20181019k application of the Lagrange multiplier

cheungngo

19 October 2018

### Principles and worked example

Utility U(x,y) = x1(1/3)*x2^(1/2)*  
*Budget constrant M = p1x1 + p2x2*  
*i.e. L = x1^(1/3)*x2(1/2) - lambda(p1x1 + p2x2 - M)

The Lagrange multiplier is said to be equal to du/dM

Therefore, by finding lambda, we find dU/dM, thus able to find the change in utility as the budget changes

library(Ryacas)  
library(mosaic)  
library(manipulate)

x1 = Sym('x1'); x2 = Sym('x2'); lambda = Sym('lambda')  
p1 = Sym('p1'); p2 = Sym('p2'); M = Sym('M')  
U = x1^(1/3)\*x2^(1/2)   
L = U - lambda\*(p1\*x1 + p2\*x2 - M)  
dLx1 = deriv(L,x1); dLx1

## expression(0.3333333333 \* (x1^-0.6666666666 \* x2^0.5) - lambda \*   
## p1)

dLx2 = deriv(L,x2); dLx2

## expression(x1^0.333333333333333 \* (0.5 \* x2^-0.5) - lambda \*   
## p2)

dLlambda = deriv(L,lambda); dLlambda

## expression(M - (p1 \* x1 + p2 \* x2))

Solve(dLx1==0,lambda)

## expression(list(lambda == 0.3333333333 \* (x1^-0.6666666666 \*   
## x2^0.5)/p1))

Solve(dLx2==0,lambda)

## expression(list(lambda == x1^0.333333333333333 \* (0.5 \* x2^-0.5)/p2))

PrettyForm((x1^-(2/3) \* x2^0.5)/p1/3 == x1^(1/3) \* (0.5 \* x2^-0.5)/p2)

##   
## -0.6666666666 0.5   
## x1 \* x2   
## ----------------------- ==   
## 3 \* p1   
##   
## 0.333333333333333 -0.5  
## x1 \* 0.5 \* x2   
## ----------------------------------  
## p2

=> x2/(3p1) == x1/(2p2) => x1 = x2(2/3)(p2/p1)

Solve(List(x2/(3\*p1) == x1/(2\*p2), dLlambda==0),  
 List(x1,x2))

## expression(list(list(x1 == 2 \* (p2 \* x2)/(3 \* p1), x2 == 3 \*   
## M/(5 \* p2))))

x2 == 3M/(5 \* p2) x1 == x2(2/3)(p2/p1) == 3\*M/5(2/3)(1/p1) == 2M/5p1

# getting the lambda  
lambdax = makeFun(0.3333333333 \* (x1^-0.6666666666 \* x2^0.5)/p1 ~ x1&x2&p1)  
Simplify(lambdax(x1=2\*M/5/p1,x2=3\*M/(5 \* p2),p1=p1))

## expression(0.3333333333 \* ((2 \* M/(5 \* p1))^-0.6666666666 \* (3 \*   
## M/(5 \* p2))^0.5)/p1)

PrettyForm(((2 \* M/(5 \* p1))^-0.6666666666 \* (3 \* M/(5 \* p2))^0.5)/p1/3)

##   
## -0.6666666666 0.5  
## / 2 \* M \ / 3 \* M \   
## | ------ | | ------ |   
## \ 5 \* p1 / \* \ 5 \* p2 /   
## ---------------------------------------  
## 3 \* p1

lambda\_LHS = 2^(-2/3)/5^(-2/3)\*3^(0.5)/5^(1/2)/3\*p1^(2/3-1)\*p2^(-1/2)\*M^(0.5-2/3)  
lambda\_LHS

## expression(0.475606421371259 \* (p1^-0.3333333333 \* p2^-0.5 \*   
## M^-0.1666666666))

# Indirect utility function  
# U(x1,x2) => U(M,p1,p1) by substitution  
Ux = makeFun(x1^(1/3)\*x2^(1/2)~x1&x2)  
Ux(x1=2\*M/5/p1,x2=3\*M/(5 \* p2))

## expression((2 \* M/(5 \* p1))^0.333333333333333 \* (3 \* M/(5 \* p2))^0.5)

PrettyForm((2 \* M/(5 \* p1))^0.333333333333333 \* (3 \* M/(5 \* p2))^0.5)

##   
## 0.333333333333333 0.5  
## / 2 \* M \ / 3 \* M \   
## | ------ | | ------ |   
## \ 5 \* p1 / \* \ 5 \* p2 /

U(M,p1,p2) == 2^(1/3)\*3(1/2)/5(5/6) p1^(-1/3) p2^(-1/2) M^(1/2+1/3)

2^(1/3)\*3^(1/2)/5^(5/6)\*p1^(-1/3)\*p2^(-1/2)\*M^(1/2+1/3)

## expression(0.570727705645511 \* (p1^-0.3333333333 \* p2^-0.5 \*   
## M^0.833333333333333))

# Trying to get the derivatives of U  
dUM = deriv(0.570727705645511 \* (p1^-0.3333333333 \* p2^-0.5 \* M^0.833333333333333),M)  
lambda\_RHS = Simplify(dUM)  
lambda\_LHS; lambda\_RHS

## expression(0.475606421371259 \* (p1^-0.3333333333 \* p2^-0.5 \*   
## M^-0.1666666666))

## expression(0.4756064213 \* (p1^-0.3333333333 \* p2^-0.5 \* M^-0.1666666666))

### Therefore, by finding lambda, we find dU/dM, thus able to find the change in utility as the budget changes