2012 年度金融リスクマネジメント・第一回レポート

12M42340　チョウ　シホウ

1　問題 1

2　問題 2

証明. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : C^2$-function, $B(t) = (B^1(t), \ldots, B^d(t))$ に対して，過程 $f(t, B(t)) = f(t, B^1(t), \ldots, B^d(t))$ を ito-formula で求め，微分形式で表す．ただし，$B(t) = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})(t)$.

$$df(t, B(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{A} + \sum_{i}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} dB^{(i)}(\mathcal{A}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} d\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle(\mathcal{A}) \tag{2.1}$$

$B(t)$ は Brownian motion であるので，$d\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle(\mathcal{A}) = d\mathcal{A}$，式 (2.1) に代入すると，

$$df(t, B(t)) = \Big(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}} + \frac{1}{2} \sum_{i}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} \Big) d\mathcal{A} + \sum_{i}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} dB^{(i)}(\mathcal{A}) \tag{2.2}$$

式 (2.2) を両方積分を取る．

$$f(t, B(t)) = f(0, B(0)) + \int_0^t \Big(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}} + \frac{1}{2} \sum_{i}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} \Big) d\mathcal{A} + \sum_{i}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}} dB^{(i)}(\mathcal{A}) \tag{2.3}$$

式 2.3 の右辺第二項を $H(\mathcal{A})$ とおくと

$$H(\mathcal{A}) = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}} + \frac{1}{2} \sum_{i}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} \tag{2.4}$$

明らかに，次の式と同じ形式である．

$$X(t) = X(0) + \int_0^t H(\mathcal{A}) d\mathcal{A} + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t K_i(\mathcal{A}) dB^{(i)}(\mathcal{A}) \tag{2.5}$$

命題 2.10.1 より，$H(\mathcal{A}) = 0$ ので，

$$H(\mathcal{A}) = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}} + \frac{1}{2} \sum_{i}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^{(i)})^2} = 0 \tag{2.6}$$

□