

自动泊车问题

摘要

随着社会的发展，泊车环境愈发复杂，人们对自动泊车的诉求日益强烈。因此，对自动泊车技术的研究具有重要意义。本文通过分析无人车的运动状态与约束条件，建立泊车模型，对无人车从当前位置行驶至最优停车位的轨迹进行研究。

针对问题一，研究第一小问时，本文对无人车的转弯半径进行定义，并根据几何关系求解出小转弯半径 R_{min} ；研究第二小问时，本文建立**无人车运动学模型**，将直线运动分为变加速直线运动与匀加速直线运动两部分，通过加加速度，加速度，速度，位移与时间变化的关系式，求解出达到速度限制所需的最短距离；研究第三小问时，本文定义曲率相对路径长度的变化率为轨迹点曲率变化率，接着通过题意中对曲率的条件约束，进而得出轨迹点曲率变化率的约束条件。

针对问题二，本文将无人车泊车运动轨迹路径规划问题抽象为**线性规划问题**。以无人车泊车时耗为目标函数，以车辆运动学微分方程、车辆避障方程、物理条件方程、起始/终止状态方程为约束条件，建立线性规划模型。在研究无人车避障约束方程时，本文建立**面积膨胀模型**，用一定半径大小的圆形等效代替无人车与障碍物，定义两个圆形面积重叠时发生碰撞。分别代入垂直停车位、水平停车位、斜向停车位的相关条件，运用 matlab 软件求解出无人车泊车运动的可视化轨迹以及车速，加速度，加加速度，车身航向角，轮胎偏角，轮胎偏角角速度随时间变化的关系图。

针对问题三，本文先对**最优停车位**进行定义，再通过**化曲为直**，将无人车的行驶路径简化成直线，以初始状态控制点所在的位置为原点，地面上箭头方向作为正方向，建立坐标轴。将模型简化成四种情况，每种情况的无人车行驶过停车位顺序是不变的。当停车位被占用，赋值该停车位值为 0；当停车位未被占用，则赋值该停车位值为 1。初始点赋值 0，分别对每种情况下的权值进行累加计算，当总权值为 1 时，停止累加，并记录该车位的信息，此时该车位即为该情况下的最优停车位。将四种情况下无人车行驶至泊入最优停车位的距离进行比较，所需行驶距离最短的停车位即为所求最优停车位。本文基于 **A*算法**，构建栅格地图，由于泊车过程中需考虑车辆运动学约束要求，因此对障碍区域进行**膨胀处理**：减少控制点在停车场内的可行区域范围，使控制点路径满足车辆运动学约束和**避障约束**。以无人车后轴中心位置为初始节点，车位 78 为最优停车位节点，进行 A*算法搜索最优路径，最终得到行驶轨迹图。

针对问题四，本文假设车辆的进入和离开对模型的影响体现在停车场内的停车位会被随机占用或释放。因此，可能会出现该情况下行驶经过的停车位均被占用的情况，即情况 3、情况 4。并基于问题三所建立的泊车模型，求得无人车从当前位置到最有停车位的行驶轨迹仿真结果。

关键词：无人车运动学模型 线性规划 面积膨胀模型 最优停车位 A*算法 膨胀处理 避障约束。

目录

自动泊车问题	1
一、 问题重述	1
二、 问题分析	2
三、 模型假设	3
四、 符号说明	4
五、 问题一的求解	4
六、 问题二的求解	7
七、 建立泊车模型	22
八、 基于泊车模型求解问题三	25
九、 基于泊车模型求解问题四	27
十、 模型评价及改进	29
十一、 参考文献	30
十二、 附录	30

一、问题重述

问题一：

- (1) 根据无人车模型的参数，计算车辆的最小转弯半径 R_0 。
- (2) 无人车沿直线行驶时，限制车辆最大加加速度为 20m/s^3 ，求车辆加速到最大限制速度 20km/h 最短需要多少距离。
- (3) 无人车以车速为 20km/h 从沿直线行驶状态开始转弯，求解路径上的曲率相对路径长度的变化率大小的限制。

问题二：

建立无人车泊车的数学模型，分析以车库入口作为无人车初始位置，给出从初始位置到指定停车位的泊车轨迹（包括每时刻无人车的行驶路径长度、车辆朝向、速度、加速度、加加速度、角速度、角加速度等）并给出可视化轨迹图。在这个过程中标注红色禁停的停车位都已经被占用，泊车过程中无人车不能与其发生冲突或碰撞。分别考虑三种不同的车位情况，10 号垂直停车位、82 号平行停车位、31 号倾斜停车位（倾斜角为 45° ）。

问题三：

根据当前停车位的状况，建立泊车模型，计算出最优停车位，给出从当前位置到停车位的轨迹；标注红色禁停的停车位都已经被占用，泊车过程中无人车不能与其发生冲突或碰撞。在这个过程中，试建立通用模型，并考虑算法怎样设计能适应车库中任意停车位被占用的状况，并考虑这个过程算法复杂性。

问题四：

假设在当前状态下每小时内从入口进入和从出口离开停车场的车辆均为 30 辆，因车辆的进入和离开，导致停车位会被随机占用或释放。为无人车建立泊车模型，并给出从当前位置到最优停车位的行驶轨迹的仿真结果。

二、问题分析

2.1 问题一分析

首先是第一小问部分，本文对于无人车转弯半径进行了定义，并通过几何关系定量描述计算出最小转弯半径；接着是第二小问部分，本文建立无人车运动学模型，将直线运动分为变加速直线运动与匀加速直线运动两部分，通过加加速度，加速度，速度，位移与时间变化的关系式，求解出达到速度限制所需的最短距离；最后是第三小问部分，本文定义曲率相对路径长度的变化率为轨迹点曲率变化率，接着通过题意中对曲率的条件约束，进而得出轨迹点曲率变化率的约束条件。上述所求解的三个部分将作为后文的先提或约束条件出现与应用。

2.2 问题二分析

本文应用线性规划模型，将无人车泊车运动轨迹路径规划问题抽象为一个线性规划问题。首先建立通用模型。目标函数为无人车泊车时耗时最少，约束条件概括为如下四部分：无人车转弯运动微分方程约束，我们通过几何关系建立无人车转弯时的轨迹方程；无人车避障约束，我们通过面积膨胀，用一定半径大小的圆形等效代替无人车与障碍物，当两个圆形面积重叠时，即为发生碰撞；物理条件约束；初始/终止状态约束。最后分别代入垂直停车位，水平停车位，斜向停车位的相关条件，运用 matlab 软件进行具体分析运算，得出无人车泊车运动的可视化轨迹以及车速，加加速度，车身航向角，轮胎偏角，轮胎偏角角速度随时间变化的关系图。

2.3 问题三分析

本文先对最优停车位进行定义，再通过化曲为直，将无人车的行驶路径简化成直线，以初始状态控制点所在的位置为原点，由于化曲为直简化了模型，因此本文将地面上箭头方向作为正方向，建立坐标轴。将模型简化成以下四种情况：左转弯行驶，在无人车右侧泊车；左转弯行驶，在无人车左侧泊车；右转弯行驶，在无人车右侧泊车；右转弯行驶，在无人车左侧泊车。在每种情况中，无人车行

驶过停车位的顺序是不变的。当停车位被占用，赋值该停车位值为 0；当停车位未被占用，则赋值该停车位值为 1。初始点赋值 0，分别对每种情况下的权值进行累加计算，当总权值为 1 时，停止累加，并记录该车位的信息，此时该车位即为该情况下的最优停车位。将四种情况下无人车行驶至泊入最优停车位的距离进行比较，所需行驶距离最短的停车位即为所求最优停车位。

本文基于 A*算法，构建栅格地图，由于泊车过程中需考虑车辆运动学约束要求，因此对障碍区域进行膨胀处理：减少控制点在停车场内的可行区域范围，使控制点路径满足车辆运动学约束和避障约束。以无人车后轴中心位置为初始节点，车位 78 为最优停车位节点，进行 A*算法搜索最优路径，最终得到行驶轨迹图。

2.4 问题四分析

本文假设车辆的进入和离开对模型的影响体现在停车场内的停车位会被随机占用或释放。因此，以题目所给位置为初始状态的无人车在情况 1、情况 2 下行驶时，可能会出现该情况下行驶经过的停车位均被占用。此时，无人车从东南出口离开停车场，并从西南入口返回停车场，即为情况 3、情况 4 所示。基于问题三所建立的泊车模型，进而求得无人车从当前位置到最有停车位的行驶轨迹仿真结果。

三、模型假设

假设 1：假设无人车在泊车阶段的运动速度大约维持在到间。

假设 2：在分析无人车做转弯运动的运动学模型时，假设其产生的俯仰和侧倾很小，故忽略无人车侧向移动产生的影响。不会对轨迹规划和控制产生较大影响。

假设 3：在无人车运动过程中忽略汽车自身的形状，将汽车等效看成矩形刚体。等效矩形刚体的长度和宽度是车辆外形的最大长度和宽度。这也为车辆避障提供了一定的安全距离。

假设 4：本文假设车辆的进入和离开对模型的影响体现在停车场内的停车位会被随机占用或释放。

四、符号说明

符号	说明
R_0	转弯半径
R_{min}	最小转弯半径
R	曲率半径
L	无人车轴长
δ	无人车前轮转角
α_{max}	方向盘最大转角
r	加速度
a	加速度
a_{max}	最大加速度
a_{min}	最小加速度
v	速度
v_{max}	最大速度
ρ	曲率
θ	方向角（车身航向角）
l_{ab}	车位宽度
l_{ac}	车位长度
L_r	无人车车轮轴距
B	无人车前悬/后悬长度
D_l	无人车长度
d	无人车宽度
ω	无人车前轮转角角速度

五、问题一的求解

5.1 计算无人车的最小转弯半径

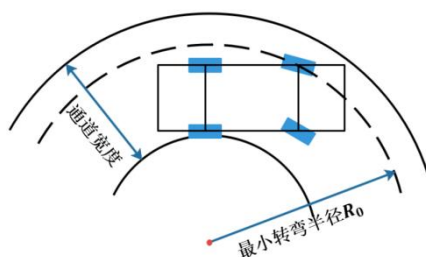


图 1. 无人车的最小转弯半径示意图

最小转弯半径是指当转向盘转到极限位置，汽车以最低稳定车速转向行驶时，外侧转向前轮的中心在支承平面上滚过的轨迹圆半径。它在很大程度上表征了汽车能够通过狭窄弯曲地带或绕过不可越过的障碍物的能力。转弯半径越小，汽车的机动性能越好[1]。

