2012 年度金融工学・第六回レポート

社会理工学研究科　経営工学専攻　チョウ シホウ　学籍番号 12M42340

6 月 1 日・練習問題 1

$\{w_t\}$ は 1-dim の BM.

1. $X_t := e^{\frac{t}{2}} \cos w_t$ がマルチンゲールであることを示せ.（伊藤の公式を使う）.
2. $x > 0, x_t = (x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)^3$ が満たす SDE を導け.

1. 各項の微分を取る

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \cos w_t - e^{\frac{t}{2}} \sin w_t dw_t = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \cos w_t$$

（伊藤のルールより $dw_t dt = 0$）

$$\frac{dX_t}{dw_t} = -e^{\frac{t}{2}} \sin w_t$$

$$\frac{d^2 X_t}{dw_t^2} = \frac{d^2 X_t}{dt} = -e^{\frac{t}{2}} \cos w_t$$

すると

$$dX_t = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \cos w_t dt - e^{\frac{t}{2}} \sin w_t dw_t - \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \cos w_t dt = -e^{\frac{t}{2}} \sin w_t dw_t \qquad \text{（伊藤の公式より）}$$

$$E[dX_t | \mathcal{F}_t] = -e^{\frac{t}{2}} \sin w_t E[dw_t | \mathcal{F}_t] = 0$$

従って，$X_t := e^{\frac{t}{2}} \cos w_t$ がマルチンゲールである.

2.

$$\frac{dx_t}{dx} = 3(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)^2 \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)^2 x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dx_t}{dw_t} = 3(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)^2 \frac{1}{3} = (x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)^2$$

$$\frac{d^2 x_t}{dw_t^2} = 2(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t) \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)$$

伊藤の公式より

$$dx_t = x^{-\frac{2}{3}} (x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)^2 dx + (x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t)^2 dw_t + \frac{1}{3}(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} w_t) dw_t^2$$

6 月 8 日・練習問題 1

$$\text{SDE}\begin{cases} dX_t = \frac{1}{2}\sigma(X_t)\sigma'(X_t)dt + \sigma(X_t)dw_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \text{を考え} \tag{1}$$

1. $f\ (x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sigma(y)}$ として，$(f^{-1})', (f^{-1})''$ を計算せよ
2. (1) の結果を利用して上の SDE を解け.

1.

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dw_t,\ \ \sigma = 0$$

$$dX_t = b(t, X_t)dt \Rightarrow \frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t)$$

$$dX_t = \frac{1}{2}\sigma(X_t)\sigma'(X_t)dt + \sigma(X_t)dw_t$$

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sigma(y)}$$

とおくと

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \sigma(f^{-1}(y)) \\ (f^{-1})''(y) &= \sigma'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) \\ &= \sigma'(f^{-1}(y))\sigma(f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

2. 伊藤の公式より，$X_t = f^{-1}(w_t + f(x_0))$ ので,

$$\begin{aligned} dX_t &= df^{-1}(w_t + f(x_0)) \\ &= (f^{-1})'(w_t + f(x_0))dw_t + \frac{1}{2}(f^{-1})''(w_t + f(x_0))dt \\ &= \sigma(f^{-1}(w_t + f(x_0)))dw_t + \frac{1}{2}\sigma'(f^{-1}(w_t + f(x_0)))\sigma(f^{-1}(w_t + f(x_0)))dt \\ &= \sigma(X_t)dw_t + \frac{1}{2}\sigma'(X_t)\sigma(X_t)d_t \end{aligned}$$

従って

$$X_0 = f^{-1}(w_0 + f(x_0)) = x_0$$

SDE の解である.

6 月 8 日・練習問題 2

$$\mathrm{SDE}\begin{cases} dX_t = dt + 2\sqrt{X_t}dw_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

を解け

$\sigma(x) = 2\sqrt{x}$ とおく，

$$dX_t = dt + 2\sqrt{X_t}dw_t,\ \ \sigma'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \ \sigma\sigma'(x) = 2$$

によると

$$dX_t = \frac{1}{2}\sigma(X_t)\sigma'(X_t)dt + \sigma(X_t)dw_t$$

伊藤の公式により，

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_{x_0}^{x} (\sqrt{y})'dy = \sqrt{x} - \sqrt{x_0}$$
$$f^{-1}(y) = (y + \sqrt{x_0})^2, \qquad f(x_0) = 0$$

従って，

$$X_t = f^{-1}(w_t + f(x_0)) = (w_t + \sqrt{x_0})^2$$