Stochastik

Deskriptiv
Daten werden beschreibende Grafiken bestehender Daten
Induktiv (Schlussfolgerungen)
Beobachtungen verallgemeinern, Fehler feststellen und kontrollieren

Statistik

Statistische Einheit
Was wird gemessen?
Grundgesamtheit
Alle gemessenen Einheiten
(Horizon Begriffe: Teilgesamtheit, Volkerhaufung, Teilerhebung)

Absolute Häufigkeit — **Stabdiagramm**
Relative Häufigkeit
Empirische Häufigkeitsfunktion und empirische Verteilungsfunktion

Merkmale
Farben, Gewichte, Werte, Zeiten
Merkmalsausprägung
Werte des Merkmals

schliessenden Statistik

Informationsbündelt

unabhängigen und identisch verteilten (iid) ZV

$\perp$ = Bedingtes Element

Die schliessende Statistik befasst sich, vereinfacht gesagt, mit der folgenden Problemstellung:

- Es liegen Beobachtungen (Messwertausprägungen) $x_1, x_2, ..., x_n$ in einem zufälligen Experiment vor.
- Die Beobachtungen $x_1, x_2, ..., x_n$ sind Realisierungen unabhängiger und identisch verteilter (iid) ZV $X_1, X_2, ..., X_n$.
- Die Verteilung mit $X_1, X_2, ..., X_n$ ist unbekannt oder teilweise unbekannt.

Grenzwertsätze

Mittelwertvariable $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ Für ebenfalls unabhängige Mittelwertvariablen:

Erwartungswert: $\mathbb{E}\bar{X}_n = \mu$ Varianz: $\mathrm{Var}\bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$

Das Schwache Gesetz der grossen Zahlen
$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$
Das Schwache Gesetz der grossen Zahlen ist Mittelwert der Verteilung, wenn die Stichprobe immer grösser wird. Mit einer hohen Wahrscheinlichkeit ist der Stichprobenmittelwert ein guter Schätzer für den Mittelwert der Grundgesamtheit zu legen, je grösser die Stichprobe ist.

Der Zentrale Grenzwertsatz (ZGWS)
Wenn ich genügend Messwerte zur Verfügung habe, kann ich sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% sicher sein, dass der Mittelwert der Grundgesamtheit innerhalb der 2-fachen Standardabweichung befindet.

Wahrscheinlichkeit: $\Sigma_{i=1}^{n} X_i = X_1 + ... + X_n$ Für ebenfalls unabhängige Mittelwertvariablen:

Erwartungswert: $\mathbb{E}\bar{X}_n = \mu$ Varianz: $\mathrm{Var}\bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$

Mit standardisiertem $\bar{X}_n$: $\mathbb{E}\bar{X}_n = 0$ Varianzgleichung: $\mathrm{Var}\bar{X}_n = 1$

Sei F_n die Verteilungsfunktion der $\bar{X}_n$, dann gilt: $\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F_n(x)$

$F_n(x) \to \Phi(x)$ für $n \to \infty$ $\quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \to N(0,1)$

F_n = Verteilungsfunktion ZV $\bar{X}_n$
$\Phi_{\mu,\sigma}$ = Standardnormalverteilung

Die ZGWS sagt aus, dass die Normalverteilung eine Konvergenzverteilung ist. Dabei spielt es keine Rolle, welche Verteilung die Ausgangsverteilung ist. Die ZGWS lässt sich ausserdem verallgemeinern, dass der Grenzwertsatz auch ist, dass unabhängig und identisch verteilt ist, dass asymptotisch normalverteilt ist.

Wie wird der ZGWS angewendet? Für grosse n (Faustregel n ≥ 30) wird $\approx$ durch $=$ ersetzt!

- $P(\bar{X}_n \leq a) \approx F_n(a)$
- $P(a < \bar{X}_n \leq b) \approx F_n(b) - F_n(a) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$
  Berechnen kann man dies Φ nach $\Phi_{0,1}$ Dazu wird folgt die Abkürzung $Z := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
- $P(\bar{X}_n \geq a) = 1 - P(\bar{X}_n \leq a) = 1 - F_n(a)$
  Berechnen kann man hier wieder die Φ nach Φ und Φ nach $\Phi_{0,1}$ Dazu ist wichtig für diesen ZV $\bar{X}_n$.

