

队伍编号	21060310053
题号	A

## 自动驾驶中的车辆调头问题研究

### 摘 要

自动驾驶是近年应用的热门研究领域之一，其中调头是自动驾驶中一个非常实际又很有趣的场景。许多人工智能在导航作业时都需要进行自动调头对准下一作业行的操作，因此，无人车调头的研究成为了车辆自动驾驶的研究重点之一。

针对问题一，我们根据题目中的方向盘最大转角、方向盘与前轮转角的传动比以及无人车的对称轴来确定其控制点位置，得出控制点与前轴的距离为  $1.78m$ ；接着，我们对无人车的调头过程分了三情况，主要讨论了前两种，经过分析得出控制点的最小转弯半径为  $4.93m$ ；检验后，控制点的转弯半径改进为  $5.52m$ ，此时无人车成功进入第三车道；然后，建立以调头时间为目标函数的单目标规划模型，并运用 Lingo 软件得出了两种情况调头过程的总时间，分别为  $8.16s$ 、 $7.69s$ ；最后，运用 Matlab 软件曲线拟合出无人车的调头轨迹（轨迹详见正文）。

针对问题二，调头区域狭窄时，无人车是否需要倒车完成调头。该题只考虑单排车道的情况，首先，根据无人车从不同位置开始调头，主要讨论了问题一的前两种情况；其次，以调头时间为目标函数，建立目标规划模型，运用 Lingo 软件得出调头过程的总时间，分别为  $8.50s$ 、 $8.36s$ ；最后运用 A\*算法对该过程进行仿真实验（仿真详见正文）。

针对问题三，道路上存在静止障碍物。根据附件所给位置信息和题目要求，我们分别讨论了仅存在障碍 F、仅存在障碍 G 和二者都存在的情况。当只讨论障碍 F 时，只有第一车道可以行驶；当只讨论障碍 G 时，三个车道均可以行驶；当二者都存在时，将前两种情况相结合，再确定临界点，建立目标规划模型，运用 Lingo 得出了调头过程的总时间，分别为  $9.11s$ 、 $8.69s$ 、 $8.97s$ ；运用 Matlab 得出调头轨迹（轨迹详见正文）。

针对问题四，本题结合交规，在道路上存在人行横道的情况下，无人车调头必须越过人行横道。首先考虑没有障碍物，只有人行横道的情况，无人车从初始位置到后轮越过斑马线时开始调头，并考虑与边界的最小距离，调头之后无人车以最短时间进入车道；其次考虑存在障碍物 F 和 G 的情况，在无人车越过斑马线后，以最小转弯半径调头，为了避开障碍物，需要直行一段距离，再转入第一车道，完成调头。将时间作为目标函数建立模型，运用 Lingo 得出了调头过程的总时间，分别为  $9.00s$ 、 $9.64s$ 。

针对问题五，假设障碍物 F 和 G 均以恒定速度  $8.34m/s$  移动，且 F、G 与无人车调头之后的运动方向一致，即障碍物 F、G 向下移动，并且障碍物与无人车同时移动。我们分析无人车与障碍物的相对位置，建立无人车调头轨迹规划模型，得出了无人车调头策略，最后运用 A\*算法进行仿真实验（仿真详见正文）。

针对问题六，本题目的是降低轨迹规划算法的复杂度，在保证成功求解的前提下简化算法。因此我们考虑适当减少算法中参数数量，减少无人车转弯的次数来简化模型。

**关键词：**调头轨迹；目标规划；A\*算法；最小转弯半径；仿真实验

# 目 录

一、 问题重述 .....	1
1.1 问题背景.....	1
1.2 目标任务.....	1
二、模型假设及符号说明 .....	2
2.1 模型假设.....	2
2.2 主要的符号说明 .....	2
三、问题分析 .....	3
3.1 针对问题一 .....	3
3.2 针对问题二.....	3
3.3 针对问题三.....	3
3.4 针对问题四.....	3
3.5 针对问题五.....	3
3.6 针对问题六.....	3
四、问题一模型的建立与求解 .....	4
4.1 控制点位置的确定 .....	4
4.2 无人车调头的目标规划模型 .....	4
4.2.1 第一种方案的优化问题 .....	5
4.2.2 第二种方案的优化问题 .....	7
4.2.3 第三种方案分析.....	9
五、 问题二模型的建立与求解 .....	9
5.1 第一种方案模型的建立与求解 .....	10
5.1.1 第一种倒车调头的目标规划模型.....	10
5.1.2 第一种倒车调头模型的求解.....	11
5.2 第二种方案模型的建立与求解 .....	11
5.2.1 第二种倒车调头的目标规划模型.....	11
5.2.2 第二种倒车调头模型的求解.....	12
5.2.3 第二种倒车调头模型的仿真.....	13
5.3 第三种方案分析 .....	14
六、 问题三模型的建立与求解 .....	14
6.1 第一种情况的模型与求解 .....	14
6.1.1 第一种情况的目标规划模型.....	14
6.1.2 模型求解 .....	15
6.2 第二种情况的模型与求解 .....	16
6.2.1 第二种情况的目标规划模型.....	16
6.2.2 模型求解 .....	17
6.3 第三种情况的模型与求解 .....	19
6.3.1 第三种情况的目标规划模型.....	19
6.3.2 模型求解 .....	20

