2012 年度数理計画法特論・第一回レポート

社会理工学研究科　経営工学専攻　チョウ シホウ　学籍番号 12M42340

問題 1

1. 線形相補問題は次の問題とは同じ：

$$\begin{aligned} \min \quad & z(Mz+q) && (1)\\ \text{s.t.} \quad & Mz+q \geq 0 && (2)\\ & z \geq 0 && (3) \end{aligned}$$

この最適化問題は混合整数線形問題（MILP）に定着できる：

$$\begin{aligned} \min \quad & a && (4)\\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq a(Mz+q) \leq k && (5)\\ & 0 \leq az \leq e-k && (6)\\ & 0 \leq a \leq 1 && (7)\\ & e = (1,1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^n && (8)\\ & k \in \{0,1\}^n && (9) \end{aligned}$$

$\forall i = 1,2,\ldots,n, k_i \in \{0,1\}, 0 \leq az_i \leq 1-k_i, 0 \leq a(Mz+q)_i \leq k_i$ の制約がある。

最適解 (z^*, k^*, a^*) が存在すれば、それが線形相補性条件を満たすことを示す。

(a) $a* > 0$ の時：$k_i^* = 1$ ならば（6）により $z_i = 0$、$k_i^* = 0$ ならば（5）により $(Mz+q)_i = 0$、両方でも $z_i^*(Mz+q)_i = 0$ を満たす。

(b) $a^* = 0$ の時：$z = 0$ と $Mz+q = 0$ が同時に成り立たないので、$k_i^* = 1$ ならば $(Mz+q)_i > 0, z_i^* = 0$、$k_i^* = 0$ ならば $(Mz+q)_i = 0, z_i^* > 0$、同じく $z_i^*(Mz+q)_i = 0$ を満たす。

最適解があればすべての i に対して $z_i^*(Mz+q)_i = 0$ が成立なので、線形相補性条件 $z(Mz+q) = \sum_i^n z_i(Mz+q)_i = 0$ を満たす。

2. ジョブ j がジョブ k より優先ならば $y_{jk} = 1$、そうではなければ $y_{jk} = 0$。M は大きい人工変数。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} w_j C_j && (10)\\ \text{s.t.} \quad & C_j \geq p_j, \forall j \in \{1,2,..,n\} && (11)\\ & C_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,..,n\} && (12)\\ & C_j + p_k \leq C_k + M(1-y_{jk}), \forall j,k \in \{1,2,..,n\}, j<k && (13)\\ & C_k + p_j \leq C_j + My_{jk}, \forall j,k \in \{1,2,..,n\}, j<k && (14)\\ & y_{jk} \in \{0,1\}, \forall j,k \in \{1,2,..,n\}, j<k && (15) \end{aligned}$$

制約条件（13）（14）により

(a) $y_{jk} = 1$ ならば、ジョブ j がジョブ k より優先、$C_j + p_k \leq C_k$

(b) $y_{jk} = 0$ ならば、ジョブ k がジョブ j より優先、$C_k + p_j \leq C_j$

制約条件（11）（12）と組み合わせすると、最適解が存在すれば、

$$\text{ジョブ}\ j\ \text{の完了時刻：}C_j = p_j + \sum_{a,b\in\{1,2,..,n\},a<b} y_{ab}p_b$$

が必ず成立。

3. 区分線形関数 f は単調増加であれば、λ_i 変数で区分線形関数を区分によりモデル化できる。k_i が区分 i の上界以上であれば $\lambda_i = 1$、そうではなければ $\lambda_i = 0$。

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^T x + y_i & (16)\\
\text{s.t.} \quad & Ax = b & (17)\\
& x \geq 0 & (18)\\
& x_1 = \sum_{i=1}^{m} k_i & (19)\\
& y_1 = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i k_i \frac{f(p_{i+1}) - f(p_i)}{p_{i+1} - p_i} & (20)\\
& \lambda_{i+1} \geq \lambda_i, \forall i \in \{1,2,\ldots,m-1\} & (21)\\
& \lambda_i \in \{0,1\}, \forall i \in \{1,2,\ldots,m-1\} & (22)\\
& k_i \leq \lambda_i(p_{i+1} - p_i), \forall i \in \{1,2,\ldots,m-1\} & (23)\\
& \lambda_{i-1}(p_{i+1} - p_i) \leq k_i, \forall i \in \{2,3,\ldots,m\} & (24)
\end{aligned}$$

制約条件（19）により、x_1 を m 個の k_i に分割できる、(20）により、$f(p_i)$ と λ_i の組み合わせで $f(x_1)$ を表せる。(21）（21）（21）により、$\lambda_{i-1}(p_{i+1} - p_i) \leq k_i \leq \lambda_i(p_{i+1} - p_i)$、$k_i$ が x_i の区分に定められる。

問題 2

主問題 (1) を問題文の双対問題のような形に変換する、I は単位行列である。

$$\begin{aligned}
\max \quad & c^T x\\
\text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A^T & I \end{bmatrix}^T x \leq \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix}\\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

すると、その双対性を使って次の双対問題に等価変換できる。

$$\begin{aligned}
\min \quad & \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\\
\text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq c\\
& \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0
\end{aligned}$$