Wichtig: Mit approximieren von Verteilungsfunktionen, kann ich einen Φ nicht also, falls ich mehrere Berechnungen approximieren muss, dass ich mir einen Vorteil verschaffen, indem ich die Berechnungen mit $\Phi_{0,1}$ durchführe und erst am Schluss zurückrechne.

Beispiel

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Grenzwertsatz von Moivre und Laplace)

Sei eine binomialverteilte ZV S_n mit Wahrscheinlichkeitsparameter p, und n grosse. $\mathbb{P}(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}})$

Faustregel Falls $np \geq 10$ und $n(1-p) \geq 10$ gilt: $\mathbb{P}(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})$

Falls p nahe am Mittelwert liegt (Faustregel $np \geq 30$) wird $\approx$ durch $=$ ersetzt!

Dann ist die Binomialverteilung nahezu symmetrisch und die Approximation kann verbessert werden, indem man die Stetigkeitskorrektur ± 0.5 einsetzt.

Dann ist die Binomialverteilung stark schief und Approximation kann verbessert werden, indem man die Stetigkeitskorrektur ± 0.5 einsetzt.

Wenn $np(1-p) \geq 9$ ist, dann ist die Approximation gut genug.

Wenn $np(1-p) < 9$ ist, dann ist die Approximation nicht gut genug.

Wenn $np(1-p) \geq 9$ ist, dann ist die Approximation gut genug.

Wenn $np(1-p) < 9$ ist, dann ist die Approximation nicht gut genug.

Wie sieht die Situation im "Bernoulli-Fall" aus? In dieser speziellen Situation haben wir:

$P(S_n = 0) = (1-p)^n \qquad \frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)} = \frac{n-k}{k} \cdot \frac{p}{1-p}$

Intuitiv kann man z.B. einer Vergleichung wie folgt interpretieren: Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit des Auftretens von 1 bei n binomialverteilten Versuchen um mehr als ϵ von $\Phi = P(A)$ abweicht, ist nach oben durch $\frac{1}{4n\epsilon^2}$ beschränkt.

Zentraler Grenzwertsatz

Sei binomialverteilte Zufallsvariable S_n mit Wahrscheinlichkeitsparameter p und n Versuchen. Dann gilt für alle Intervalle $[a, b]$ reeller Zahlen:

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Wann ist der Grenzwertsatz anwendbar? Wann $np \geq 9$ und $n(1-p) \geq 9$ ist.

Wann ist der Grenzwertsatz nicht anwendbar? Wann $np < 9$ und $n(1-p) < 9$ ist.

Wann ist der Grenzwertsatz gut? Wenn $np(1-p) \geq 9$ ist.

Wann ist der Grenzwertsatz schlecht? Wenn $np(1-p) < 9$ ist.

Wann ist der Grenzwertsatz gut? Wenn $np(1-p) \geq 9$ ist.

Wann ist der Grenzwertsatz schlecht? Wenn $np(1-p) < 9$ ist.

Zentraler Grenzwertsatz

Beschreibende Statistik

Deskriptive Statistik

Grundgesamtheit G = statistische Masse, Population und Kollektiv
statistischer Einheiten e

$G = \{e \mid e \text{ erfüllt Identitätskriterium}\}$

$\underset{\sim}{e(G)}$
Umfang der statistischen Einheiten in der Grundgesamtheit.

Merkmal
Qualitative Merkmale variieren artmässig
Quantitative Merkmale variieren zeitmässig
Diskrete Merkmale haben nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Ausprägungen
Stetige Merkmale können jeden beliebigen Merkmalswert in einem gegeben Bereich (Intervall) annehmen.

Gruppierte oder klassierte Daten

Stetig: unendlich viele Skalenpunkte, Zwischenwerte existieren (Länge, Zeit)
Diskret: Skala oder Merkmal mit endlich vielen Skalenpunkte (keine Zwischenwerte, wie Anzahl Personen)
Quasi-stetig: mathematisch Verteilung der Datenpunkte ist stetig.
Gruppierung: bei mehrmaligen Auftreten des gleichen Messwertes
Klassierung: keine Gruppierung, aber Aufteilung in Teilintervalle

Statistisches Merkmal

	Nominal	Ordinal	Intervall	Verhältnis
Gleich, Unterschied, Identität	✓	✓	✓	✓
Rangordnung		✓	✓	✓
Abstand			✓	✓
Verhältnis				✓

Rechts/Linksschiefe Verteilung

Empirische Häufigkeitsfunktion und empirische Verteilungsfunktion

Die Häufigkeitsmasse definieren auch die Werte die zwischen den Ausprägungen liegen. (Graphen vergleichen)

