Exercicio_aula2

quarta-feira, 23 de outubro de 2024 08:58

Exercicio_...

EXTECAMP

Computação Quântica
Algoritmos de otimização e
ML Quântico

Exercícios: Aula 2

Estes exercícios têm como objetivo reforçar a compreensão dos conceitos fundamentais da computação quântica, destacando as diferenças em relação à computação clássica e aprofundando o entendimento do processo de medida.

Superposição e Esfera de Bloch

(a) Descreva o estado quântico $\sqrt{\frac{1}{3}}|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle$ em termos da base computacional $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

(b) Represente, aproximadamente, esse estado na esfera de Bloch.

Notação de Dirac

(a) Escreva a expressão matemática do produto interno entre os estados $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\phi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ utilizando a notação de Dirac. Simplifique a expressão final em termos de α, β, γ e δ.

Porta de Hadamard e Superposição

(a) Aplique a porta de Hadamard ao estado $\sqrt{\frac{2}{3}}|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|-\rangle$. Qual será o novo estado do qubit?

(b) A seguir, aplique a porta de Hadamard novamente ao estado resultante. O que acontece com o estado do qubit? Justifique o resultado obtido.

Rotações na Esfera de Bloch

Considere um qubit inicialmente no estado $|0\rangle$.

(a) Descreva o efeito das rotações $R_x(\pi/2)$ e $R_y(\pi)$ sobre o estado do qubit.

(b) Represente graficamente os estados resultantes na esfera de Bloch após cada rotação.

Valor Esperado e Operadores de Pauli

Considere um qubit no estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$.

(a) Calcule o valor esperado dos operadores de Pauli σ_x, σ_y e σ_z para o estado $|\psi\rangle$.

EXERCÍCIOS AULA 2

1) SUPERPOSIÇÃO e ESFERA DE BLOCH

a)
$$\sqrt{\frac{1}{3}}|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle = |\psi\rangle$$

LEMBRANDO QUE: $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

ESCREVENDO $|\psi\rangle$ EM TERMOS DAS BASES $|0\rangle$ e $|1\rangle$

ESCREVENDO $|\psi\rangle$ EM TERMOS DAS BASES $|0\rangle$ e $|1\rangle$

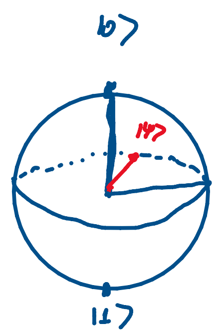
$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\,|0\rangle\left(1+\sqrt{2}\right) + |1\rangle\left(1-\sqrt{2}\right)\right] \cong \frac{1}{2{,}45}\left[(1+1{,}41)\,|0\rangle + (1-1{,}41)\,|1\rangle\right]$$

$$|\psi\rangle \cong \frac{1}{2{,}45}\left[2{,}41\,|0\rangle - 0{,}41\,|1\rangle\right] \simeq 0{,}98\,|0\rangle - 0{,}2\,|1\rangle$$

b)



2) NOTAÇÃO DE DIRAC

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad , \quad |\phi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \left(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|\right)\left(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle\right)$$

$$= \alpha^*\gamma + \beta^*\delta$$

OU TAMBÉM

$$\langle\phi|\psi\rangle = \left(\gamma^*\langle 0| + \delta^*\langle 1|\right)\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)$$

$$= \gamma^*\alpha + \delta^*\beta$$

ONDE UTILIZAMOS A CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE PARA AS BASE $|0\rangle$ e $|1\rangle$,

i.e., $\begin{cases} \langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = \hat{1} \\ \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \end{cases}$

e o símbolo * indica o complexo conjugado

3) Porta de Hadamard e superposição

a)

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|-\rangle$$

$$H|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,H|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,H|-\rangle$$

Vejamos quem é $H|+\rangle$ e $H|-\rangle$. Para isso vamos utilizar a notação matricial

