2012 年度金融工学・第三回レポート

社会理工学研究科　経営工学専攻　チョウ シホウ　学籍番号 12M42340

問題 3-4-1

1. 次を示せ：$(\liminf_n E_n)^c = \limsup_n E_n^c$
2. $E_n = \{x | \frac{1}{n+1}\sin n < x < 1 + \frac{1}{n+1}\sin n\}, n \in \mathbb{N}$ とする時、$\limsup_n E_n, \liminf_n E_n$ を求めよ。

解答：

1. 測度空間は補集合と可算和に関して閉じるので

$$(\liminf_n E_n)^c = (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\le n} E_n)^c \tag{1}$$
$$= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} (\bigcap_{m\le n} E_n)^c \quad \text{ド・モルガンの法則により} \tag{2}$$
$$= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\le n} E_n^c \quad \text{ド・モルガンの法則により} \tag{3}$$
$$= \limsup_n E_n^c \tag{4}$$

2. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{n+1}\sin(n) < 1 + \frac{1}{n+1}\sin(n) \tag{5}$$
$$\max\{\frac{1}{n+1}\sin(n)\} = \frac{1}{2}\sin 1\ ,\ \max\{1 + \frac{1}{n+1}\sin(n)\} = 1 + \frac{1}{2}\sin 1 \tag{6}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sin(n) = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n+1}\sin(n) = 1 \tag{7}$$

だから、下極限と上極限はそれぞれ

$$\liminf_n E_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\le n} E_n = (\frac{1}{2}\sin 1, 1] \tag{8}$$
$$\limsup_n E_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\le n} E_n = (0, 1 + \frac{1}{2}\sin 1) \tag{9}$$

問題 3-4-2

Fatou's lemma 及び逆向き Fatous's lemma で等号が成立しない様な $\{E_n\}$ の例をそれぞれ構成せよ。

解答：

1. Fatou's lemma は非負可測関数しか適用できないことを基に次の例を構成する

$(\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$ は $[0, +\infty)$ 上の測度空間、$\mathcal{B}$ ボレル σ-algebra,μ はレベーク測度、すべての自然数 n に対して f_n を次に定義する

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } x \in [n, 2n], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

関数 f_n は $\mathcal{S}$ から 0 に一様収束し、すべての $x \le 0, n > 0$ に対しては $f_n(x) = 0$ だが、すべての f_n の積分が 1 であるので、

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu < \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{S}} f_n d\mu = 1$$

等式が成立しない。

2. $\mathcal{S}$ を $\mathbb{R}$ 上の測度空間に定義し、拡張実数値関数 $f_n \in \mathbb{N}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{for } x \in [n, 2n], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと、可積分関数 $g(x) = 0$ が存在し、$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \le g$ ので, 非負列 $(g - f_n)$ が上記の例により等式が成り立たないので、逆向きの Fatou's lemma の等式も成立しない。

$$-1 \le \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathcal{S}} f_n d\mu < \int_{\mathcal{S}} \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = 0$$

問題 5-1-1

確率変数 x_1, x_2, x_3 で、$\{x_1, x_2\}$ は独立、$\{x_2, x_3\}$ は独立、$\{x_1, x_3\}$ は独立だが、$\{x_1, x_2, x_3\}$ は独立ではない様なものの例を作れ。、

解答：二つのコインを同時に投げるの確率を考え、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立変数 x_1, x_2, x_3 とそれぞれの事象は

$$\text{コイン 1 が表：} x_1 \in A_1 = (-\infty, 0] \text{ ならば } x_1 = 1$$

$$\text{コイン 1 が裏：} x_1 \in B_1 = (0, +\infty) \text{ ならば } x_1 = 0$$

$$\text{コイン 2 が表：} x_2 \in A_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}] \text{ ならば } x_2 = 1$$

$$\text{コイン 2 が裏：} x_2 \in B_2 = (-\frac{1}{2}, 0] \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \text{ ならば } x_2 = 0$$

$$\text{結果が同じ：} x_3 \in A_3 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \text{ ならば } x_3 = 1$$

$$\text{結果が違い：} x_3 \in B_3 = (-\frac{1}{2}, 0] \cup (0, \frac{1}{2}] \text{ ならば } x_3 = 0$$

すると、事象 $X \in \mathcal{F}$ に対するの確率空間測度 P も定義できる。

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{for } x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \\ \frac{1}{4} & \text{for } x \in (-\frac{1}{2}, 0] \\ \frac{1}{4} & \text{for } x \in (0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{4} & \text{for } x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

明らかに、$\{x_1, x_2\}$ は独立、$\{x_2, x_3\}$ は独立、$\{x_1, x_3\}$ は独立だが、$\{x_1, x_2, x_3\}$ は独立ではない。一つの反例を挙げれば示せる。

$$P(x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3) = \frac{1}{4} \neq P(x_1 \in A_1)P(x_2 \in A_2)P(x_3 \in A_3) = \frac{1}{8}$$

その意味は、コイン 1 もコイン 2 も表ならば、両方の結果が同じであることも決めたので、お互いには独立ではない。

おまけ問題

$\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U}$ を可測空間とし、$f : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{T}, g : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{U}$ という二つの写像が与えられている。g が可測で g と f の合成 $g \circ f : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{U}$ が可測であるとき f は可測といえるか？

解答：$(X_S, \mathcal{S}), (\mathbb{R}, \mathcal{T}), (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ を可測空間とし、$X_S = [0, 1], A \subset X_S$ とおく。ただし、A は非可測集合である。そして、$f : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{T}$ を次に定義する。

$$f(X) = \begin{cases} 1 & \text{for } X \in A \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

一方、$g(X) = X^2$ とおくと、$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = (f(X))^2$。$-1 \notin X_S$ ので f は非可測関数である、また、$\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)^{-1}(X) \in [0, 1], g^{-1}(X) \in \mathbb{R}$ ので、$(g \circ f)(X)$ と $g(X)$ は可測関数であることがわかる。ゆえに、g が可測で g と f の合成 $g \circ f : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{U}$ が可測であるとき f は必ずしも可測とはいえない。