七、 问题四模型的建立与求解 .....	21
7.1 无障碍物调头模型与求解 .....	21
7.2 有障碍调头模型与求解 .....	22
八、 问题五模型的建立与求解 .....	24
8.1 无人行横道时调头 .....	24
8.2 有人行横道时调头 .....	25
九、 问题六模型简化 .....	25
十、 模型的评价与改进 .....	26
10.1 模型的优点 .....	26
10.2 模型的缺点 .....	26
10.3 模型的改进 .....	26
参考文献 .....	27
附录 .....	28

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

自动驾驶是近年人工智能应用的热门研究领域之一，其中调头是自动驾驶中一个非常实际又很有趣的场景。许多轮式机器人<sup>[1]</sup>导航作业时都需要进行自动调头对准下一作业行的操作，如农业环境中的喷雾机器人、耕作机器人等。由于附近障碍物可能由于视野问题被遮挡，导致调头中周围环境信息发生变化，无人车的调头轨迹也应当是实时更新的。因此合适的调头路径规划不仅可以提高轮式机器人换行作业的精度，而且可以缩短在调头转向中的时间，最终提高整个作业的效率。因此，无人车调头的研究成为了车辆自动驾驶的研究重点之一。

## 1.2 目标任务

请你们的参赛队按照题目中所给的简化版的无人车调头场景、各个约束条件以及附件提供的相关数据，完成以下问题：

**问题 1：**无人车正在最左侧车道准备调头，存在三个对向车道。附件数据文件中，掉头区域边界以红色边框 A 表示，两条对向车道线以 B、C 表示（均为路面上的虚线），中间的隔离障碍物以 D 表示。无人车起始位置已经在附件数据文件中给出，当无人车车身触碰到对向的掉头区域边界时，认为调头完成。请阐述控制点位置，解释其理由；基于此建立无人车调头的数学模型，并给出一个合理可行的算法设计，给出调头轨迹。

**问题 2：**当掉头区域狭窄时，判断什么样的场景下无人车能够在不倒车的情况下完成调头，什么情况需要至少一次倒车才能通过。建立相应的无人车调头的数学模型，给出合理的算法设计，并给出仿真结果。

**问题 3：**如果道路上还存在其它静止障碍物，当仅存在 F、仅存在 G、或二者都存在时，建立相应的无人车调头的数学模型，给出合理的算法设计，并给出调头轨迹，你的算法应明确如何进行避障？

**问题 4：**按交规规定，如果道路上存在人行横道即斑马线，其所占区域在附件数据文件中以 E 表示，则无人车需要尽可能在不压人行横道的情况下通过，如果无法做到，则需要越过（后轮越过）人行横道后再开始调头，禁止骑人行横道调头。建立相应的无人车调头的数学模型，给出合理的算法设计和相应的调头轨迹；当斑马线和障碍物同时存在时，你的模型和算法如何同时满足交规并进行避障绕行？

**问题 5：**无人车在实际路况行驶中进行调头时，道路中的障碍物通常是处于移动状态，如对向来车等，假设图中标识的障碍物位置为无人车处在起始时刻的初始位置，障碍物以一定的速度移动，假设只考虑与道路平行方向移动，请建立更一般的无人车调头轨迹规划模型并给出相应算法设计和无人车调头策略，给出仿真结果。

**问题 6：**为保证无人驾驶的安全性，无人车的轨迹规划算法必须拥有尽可能高的求解成功率（倾向更收敛更稳定，失败率更低的方法）同时为了能对路况进行快速反应，需要以尽可能高的频率进行计算（计算复杂度尽量低）。你的算法如何在求解成功率和求解耗时这两方面优化？

