テーマ0：準備「P $\neq$ NP 予想」

本日の講義の目的

- NP-困難性の速成コース

我々の周辺には比較的簡単に解けそうでいて，一般的に効率的に解くのが難しい問題（正確には「難しいと予想されている問題」）が非常に多くある．その典型例が NP-困難な問題である．この講義の準備として，NP とは何か，NP-困難問題とは何か，またそれらの具体例について紹介しよう．

0.1. NP-問題，NP-困難性

NP 問題とは，yes/no の判定問題で，yes の場合には，その証拠があり，証拠（の候補）を与えられれば，それが正しい証拠か否かを判定するのが（計算論的に）簡単な問題である．この概念を正確に定義する方法を一つ紹介しよう．以下では，論理式の真偽値を，1（真）と 0（偽）で表すことにする．

定義 0.1. 2 進列 $\{0,1\}^*$ 上の 2 値関数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ で，次の条件を満たす多項式 $q(\cdot)$ と多項式時間計算量を持つ 証拠判定アルゴリズム $\mathtt{R}$ が存在するとき，f を NP 型判定関数 と呼ぶ．

任意の $x \in \{0,1\}^*$ に対し（$n = |x| = x$ の長さとする）

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1 &\iff \exists w \in \{0,1\}^* : |w| = q(n)\ [\ \mathtt{R}(x,w) = 1\ ], \quad \text{and} \\
f(x) = 0 &\iff \forall w \in \{0,1\}^* : |w| = q(n)\ [\ \mathtt{R}(x,w) \neq 1\ ].
\end{aligned}
$$

こうした NP-型判定関数によって判定される判定問題を一般に NP-問題 という．また NP-問題の集合を NP という記号で表わす．それに対し，P は，多項式時間で解ける問題の集合を表わす記号．有名な「P $\neq$ NP 予想」とは，NP の中に P に入らないもの（つまり多項式時間で解けないもの）が存在する，という予想である．

なお，技術的には「アルゴリズム」とか「多項式時間」いうだけでは曖昧な点があり，厳密にする必要がある．そのためには，計算を実現する「機械」や「回路」を用いるのが普通だが，ここでは省略して先に進むことにする．

このような NP-問題の代表例が次に定義する 3SAT 問題である．

3SAT 問題 (SATisfiability problem, 3SAT)
入力： 3-積和標準形 命題論理式 $F(X_1, ..., X_n)$ （式の命題変数の数を n とする）．
仕事： F が 充足可能 か否かの判定.
補足： 以下では積和標準形を CNF (Conjunctive Normal Form) と略記する．

この 3SAT 問題は NP-問題の 1 つである．さらにこの問題に対しては次の性質を証明することができる．これを 3SAT 問題の NP-困難性という．この性質のために 3SAT は NP-問題の代表的な問題と呼ばれているのである.（注：正確には NP-困難性は多項式時間還元を用いて定義されるべきものだが，ここではその説明を省略する.）

定理 0.1. 3SAT 問題を判定する多項式時間アルゴリズムが存在するならば，すべての NP-問題に対し，それを判定する多項式時間アルゴリズムを作ることができる．

3SAT 問題は NP-問題である上にさらに NP-困難でもある．しがたって，上の定理から次の系が直ちに導ける．つまり，NP-問題の中で最も難しい問題の 1 つなのである．このような問題を特に NP-完全 な問題という．

系 0.2. 3SAT に対して多項式時間アルゴリズムが存在する $\Longleftrightarrow$ P = NP.

ところで 3SAT は NP-困難（そして NP-完全）だが，それと似た次の問題に対しては，効率の良いアルゴリズムが存在する．単純に見た目だけからは判断できないのが NP-困難性の難しいところである．

2SAT 問題
入力： 2-CNF 論理式 $F(X_1, ..., X_n)$（式の命題変数の数を n とする）.
仕事： F が充足可能か否かの判定.

3XORSAT 問題
入力： 3XOR-CNF 論理式 $F(X_1, ..., X_n)$（式の命題変数の数を n とする）.
仕事： F が充足可能か否かの判定.

