2012 年度金融工学・第五回レポート

社会理工学研究科　経営工学専攻　チョウ シホウ　学籍番号 12M42340

5 月 16 日・練習問題 1

株価：$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$
収益率：$R_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$，$n \geq 1$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is i.i.d.
$E[x_n] = 0, E[x_n^2] = 1$ とする．
今，$R_n = m + \sqrt{v}x_n$，$(m \in \mathbb{R}, v > 0)$ と表されると仮定する (収益率のモデル化)．このとき，期待収益率は $E[R_n] = m$，収益率の分散は $V[R_n] = E[(R_n - E[R_n])^2] = v$ である．また，$S_n = S_{n-1} + S_{n-1}R_n = S_{n-1}(1 + m + \sqrt{v}x_n)$，$\mathcal{F}_n = \sigma(x_1, \ldots, x_n)$ とおく，

1. $E[S_4|\mathcal{F}_2] = ?$
2. $E[S_{n+3}|\mathcal{F}_n] = ?$

解答：

1. $S_n = S_{n-1}(1 + m + \sqrt{v}x_n)$ ので，$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n}(1 + m + \sqrt{v}x_i)$.
   条件付き期待値の性質:
   (a) X が $\mathcal{G}$-可測ならば，$E[X|\mathcal{G}] = X$
   (b) X と $\mathcal{G}$ が独立ならば，$E[X|\mathcal{G}] = E[X]$
   より

$$
\begin{aligned}
E[S_4|\mathcal{F}_2] &= E[S_0 \prod_{i=1}^{4}(1 + m + \sqrt{v}x_i)|\sigma(x_1, x_2)] \\
&= S_0 E[\prod_{i=1}^{2}(1 + m + \sqrt{v}x_i)|\sigma(x_1, x_2)] E[\prod_{i=3}^{4}(1 + m + \sqrt{v}x_i)|\sigma(x_1, x_2)] \\
&= \Big(S_0 \prod_{i=1}^{2}(1 + m + \sqrt{v}x_i)\Big) E[\prod_{i=3}^{4}(1 + m + \sqrt{v}x_i)] \quad \text{性質 (a)(b) より} \\
&= S_2(1 + m)^2
\end{aligned}
$$

2. 同様に，

$$
\begin{aligned}
E[S_{n+3}|\mathcal{F}_n] &= E[S_0 \prod_{i=1}^{n+3}(1 + m + \sqrt{v}x_i)|\sigma(x_1, \ldots, x_n)] \\
&= S_0 E[\prod_{i=1}^{n}(1 + m + \sqrt{v}x_i)|\sigma(x_1, \ldots, x_n)] E[\prod_{i=n+1}^{n+3}(1 + m + \sqrt{v}x_i)|\sigma(x_1, \ldots, x_n)] \\
&= \Big(S_0 \prod_{i=1}^{n}(1 + m + \sqrt{v}x_i)\Big) E[\prod_{i=n+1}^{n+3}(1 + m + \sqrt{v}x_i)] \\
&= S_n(1 + m)^3
\end{aligned}
$$

5 月 16 日・練習問題 2

金利は r，$S_n^0=(1+r)^n$，株式の現在価値は $\tilde{S_n}=\frac{S_n}{S_n^0}$
$\{\tilde{S_n}\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールになるための必要十分条件を求めよ．

解答：

マルチンゲールの定義より，$\{\tilde{S_n}\}_{n=0}^{\infty}$ が $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ 上のマルチンゲールになるための必要十分条件は

1. 任意の時刻 n について $\tilde{S_n}$ は $\mathcal{F}_n$ 可測確率変数である（Adapted）．
2. 任意の時刻 n について $\tilde{S_n}$ は可積分である．
$$\forall n>0,\ E[\tilde{S_n}]<\infty$$
3. 任意の時刻 n について $t>0, E[\tilde{S}_{n+t}|\mathcal{F}_n]=\tilde{S}_n$.