故根据上述的描述，由图中几何关系可知，我们定义转弯半径长度如下：

$$R_0 = \frac{L}{\sin\delta} \quad (1)$$

由式(1)可知,随着无人车前轮偏转角 δ 的增大, R_0 逐渐减小。故最小转弯半径为:

$$R_{min} = \frac{L}{\sin\theta_{max}} \quad (2)$$

由题意知,方向盘最大转角 $\alpha_{max} = 470^\circ$,由于方向盘转角与无人车前轮转角的传动比为 $\alpha:\delta = 16:1$,故可得无人车前轮最大转角为 $\delta_{max} = 29.375^\circ$,故最终我们可以计算出无人车的最小转弯半径为 $R_{min} = 5.708\text{ m}$ 。

5.2 计算无人车直线行驶时,加速到最大限制速度所需的最短距离

无人车沿直线行驶时,初速度为0。无人车首先做加加速度 $r = 20\text{m/s}^3$ 的变加速直线运动,待加速度提升至 $a_{max} = 3\text{m/s}^2$ 时,无人车做加速度 $a = 3\text{m/s}^2$ 的匀加速直线运动,待加速度提升至最大速度限制 $v_{max} = 5.56\text{m/s}$ 时结束。故前面所行驶的总距离即为最短距离。

通过分析题意,我们列出无人车做直线运动时的物理条件约束如下:

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 20\text{ m/s}^3 \\ -5 \leq a \leq 3\text{ m/s}^2 \\ 0 \leq v \leq 20\text{ km/h} = 5.56\text{m/s} \end{cases} \quad (3)$$

为使运动效果更好,不妨取 r 为定值, $r = 20\text{m/s}^3$ 。

a) 对于变加速直线运动阶段

加加速度定义为加速度随时间的变化率,如下式:

$$r = \frac{da}{dt} \quad (4)$$

对上式进行积分,得出加速度 a 随时间变化的表达式为:

$$a = r \cdot t = 20t \quad (5)$$

令 $a_{max} = 20t_1 = 3$,得 $t_1 = 0.15\text{s}$ 。

加速度定义为速度随时间的变化率,如下式:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (6)$$

对上式进行积分,得出 v 随时间变化的表达式为:

$$v = \frac{1}{2}rt^2 \quad (7)$$

速度定义为位移随时间的变化率,如下式:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (8)$$

对上式进行积分，得出 x 随时间变化的表达式为：

$$x = \frac{1}{6}rt^3 \quad (9)$$

代入 $t_1 = 0.15s$ ，得出第一阶段速度与位移大小如下：

$$v_1 = \frac{1}{2}rt_1^2 = 0.225 \text{ m/s}$$

$$x_1 = \frac{1}{6}rt_1^3 = 0.01 \text{ m}$$

b) 对于匀加速直线运动阶段

此阶段速度随时间变化的表达式如下：

$$v = v_1 + a_{\max}t_2 \quad (10)$$

令 $v = v_{\max} = 5.56 \text{ m/s}$ ，可得：

$$t_2 = 1.78 \text{ s}$$

此阶段位移随时间变化的表达式如下：

$$x = x_1 + \frac{1}{2}a_{\max}t_2^2 = 4.85 \text{ m}$$

最终我们得出结论，无人车以初速度为 0 沿直线行驶时，最短需要 4.85 m 能加速到最大限制速度 20km/h。

5.3 无人车转弯时路径的曲率相对路径长度的变化率大小的限制

无人车驾驶的轨迹规划要确保达到驾乘时安全与舒适的要求，就轨迹的性质而言，其中很重要的一点是轨迹路径上的曲率相对路径长度的变化率尽可能小（以下简称轨迹点曲率变化率）[3]，对规划出来的路径而言，即需要各轨迹点曲率变化率的绝对值的平均值尽可能小，由式（11）所示规划目标：

$$\text{s.t. min } \left| \frac{d\rho}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right| \quad (11)$$

而圆弧的曲率变化率始终为 0，故我们后续应使汽车泊车时转弯路径符合圆弧线，后续规划需要进一步确定圆弧的半径和圆心。

曲率与轨迹线曲率半径的关系如式（12）：

$$R = \frac{1}{\rho} \quad (12)$$

其中曲率 ρ 表示曲线偏离直线的程度，定义为曲线上某点的切线方向角对弧长的微分，即：

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{|\ddot{y}|}{(1 + (\dot{y})^2)^{3/2}} \quad (13)$$

由式（13）可知，曲率半径应满足大于等于最小转弯半径，故曲率应满足如下约束：

$$\rho \leq \frac{1}{R_{\min}} = 0.175 \quad (14)$$

六、问题二的求解

6.1 模型准备

1、阿克曼转向几何模型

与传统的机械装备的运动模型不同，车辆的运动学模型是非线性的。在具体的进行轨迹分析时，需要对无人车的运动学模型进行线性化。本文在设计垂直泊车路径时，依据题目背景，车速很低，约为 $v = 1 \sim 2.5 \text{m/s}$ ，且不考虑车辆的侧向移动，故题目中的车辆符合阿克曼转向几何模型，如图 2（a）所示。汽车前轮定位角为零是阿克曼理论的前提，在转向过程中所有车轮均为滚动状态。在惯性坐标系 xOy 下，点 N 为前轮 A 和 B 之间的前轴的中点，点 M 为后轮 E 和 F 之间的后轴的中心点，其中点 M 作为无人车的控制点[4]、[5]。

因此点 M 与无人车当前所处的轨迹点 i 重合，点 M 坐标为 (x_r, y_r) ，速度为 v ，方向角为 θ ，后轮瞬时转向半径与轨迹点 i 的道路曲率半径 R 相同。

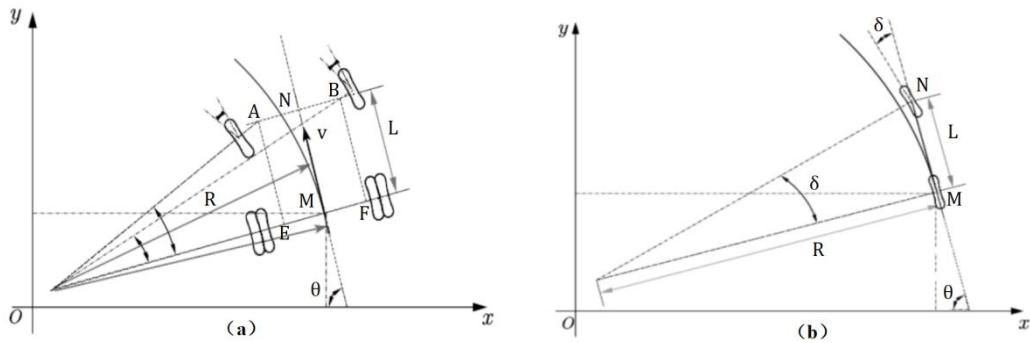


图 2. 阿克曼转向几何模型示意图

在低速且不考虑动力学因素情况下，对该模型进一步简化可以得到图 2（b）所示的车辆单轨模型，即自行车模型。对于正低速经过某轨迹点的无人车而言，

前轮转角与车轴长和无人车控制点瞬时转向半径有式（15）所示的关系：

$$\tan(\delta) = \frac{L}{R} \quad (15)$$

2、泊车初始点位限定

当车辆的初始位置与停车位边界线的距离小于某一数值时，车辆无法一次性泊车入位。经过分析可知，车辆在不同的起始位置泊车时的转向控制策略是不同的。

根据实际泊车问题的研究发现，车辆泊车的起始位置，通常是在如下图 3、图 4、图 5 所示的左极限位置和右极限位置之间。即水平方向上，车尾到目标车位中轴线距离介于 $l_{ab}/2$ 到 $2l_{ab}$ 之间。故：

$$l_{ab}/2 \leq (x_r - L_r) \leq 2l_{ab} \quad (16)$$

将上述关系式代入三种不同类型车位具体分析，可得：

（1）垂直停车位

代入数据可得泊车起始位置为 $2.25 \leq x_r \leq 5.85$ ，本文为方便计算，故取其中点为初始点，即初始点距车位对称轴中心坐标为(4.05,2.5)。