0.2. NP-困難な問題の例

NP-困難な問題は非常に多く発見されている．ここでは以降のテーマでも登場するグラフに関する問題を中心に，いくつか例を紹介する.「グラフ」は様々な問題をモデル化して分析するときに非常に有功な表現手段であり，グラフに関する問題群は情報処理の基本中の基本といえるだろう．

Hamilton 閉路問題 (HAMilotonian circuit problem, HAM)
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$.
仕事： G に Hamliton 閉路があるか？

この発展形に巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem, TSP) などがある．ちなみに Euler 閉路の判定問題は多項式時間に計算可能である．

問題の中には yes/no の判定ではなく，最適解を聞く問題もある．たとえば次のような問題である．

点彩色問題 (Vertex coloring problem)
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$.
仕事： G の最小点彩色数を求めよ．あるいは，その彩色法を求めよ．

こうした問題は NP には入らない（計算量クラス的には上位のクラスに入る）が，NP-困難ではある．また，次のような判定版の問題を考えれば NP-問題となる．こうした判定版が NP に入るような最適化問題を NP-型最適化問題 という．

点彩色問題（判定版）(COR)
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$, 整数 K.
仕事： G は K 色（以下）で頂点彩色が可能か？

定理 0.3. 点彩色問題（判定版）が多項式時間計算可能（つまり，COR $\in$ P）ならば元々の点彩色問題も多項式時間計算可能である.（注：逆は明らか.）

さらには彩色数を 3 に限っても NP-困難性は保たれる．つまり，次の問題も NP-困難であることが知られている．

三彩色問題 (3COR)
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$.
仕事： G は 3 色（以下）で頂点彩色が可能か？

点彩色問題に密接に関連する次の問題も NP-困難である．

最大独立点集合問題（判定版）(Max. Independent Set problem, MIS)
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$，整数 K
仕事： G は K 頂点（以上）の独立点集合を持つか？

これと対称的な関係にある次の問題も様々な応用がある．

最大完全グラフ問題（判定版）(max. CLIQUE problem, CLIQUE)
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$，整数 K
仕事： G は K 頂点（以上）の完全グラフを部分グラフとして持つか？

頂点被覆問題（判定版）(Vertex Cover problem, VC)
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$, 整数 K.
仕事： G は K 頂点（以下）の頂点被覆を持つか？

0.3. NP 困難性の証明例

定理 0.4. VC $\in$ P $\Longrightarrow$ 3SAT $\in$ P.

定理 0.5. MIS $\in$ P $\Longrightarrow$ VC $\in$ P.

定理 0.6. 3COR $\in$ P $\Longrightarrow$ 3SAT $\in$ P.

参考文献

NP-問題，NP-困難性などについては以下を参照することをお勧めする：

[1] M. Sipser 著，大田・田中監訳，計算理論の基礎（３：複雑さの理論），共立出版，2008.

次の本は NP についての歴史的教科書．NP-完全問題や NP-困難問題の例を見るには，やはりこの本だろう．

[2] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Compters and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Co., 1979.

テーマ＃０での課題（〆切：原則として４月２０日（金））

次のいずれかの問いに対する答えをレポートしてまとめる．参考文献，参考資料などを用いた場合は明記すること．

1. 定理 0.3 を証明せよ.（注：最適化版は彩色数を求める問題としてもよい．もちろん，最適彩色を求める方法まで示すことができれば得点は高い！）
2. 今回はグラフの問題を考えたが，様々な分野（ほとんどすべての分野と言ってもよい）で NP-困難な問題にぶつかる．たとえば，次の問題は数理計画的な問題でも非常に単純な形の問題だろう．これも NP-困難である（NP-問題でもある）．この NP-困難性を 3SAT からの還元で証明せよ．

   <u>部分和問題</u> (Subset SUM problem, SSUM)
   入力：　正整数の列 $(s_1, ..., s_n)$，正整数 W.
   仕事：　Is there any I such that $\sum_{i \in I} a_i = W$?

3. ハミルトン閉路問題 (HAM) が NP-困難であることを証明せよ．還元の元は 3SAT, VC, 3COR くらいが望ましい．