Absolute (empirische) Häufigkeitsfunktion

$f_n(x) = \begin{cases} n_k & \text{für } x = a_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Relative (empirische) Häufigkeitsfunktion

$F_n^*(x) = \sum_{a_k \leq x} n_k = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a_1 \\ \sum_{a_k \leq x} n_k & \text{für } a_1 \leq x \leq a_k \\ 1 & \text{für } x \geq a_k \end{cases}$

Graph der relativen Häufigkeitsverteilung

Graph der kumulierten Häufigkeitsverteilung

Absolute Häufigkeit
Die absolute Häufigkeit n_i dass das Merkmal X eine Ausprägung a_i annimmt
$\text{absH}(X = a_i) = n_i$

Relative Häufigkeit
Die absolute Häufigkeit n_i dass das Merkmal X eine Ausprägung a_i annimmt
$\text{relH}(X = a_i) = h_i^n (= n_i / n)$

Lagemaße mit Häufigkeitstabelle
Gegeben mit absoluten Häufigkeiten

x_i	1	2	3	4
$h(x_i)$	3	5	2	1

$\bar{x} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot h(x_i)$ $\Rightarrow n = 11$

$\bar{x} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{11} = 2,6$

x_i	1	2	3	4
$h(x_i)$	3	5	2	1
x_{rel}	0,3	0,5	0,2	0,1

$x_{rel} = x_{rel} = 3 \qquad x_{rel} = 3$

Median (0,5 relativen Häufigkeit)

$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

Mittelwerte (Lagemasse / Lageparameter)

- Modalwert / Modus (häufigster Wert)
- Median (Zentralwert, mittlerer Wert, Quartile)
- Arithmetisches Mittel (Durchschnitt)
- Geometrisches Mittel (Wachstumsfaktor)
- Harmonisches Mittel (Durchschnitt über Verhältniszahlen)

Modus und Median

Der Modus kommt zum einsatz wenn ich eine Aussage über die Häufigkeit machen will.

Häufigster Wert im Datensatz: $f_n(x_M) \geq f_n(x)$ für alle x

Der Median oder Zentralwert ist Wendepunkt der Summenkurve

Der Median teilt die Messwerte in zwei gleich große Gruppen. Es ist der Wert, der die geordnete Reihe der Messwerte in zwei gleich große Teilmengen teilt.

Bestimmung Median:
1. Datensatz nach Größe ordnen, aufsteigend
2. Anzahl der Werte feststellen, Datensatz ist ungerade
3. Zahl ist der ungeordneten Reihe suchen und bei Bedarf berechnen

$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

Arithmetisches Mittel

Absolute Häufigkeiten

$\bar{x} = \frac{1}{n}(a_1 n_1 + a_2 n_2 + ... + a_k n_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i n_i$

Gewichtetes arithmetisches Mittel

$\bar{x} = \frac{1}{n}(a_1 g_1 + a_2 g_2 + ... + a_k g_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i g_i$

Relative Häufigkeiten

$\bar{x} = (a_1' h_1 + a_2' h_2 + ... + a_k' h_k) = \sum_{i=1}^{k} a_i' h_i$

Absolute und Relative Klassenhäufigkeiten

$\bar{x}_K = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} a_i' n_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i' h_i$ Falls Klassenmitte $a_i' = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$

Geometrisches Mittel

$\bar{x}_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

Wird für multiplikative zusammenhängende Werte verwendet z.B. Notenschnitt

Harmonisches Mittel

$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$

Wird für Verhältnisgrößen verwendet. z.B. km/h

Streuungsmaße (Streuungsgenauigkeit)

- Spannweite (Max - Min)
- Interquartilsabstand (Box-Whisker)
- Standardabweichung (Wurzel der Varianz)
- Variationsbreite

Spannweite

Beobachtungswert: $R = \max x_i - \min x_i$

Empirische Varianz

Absolute empirische Varianz

$s^2 = \frac{1}{n-1}(n_1(a_1 - \bar{x})^2 + ... + n_k(a_k - \bar{x})^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(a_i - \bar{x})^2$

Gewichtete empirische Varianz

Relative empirische Varianz

$s^2 = \sum_{i=1}^{k} h_i'(a_i - \bar{x})^2$

Effizienteres Rechnungsweg

$s^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 n_i - n\bar{x}^2)$

$s^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 g_i - n\bar{x}^2)$

Verschiebungssatz

$s^2 = \sum_{i=1}^{k} h_i'(a_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} h_i' a_i^2 - \bar{x}^2$