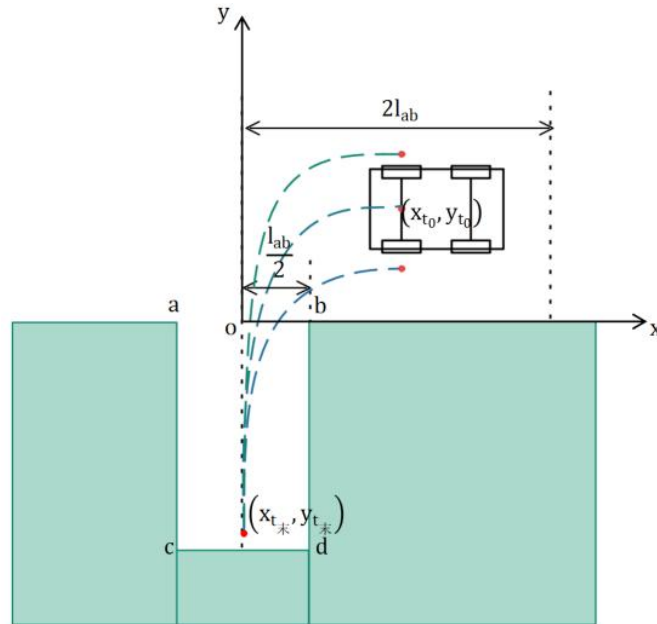


图 3. 垂直泊车位起始区域范围限定示意图

（2）平行停车位

代入数据可得泊车起始位置为 $3.7 \leq x_r \leq 11.65$ ，同理可知初始点为 (7.68,2.5)。

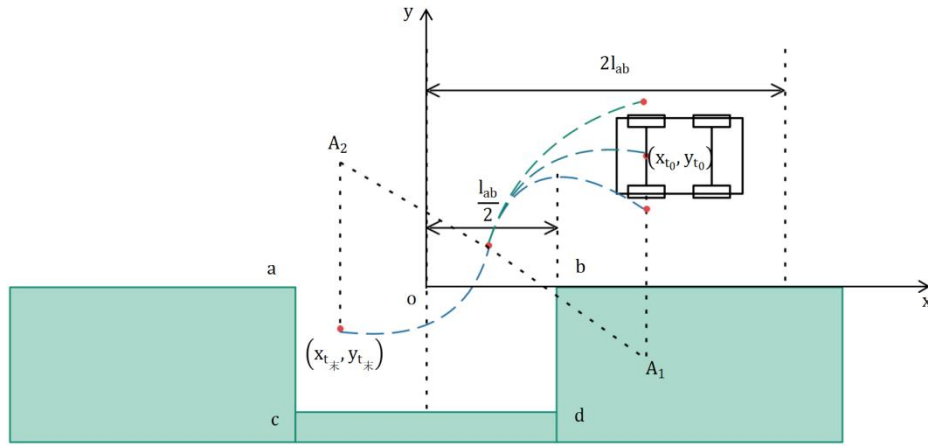


图 4. 水平泊车位起始区域范围限定示意图

(3) 斜向停车位

代入数据可得泊车起始位置为 $2.25 \leq x_r \leq 5.85$ ，同理可知初始点为 $(4.05, 2.5)$ 。

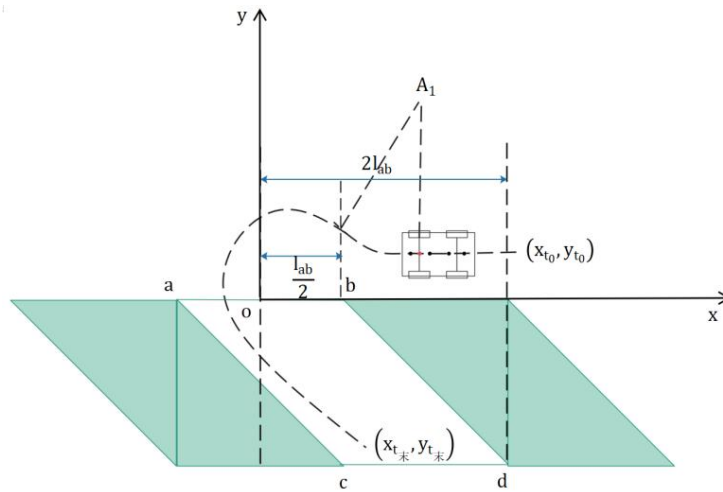


图 5. 斜向泊车位起始区域范围限定示意图

6.2 无人车泊车阶段运动轨迹规划问题描述

无人车泊车阶段运动轨迹规划问题需要进行最优控制问题描述，其中包括车辆运动学微分方程约束、避障约束、物理条件约束、起始/终止状态约束。基于上文中建立的模型构造无人车轨迹规划最优控制问题，并以行驶时间最短为性能指标函数，其统一的车辆运动轨迹规划问题描述如下[6][7]：

$$J = \min t$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \text{车辆运动学微分方程约束} \\ \text{车辆避障约束} \\ \text{物理条件约束} \\ \text{起始/终止状态约束} \end{cases}$$

6.3 无人车转弯运动学模型

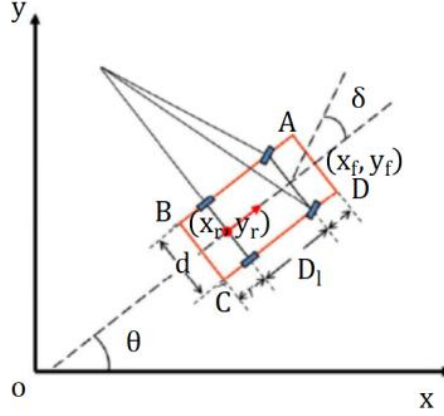


图 6. 车辆转弯模型示意图

本文选用的车辆近似参数为：长度 $D_l = 4.9\text{m}$ ，宽度 $d = 1.8\text{m}$ 。根据阿克曼转向模型，车辆以后轴延长线上的一点为圆心作圆周运动。本文设前轴中心点坐标为 (x_f, y_f) ，则后轴中心点坐标为：

$$R(x_r, y_r) = R(x_f - L\cos\theta, y_f - L\sin\theta) \quad (17)$$

四个车轮坐标为：

左前车轮坐标：

$$W_A(x_r + L\cos\theta - \frac{B}{2}\sin\theta, y_r + L\sin\theta + \frac{B}{2}\cos\theta) \quad (18)$$

右前车轮坐标：

$$W_D(x_r + L\cos\theta + \frac{B}{2}\sin\theta, y_r + L\sin\theta - \frac{B}{2}\cos\theta) \quad (19)$$

左后车轮坐标：

$$W_B(x_r + L(\cos\theta - \sin\theta) - \frac{B}{2}\sin\theta, y_r + \frac{B}{2}\cos\theta) \quad (20)$$

右后车轮坐标：

$$W_C(x_r + L(\cos\theta - \sin\theta) + \frac{B}{2}\sin\theta, y_r - \frac{B}{2}\cos\theta) \quad (21)$$

车辆在泊车过程中属于低速运动，可以假设没有侧向滑动，侧向的速度为零。根据侧向速度为零可以建立如下关系式：

$$\dot{x}_r \sin\theta - \dot{y}_r \cos\theta = 0 \quad (22)$$

对 (17) 式求导得：

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \dot{x}_f + \dot{\theta}L\sin\theta \\ \dot{y}_r = \dot{y}_f - \dot{\theta}L\cos\theta \end{cases} \quad (23)$$

将 (22)、(23) 式联立可得：

$$\dot{x}_f\sin\theta - \dot{y}_f\cos\theta + \dot{\theta}L = 0 \quad (24)$$

由图中可知， (\dot{x}_f, \dot{y}_f) 与 v_f 关系如下式：

$$\begin{cases} \dot{x}_f = v_f\cos(\theta - \delta) \\ \dot{y}_f = v_f\sin(\theta - \delta) \end{cases} \quad (25)$$

由式 (23) 和式 (24) 可得：

$$\dot{\theta} = v_f \frac{\sin\delta}{L} \quad (26)$$

由式 (25) 和式 (26) 可得：

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_f\cos\theta\cos\delta = v_r\cos\theta \\ \dot{y}_r = v_f\sin\theta\cos\delta = v_r\sin\theta \\ \dot{\theta} = v_f \frac{\sin\delta}{L} \end{cases} \quad (27)$$

对上式积分得：

$$\begin{cases} x_r = \int_0^t v_f\cos\theta\cos\delta dt \\ y_r = \int_0^t v_f\sin\theta\sin\delta dt \end{cases} \quad (28)$$

由式 (28) 可以得到，后轴中心 (x_r, y_r) 的轨迹随时间变化规律：

$$\begin{cases} x_r = \int_0^t v_f \cdot \cos\theta \cdot \cos\delta dt = L \cdot \cot\delta \cdot \sin\theta \\ y_r = \int_0^t v_f \cdot \sin\theta \cdot \sin\delta dt = L \cdot \cot\delta \cdot \cos\theta - L \cdot \cot\delta \end{cases} \quad (29)$$

由方程 (29) 化简可以得到：

$$x_r^2 + (y_r + L \cdot \cot\delta)^2 = (L \cdot \cot\delta)^2 \quad (30)$$

故上式 (30) 即为无人车转弯时的轨迹方程，由此方程可知车辆的运动轨迹与前轮转角有关。可以认为车辆是以一定的转角做固定半径的圆周运动。在轨迹方程中能影响到泊车轨迹的，只有后轴中心位置和前轮转角。虽然泊车速度会影响到控制效果的好坏，但泊车速度较低不会对泊车行驶轨迹的曲率造成影响。

6.4 无人车避障约束

由于泊车过程中无人车不能与红色禁停车位及围墙等其他障碍物发生冲突或碰撞,故如何准确地描述无人车与各类障碍物之间的约束是获得安全轨迹的重要因素之一。本文分别通过矩形和圆形对无人车轮廓进行描述,再给出无人车与障碍物的约束模型[6]。

1、无人车的轮廓描述

a) 实际无人车的俯视投影形状接近矩形,因此,可用矩形对车辆轮廓进行描述。根据几何关系由上文可知车辆轮廓矩形 ABCD 的顶点坐标:

$$\begin{cases} [Ax(t), Ay(t)] = (x_r(t) + L\cos\theta(t) - \frac{B}{2}\sin\theta(t), y_r(t) + L\sin\theta(t) + \frac{B}{2}\cos\theta) \\ [Bx(t), By(t)] = (x_r(t) + L(\cos\theta(t) - \sin\theta(t)) - \frac{B}{2}\sin\theta(t), y_r(t) + \frac{B}{2}\cos\theta) \\ [Cx(t), Cy(t)] = (x_r(t) + L(\cos\theta(t) - \sin\theta(t)) + \frac{B}{2}\sin\theta(t), y_r(t) - \frac{B}{2}\cos\theta) \\ [Dx(t), Dy(t)] = (x_r(t) + L\cos\theta(t) + \frac{B}{2}\sin\theta(t), y_r(t) + L\sin\theta(t) - \frac{B}{2}\cos\theta) \end{cases} \quad (31)$$

b) 在无人车处于开阔环境时,其轮廓不需要进行精确描述,可采用单个圆形对无人车轮廓进行描述,如图 7 所示:

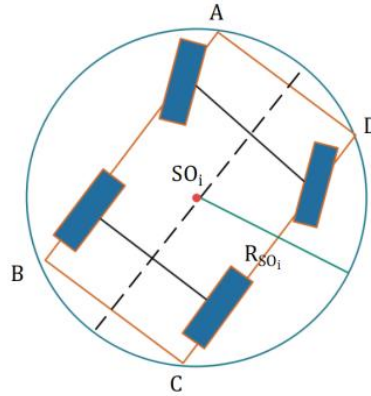


图 7. 车辆轮廓的单圆描述

其中 SO_i 为矩形 ABCD 的外接圆圆心, R_{SO_i} 为该圆的半径,可由式 (32) 表示:

$$R_{SO_i} = \frac{1}{2}\sqrt{(L + 2L_r)^2 + d^2} \quad (32)$$

采用单圆描述无人车轮廓导致车辆侧面冗余空间较大,不利于车辆在局部环境进行避障,因此,可采用多圆对车辆轮廓进行描述,本文采用 4 个圆形,如图 8 所示:

