2012年度金融リスクマネジメント・第一回レポート

12M42340　チョウ　シホウ

1　問題1

$RFS(t,\tau,S_{\alpha,\beta}(t))=0$ となる様な $S_{\alpha,\beta}(t)$ を定義する．

$$S_{\alpha,\beta}(t)=\frac{P(t,T_\alpha)-P(t,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1})} \tag{1.1}$$

European Payer Swaption とは，所有者が固定金利払い、変動金利受けのスワップ取引を行う権利である．

T_α に於ける，Payer-Swap の価値は

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta+1}P(t,T_{i+1})(T_{i+1}-T_i)(L(t,T_i)-K) \tag{1.2}$$

$$=(S_{\alpha,\beta}(t)-K)\sum_{i=\alpha}^{\beta+1}(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1}) \tag{1.3}$$

なお，

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta+1}(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1})\geq 0$$

が成り立つので，(1.3) の値の正負が $(S_{\alpha,\beta}(t)-K)$ によって決める．$(S_{\alpha,\beta}(t)-K)>0$ の時，権利を行使すれば，収益が正，$(S_{\alpha,\beta}(t)-K)<0$ の時，権利を行使すれば，収益が負．所有者は権利を行うかどうか選ばれるので，

$$\begin{cases} S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K>0 & \text{権利を行使} \\ S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K>0 & \text{何でもしない} \end{cases}$$

という行動をとる．

2　問題 2

証明．$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : C^2$-function, $B(t) = (B^1(t), \dots, B^d(t))$ に対して，過程 $f(t, B(t)) = f(t, B^1(t), \dots, B^d(t))$ を ito-formula で求め，微分形式で表す．ただし，$B(t) = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})(t)$．

$$df(t, B(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} dB^{(i)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} d\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle (t) \tag{2.1}$$

$B(t)$ は Brownian motion であるので，

$$\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle (t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ t & i = j \end{cases}$$

式 (2.1) に代入すると，

$$df(t, B(t)) = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} \Big) dt + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} dB^{(i)}(t) \tag{2.2}$$

式 (2.2) を両辺積分を取る．

$$f(t, B(t)) = f(0, B(i)) + \int_0^t \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} \Big) dt + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} dB^{(i)}(t) \tag{2.3}$$

式 (2.3) の右辺第三項を $H(s)$ とおくと

$$H(s) = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} \tag{2.4}$$

明らかに，次の式と同じ形式である．

$$X(t) = X(0) + \int_0^t H(s) ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t K_i(s) dB^{(i)}(s) \tag{2.5}$$

命題 2.10.1 より，$H(s) = 0$ ので，

$$H(s) = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} = 0 \tag{2.6}$$

□