Standardabweichung

$s = \sqrt{s^2}$

Variationskoeffizient

$v = \frac{s}{\bar{x}}$

Merkmal	Nominal	Ordinal	Intervall	Verhältnis
Modus	Häufigkeit, Modalwert			
Quantil		Es kann nur unterschieden werden ob Elemente gleich oder verschieden sind		
Ordinal		Größer, Kleiner, Mittel, Zwischen		
Intervall		Es gibt konstantes Abstand		
Verhältnis		Es gibt konstantes Abstand, Skalenpunkte müssen also Zahlen sein		
		Modus, Median, Quantil, Mittel		
		Auch Verhältnisse zwischen Skalenpunkten haben sinnvolle Ergebnisse. Nullpunkt ist nicht willkürlich festgelegt.		
		Streuungsmaßen und Maßzahlen		

Empirische Häufigkeitsfunktion und empirische Verteilungsfunktion

Absolute (empirische) Häufigkeitsfunktion

$f_n(x) = \begin{cases} n_k & \text{für } x = a_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Relative (empirische) Häufigkeitsfunktion

$F_n^*(x) = \sum_{a_k \leq x} n_k = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a_1 \\ \sum_{a_k \leq x} n_k & \text{für } a_1 \leq x \leq a_k \\ 1 & \text{für } x \geq a_k \end{cases}$

Im Merkmal X_i liegenden in "m" bei $\mathbb{R}$ spring in $g(x)$ ab x_i auf a_i.
Der Sprungwert a_i ist $a_i = n_i / n$, spring in $g(x)$ ab x_i auf a_i, $a_i = n_i / n$, $a_i = n_i / n$ und somit auf 1 bei "n".

Max möchte meinen, dass das "G" in der Notation von engl. "Cumulativ" herrührt. Wahrscheinlicher ist jedoch, dass G A für engl. A chosen S steht.

Alle für uns wichtigen Kombinatorikprobleme sind Fragen der oben angesprochenen. Nur die konkrete Situation ändert sich. Die Schwierigkeit besteht darin zu erkennen, um welches Auswahlprinzip es sich handelt.

Wahrscheinlichkeit

Kombinatorik

Fakultät
$0! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \quad \text{für } n > 0$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \quad 10! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 10 = 3628800$
$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)! \text{ für } 0, 1! = 1! = 0 \cdot 0!$

Binomialkoeffizient
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!}$

$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$

Symmetrie des Binomialkoeffizienten:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Fundamental- oder Multiplikationsprinzip der Kombinatorik

Die Hauptregel der Kombinatorik lautet jetzt wie folgt: Wenn ich zwischen Objekten eine Menge A mit n Elementen und eine Menge B mit m Elementen, kann ich insgesamt n·m verschiedenen Wege aus A und B auswählen.

Fundamentalsatz oder Multiplikationsprinzip der Kombinatorik

Sachverhalt: Prozesse = 5
Ereignisse: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5
E_1 = Ereignis E_1 = 4, E_2 = Ereignisse, 3 Ausgangszustände und 4 verschiedene Nachfolgezustände
E_2 = Ereignis E_2 = 3, E_3 = Ereignisse, 4 Ausgangszustände und 2 verschiedene Nachfolgezustände
E_3 = Ereignis E_3 = 2, E_4 = Ereignisse, 5 Ausgangszustände und 1 verschiedene Nachfolgezustand
E_4 = Ereignis E_4 = 1, E_5 = Ereignisse, n, 6 Ausgangszustände, n, 5 verschiedene n, 4
E_5 = Ereignis E_5 = n, n-1 Ausgangszustände, n-2 verschiedene Nachfolgezustände

$T = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$

Permutationen

Reihenfolge wichtig! Wiederholungen nicht gestattet, $n!$ Möglichkeiten

$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)! = \frac{n!}{(n-k)!}$

Reihenfolge wichtig! Wiederholungen erlaubt!

n^n

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge von n Elementen in n Plätze zu verteilen? Es gibt n^n Möglichkeiten.

Variation

Reihenfolge wichtig! Wiederholungen nicht gestattet, $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten

$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1}$

$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Reihenfolge wichtig! Wiederholungen erlaubt!

n^k

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge von n Elementen in k Plätze zu verteilen? Es gibt n^k Möglichkeiten.