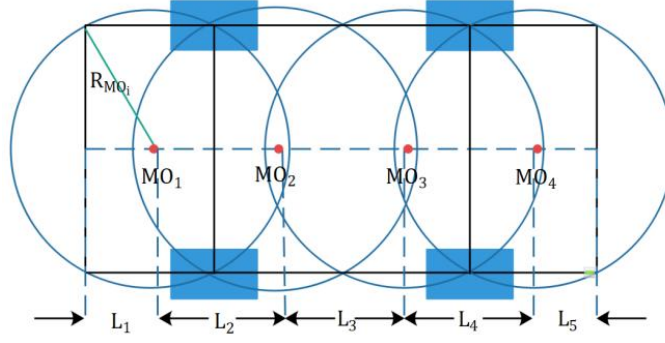


图 8. 车辆轮廓的多圆描述

其中, MO_1, MO_2, MO_3, MO_4 分别为 4 个圆心, L_1 为圆心到 MO_1 车辆尾部的距离, L_5 为圆心 MO_4 到车辆前部距离, L_2, L_3, L_4 分别为 $MO_1MO_2, MO_2MO_3, MO_3MO_4$ 之间的距离, R_{MO_i} 为外接圆的半径, 几何关系描述如下:

$$\begin{cases} L_1 = L_5 = \frac{1}{8}(L + 2L_r) \\ L_2 = L_3 = L_4 = \frac{1}{4}(L + 2L_r) \\ R_{MO_i} = \sqrt{L_1^2 + (\frac{d}{2})^2} \end{cases} \quad (33)$$

由上述的几何关系和 $R(x_r, y_r)$ 可分别得到 4 个圆心的位置:

$$\begin{cases} [MO_1x(t), MO_1y(t)] = (x(t) - (L_r - L_1)\cos\theta(t), y(t) - (L_r - L_1)\sin\theta(t)) \\ [MO_2x(t), MO_2y(t)] = (x(t) + (L_1 + L_2 - L_r)\cos\theta(t), y(t) + (L_1 + L_2 - L_r)\sin\theta(t)) \\ [MO_3x(t), MO_3y(t)] = (x(t) + (L + L_r - 3L_5)\cos\theta(t), y(t) + (L + L_r - 3L_5)\sin\theta(t)) \\ [MO_4x(t), MO_4y(t)] = (x(t) + (L + L_r - L_5)\cos\theta(t), y(t) + (L + L_r - L_5)\sin\theta(t)) \end{cases} \quad (34)$$

6.5 车辆避障约束

通过上小节将无人车轮廓描述为矩形或圆形, 其障碍物等均可采用同样方法进行描述, 因此, 对车辆与障碍物之间的碰撞判断可转化为几何形状在同一平面内是否出现重叠的问题。本小节将根据不同的无人车轮廓描述给出相应的避障约束模型。

下面本文将主要针对用圆形轮廓方法描述的模型进行分析。如果障碍物的外形接近正方形, 则可以用单个圆形进行描述。故本文将红色禁停车位轮廓用单个圆形进行描述。如图 9 所示, 无人车与障碍物之间不发生碰撞的条件为无人车轮廓圆形与障碍物轮廓圆形之间不存在重叠, 其约束条件可表示如下:

$$(O_ix(t) - O_x(t))^2 + (O_iy(t) - O_y(t))^2 \geq (R_v + R_o)^2, i = 1, 2, 3, 4 \quad (35)$$

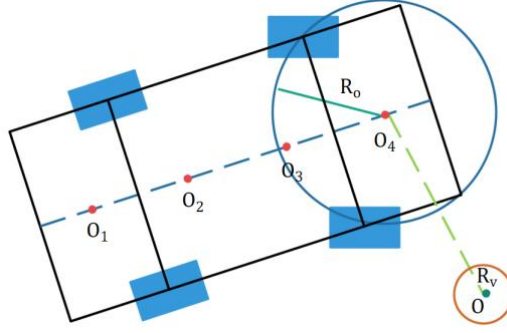


图 9. 车辆轮廓的多圆描述

6.6 物理条件与初始/终止状态约束

1、物理条件约束

无人车在运动过程中受到车辆自身物理条件约束，其对系统的部分状态变量和控制变量的约束如下，同时代入相关数据，可得：

$$\begin{cases} |v(t)| \leq v_{\max} \\ |a(t)| \leq a_{\max} \\ |r(t)| \leq r_{\max} \\ |\delta(t)| \leq \delta_{\max} \\ |w(t)| \leq w_{\max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |v(t)| \leq 5.56 \text{ m/s} \\ -5\text{m/s}^2 \leq a(t) \leq 3\text{m/s}^2 \\ |r(t)| \leq 20 \text{ m/s}^3 \\ |\delta(t)| \leq 29.375^\circ \\ |w(t)| \leq 25^\circ/\text{s} \end{cases} \quad (36)$$

2、初始/终止状态约束

基于上述的运动学模型和约束条件，车辆可以完成从起始时刻 t_0 到终止时刻 t 的无碰撞运动。起始时刻 t_0 车辆后轴中心点处于指定位置 (x_{t_0}, y_{t_0}) ，车辆经过 t 时长行驶到目标地点位置 (x_t, y_t) ，因此起始位置和终止位置约束如下：

$$\begin{cases} Rx(t_0) = x_{t_0}; Ry(t_0) = y_{t_0} \\ Rx(t) = x_t; Ry(t) = y_t \end{cases} \quad (37)$$

t_0 和 t 时刻车辆处于静止状态，在大地坐标系下车身角度为 0° ，并且方向盘处于中间位置。其初始和终止状态约束如下：

a) 初始状态

$$\begin{cases} v(t_0) = 0; \\ a(t_0) = 0; \\ r(t_0) = 0; \\ \theta(t_0) = 0; \\ \delta(t_0) = 0; \\ \omega(t_0) = 0; \end{cases} \quad (38)$$

b) 终止状态

在终止时刻 t ，车辆轮廓矩形 ABCD 的 4 个顶点需要落在停车位区域内，另

外，规定车身姿态与车位平行，如图 2.9 所示， $P(x,y)$ 为车位左上角的顶点，在 t 时刻的终止状态约束为：

$$\begin{cases} Px < [Ax(t), Bx(t), Cx(t), Dx(t)] < Px + l_{ab} \\ 0 < [Ay(t), By(t), Cy(t), Dy(t)] < Py = l_{ac} \\ \theta(t + \gamma) = m \end{cases} \quad (39)$$

其中 m 与车位类型有关， γ 为允许车辆姿态偏离垂直方向的角度，后文将具体分析。

6.7 垂直停车位

我们将无人车从初始位置到指定停车位的泊车轨迹分为行进阶段，泊车阶段两个部分，后续我们将对第一部分做简要概述，主要针对泊车阶段做具体分析。

无人车从入口初始位置驶入车库，初速度为 0，加速度为 0。

1、行进阶段(x_1+x_2)——行驶总距离 $x = 34.35m$

对于第一部分，我们通过简化模型，并代入相关数据计算，得出无人车的运动模式主要分为以下两个阶段：

(1) 匀速圆周运动(x_1):无人车做低速率($v = 1m/s$ 左右)匀速圆周运动，行驶距离 $x_1 = 7.5m$ 。

(2) 变加速直线运动+匀加速直线运动+匀速直线运动+变减速直线运动+匀减速直线运动(x_2): 无人车首先做加加速度 $r = 20m/s^3$ 的变加速直线运动，待加速度提升至 $a_{max} = 3m/s^2$ 时，无人车做加速度 $a = 3m/s^2$ 的匀加速直线运动，待加速度提升至最大速度限制 $v_{max} = 5.56m/s$ ，无人车做速度 $v = 5.56m/s$ 的匀速直线运动至泊车初始位置前 $3.09m$ 处。接着无人车做加加速度 $r = -20m/s^3$ 的变减速直线运动，待加速度减少至 $a_{min} = -5m/s^2$ 时，无人车做加速度 $a = -5m/s^2$ 的匀减速直线运动，待速度减少至 $v = 0$ 。行驶总距离 $x_2 = 26.85m$ 。

2、泊车阶段(x_3)

据上文所述，代入垂直车位泊车阶段相关数据，可得出如下线性规划：

$$J = \min t$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& x_r(t)^2 + (y_r(t) + 2.8\cot\delta(t))^2 = (2.8\cot\delta(t))^2 \\
& (O_4x(t) - O_4x(t))^2 + (O_4y(t) - O_4y(t))^2 \geq 2.53 \\
& (O_1x(t) - O_1x(t))^2 + (O_1y(t) - O_1y(t))^2 \geq 2.53 \\
& |v(t)| \leq 5.56 \text{ m/s} \\
& -5\text{m/s}^2 \leq a(t) \leq 3\text{m/s}^2 \\
& |r(t)| \leq 20 \text{ m/s}^3 \\
& |\delta(t)| \leq 29.375^\circ \\
& |w(t)| \leq 25^\circ/\text{s} \\
& x(0) = 7.65 \\
& y(0) = 7.8 \\
& x(t_{\text{末}}) = 3.6 \\
& y(t_{\text{末}}) = 0.5 \\
& \text{式(2)} \\
& 2.4 < [Ax(t), Bx(t), Cx(t), Dx(t)] < 4.8 \\
& 0 < [Ay(t), By(t), Cy(t), Dy(t)] < 5.3 \\
& \theta(t + \gamma) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