この問題は下記のと同じである。

$$\begin{aligned}
\min \quad & b^T p + e^T q\\
\text{s.t.} \quad & A^T p + q \geq c\\
& p \geq 0, q \geq 0
\end{aligned}$$

問題 3

元問題の制約を 1-tree 制約に緩和する。

	a	b	c	d	e	f
a	0	12	7	13	5	4
b	12	0	6	9	7	11
c	7	6	0	4	2	7
d	13	9	4	0	6	10
e	5	7	2	6	0	7
f	4	11	7	10	7	0

上界：巡回路になるという条件の元で、枝の重みが小さいものから順に加える。その閉路は $a \to f \to b \to d \to c \to e \to a$、枝の重みの総和は $4+11+9+4+2+5=35$

	a	b	c	d	e	f
a	0	12	7	13	5	4
b	12	0	6	9	7	11
c	7	6	0	4	2	7
d	13	9	4	0	6	10
e	5	7	2	6	0	7
f	4	11	7	10	7	0

下界：一つの頂点を固定して 1-tree を作る。頂点 a を選び、残ったグラフで枝の重みの総和が最小の全域木は $(b,c),(c,f),(c,e),(c,d)$ であり、頂点 a に接続する重みが最小の二つ枝 $(a,e),(a,f)$ をその全域木に加える。下界は $(6+7+2+4)+(4+5)=28$

問題 4

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x && (25)\\ \text{s.t.} \quad & A_i x \le b_i \quad (i=1,2,\dots,k) && (26)\\ & x \in \mathbb{Z}_+^n && (27) \end{aligned}$$

元問題の $c=\sum_{i=1}^k c_i$ であり、$x=\sum_{i=1}^k x_i$ とおくと

$$\begin{aligned} c^T x &= (c_1+c_2+\cdots+c_k)^T x && (28)\\ &= (c_1^T+c_2^T+\cdots+c_k^T)(x_1+x_2+\cdots+x_k) && (29)\\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i x_j && (30) \end{aligned}$$

なお、制約条件 $A_i x \le b_i,\ (i=1,2,\dots,k)$ は

$$\begin{gathered} A_1x_1 + A_1x_2 + \cdots + A_1x_k \le b_1\\ A_2x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_2x_k \le b_2\\ \vdots\\ A_kx_1 + A_kx_2 + \cdots + A_kx_k \le b_k \end{gathered}$$

すると、元問題は次の問題とは同じである。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1} c_i^T x_j && (31)\\
\text{s.t.} \quad & A_i \sum_{j=1}^{k} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k) && (32)\\
& x_i \in \mathbb{Z}_+^n \quad (i = 1, 2, \ldots, k) && (33)
\end{aligned}
$$

この問題に二つの制約条件を追加すれば、新しい問題ができる。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1} c_i^T x_j && (34)\\
\text{s.t.} \quad & A_i \sum_{j=1}^{k} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k) && (35)\\
& A_i x_j = 0 \quad (\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, j \in \{1, 2, \ldots, k\}; i \ne j) && (36)\\
& c_i x_j = 0 \quad (\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, j \in \{1, 2, \ldots, k\}; i \ne j) && (37)\\
& x_i \in \mathbb{Z}_+^n \quad (i = 1, 2, \ldots, k) && (38)
\end{aligned}
$$

次のように等価変換できる。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{k} c_i^T x_i && (39)\\
\text{s.t.} \quad & A_i x_i \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k) && (40)\\
& x_i \in \mathbb{Z}_+^n \quad (i = 1, 2, \ldots, k) && (41)
\end{aligned}
$$

変数 x_i は互いに独立であるので、この緩和問題は変数 x_i ごとに独立して k 個の整数計画問題に分解でき、元問題より解きやすい、ある意味の緩和問題である。元問題の最適解が存在する十分必要条件 KKT 条件は

$$
\begin{cases}
\alpha_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\\
b_i - A_i \sum_{j=1}^{k} x_j \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\\
\alpha_i^T (b_i - A_i \sum_{j=1}^{k} x_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\\
\sum_{j=1}^{k} c_j^T - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^T A_i = 0\\
x_i \in \mathbb{Z}_+^n \quad (i = 1, 2, \ldots, k)
\end{cases}
\tag{42}
$$

緩和問題の KKT 条件は

$$
\begin{cases}
\alpha_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\\
b_i - A_i x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\\
\alpha_i^T (b_i - A_i x_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\\
c_i^T - \alpha_i^T A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\\
A_i x_j = 0 \quad (\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, j \in \{1, 2, \ldots, k\}; i \ne j)\\
c_i x_j = 0 \quad (\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, j \in \{1, 2, \ldots, k\}; i \ne j)\\
x_i \in \mathbb{Z}_+^n \quad (i = 1, 2, \ldots, k)
\end{cases}
\tag{43}
$$

明らかに、緩和問題の最適解 x_i^* が存在すれば元問題の最適解 $x^* = \sum_{i=1}^{k} x_i$ も存在する、逆は成立しない、元問題の実行可能解集合 X と緩和問題の実行可能解集合 $\bar{X}$ の関係は $\bar{X} \subset X$。