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Assim,

- $$H|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

No entanto, queremos manter as bases $|\pm\rangle$. Então note que

$$2|0\rangle = \sqrt{2}(|+\rangle + |-\rangle) \Rightarrow |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \text{. Assim}$$

$$\boxed{H|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)}$$

Da mesma maneira, vamos calcular $H|-\rangle$:

- $$H|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

e $|1\rangle$ nas bases $|\pm\rangle$ é

$$2|1\rangle = \sqrt{2}(|+\rangle - |-\rangle) \Rightarrow |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \text{, assim}$$

$$\boxed{H|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)}$$

– AGORA PODEMOS VOLTAR A $H|\psi\rangle$

$$H|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, H|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, H|-\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) + \sqrt{\frac{1}{3}}\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)$$

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}\,|+\rangle + \sqrt{2}\,|-\rangle + |+\rangle - |-\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[(\sqrt{2}+1)|+\rangle + (\sqrt{2}-1)|-\rangle\right]$$

$$\boxed{H|\psi\rangle = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\right)|+\rangle + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}\right)|-\rangle}$$

, ESSE É O MEU NOVO ESTADO APÓS APLICAÇÃO DA PORTA DE HADAMARD

b) VAMOS APLICAR NOVAMENTE A PORTA DE HADAMARD AO ESTADO RESULTANTE ACIMA. VAMOS CHAMÁ-LO DE $|\psi'\rangle$

$$|\psi'\rangle = H|\psi\rangle \,; \quad H|\psi'\rangle = H\,H|\psi\rangle$$

$$H|\psi'\rangle = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\right)H|+\rangle + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}\right)H|-\rangle$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}}\left[(\sqrt{2}+\cancel{1})|+\rangle + (\cancel{\sqrt{2}}+1)|-\rangle + (\sqrt{2}-\cancel{1})|+\rangle - (\cancel{\sqrt{2}}-1)|-\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[2\sqrt{2}\,|+\rangle + 2|-\rangle\right] = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|-\rangle = |\psi\rangle$$

OU SEJA, VOLTAMOS AO ESTADO INICIAL $|\psi\rangle$

- Isso ocorre porque a porta de Hadamard é um operador unitário

- Nesse caso a inversa de H coincide com o adjunto

$H \cdot H = H^2 = H^{-1} H = \hat{1}$ = identidade

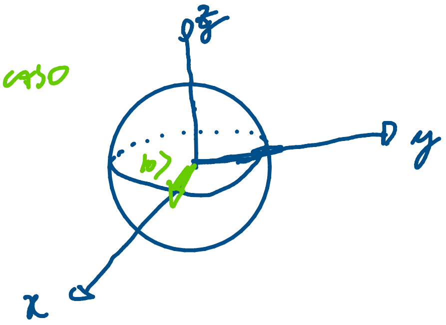
- Vamos verificar isso

$$HH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1}$$

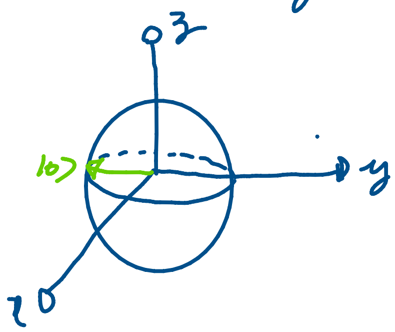
4) Rotação na esfera de Bloch

a) No primeiro caso o qubit sofre uma rotação de $\pi/2$ no eixo x e no segundo caso de π no eixo y

b) 1º caso



2º caso



5) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)$

a) $$\sigma_x |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + i|0\rangle\right)$$

Para o valor esperado: $\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle$

PARA O VALOR ESPERADO: $\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| - i\langle 1|\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + i|0\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(i - i\right) = 0$$

b) $$\sigma_y|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|1\rangle + |0\rangle\right]$$

e O VALOR ESPERADO $\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle$ SERÁ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| - i\langle 1|\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 1\right) = 1$$

c) $$\sigma_z|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

e O VALOR ESPERADO PARA σ_z, $\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle$ SERÁ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| - i\langle 1|\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - i|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 1\right) = 0$$