运用 matlab 软件对上述线性规划进行求解，求出参数最优解后，对泊车阶段进行仿真，并导出结果数据，绘制出如下可视化轨迹图：

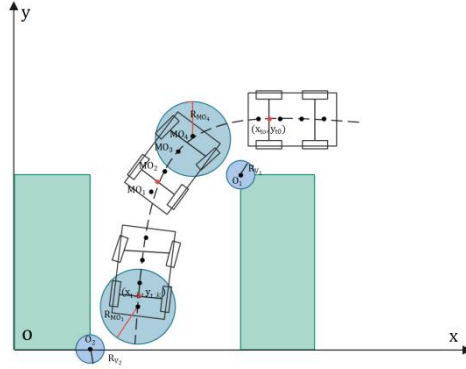


图 10. 垂直车位泊车阶段车辆轨迹示意图

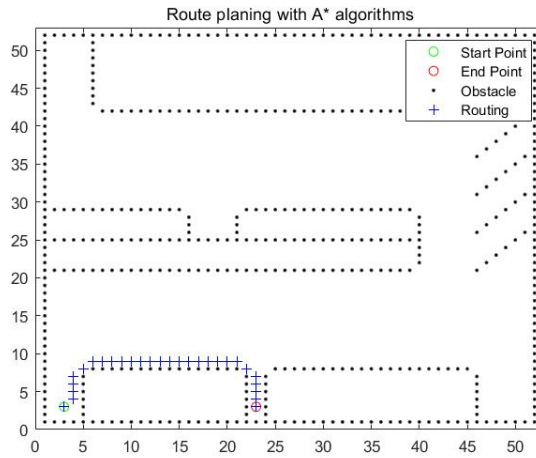


图 11. 垂直车位泊车阶段车辆路径示意图

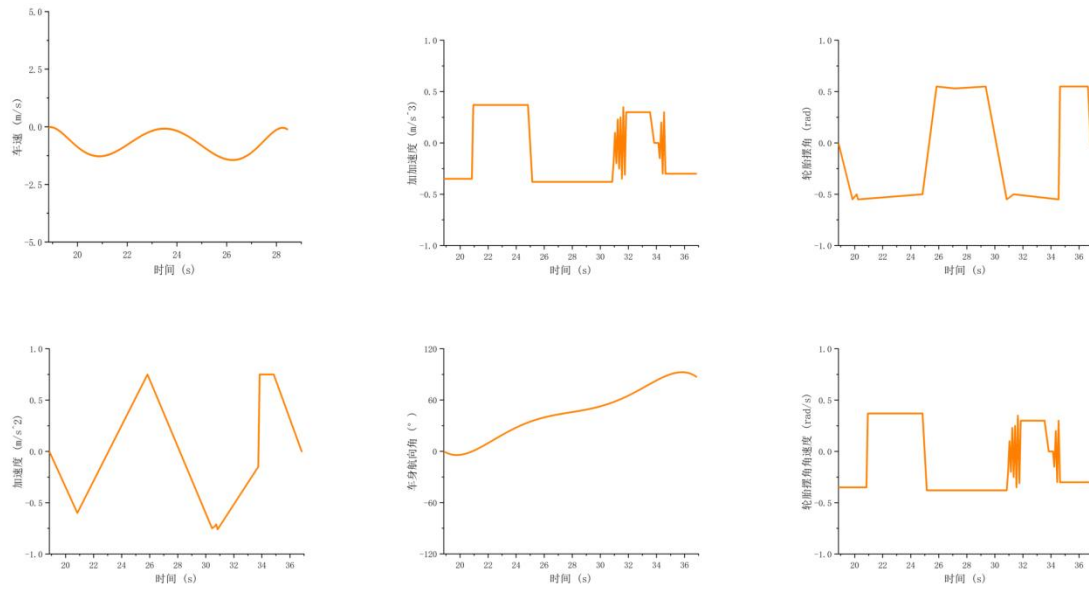


图 12. 运动参数

6.8 水平停车位

同理垂直停车位。无人车在第一部分的运动模式主要分为以下六个阶段：

1、行进阶段($x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$)——行驶总距离 $x = 139.47m$

(1) 匀速圆周运动(x_1)：同理垂直停车位。

(2) 变加速直线运动+匀加速直线运动+匀速直线运动+匀减速直线运动(x_2)：无人首先做加加速度 $r = 20m/s^3$ 的变加速直线运动，待加速度提升至 $a_{max} = 3m/s^2$ 时，无人车做加速度 $a = 3m/s^2$ 的匀加速直线运动，待速度提升至最大速度限制 $v_{max} = 5.56m/s$ 时，无人车做速度 $v = 5.56m/s$ 的匀速直线运动行驶至黄色减速带前 $7.32m$ 。接着无人车做加速度 $a = -5m/s^2$ 的匀减速直线运动，待速度减小至 $v = 2.78m/s$ ，行驶至黄色减速带前 $5m$ 。行驶总距离 $x_2 = 64.8m$ 。

(3) 匀速圆周运动(x_3)：无人车做速度 $v = 2.78m/s$ 的匀速圆周运动，行驶距离 $x_3 = 4.32m$ 。

(4) 匀速直线运动(x_4)：无人车做速度 $v = 2.78m/s$ 的匀速直线运动，行驶距离 $x_4 = 5.8m$ 。

(5) 匀速圆周运动+匀速直线运动(x_5)：无人车首先做速度 $v = 2.78m/s$ 的匀速圆周运动，接着做相同速率大小的直线运动行驶 $5m$ 至超过黄色减速带的减速安全范围。行驶总距离 $x_5 = 9.32m$ 。

(6) 变加速直线运动+匀加速直线运动+匀速直线运动+变减速直线运动+匀减速直线运动(x_6): 无人车以初速度 $v_0 = 2.78\text{m/s}$ 首先做加加速度 $r = 20\text{m/s}^3$ 的变加速直线运动,待加速度提升至 $a_{\max} = 3\text{m/s}^2$ 时,无人车做加速度 $a = 3\text{m/s}^2$ 的匀加速直线运动,待加速度提升至最大速度限制 $v_{\max} = 5.56\text{m/s}$,无人车做速度 $v = 5.56\text{m/s}$ 的匀速直线运动至泊车初始位置前 3.09m 处。接着无人车做加加速度 $r = -20\text{m/s}^3$ 的变减速直线运动,待加速度减少至 $a_{\min} = -5\text{m/s}^2$ 时,无人车做加速度 $a = -5\text{m/s}^2$ 的匀减速直线运动,待速度减少至 $v = 0$ 。行驶总距离 $x_6 = 47.73\text{m}$ 。

2、泊车阶段(x_7)

据上文所述,代入水平车位泊车阶段相关数据,可得出如下线性规划:

$$\begin{aligned}
 & J = \min t \\
 & \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l}
 x_r(t)^2 + (y_r(t) + 2.8\cot\delta(t))^2 = (2.8\cot\delta(t))^2 \\
 (O_4x(t) - O_x(t))^2 + (O_4y(t) - O_y(t))^2 \geq 2.53 \\
 (O_1x(t) - O_x(t))^2 + (O_1y(t) - O_y(t))^2 \geq 2.53 \\
 |v(t)| \leq 5.56 \text{ m/s} \\
 -5\text{m/s}^2 \leq a(t) \leq 3\text{m/s}^2 \\
 |r(t)| \leq 20 \text{ m/s}^3 \\
 |\delta(t)| \leq 29.375^\circ \\
 |w(t)| \leq 25^\circ/\text{s} \\
 x(0) = 15.63 \\
 y(0) = 4.4 \\
 x(t_{\text{末}}) = 5.8 \\
 y(t_{\text{末}}) = 0.5 \\
 \text{式(2)} \\
 5.3 < [Ax(t), Bx(t), Cx(t), Dx(t)] < 10.6 \\
 0 < [Ay(t), By(t), Cy(t), Dy(t)] < 2.4 \\
 \theta(t + \gamma) = 0
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

运用 matlab 软件对上述线性规划进行求解, 求出参数最优解后, 对泊车阶段进行仿真, 并导出结果数据, 绘制出如下可视化轨迹图:

