Master de sciences et technologie 1 — MU4MA029
Mention : Mathématiques et applications — 2024–2025

Projet

Ce projet est un travail individuel. L'implémentation doit être réalisée en Python 3.x et s'appuyer sur les bibliothèques écrites pour le calcul scientifique: NumPy, SciPy et Matplotlib. Les fichiers soumis doivent inclure vos scripts Python et tout fichier supplémentaire (figures, ...) que vous jugez nécessaire. Toutes les figures doivent être auto-explicatives (titre sur chaque axe, légende, ...). **Un certain niveau de test est attendu dans l'implémentation et vous serez spécifiquement interrogé sur les tests.** Ce projet est en grande partie une adaptation du code écrit lors des TPs, vous devez donc réutiliser une partie du code déjà écrit.

1. **Géométrie.** Nous considérons le domaine suivant

$$\Omega := ((0, 2\pi) \times (0, 2\pi)) \setminus ([\pi/2, 3\pi/2] \times [\pi/2, 3\pi/2]) , \tag{1}$$

avec la frontière $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ où Γ_N désigne la frontière de $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ et Γ_D désigne la frontière de $(\pi/2, 3\pi/2) \times (\pi/2, 3\pi/2)$.

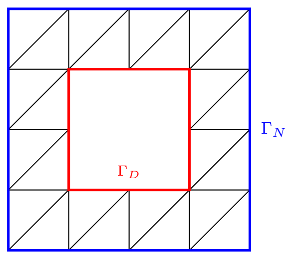

Figure 1: Domaine maillé Ω avec ses frontières Γ_N et Γ_D.

(a) Écrire une routine `GenerateMesh` adaptée de celle du TP2 qui génère un maillage triangulaire structuré uniforme pour Ω. Les sorties sont : `vtx` (tableau de coordonnées) et `elt` (tableau de connectivité) pour le maillage du domaine Ω au format du TP2.
Le maillage doit être construit en générant d'abord un maillage triangulaire uniforme du carré complet $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Le nombre de points dans chaque direction doit être de la forme $N = (4n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, les nœuds et les triangles (ouverts) ayant une intersection non triviale avec le carré $(\pi/2, 3\pi/2) \times (\pi/2, 3\pi/2)$ doivent être supprimés. Voir la Figure 2. Les indices des nœuds et des éléments doivent être mis à jour, de sorte que les indices des nœuds vont de 0 à $N_\Omega - 1$ où N_Ω est le nombre de nœuds dans le maillage de Ω.

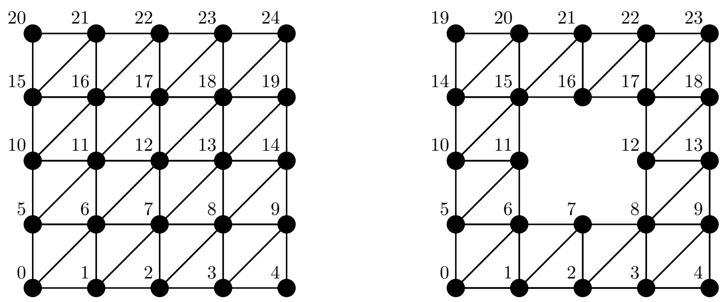

Figure 2: Exemples de maillages pour $n = 1$: maillage initial du carré (à gauche) et maillage de Ω (à droite) avec les indices des nœuds. Attention, les indices des nœuds ont changé.

(b) Écrire une routine `PlotMesh` qui peut représenter un maillage triangulaire du domaine Ω et tracer le nouveau maillage.

(c) Adapter la routine précédente pour représenter le vecteur unitaire normal sortant $\mathbf{n}$ sur toute la frontière Γ de Ω.

2. **Problème d'EDP.** Rappelons que Γ_N désigne la frontière de $(0, 2\pi)\times(0, 2\pi)$ et Γ_D désigne la frontière de $(\pi/2, 3\pi/2) \times (\pi/2, 3\pi/2)$. Soit

$$\mu(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{si } y < \pi, \\ 2, & \text{si } y > \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$,

$$f(x, y) := (4(p^2 + q^2) + \mu) \sin(2px) \sin(2qy), \qquad \forall(x, y) \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_{\text{ex}}(x, y) := \sin(2px) \sin(2qy), \qquad \forall(x, y) \in \Omega. \tag{4}$$

Nous considérons le modèle d'EDP du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u + \mu u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{ex}}, & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \tag{5}$$

Nous voulons calculer une solution approchée u_h du problème ci-dessus en utilisant une méthode de Galerkin conforme. L'espace d'approximation de dimension finie V_h est construit en utilisant des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ sur des maillages triangulaires.

(a) Écrire la formulation variationnelle associée à (5).

(b) Écrire deux routines pour assembler les matrices élémentaires associées à chaque terme apparaissant dans la forme bilinéaire pour la méthode numérique considérée, sur le modèle de ce qui a été fait dans le TP5.

(c) Écrire la routine pour assembler la matrice complète du système linéaire associé.

(d) Écrire une routine pour assembler (une approximation numérique du) terme associé à la condition aux limites de Neumann pour le vecteur du membre de droite du système linéaire.

(e) Écrire une routine pour assembler (une approximation numérique du) terme associé à la source f pour le vecteur du membre de droite du système linéaire.

3. **Résolution.**

(a) Vérifier que u_{ex} est la solution exacte du problème.

(b) Résoudre numériquement (5).

(c) Écrire une routine `PlotApproximation` qui peut représenter un champ affine par morceaux $v_h \in V_h$ dans le domaine Ω pour un certain maillage triangulaire. En utilisant cette routine, représentez la solution numérique u_h de la question précédente et l'erreur associée $u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}$, où Π_h est l'opérateur d'interpolation global.

(d) Tracer la convergence des deux erreurs

$$\frac{\|u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\Pi_h u_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}, \qquad \frac{\|u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}\|_{H^1(\Omega)}}{\|\Pi_h u_{\text{ex}}\|_{H^1(\Omega)}}, \tag{6}$$

par rapport au paramètre de maillage h pour divers raffinements uniformes du maillage. Quel est l'ordre de convergence pour les deux erreurs ?