Kombination

Reihenfolge **unwichtig**! Wiederholungen nicht gestattet, $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$

Reihenfolge **unwichtig**! Wiederholungen erlaubt!

$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Die Frage unterdrückt aus dem Fundamentalprinzip, 1 kann hier auch gewählt werden, also, die Sortierung!

Man möchte meinen, dass das "C" in der Notation von engl. "Combination" herrührt. Wahrscheinlicher ist jedoch, dass C A für engl. A choose S steht.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ereignisraum = Ergebnisraum = S = G
Ereignisraum = E(S)

Elementarereignis = Ereignis, welches aus genau einem Ereignis besteht
sicheres Ereignis = Trifft mit Sicherheit ein und geht immer zur E(S)
unmögliches Ereignis = Ein "leeres Ereignis" trifft nie ein und geht nie zur E(S)

Zwei Ereignisse A und B heißen **unvereinbar** oder **sich gegenseitig ausschließend**, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

S = Ereignisse Würfel: S = {1,2,3,4,5,6}
S = Ereignisse Münze: kopf Wurfe: S = {K, Z}

S = Ereignis A: S = {2,4,6} gerade Ereignisse
S = Ereignis B: S = {1,3,5} ungerade Ereignisse
S = Ereignis C: S = {1,2,3,4,5,6} Ereignisse kleiner gleich 6
S = Ereignis D: S = {1,2,3,4,5,6} Ereignisse größer gleich 1

Zwei Ereignisse A und B heißen **unvereinbar** oder **sich gegenseitig ausschließend**, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

$A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3,4\}, A_3 = \{5,6\}$ paarweise unvereinbar, gilt also $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

Komplementäres Ereignis

$\bar{A} = S \setminus A$

Vereinigung von Ereignissen

$A_1 \cup A_2$
$A_1 \cup A_2 = \{1,2,3,4,6\}$
Ereignisraum Ereignis Tritt ein oder

Durchschnitt von Ereignissen

$A_1 \cap A_2$
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Differenz von Ereignissen

$A_1 \setminus A_2$
$A_1 \setminus A_2 = \{1,2\}$

Absolute und relative Häufigkeit Axiom

$A_1, A_2, ..., A_n$ = paarweise unvereinbare Ereignisse

$\bar{A}_1 = S \setminus A_1 = \{1,3,5\}$

$A_1 \cup \bar{A}_1 = \{1,2,3,4,6\}$
$A_1 \cap \bar{A}_1 = \emptyset$
$A_1 \setminus \bar{A}_1 = \{2\}$
$\bar{A}_1 \setminus A_1 = \{3,5,6\}$

Absolute Wahrscheinlichkeit Axiomsystem Kolmogorov

(K1) Für jedes $A \in E(S)$ gilt $\mathbb{P}(A) \geq 0$
(K2) $\mathbb{P}(S) = 1$
(K3) Sind $A_1, A_2, ..., A_n$ paarweise unvereinbare, gilt dann $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + ... + \mathbb{P}(A_n)$

Wichtige Regeln für Wahrscheinlichkeiten

(W1) $\mathbb{P}(A)$ ist demnach immer eine Zahl zw. 0 und 1 $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
(W2) Gilt $\mathbb{P}(A)$ das unmögliche Ereignis A, und es ist immer $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
(W3) Es gilt $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
(W4) Es gilt $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
(W5) Die WW des sicheren Ereignisses ist immer 1, $\mathbb{P}(S) = 1$, $\mathbb{P}(S) = 0$
(W6) Sind $A_1, A_2, ..., A_n$ paarweise unvereinbare, gilt also $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + ... + \mathbb{P}(A_n)$
(W7) Für zwei Ereignisse A und B, dann $A = B$, ist man nun auch die Ereignis A somit das Ereignis B $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$
(W8) Sind A und B zwei Ereignisse, dann ist $A \subseteq B$ $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
(W9) Für zwei Ereignisse A und B gilt $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
(W10) Für drei Ereignisse A, B und C gilt $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Zufallsvariablen

Notation:
Ereignis X = x, Ereignis Y = y, Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$
Ereignis X = x, Ereignis Y = y, Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$
$\mathbb{P}(X = x)$ $\mathbb{P}(X = 3)$ $\mathbb{P}(X \leq 3)$

Diskrete Zufallsvariable
Wertebereiche endlich oder abzählbar unendlich sind

Stetige Zufallsvariable
Wertebereiche gerade unendlich unendlich
Verteilungsfunktion $F(x)$ ist stetig
Wahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable X einen Wert annimmt, liegt immer bei 0
Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen a und b annimmt, ist gleich der Differenz $F(b) - F(a)$

