río abajo. Alcanzan la botella (que se ha estado moviendo con la corriente) 5.0 km río abajo del punto donde se dieron la vuelta, y la recogen. a) Suponiendo que reman con rapidez constante, ¿con qué rapidez fluye el río? b) ¿Qué rapidez tendría la canoa en un lago tranquilo remando con la misma rapidez del inciso a)?

3.90 **IM** Un cohete diseñado para colocar cargas pequeñas en órbita es transportado a una altitud de 12.0 km sobre el nivel del mar, por un avión comercial modificado. Cuando el avión está volando en línea recta, con rapidez constante de 850 km/h, deja caer el cohete. Después, el avión mantiene la misma altitud y rapidez, y sigue volando en línea recta. El cohete cae durante un lapso corto, después del cual se enciende el motor. A partir de ese momento, los efectos combinados del empuje y la gravedad imparten al cohete una aceleración constante de magnitud 3.00 g dirigida a un ángulo de 30.0° arriba de la horizontal. Por motivos de seguridad, el cohete deberá estar por lo menos a 1.00 km adelante del avión cuando vuela a alcanzar la altitud de este. Hay que determinar el tiempo mínimo que el cohete debe caer antes de que su motor se encienda. Se puede ignorar la resistencia del aire. La respuesta debe incluir i, un diagrama que muestre las trayectorias de vuelo del cohete y del avión, identificadas en varios puntos con vectores que representen su velocidad y su aceleración; ii, una gráfica $x-t$ que muestre los movimientos del cohete y del avión; y iii, una gráfica $y-t$ que muestre los movimientos del cohete y del avión. En el diagrama y las gráficas, indique los momentos cuando el cohete se deja caer, cuando el motor del cohete se enciende y cuando el cohete en ascenso alcanza la altura del avión.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo ?

Un ciclista que va por una curva a rapidez constante tiene una aceleración dirigida hacia el interior de la curva (véase la sección 3.2, en especial, la figura 3.12a).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

3.1 Respuesta: iii. Si la velocidad instantánea \vec{v} es constante durante un intervalo, su valor en cualquier punto (incluyendo el final del intervalo) es igual a la velocidad media \vec{v}_{med} durante el intervalo. En i y ii, la dirección de \vec{v} al final del intervalo es tangente a la trayectoria en ese punto; mientras que la dirección de \vec{v}_{med} apunta del inicio de la trayectoria al final de la misma (en la dirección del desplazamiento neto). En iv, \vec{v} y \vec{v}_{med} se encuentran a lo largo de la línea recta, aunque \vec{v} tiene una magnitud mayor porque la rapidez ha ido en aumento.

3.2 Respuesta: vector 7 En el punto más alto de la trayectoria del trineo, la rapidez es mínima. En ese punto, la rapidez no aumenta ni disminuye, y la componente paralela de la aceleración (es decir, la componente horizontal) es cero. La aceleración solo tiene una componente perpendicular hacia el interior de la trayectoria curva del trineo. En otras palabras, la aceleración es hacia abajo.

3.3 Respuesta: i. Si no hubiera gravedad ($g = 0$), el mono no caería y el dardo seguiría una trayectoria recta (que se indica como línea pun-

teada). El efecto de la gravedad es hacer que tanto el mono como el dardo caigan la misma distancia $\frac{1}{2}gt^2$ por debajo de sus posiciones con $g = 0$. El punto A tiene la misma distancia debajo de la posición inicial del mono que el punto P debajo de la recta punteada, así que el punto A es donde encontraremos al mono en el instante en cuestión.

3.4 Respuesta: ii. Tanto en la parte alta como en la baja del lazo, la aceleración es paralela radial y está dada por la ecuación (3.28). El radio R es el mismo en ambos puntos, así que la diferencia de aceleración se debe exclusivamente a las diferencias de rapidez. Puesto que a_{rad} es proporcional al cuadrado de v , la rapidez deberá ser dos veces mayor en la parte baja del lazo que en su parte alta.

3.5 Respuesta: vi. El efecto del viento es anular el movimiento hacia el este del avión e imprimírle un movimiento hacia el norte. Así que la velocidad del aire en relación con el suelo (la velocidad del viento) debe tener una componente de 150 km/h hacia el oeste y una componente de 150 km/h hacia el norte. La combinación de ambas es un vector con magnitud $\sqrt{(150 \text{ km/h})^2 + (150 \text{ km/h})^2} = 212 \text{ km/h}$ que apunta hacia el noroeste.

Problema práctico

Respuestas: a) $R = \frac{2v_0^2 \cos(\theta + \phi) \sin \phi}{g}$ b) $\phi = 45^\circ - \frac{\theta}{2}$