## 二、模型假设及符号说明

### 2.1 模型假设

为了便于考虑问题，我们在不影响模型准确性的前提下，作出以下假设：

- (1) 假设加速阶段假设为匀加速运动，减速阶段假设为匀减速运动；
- (2) 为保证无人车转弯时安全行驶，假设调头时的速度为  $v_2 = 5 \text{ m/s}$ ；
- (3) 假设所有转弯过程均为匀速运动且运动轨迹均为圆弧。
- (4) 由轮胎与地面的摩擦消耗的时间忽略不计。

### 2.2 主要的符号说明

注：此为本文的主要符号说明，其它符号解释详见正文部分。

符号	意义
$\alpha$	前轮最大转角 ( $^\circ$ )
$v_f$	无人车的方向盘最大转速 ( $^\circ/\text{s}$ )
$a_{m1}$	最大油门加速度 ( $\text{m/s}^2$ )
$a_{m2}$	极限刹车加速度 ( $\text{m/s}^2$ )
$a_1$	加速阶段匀加速运动的加速度的大小 ( $\text{m/s}^2$ )
$a_2$	加速阶段匀减速运动的加速度的大小 ( $\text{m/s}^2$ )
$t_1$	加速阶段的时间 ( $\text{s}$ )
$v_1$	加速 $t_1$ 时间后的速度 ( $\text{m/s}$ )
$t_2$	减速阶段的时间 ( $\text{s}$ )
$v_2$	加速 $t_2$ 时间后的速度 ( $\text{m/s}$ )
$v_3$	无人车转弯时的调头速度 ( $\text{m/s}$ )
$t_3$	无人车在转弯过程匀速行驶的时间 ( $\text{s}$ )
$a_3$	左侧直行过程匀加速运动的加速度 ( $\text{m/s}^2$ )
$t_4$	左侧直行过程匀加速运动的时间 ( $\text{s}$ )
$L$	无人车的轴距 ( $\text{m}$ )
$R_{\min}$	无人车的最小转弯半径 ( $\text{m}$ )
$R_k$	控制点到圆心的距离 ( $\text{m}$ )
$t$	无人车调头的总时长 ( $\text{s}$ )
$D_1$	每一车道的宽度 ( $\text{m}$ )

## 三、问题分析

### 3.1 针对问题一

本题目的在于根据题目以及附件所给信息，阐述控制点位置，并建立无人车调头的数学模型，给出合理算法，以及调头轨迹。首先，我们根据题目中的方向盘最大转角、方向盘与前轮转角的传动比以及无人车的对称轴来确定其控制点位置；然后，根据控制点位置以及附件中的位置信息，计算出控制点与障碍物的距离，并重新建立一个新的坐标系；最后，我们对无人车的调头总过程分三种情况分别讨论，建立目标规划模型，并运用 Lingo 软件得出合理可行的算法，再运用 Matlab 软件仿真无人车的调头轨迹。

### 3.2 针对问题二

本题是针对调头区域狭窄情况，无人车是否需要掉头完成倒车。在问题一中已经知道三排车道和两排车道的情况都可以不倒车完成调头，因此问题二只需考虑单排车道的情况，根据无人车从不同位置开始调头，分三种情况进行讨论，同样以调头时间为目标函数，将倒车过程融进目标规划模型，运用 Lingo 软件得出合理算法，运用 A\*算法进行仿真实验。

### 3.3 针对问题三

问题三是在道路上设置静止障碍物，根据附件所给障碍物位置，以及题目要求，分别讨论仅存在障碍 F，仅存在障碍 G 和二者都存在的情况。当只讨论障碍 F 时，发现只有单排车道可以行驶，根据无人车的最小转弯半径以及与障碍物的最小距离确定临界点；当只讨论障碍 G 时，分三种情况讨论；当二者都存在时，将前两种相结合，再确定临界点，建立数学模型，运用 Lingo 得出合理算法，运用 MATLAB 得出调头轨迹。

### 3.4 针对问题四

本题结合交规，在道路上存在人行横道的情况，无人车调头必须越过人行横道。首先考虑没有障碍物，只有人行道的情况，无人车从初始位置到后轮越过斑马线开始调头，并考虑与边界的最小距离，调头之后无人车以最短时间进入车道；其次考虑存在障碍物 F 和 G 的情况，在无人车越过斑马线后，以最小转弯半径调头，为避开障碍物，需要直行一段距离，在转入第一车道，完成调头。将与障碍物的临界点作为目标函数约束条件建立模型，得出合理算法。

