テーマ２・問１

次の定理を証明せよ．
与えられた n に対して，一様ランダムに $(3,4)$-疎行列 H を生成することを仮定する．また（あらかじめ決められている）パラメータ $p << 1$ に対して，ノイズベクトル $\boldsymbol{n}_* \in \{0,1\}^n$ を各ビットごと独立に確率 p で 1 に，$1-p$ で 0 となるように生成する．こうしたランダムモデルのもとで

$$P_{H,\boldsymbol{n}_*}[\boldsymbol{n}_* \text{が } \boldsymbol{c} = G(\boldsymbol{n}_*, H) \text{ のただ一つの最尤解である}]$$

という確率が n を大きくしたときに 0 に収束する．

証明. この定理を証明するため，幾つの準備 s が必要である．

1. ランダムな H の構成
   確率的に証明するため，次のようにランダムな H を構成する：H のすべての要素を 0 にし，列ごとにランダムに t 個の要素をスリップ（$1 \to 0, 0 \to 1$）する．ここで，t は密度パラメータである．
2. ノイズベクトルの確率 $P(\boldsymbol{n})$
   あるノイズベクトル $\boldsymbol{n}$ に対する確率は

$$P(\boldsymbol{n}) := \prod_i^n (P(\boldsymbol{n}^{(i)}))$$

   この問題では，$P(\boldsymbol{n}^{(i)} = 1) = p$，$P(\boldsymbol{n}^{(i)} = 0) = 1-p$ ので，

$$P(\boldsymbol{n}) := \prod_{\boldsymbol{n}^{(i)}=1} p \times \prod_{\boldsymbol{n}^{(i)}=0} 1-p$$

3. 平均エントロピー **(mean entropy)**
   ノイズベクトル $\boldsymbol{n}$ の平均エントロピーは

$$H_{\boldsymbol{n}} := -\sum_i^n P(\boldsymbol{n}^{(i)}) \log_2 P(\boldsymbol{n}^{(i)}) = p \log_2(\frac{1}{p}) + (1-p)\log_2(\frac{1}{1-p})$$

4. **Typical set**
   Typical set を次のように定める

$$T = T_{n,\eta} = \left\{ \boldsymbol{n} \in \{0,1\}^n : \left| \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{P(\boldsymbol{n})} - H_{\boldsymbol{n}} \right| \le \eta \right\}$$

   ただし，η はある小さい定数．$\sum_{\boldsymbol{n} \in T} P(\boldsymbol{n}) \le 1$ ので，typical set の要素の数は

$$|T| \le 2^{n(H_{\boldsymbol{n}}+\eta)}$$

   を満たす．

大数の法則より，$n \to \infty, \boldsymbol{n} \in \{\boldsymbol{n} | \boldsymbol{n} \notin T\} = \emptyset$ ので，$\boldsymbol{n} \in \{\boldsymbol{n} | \boldsymbol{n} \notin T\}$ だけを考えばよい．

また，

$$\delta(\text{論理式}) = \begin{cases} 1 & \text{論理式は true;} \\ 0 & \text{論理式は false} \end{cases}$$

となる $\delta(\cdot)$ を定義すると，

$$P^*(H) = P_{H,\boldsymbol{n}_*}[\boldsymbol{n}_* \text{が } \boldsymbol{c} = G(\boldsymbol{n}_*, H) \text{ のただ一つの最尤解である}]$$

の確率の上界は次である．

$$P^*(H) \le \sum_{\boldsymbol{n}\in T} P(\boldsymbol{n}) \sum_{\substack{\boldsymbol{n}'\in T,\\ \boldsymbol{n}'\neq\boldsymbol{n}}} \delta[H(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}') \neq 0]$$

また，H はランダムで構造されるので，H の平均をとると，

$$\bar{P}^* \le \sum_{\substack{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'\in T,\\ \boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{n}'}} P(\boldsymbol{n}) \Big\{ \sum_{H} P(H)\delta[H(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}') \neq 0] \Big\}$$

□