2012 年度金融工学・第一回レポート

社会理工学研究科　経営工学専攻　チョウ シホウ　学籍番号 12M42340

問題 1-1-3

$[0,1]^2 = (x,y)|(x,y) \in \mathbb{R}, 0 \leq x,y \leq 1$ と書く、$card([0,1]^2) = \aleph_1$を示せ。

解答：$I = (0,1]$、I の元 a, b を十進法によって、

$$a = 0.\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\ldots$$

$$b = 0.\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{b}_3\ldots$$

と無限小数に展開しておき、もう一つの元 c を

$$c = 0.\bar{a}_1\bar{b}_1\bar{a}_2\bar{b}_2\bar{a}_3\bar{b}_3\ldots$$

$\bar{a}_i, \bar{b}_i$ は a, b から抜き出す数字である、0 が出たら 0 でないものが出た直接まで延ばして切る。
逆に、c を交互に抜き出して、

$$c = 0.\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5\bar{c}_6\ldots$$

を展開する。a, b を

$$a = 0.\bar{c}_1\bar{c}_3\bar{c}_5\ldots$$

$$b = 0.\bar{c}_2\bar{c}_4\bar{c}_6\ldots$$

にする、両方それぞれ $0 \mapsto (0,0), (0,0) \mapsto 0$ すると、$f : [0,1] \mapsto [0,1] \times [0,1]$ と $f^{-1} : [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1]$ 両方の単射ができ、f は全単射である。Bernstein's theorem により、明らかに

$$card([0,1]^2) = card([0,1]) = \aleph_1$$

問題 1-2-1

1. $(X, 2^X)$ の上に定義されたすべての写像は連続。2. $(X, \{\emptyset, X\})$ に値をとるすべての写像は連続。

解答：

1. 離散位相空間の定義により、離散位相空間 X の任意の部分集合は開集合である。そのため、すべての X からの写像 $f : X \mapsto Y$ に対して、f の任意の開集合の逆像 f_{-1} は X の部分集合であるので、必ず開集合である。故に、すべての f は連続である。
2. 密着位相空間 X への任意の写像を $f : Y \mapsto X$ にする、X の開集合は $\{\emptyset, X\}$ のみである。空集合 $\emptyset$ の原像はもちろん空集合である。そして、$f^{-1}(X) = \{y \in Y | f(y) \in X\} = Y$、$Y$ は Y の中の開集合ので、X のすべての開集合の逆像は開集合である。つまり、すべての f は連続である。

問題 1-2-2

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ を考える、ここで $\mathbb{R}$ は標準位相 $O(\mathbb{R})$ を入れて考える。不連続関数の例を一つ作り。その例が定義 1-2-1 の (*) を満たないことを示せ。

解答：例：下記の関数 f は不連続である

$$f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ x+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

この関数の開集合 $(0,2)$ の f の上の逆像は $(0,1)\cup[2,3)$ である。明らかにこの集合は開集合ではないので、不連続である。

定理 1-2-2 の証明

$(X,\mathfrak{I}),(X',\mathfrak{I}')$：位相空間、$f:X\mapsto X'$：写像。この時、次の 3 条件は同値。

1. f：連続。
2. $\forall F'\subset X'$：閉集合に対し、$f^{-1}(F')$：閉集合である。
3. $\forall x\in X,\forall V'\in\mathbb{V}(f(x))$ に対し、$f^{-1}(V')\in\mathbb{V}(x)$ である。

解答：

1. (1) $\Longleftrightarrow$ (2)　f が連続なので、任意の X' の開集合 K について、$f^{-1}(K)$ は X の開集合になる。そして、X' の閉集合 F に対して、$f^{-1}(F'^c)=(f^{-1}(F'))^c$ は X の閉集合なので、$f^{-1}(F')$ は X の閉集合。逆も同じ。
2. (2) $\Longrightarrow$ (3)　(2) により、$f(x)$ の近傍 $\mathbb{V}(f(x))$ は開集合であるから、$\mathbb{V}(x)$ も開集合。V' の逆像 $f^{-1}(V')$ も開集合である。そして、$V'\in\mathbb{V}(f(x))$、x の近傍 $\mathbb{V}(x)$ を適当にとれば、$f^{-1}(V')\in\mathbb{V}$ である。逆も自明。
3. (3) $\Longrightarrow$ (1)　(1) $\Longleftrightarrow$ (2)、(2) $\Longrightarrow$ (3) ので、(1) $\Longleftrightarrow$ (3) も成り立つ。