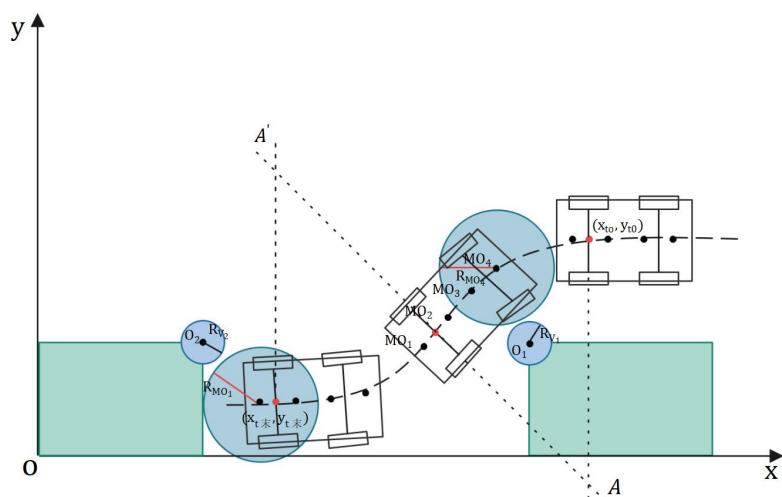


图 13. 水平车位泊车阶段车辆轨迹示意图

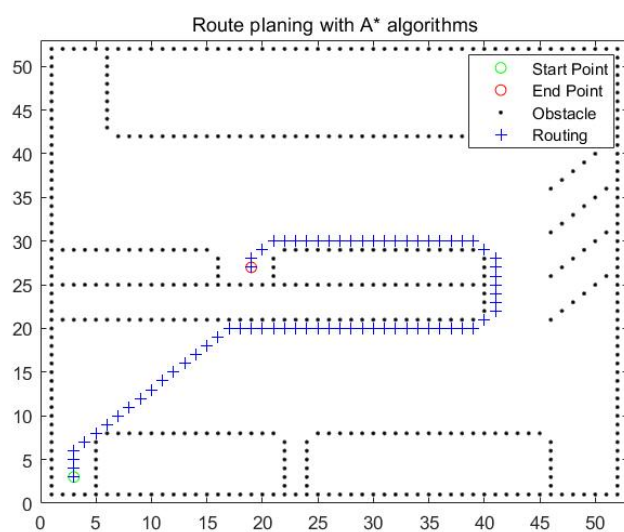


图 14. 水平车位泊车阶段车辆路径示意图

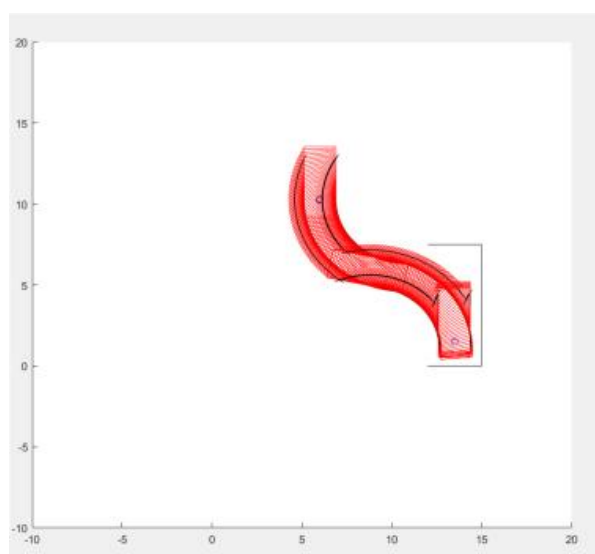


图 15. 水平车位泊车轨迹仿真示意图

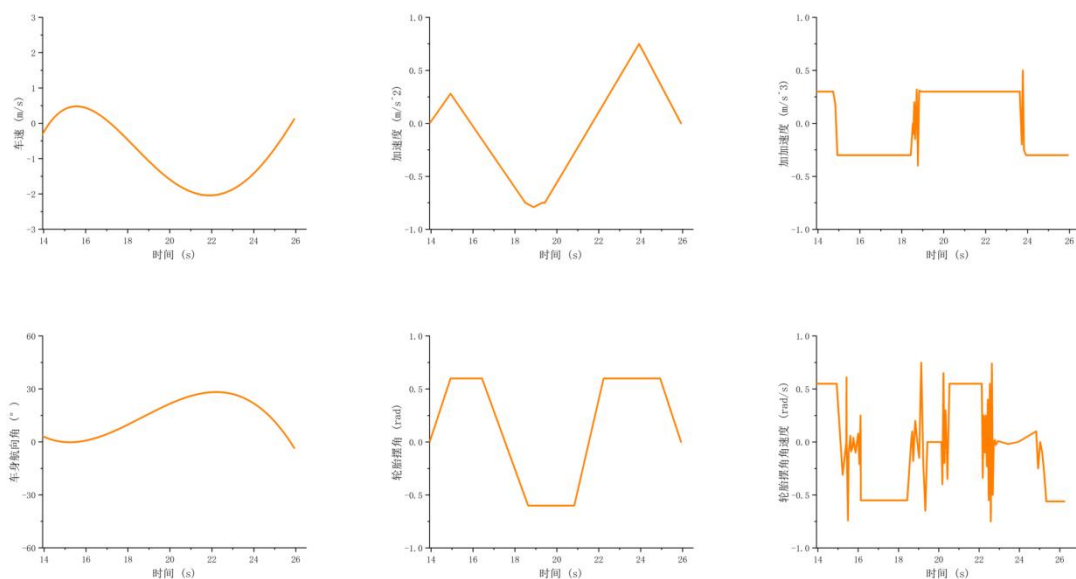


图 16. 运动参数

6.9 斜向(45°)停车位

同理垂直停车位。无人车在第一部分的运动模式主要分为以下四个阶段：

1、行进阶段($x_1+x_2+x_3+x_4$)——行驶总距离 $x = 84.27m$

(1) 匀速圆周运动(x_1)：同理垂直停车位。

(2) 变加速直线运动+匀加速直线运动+匀速直线运动+匀减速直线运动(x_2)：同理水平停车位，行驶总距离 $x_2 = 64.8m$ 。

(3) 匀速圆周运动(x_3)：无人车做速度 $v = 2.78m/s$ 的匀速圆周运动，行驶距离 $x_3 = 4.32m$ 。

(4) 匀速直线运动+变减速直线运动+匀减速直线运动(x_4)：无人车做速度 $v = 2.78m/s$ 的匀速直线运动至泊车初始位置前 $0.77m$ 处。接着无人车做加加速度 $r = -20m/s^3$ 的变减速直线运动，待加速度减少至 $a_{min} = -5m/s^2$ 时，无人车做加速度 $a = -5m/s^2$ 的匀减速直线运动，待速度减少至 $v = 0$ 。行驶总距离 $x_4 = 7.65m$ 。

2、泊车阶段(x_5)

据上文所述，代入斜向(45°)车位泊车阶段相关数据，可得出如下线性规划：

$$J = \min t$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& x_r(t)^2 + (y_r(t) + 2.8\cot\delta(t))^2 = (2.8\cot\delta(t))^2 \\
& (O_4x(t) - O_4x(t))^2 + (O_4y(t) - O_4y(t))^2 \geq 2.53 \\
& (O_1x(t) - O_1x(t))^2 + (O_1y(t) - O_1y(t))^2 \geq 2.53 \\
& |v(t)| \leq 5.56 \text{ m/s} \\
& -5\text{m/s}^2 \leq a(t) \leq 3\text{m/s}^2 \\
& |r(t)| \leq 20 \text{ m/s}^3 \\
& |\delta(t)| \leq 29.375^\circ \\
& |w(t)| \leq 25^\circ/\text{s} \\
& x(0) = 15.63 \\
& y(0) = 7.3 \\
& x(t_{\text{末}}) = 8.9 \\
& y(t_{\text{末}}) = 0.5 \\
& \text{式(2)} \\
& 2.4 < [Ax(t), Bx(t), Cx(t), Dx(t)] < 10.1 \\
& 0 < [Ay(t), By(t), Cy(t), Dy(t)] < 5.3 \\
& \theta(t + \gamma) = 135^\circ
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