株式の現在価値 $\tilde{S_n}$ は
$$\tilde{S_n}=\frac{S_0\prod_{i=1}^{n}(1+m+\sqrt{v}x_i)}{(1+r)^n}$$
n 期までの情報を知り，$n+t$ 期以降の期待値は

$$\begin{aligned}
E[\tilde{S}_{n+t}|\mathcal{F}_n] &= E\Big[\frac{S_0\prod_{i=1}^{n+t}(1+m+\sqrt{v}x_i)}{(1+r)^{n+t}}\Big|\sigma(x_1,\dots,x_n)\Big]\\
&= E\Big[\frac{S_0\prod_{i=1}^{n}(1+m+\sqrt{v}x_i)}{(1+r)^{n+t}}\Big|\sigma(x_1,\dots,x_n)\Big]E\Big[\prod_{i=n+1}^{n+t}(1+m+\sqrt{v}x_i)\Big|\sigma(x_1,\dots,x_n)\Big]\\
&= E\Big[\frac{S_0\prod_{i=1}^{n}(1+m+\sqrt{v}x_i)}{(1+r)^{n+t}}\Big|\sigma(x_1,\dots,x_n)\Big](1+m)^t\\
&= \tilde{S_n}\Big(\frac{1+m}{1+r}\Big)^t
\end{aligned}$$

明らかに，$m=t$ の時のみ，$E[\tilde{S}_{n+t}|\mathcal{F}_n]=\tilde{S}_n$ が成り立つので，条件 1,2 と $m=t$ 三つの条件は $\{\tilde{S_n}\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールになるための必要十分条件

5 月 26 日・練習問題 1

$\{w_t\}_{t\geq 0}, \{\tilde{w}_t\}_{t\geq 0}$，1-dim，BM 独立.
$\rho \in (-1,1), B_t := \rho w_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{w}_t, (t \geq 0)$

1. $\{B_t\}_{t\geq 0}$ が BM ですることを確かめよ（特性関数を使うべし）.
2. B_t と w_t の相関係数.

解答：

1.
- $B_0 = \rho w_0 + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{w}_0 = 0$
- w_t と $\tilde{w}_t$ は確率 1（almost surely）で連続であるので，合成関数の連続性より，$B_t := \rho w_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{w}_t$ も連続.
- $0 \leq s < t$，$w_t - w_s$ と $\tilde{w}_t - \tilde{w}_s$ は定常増分性を持つので，平均 0 分散 $t-s$ の正規分布に従う，それぞれの特性関数は

$$\begin{aligned} E[\exp(i\alpha(w_t - w_s))] =& \ \exp(i\mu\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2) \\ E[\exp(i\alpha(\tilde{w}_t - \tilde{w}_s))] =& \ \exp(i\tilde{\mu}\alpha - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\alpha^2) \end{aligned}$$

ただし，$\mu, \tilde{\mu}, \sigma, \tilde{\sigma}$ はそれぞれ $(w_t - w_s), (\tilde{w}_t - \tilde{w}_s)$ の平均と分散である．次は，$B_t - B_s$ の特性関数を求める.

$$\begin{aligned} E[\exp(i\alpha(B_t - B_s))] =& \ E[\exp(i\alpha(\rho w_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{w}_t) - i\alpha(\rho w_s + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{w}_s))] \\ =& \ E[\exp(i\alpha\rho(w_t - w_s))\exp(i\alpha\sqrt{1-\rho^2}(\tilde{w}_t - \tilde{w}_s))] \\ =& \ E[\exp(i\alpha\rho(w_t - w_s))]E[\exp(i\alpha\sqrt{1-\rho^2}(\tilde{w}_t - \tilde{w}_s))] \\ =& \ \exp\Big(i\mu\rho\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\rho^2\Big)\exp\Big(i\tilde{\mu}\alpha\rho - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\alpha^2(1-\rho^2)\Big) \\ =& \ \exp\Big(i(\mu\rho + \tilde{\mu}\sqrt{1-\rho^2})\alpha - \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + (1-\rho^2)\tilde{\sigma}^2)\alpha^2\Big) \end{aligned}$$

従って，$B_t - B_{t-1}$ は $N\Big(\rho\mu + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{\mu}, \rho^2\sigma^2 + (1-\rho^2)\tilde{\sigma}^2\Big) = N(0, t-s)$ の正規分布に従い，**定常増分性**を持つ.