Beispiel
X: Zahl unzuverlässiger Sendungen pro Monat
$X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$
$F(0) = \mathbb{P}(X \leq 0 = \mathbb{P}(X = 0)$
$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1 = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)$
$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2 = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$
$F(3) = \mathbb{P}(X \leq 3 = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)$
$F(4) = \mathbb{P}(X \leq 4 = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)$
$F(5) = \mathbb{P}(X \leq 5 = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5)$

Diskret
X: Zahl unzuverlässiger Sendungen pro Monat
$X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$
Verteilungsfunktion
$F(0) = \mathbb{P}(X \leq 0 = f(0)$
$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1 = f(0) + f(1)$
$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2 = f(0) + f(1) + f(2)$
$F(3) = \mathbb{P}(X \leq 3 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$
$F(4) = \mathbb{P}(X \leq 4 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$
$F(5) = \mathbb{P}(X \leq 5 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$

Stetig
X: Zahl unzuverlässiger Sendungen pro Monat
$X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion gilt an mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable **höchstens** einen bestimmten Wert x annimmt.

Stetige Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable einen bestimmten Wert x annimmt.

Wahrscheinlichkeitsdichte ist immer größer oder gleich 0.

Die Gesamtfläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichte ist immer 1.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen a und b annimmt, ist gleich der Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichte zwischen a und b.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt, ist gleich der Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichte zwischen $-\infty$ und x.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert größer oder gleich x annimmt, ist gleich der Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichte zwischen x und ∞.

Erwartungswert einer Zufallsvariable

Erwartungswert EX wird μ, oder μ_X gesetzt.

$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$

Für die ZV aus unserem Wörterbuch haben wir (in diesem Beispiel war W = {1,2,3}):

$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3)$

Die Varianz einer Zufallsvariable

Die Varianz einer Zufallsvariable beschreibt einer Zufallsvariable um den Erwartungswert. Wichtige Verwendung: Es lässt sich mit ihrer Hilfe zeigen, wie gut der Erwartungswert einer Zufallsvariable Daten. Unterschied: Wenn für Streuung Erwartwert negativer Werte.

$\sigma^2 = \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$ oder $\sigma^2 = \sigma^2(X)$ oder $\mathrm{Var}(X)$

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 f(x_i)$

Die Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$

Für die ZV aus unserem Wörterbuch haben wir (in diesem Beispiel war W = {0,1,2,3}):

$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3)$

Die Varianz einer diskreten Zufallsvariable

$\sigma^2 = \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$ oder $\sigma^2 = \sigma^2(X)$ oder $\mathrm{Var}(X)$

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 f(x_i)$

Die Varianz einer diskreten Zufallsvariable

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mathbb{E}(X)^2$

Die quadrierte Binomialsatz Varianz ist $\sigma^2 = np \cdot q$, $\sigma = \sqrt{np \cdot q}$

Standardisieren einer Zufallsvariable

Z ist eine neue Zufallsvariable. Standardisiert Zufallsvariable Z, Z wird einer Erwartungswert 0 angepasst, dann auch Varianz oder Sigma wird auf 1 gesetzt.

Die Erwartungswert einer standardisierten Zufallsvariable ist stets 0, ihrer Varianz ist stets 1. Und sie ist immer stetig.

Gesetze zur ersten gesetzmäßigkeit

Wir setzen ein für Z $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Ist einfacher, dass Z die gesetzmäßigkeiten für Verschiebung nachvollziehen, weiche allgemeiner Zufallsvariable das Z für ziehen anwende.

Allgemeine Bedeutung

$EZ = \mathbb{E}(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X) - \mu) = 0$

$VZ = \mathrm{Var}(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X) = 1$

Gesetze zur zweiten gesetzmäßigkeit

Sie 3 eine ZV mit Erwartungswert μ und σ eine reelle Zahl. Dann gilt:

1) $\mathrm{var}(a) = 0$ (Eine konstante ZV ebenso nicht)
2) $\mathrm{var}(X + a) = \mathrm{var}(X)$ (Eine ZV eines konstanten Betrag verschieben, ändert sich die Varianz nicht)
3) $\mathrm{var}(aX) = a^2\mathrm{var}X$ bzw. $\sigma_{aX} = a\sigma_X$ (Eine konstante Faktor wird also