运用 matlab 软件对上述线性规划进行求解，求出参数最优解后，对泊车阶段进行仿真，并导出结果数据，绘制出如下可视化轨迹图：

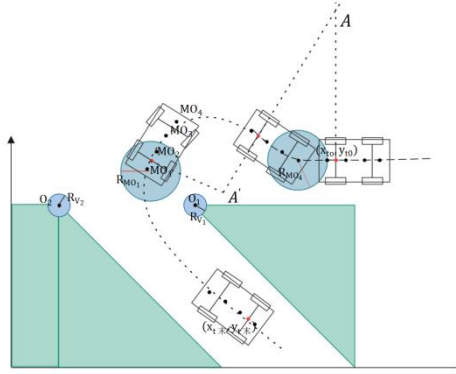


图 17. 斜向车位泊车阶段车辆轨迹示意图

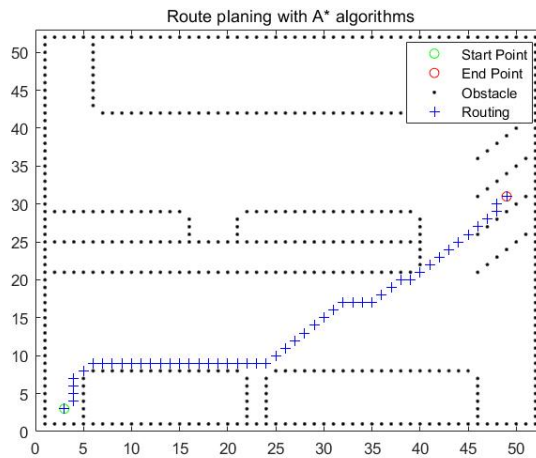


图 18. 斜向车位泊车阶段车辆路径示意图

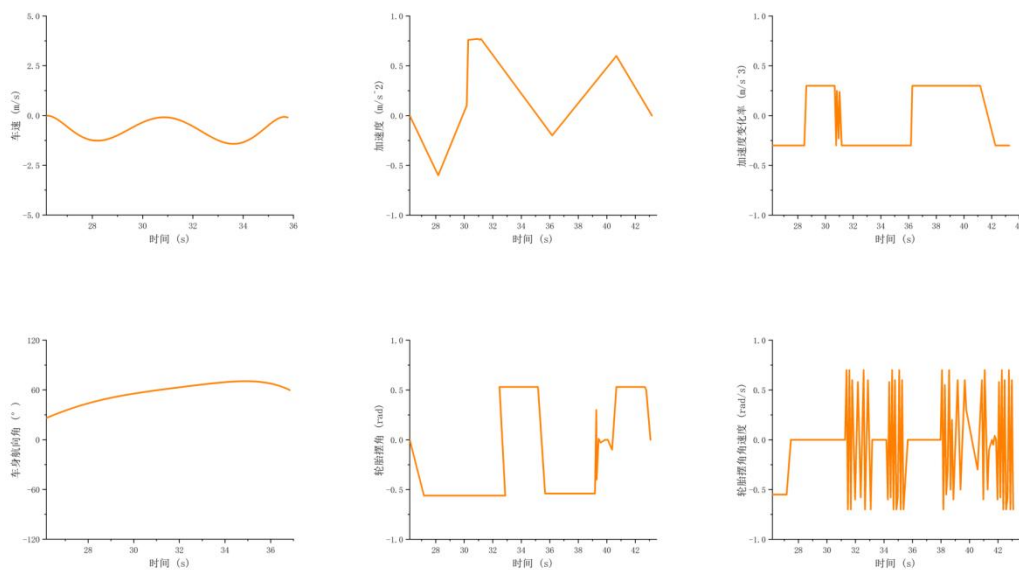


图 19. 运动参数

七、建立泊车模型

7.1 定义最优停车位

本文定义无人车控制点从初始位置出发到停车结束所需行驶路程最短的停车位，即为最优停车位。

7.2 简化泊车模型

本文通过化曲为直，将无人车的行驶路径简化成直线，并基于题目中给出的条件，将模型简化成以下四种情况：

以初始状态控制点所在的位置为原点，由于化曲为直简化了模型，因此本文将地面上箭头方向作为正方向，建立坐标轴。

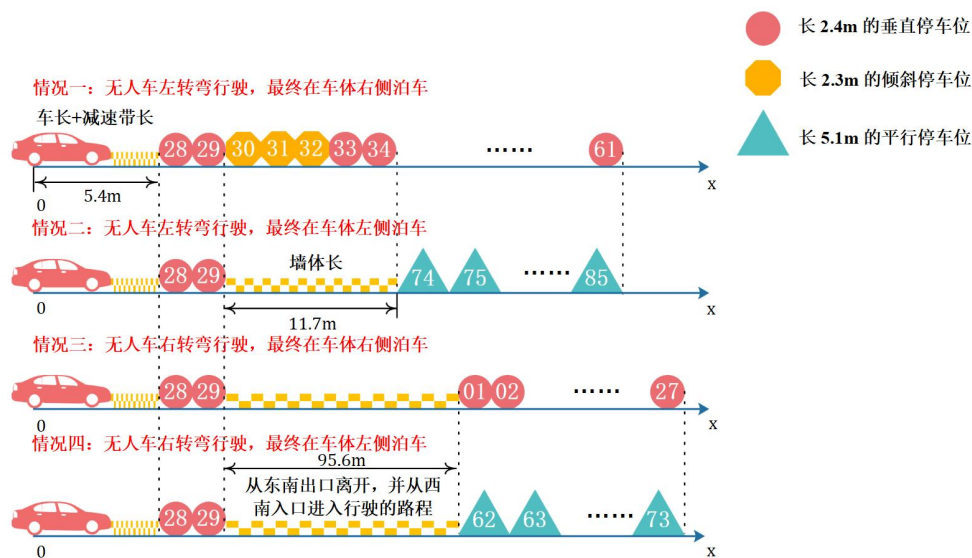


图 20. 泊车模型简化示意图

情况一：无人车行驶过减速带后，左转弯行驶，依次经过车位 28、车位 29、…、车位 61。情况二：无人车行驶过减速带后，左转弯行驶，经过车位 28、车位 29，又驶过一段长为 11.7m 的墙体，依次经过车位 74、车位 75、…、车位 85。情况三：无人车行驶过减速带后，右转弯行驶，经过车位 28、车位 29，从东南出口离开停车场，并从西南入口返回停车场，依次经过车位 01、车位 02、…、车位 27。情况四：无人车行驶过减速带后，右转弯行驶，经过车位 28、车位 29，从东南出口离开停车场，并从西南入口返回停车场，依次经过车位 62、车位 63、…、车位 73。

7.3 建立选取最优停车位模型

表 1. 选取最优停车位算法

Step1:	赋予初始位置的值为 0，即 $P_0 = 0$ 。
Step2:	对 k 种情况，(k = 1,2,3,4)，无人车行驶时经过的车位进行排序： 情况 1：无人车依次行驶过 p_{1i} 个车位，(i = 1,2, …, 34)，对应车位 28、车位 29、……、车位 61。 情况 2：无人车依次行驶过 p_{2j} 个车位，(j = 1,2, …, 14)，对应车位 28、车位 29、车位 74、车位 75、……、车位 85。 情况 3：无人车依次行驶过 p_{3m} 个车位，(m = 1,2, …, 29)，对应车位 28、车位 29、车位 01、车位 02、……、车位 27。 情况 4：无人车依次行驶过 p_{4n} 个车位，(n = 1,2, …, 14)，对应车位 28、车位 29、车位 62、车位 63、……、车位 73。
Step3:	设计停车位的状态：若停车位被占用，赋值该停车位值为 0，即 $p_{ki,kj,km,kn} = 0$ ；若停车位未被占用，赋予该停车位值为 1，即 $p_{ki,kj,km,kn} = 1$ 。
Step4:	从 i = 1, j = 1, m = 1, n = 1，对 k 种情况，(k = 1,2,3,4)，进行累加计算，即 $P_k = P_0 + p_{ki,kj,km,kn}$ ，(i = 1,2, …, 34)，(j = 1,2, …, 14)，(m = 1,2, …, 29)，(n = 1,2, …, 14)。
Step5:	寻找 k 种情况，(k = 1,2,3,4) 的最近的空闲停车位序号信息：令 $P_k = 1$ ，记录对应的 ki, kj, km, kn 值。
Step6:	求解使无人车总行驶路程最短的最优停车位：将 Step5 中 k, i, j, m, n 值代入下式： 当 k = 1 时，求解无人车总行驶路程 S_1 ： 若 $1 \leq i \leq 2$ ， $S_1 = 5.4 + 2.4i$ ； 若 $3 \leq i \leq 5$ ， $S_1 = 10.2 + 2.3(i - 2)$ ； 若 $6 \leq i \leq 34$ ， $S_1 = 17.1 + 2.4(i - 5)$ ； 当 k = 2 时，求解无人车总行驶路程 S_2 ：

若 $1 \leq j \leq 2$, $S_2 = 5.4 + 2.4j$;
 若 $3 \leq j \leq 14$, $S_2 = 17.1 + 5.1(j - 2)$;
 当 $k = 3$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_3 :
 若 $1 \leq m \leq 2$, $S_3 = 5.4 + 2.4m$;
 若 $3 \leq m \leq 29$, $S_3 = 105.8 + 2.4(m - 2)$;
 当 $k = 4$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_4 :
 若 $1 \leq n \leq 2$, $S_4 = 5.4 + 2.4n$;
 若 $3 \leq n \leq 14$, $S_4 = 105.8 + 5.1(n - 2)$;
 求解 $\min = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, 根据 ki, kj, km, kn 的信息确定最优车位信息。

7.4 建立 A*算法行驶轨迹绘制模型

A*算法[2]是在 Dijkstra 算法基础上增加启发函数, 提供快速靠近获得从起点到终点的可行路径的一种启发式图搜索算法。

首先, 根据停车场的环境信息构建栅格地图, 准确地描绘障碍物的几何形状、无人车的可行行驶区域。建立开放列表 **OpenList** 存储待搜索的节点和关闭列表 **ClosedList** 存储已遍历过的节点, 从初始节点 P_{start} 开始向外扩展, 并计算相邻节点的代数函数, 选择其中代价最小的节点作为下次的拓展节点, 将该节点存储在 **OpenList** 中, 同时将父节点存放在 **ClosedList** 中, 直至成功搜索到最优停车位节点 P_{goal} , 若 **OpenList** 为空时仍未搜索到 P_{goal} , 意味着未获得连接起始点和最优停车位节点的可行路径。

算法中对拓展节点的代价估计函数的一般形式为:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

式中: $g(x)$ 表示从初始节点 P_{start} 到当前拓展节点的路径代价函数, $h(x)$ 表示当前拓展节点到最优停车位节点 P_{goal} 的启发代价函数, $f(x)$ 表示作为当前拓展节点总体代价。

本文选取欧氏距离作为启发代数函数, 即:

$$h(x) = \sqrt{(x_{cur} - x_{goal})^2 + (y_{cur} - y_{goal})^2}$$

式中 (x_{cur}, y_{cur}) 为当前拓展节点的坐标位置, (x_{goal}, y_{goal}) 为最优停车位节点的坐标位置。计算被拓展节点的代价, 选取其最小值的节点进行拓展直至完成计算。

根据建立的模型, 绘制流程图如下图 18 所示:

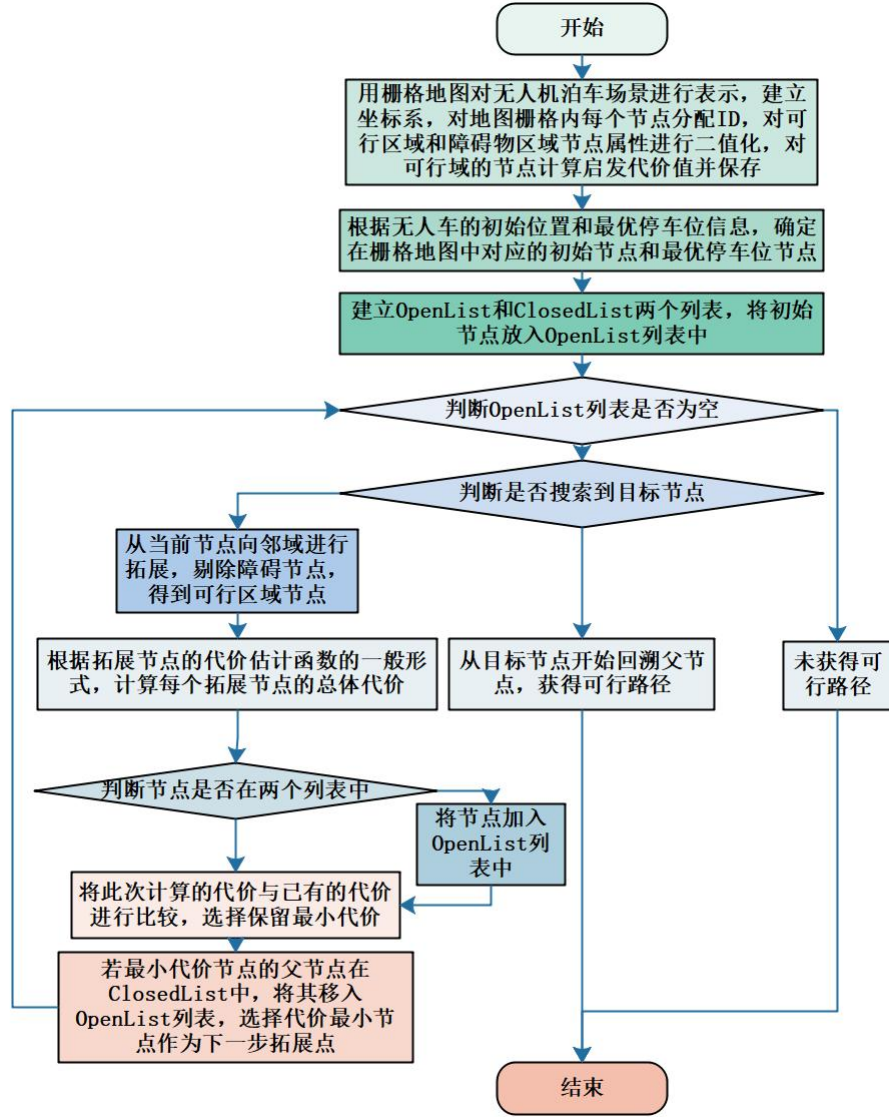


图 21. A*算法行驶轨迹流程图

八、基于泊车模型求解问题三

8.1 确定最优停车位

步骤一：赋予初始位置的值为 0，即 $P_0 = 0$ 。

步骤二：对 k 种情况，($k = 1, 2, 3, 4$)，行驶时经过的车位进行排序。

步骤三：若停车位被占用，赋值该停车位值为 0，即 $p_{ki,kj,km,kn} = 0$ ；若停车位未被占用，赋予该停车位值为 1，即 $p_{ki,kj,km,kn} = 1$ 。

步骤四：从 $i = 1, j = 1, m = 1, n = 1$ ，对 k 种情况，($k = 1, 2, 3, 4$)，进行累加计算，即 $P_k = P_0 + p_{ki,kj,km,kn}$ ，($i = 1, 2, \dots, 34; j = 1, 2, \dots, 14; m =$