- 定常増分性より，$w_t - w_s$ と $\tilde{w}_t - \tilde{w}_s$ の平均も 0 である．すべての $0 < n < m, 0 \leq s < t$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(w_{t_m} - w_{s_m}, w_{t_n} - w_{s_n}) =& E[(w_{t_m} - w_{s_m})(w_{t_n} - w_{s_n})] = 0 \\ \mathrm{cov}(\tilde{w}_{t_m} - \tilde{w}_{s_m}, \tilde{w}_{t_n} - \tilde{w}_{s_n}) =& E[(\tilde{w}_{t_m} - \tilde{w}_{s_m})(\tilde{w}_{t_n} - \tilde{w}_{s_n})] = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ，また，$B_t - B_s$ の平均は 0 であるので,

$$\begin{aligned} & \mathrm{cov}(B_{t_m} - B_{s_m}, B_{t_n} - B_{s_n}) \\ =& \ E[(B_{t_m} - B_{s_m})(B_{t_n} - B_{s_n})] \\ =& \ E\Big[\Big(\rho(w_{t_m} - w_{s_m}) + \sqrt{1-\rho^2}(\tilde{w}_{t_m} - \tilde{w}_{s_m})\Big)\Big(\rho(w_{t_n} - w_{s_n}) + \sqrt{1-\rho^2}(\tilde{w}_{t_n} - \tilde{w}_{s_n})\Big)\Big] \\ =& \ \rho^2 E\Big[(w_{t_m} - w_{s_m})(w_{t_n} - w_{s_n})\Big] + (1-\rho^2)E\Big[(\tilde{w}_{t_m} - \tilde{w}_{s_m})(\tilde{w}_{t_n} - \tilde{w}_{s_n})\Big] + \\ & \quad \rho\sqrt{1-\rho^2}\Big(E\Big[(w_{t_n} - w_{s_n})(\tilde{w}_{t_m} - \tilde{w}_{s_m})\Big] + E\Big[(w_{t_m} - w_{s_m})(\tilde{w}_{t_n} - \tilde{w}_{s_n})\Big]\Big) \\ =& \ \rho\sqrt{1-\rho^2}\Big(E\Big[(w_{t_n} - w_{s_n})(\tilde{w}_{t_m} - \tilde{w}_{s_m})\Big] + E\Big[(w_{t_m} - w_{s_m})(\tilde{w}_{t_n} - \tilde{w}_{s_n})\Big]\Big) \\ =& \ 0 \end{aligned}$$

従って，**独立増分性**を持つ.

以上の四つの条件を満たすので，$\{B_t\}_{t\geq 0}$ は BM である.

2. BM の定常増分性より

$$B_t = B_t - B_0 = N(0,t)$$

$$w_t = w_t - w_0 = N(0,t)$$

$$\tilde{w}_t = \tilde{w}_t - \tilde{w}_0 = N(0,t)$$

B_t と w_t の相関係数 θ は

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{E[B_t w_t] - E[B_t]E[w_t]}{\sqrt{(E[B_t^2] - E[B_t]^2)(E[w_t^2] - E[w_t]^2)}} \\
&= \frac{E[B_t w_t]}{\sqrt{t^2}} \\
&= \frac{E[(\rho w_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{w}_t)w_t]}{t} \\
&= \frac{\rho E[w_t^2] + \sqrt{1-\rho^2}E[\tilde{w}_t w_t]}{t} \\
&= \frac{\rho E[w_t^2]}{t} \\
&= \rho
\end{aligned}$$