2012 年度金融工学・第二回レポート

社会理工学研究科　経営工学専攻　チョウ シホウ　学籍番号 12M42340

問題 2-7-1

次の成立を示せ（inclusion-exclusion formula）
測度空間 $(\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$、$\mu(\mathcal{S}) < +\infty \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mu(A_I)$,

解答：

1. $n = 1$ の場合では明らかに成立。
2. $n = 2$ の場合では、$A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ にする、$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) = A_1 \cup (A_2 \setminus (A_1 \cup A_2))$、測度空間の有限加法性により、

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A) + \mu(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \tag{1}$$

成立。

3. $n > 2$ の場合では、
$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mu(A_I)$ が正しいと仮定すると、

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right)$$

式（1）により

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

ド・モルガンの法則により

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

$B_i = A_i \cap A_{n+1}$ にすると

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$

仮説を使うと

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mu(A_I) + \mu(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mu(B_I) \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mu(A_I) + \mu(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mu(B_I) \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mu(A_I) + \mu(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{\substack{I \subset (\{1,\ldots,n+1\} \setminus \{n+1\}) \\ |I|=k}} \mu(A_I)
\end{aligned} \tag{2}$$

A_{n+1} に対して仮説を使うと

$$\mu(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{I\subset\{n+1\}\\|I|=k}}\mu(A_I)$$

(2) に入れると

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\|I|=k}}\mu(A_I)+\sum_{\substack{I\subset\{n+1\}\\|I|=k}}\mu(A_I)+\sum_{\substack{I\subset(\{1,\dots,n+1\}\setminus\{n+1\})\\|I|=k}}\mu(A_I)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n+1\}\\|I|=k}}A_i\end{aligned}\tag{3}$$

仮説が成立。

故に、inclusion-exclusion formula が成立。

問題 2-7-2

証明を完成させ。

1. $\forall C_1,\forall C_2,\forall C_3,\dots\in\mathcal{B}$,
   $C_n\to C$ (i.e. $\forall i\in\mathbb{N}, C_i\supset C_{i+1}, \bigcap_{i\in\mathbb{N}}C_i=C$) and $\exists k\in\mathbb{N},\mu(C_k)<+\infty$
   $\Rightarrow \mu(C_n)\to\mu(C)$
2. $\forall E_1,\forall E_2,\forall E_3,\dots\in\mathcal{B},\forall i\in\mathbb{N},\mu(E_i)=0$
   $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}E_i)=0$

解答：

1. $\mu(C_n)<+\infty$ なる n を固定し、$B_i := C_n\setminus C_{n+i}$ とおく

$$\forall i\in\mathbb{N}, C_i\supset C_{i+1}\Rightarrow (C_n\setminus C_{n+i})\subset(C_n\setminus C_{n+i+1})\Rightarrow B_i\subset B_{i+1}$$

(a) の結果により、

$$\mu(C_n\setminus C_{n+i})\to\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}C_n\setminus C_{n+i})$$

C_n は有限だから、$\mu(C_n\setminus C_{n+i})=\mu(C_n)-\mu(C_{n+i})$ である。また、$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}C_n\setminus C_{n+i}=C_n\setminus\bigcap_{i\in\mathbb{N}}C_{n+i}$ であるから、

$$\mu(C_n)-\mu(C_{n+i})\to\mu(C_n\setminus\bigcap_{i\in\mathbb{N}}C_{n+i})$$

C_n は有限だから、$\mu(C_n\setminus\bigcap_{i\in\mathbb{N}}C_{n+i})=\mu(C_n)-\mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}C_{n+i})$ であるので、

$$\mu(C_n)-\mu(C_{n+i})\to\mu(C_n)-\mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}C_{n+i})$$

$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}C_i=C$ であるので、

$$\mu(C_n)\to\mu(C)$$

2. $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ とおく、$\bigcup_{i=1}^{n}E_i\subset\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i\Rightarrow F_n\subset F_{n+1}$、一方、有限加法性により、$\mu(F_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=0$

$$\mu(F_n)\to\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i)=0$$

また、$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}E_i$ であるので、

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i)=\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}E_i)=0$$