2012 年度金融工学・第四回レポート

社会理工学研究科　経営工学専攻　チョウ シホウ　学籍番号 12M42340

問題 6-3-1

Fatou's lemma に於いて，等号が成立しない様な関数列の例を作れ.

解答：

Fatou's lemma は非負可測関数しか適用できないことを基に次の例を構成する
$(\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$ は $[0, +\infty)$ 上の測度空間，$\mathcal{B}$ はボレル σ -algebra，μ はレベーク測度、すべての自然数 n に対して f_n を次に定義する

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } x \in [n, 2n], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

関数 f_n は $\mathcal{S}$ から 0 に一様収束し、すべての $x \leq 0, n > 0$ に対しては $f_n(x) = 0$ だが、すべての f_n の積分が 1 であるので、

$$0 = \mu(\liminf_n f_n) = \int_{\mathcal{S}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu < \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{S}} f_n d\mu = \liminf_n \mu(f_n) = 1$$

等式が成立しない。

問題 6-3-2

1. Reverse Fatou's lemma を証明し，等号の成立しない例を作れ.
2. $\mu(g) < +\infty$ の条件が満たされない場合に，上の不等式が成立しなくなる様な例を作れ.

解答：

1. $\exists g, \forall n \in \mathbb{N}, \mu(g) < +\infty, f_n \leq g$ ので，関数列 $h_n = (g - f_n)$ とおき，$\forall h_{n n\in\mathbb{N}} \subset (m\mathcal{B})^+$ ので，Fatou's lemma を適用できる，

$$\mu(\liminf_n (g - f_n)) \leq \liminf_n \mu(g - f_n)$$

また，$\liminf_n(-f_n) = -\limsup_n f_n$ より，不等式の左辺は，

$$\begin{aligned} \mu(\liminf_n (g - f_n)) = & \ \mu(g + \liminf_n(-f_n)) \\ = & \ \mu(g) + \mu(\liminf_n(-f_n)) \\ = & \ \mu(g) + \mu(-\limsup_n f_n) \\ = & \ \mu(g) - \mu(\limsup_n f_n) \end{aligned}$$

に変形できる．一方，不等式の右辺は

$$\begin{aligned} \liminf_n \mu(g - f_n) = & \ \liminf_n(\mu(g) - \mu(f_n)) \\ = & \ \mu(g) + \liminf_n(-\mu(f_n)) \\ = & \ \mu(g) - \limsup_n \mu(f_n) \end{aligned}$$

になるので．両辺 $\mu(g)$ を引く，不等式の向きを逆にすれば，

$$\limsup_n \mu(f_n) \leq \mu(\limsup_n f_n)$$

次は，反例一個を挙げる：$\mathcal{S}$ を $\mathbb{R}$ 上の測度空間に定義し、関数列 $f_n \in \mathbb{N}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{for } x \in [n, 2n], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと、可積分関数 $g(x) = 0$ が存在し、$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq g$ ので, 非負列 $(g - f_n)$ が上記の例により等式が成り立たないので、逆向きの Fatou's lemma の等式も成立しない。

$$0 = \limsup_{n\to\infty} \mu(f_n) = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathcal{S}} f_n d\mu < \int_{\mathcal{S}} \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \mu(\limsup_{n\to\infty} f_n) = 1$$

2. 前の証明を考え，$\mu(g) > +\infty$ が成り立たない場合，両方 $\mu(g)$ を引くと不等式が必ず満たさないので，上の不等式が成り立たない.
下記の反例を考え，

$$f_n(x) = x^2$$

$\forall g, \mu(g) = +\infty$ ので，不等式が成り立たない

問題 6-4-1

命題 6.4.1(線形性) を証明せよ

解答：f, g を下から近似する次の非負単関数の列 f_n, g_n を考え，

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x) \to f$$
$$\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}(x) \to g$$

すると

$$\begin{aligned}
&\mu(\alpha f_n + \beta g_n) \\
=\ &\mu\Big(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x) + \beta \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}(x)\Big) \\
=\ &\mu\Big(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)\Big) + \mu\Big(\beta \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}(x)\Big), \quad \text{非負単関数の加法性より} \\
=\ &\alpha\mu(\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)) + \beta\mu(\sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}(x)), \quad \text{非負単関数の正斉次性より} \\
=\ &\alpha\mu(f_n) + \beta\mu(g_m)
\end{aligned}$$

単調収束定理より,

$$\mu(f_n) \to \mu(f),\ \mu(g_m) \to \mu(g),\ \mu(\alpha f_n + \beta g_m) \to \mu(\alpha f + \beta g)$$

問題 6-5-1

$f \in \mathcal{L}'(\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu), g_n = f 1_{[-n,n]}, h_n = \min(f, n)$ と定める時,

$$\mu(|f - g_n|) \to 0$$
$$\mu(|f - h_n|) \to 0$$

の成立を示せ.

解答：

- $n \to \infty$ の時，g_n は f に近似しているので，$g_n \to f$ である．明らかに，$|f_n| \le |f|$，また，$\forall f \in m\mathcal{B} \Rightarrow \mu(|f|) < +\infty$ ので，優収束定理より，
$$\mu(|f_n - f|) \to 0 \tag{1}$$
が成立である．
- $h_n = \min(f, n)$ ので，$n \to \infty$ の時，h_n は f に近似しているので，$h_n \to f$ である．なお，$\exists f' = |f|, |f_n| \ge f', \mu(f') < +\infty$ にので，優収束定理より，
$$\mu(|h_n - f|) \to 0 \tag{2}$$
が成立である．

問題 7-1-1

Markov の不等式を証明せよ．

解答：I_A 特性確率関数を次のように定義する，

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{A が起きる} \\ 0, & \text{A が起きらない} \end{cases}$$

する．明らかに，$I_{X \ge c} \le X$ が成立，$g > 0$，ゆえに

$$\begin{aligned} g(c)P(\{w|X(w) \ge c\}) = &\ g(c)E(I_{X(w)\ge c}; \{w|X(w) \ge c\}) \\ \le &\ g(c)E(X; \{w|X(w) \ge c\}) \\ = &\ E(g \circ X; \{w|X(w) \ge c\}) \end{aligned}$$

が成り立つ．また，$\{g \circ X | \{w|X(w) \ge c\}\} \subseteq \{g \circ X\}$ ので，期待値の線形性による

$$E(g \circ X; \{w|X(w) \ge c\}) \le E(g \circ X) \tag{3}$$

添付問題

次の不等式を Markov の不等式から証明せよ．$\forall \theta > 0, \forall c \in \mathbb{R}, \forall Y \in m\mathcal{F}$

$$P(\{w|Y(w) > c\}) \le e^{-c\theta} E[e^{\theta Y}]$$

解答：$g(c) = e^{c\theta}$ とおくと，$(g \circ Y)(c) = e^{\theta Y(c)}$ である．また，Markov の不等式により，

$$\begin{aligned} g(c)P(\{w|Y(w) > c\}) &= e^{c\theta} P(\{w|Y(w) > c\}) \\ &\le E(g \circ Y; \{w|Y(w) > c\}) \\ &\le E(g \circ Y) \\ &= E(e^{\theta Y}) \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ，$c > 0, \theta > 0 \Rightarrow e^{c\theta} > 0$ ので

$$P(\{w|Y(w) > c\}) \le e^{-c\theta} E(e^{\theta Y}) \tag{5}$$