1,2, ..., 29 ; n = 1,2, ..., 14)。

步骤五：寻找 k 种情况, ($k = 1,2,3,4$)的最近的空闲停车位序号信息: 令 $P_k = 1$, 记录对应的 ki, kj, km, kn 值:

$ki = 118$, 表示情况 1 时, 无人车行驶时经过的第 18 个车位即为空闲停车位;

$kj = 27$, 表示情况 2 时, 无人车行驶时经过的第 7 个车位即为空闲停车位;

$km = 34$, 表示情况 3 时, 无人车行驶时经过的第 4 个车位即为空闲停车位;

$kn = 45$, 表示情况 4 时, 无人车行驶时经过的第 5 个车位即为空闲停车位。

步骤六：求解使无人车总行驶路程最短的最优停车位: 将 Step5 中 k, i, j, m, n 值代入下式:

当 $ki = 118$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_1 :

$$S_1 = 17.1 + 2.4(18 - 5) = 48.3;$$

当 $kj = 27$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_2 :

$$S_2 = 17.1 + 5.1(7 - 2) = 42.6;$$

当 $km = 34$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_3 :

$$S_3 = 105.8 + 2.4(4 - 2) = 110.6;$$

当 $kn = 45$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_4 :

$$S_4 = 105.8 + 5.1(5 - 2) = 121.1;$$

求解 $\min = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = S_2$

确定最优车位信息: $kj = 27$, 即情况 2 中无人车行驶时经过的第 7 个车位。

8.2 绘制无人车从当前位置行驶至最优停车位的轨迹

本文基于 A*算法绘制从当前位置行驶至最优停车位的轨迹。

由于泊车过程中无人车不能与被占用的禁停车位发生冲突或碰撞, 即考虑车辆运动学约束要求, 考虑到 A*算法生成的控制点路径不能满足车辆运动学约束和避障约束, 因此对障碍区域进行膨胀处理: 减少控制点在停车场内的可行区域范围。

在确定栅格地图的障碍区域和可行区域后, 以无人车后轴中心位置为初始节

点，车位 78 为最优停车位节点，进行 A*算法搜索最优路径，最终得到行驶轨迹图如下图 19 所示：

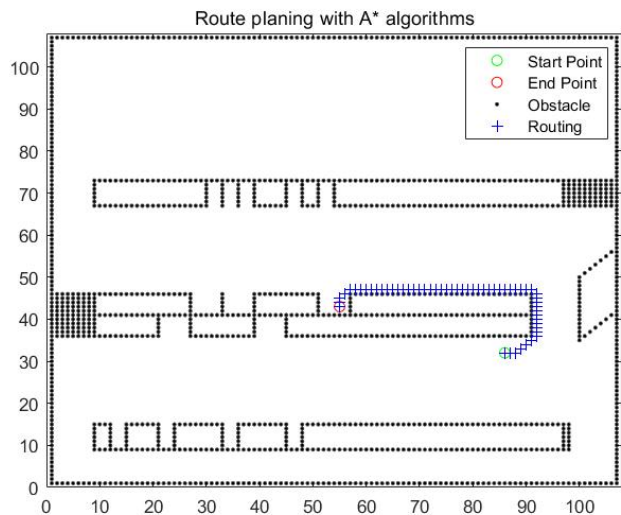


图 22. 当前位置到最优停车位行驶轨迹图

九、基于泊车模型求解问题四

由题设：当前状态下每小时从入口进入和从出口离开停车场的车辆数均为 30，本文假设车辆的进入和离开对模型的影响体现在停车场内的停车位会被随机占用或释放。因此，以题目所给位置为初始状态的无人车在情况 1、情况 2 下行驶时，可能会出现该情况下行驶经过的停车位均被占用。此时，无人车从东南出口离开停车场，并从西南入口返回停车场，即为情况 3、情况 4 所示。

本文以某短时间内车位 05、车位 06、车位 07、车位 08、车位 09、车位 12、车位 13、车位 14、车位 17、车位 18、车位 19、车位 22、车位 64、车位 67、车位 69 为空车位，其余车位均被占用为例，此时，无人车行驶轨迹满足情况 3、情况四。

9.1 确定最优停车位

步骤一：赋予初始位置的值为 0，即 $P_0 = 0$ 。

步骤二：对 k 种情况, ($k = 3,4$), 行驶时经过的车位进行排序。

步骤三：若停车位被占用, 赋值该停车位值为 0, 即 $p_{km,kn} = 0$;
若停车位未被占用, 赋予该停车位值为 1, 即 $p_{km,kn} = 1$ 。

步骤四：从 $m = 1, n = 1$, 对 k 种情况, ($k = 3,4$), 进行累加计算, 即 $P_k = P_0 + p_{km,kn}$, ($m = 1,2, \dots, 29$; $n = 1,2, \dots, 14$)。

步骤五：寻找 k 种情况, ($k = 3,4$)的最近的空闲停车位序号信息:
令 $P_k = 1$, 记录对应的 km, kn 值:

$km = 37$, 表示情况 3 时, 无人车行驶时经过的第 7 个车位即为空闲停车位;

$kn = 45$, 表示情况 4 时, 无人车行驶时经过的第 5 个车位即为空闲停车位。

步骤六：求解使无人车总行驶路程最短的最优停车位: 将 Step5 中 k, m, n 值代入下式:

当 $km = 37$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_3 :

$$S_3 = 105.8 + 2.4(7 - 2) = 117.8;$$

当 $kn = 45$ 时, 求解无人车总行驶路程 S_4 :

$$S_4 = 105.8 + 5.1(5 - 2) = 121.1;$$

求解 $\min = \{S_3, S_4\} = S_3$

确定最优车位信息: $km = 37$, 即情况 3 中无人车行驶时经过的第 7 个车位。

9.2 绘制无人车从当前位置行驶至最优停车位的轨迹

本文基于 A*算法绘制从当前位置行驶至最优停车位的轨迹。

在确定栅格地图的障碍区域和可行区域后，以无人车后轴中心位置为初始节点，车位 05 为最优停车位节点，进行 A*算法搜索最优路径，最终得到行驶轨迹图如下图 20 所示：

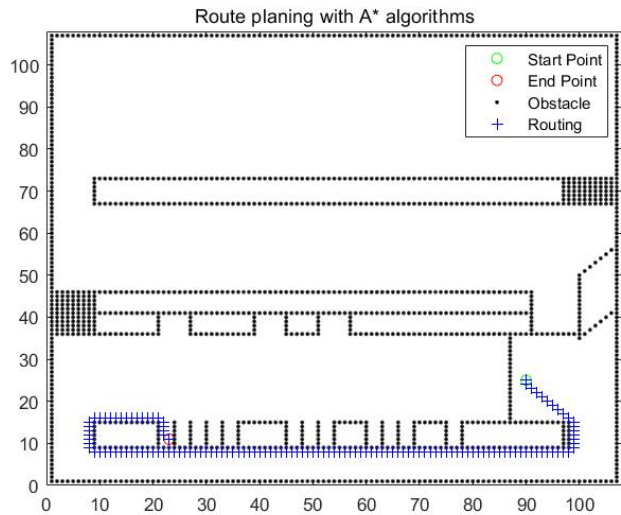


图 23. 当前位置到最优停车位行驶轨迹图

十、模型评价及改进

模型优点：

- 1、本文建立线性规划模型，将原本很复杂的无人车泊车运动问题进行简化，以耗时最少为目标函数，将许多的复杂条件简化为逐条的约束条件，使模型变得简单直观。
- 2、在问题二中的无人车避障约束部分，我们通过面积膨胀，用一定半径大小的圆形等效代替无人车与障碍物，当两个圆形面积重叠时，即为发生碰撞。方式新颖且直观易懂，可最大限度地将问题简化。
- 3、对于问题二的模型较为全面，考虑多方面的约束条件，使结果与实际更符合。
- 4、问题三中，通过化曲为直，将无人车的行驶路径简化成直线，以初始状态控制点所在的位置为原点，将地面上箭头方向作为正方向，建立坐标轴，将模型简化成四种情况。

5、问题三中，由于泊车过程中无人车不能与被占用的禁停车位发生冲突或碰撞，本文考虑到 A*算法生成的控制点路径不能满足车辆运动学约束和避障约束，因此减少控制点在停车场内的可行区域范围，对障碍区域进行膨胀处理。

模型缺点：

1、模型较为理想化，对于问题二中的无人车避障约束部分，对于不同类型的泊车位，都只考虑了两种情况的无人车与障碍物的碰撞，考虑并不是很充分，可能会对后续轨迹优化的分析产生影响。

2、问题四中运用的 A*算法，生成的控制点路径不能满足车辆运动学约束和避障约束。

十一、参考文献

- [1] 潘绍飞. 无人驾驶汽车路径规划算法研究综述[J]. 汽车实用技术, 2022, 47(04):162-165. DOI:10.16638/j.cnki.1671-7988.2022.004.038.
- [2] 林黄智, 田柳. 基于改进 A*算法的无人驾驶车辆路径规划方法研究[J]. 湖南文理学院学报(自然科学版), 2021, 33(02):17-20.
- [3] 张猛. 自动泊车路径规划算法研究[D]. 太原科技大学, 2018.
- [4] 王雪霖. 自动驾驶车辆垂直车位自动泊车控制算法研究[D]. 吉林大学, 2021. DOI:10.27162/d.cnki.gjlin.2021.002490.
- [5] 叶林铨. 基于伪谱法的自主泊车路径规划方法研究[D]. 中国科学技术大学, 2016.
- [6] 吴冰. 自主泊车的最优轨迹规划与跟踪控制研究[D]. 合肥工业大学, 2021. DOI:10.27101/d.cnki.ghfgu.2021.000096.
- [7] 王浩杰. 自动泊车系统路径规划与跟踪算法研究[D]. 大连理工大学, 2021. DOI:10.26991/d.cnki.gdllu.2021.001576.
- [8] 吴中伟. 乘用车自动泊车系统路径规划与仿真分析[D]. 华南理工大学, 2018.
- [9] 李玄赫. 狭窄车位的自动泊车路径规划与跟踪控制研究[D]. 大连理工大学, 2021. DOI:10.26991/d.cnki.gdllu.2021.002257.