### 3.5 针对问题五

在实际路况中，障碍物通常是移动的，本题，假设障碍物 F 和 G 分别是移动的汽车，由于无人车需要掉头，因此 F，G 与无人车调头方向一致，在题目给出的图中看，即障碍 F，G 向下运动，并且障碍物与无人车同时移动，假设障碍物以正常车速匀速行驶，通过判断无人车与障碍物的相对位置，建立无人车调头轨迹规划模型，得出无人车调头策略，运用 A\*算法进行仿真实验。

### 3.6 针对问题六

本题目的是降低轨迹规划算法的复杂度，在保证成功求解的前提下简化算法，为了无人车对路况的快速反应，要降低计算难度，因此就要考虑适当减少算法中参数数量，简化模型，并简化计算过程。

## 四、问题一模型的建立与求解

### 4.1 控制点位置的确定

首先，根据题目所给条件，方向盘最大转角为  $470^\circ$ ，方向盘与前轮转角的传动比为  $16:1$ ，即方向盘每转动  $16^\circ$ ，前轮转动  $1^\circ$ ，因此可得前轮最大转角为  $\alpha = 470^\circ/16 = 29.38^\circ$ 。

控制点通常位于无人车车身对称轴（车身可以近似认为是左右轴对称的）上的一点，因此，将方向盘转到最大角，沿着无人车的前轮内侧车轮作一条直线，此直线与无人车车身对称轴相交于一点，此点即为控制点，控制点位置图如图 4-1 所示。

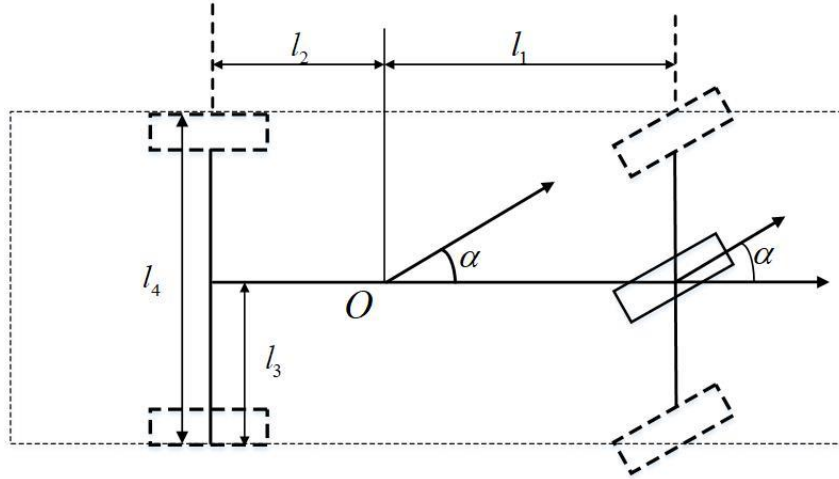


图 4-1 控制点位置图

其中， $l_1$  为控制点与无人车前轴中心的距离， $l_2$  为控制点与无人车后轴中心的距离， $L = l_1 + l_2 = 2.8m$  为无人车轴距， $l_3$  为无人车轮胎与车身对称轴的距离， $l_4$  为车桥的长度，这里假设  $l_4$  也为无人车宽度，显然， $l_4 = 2 \times l_3$ 。由于前轮最大转角为  $29.38^\circ$ ，因此，由图 4-1，我们得出控制点与前轴的距离为  $1m / \tan 29.38^\circ = 1.78m$ 。

### 4.2 无人车调头的目标规划模型

由题目信息知，无人车的方向盘最大转速为  $v_f = 400^\circ/s$ ；最大油门加速度  $a_{m1} = 3m/s^2$ ，极限刹车加速度  $a_{m2} = -5m/s^2$ 。我们分析无人车的调头总过程分为三个部分，分别为右侧直行过程、转弯过程以及左侧直行过程，并假设转弯过程的轨迹为半圆。右侧直行过程分为加速阶段和减速阶段，简单起见，我们将加速阶段假设为匀加速运动，加速度为  $a_1$ ，减速阶段假设为匀减速运动，加速度大小为  $a_2$ ，方向与  $a_1$  反向。任何点的加速度不得高于最大油门加速度，不得低于极限刹车减速度，因此加速度的大小范围为  $0 \leq a_1 \leq 3m/s^2$ ， $0 \leq a_2 \leq 5m/s^2$ 。加速阶段的初速度  $v_0 = 0$ ，加速  $t_1$  时间后，速度为  $v_1$ ，因此， $v_1 = v_0 + a_1 t_1 = a_1 t_1$ 。减速阶段的初始速度为  $v_1$ ，加速  $t_2$  时间后，速度为  $v_2$ ，因此， $v_2 = v_1 - a_2 t_2$ ，根据调查得知，车辆调头时应当保持低档位，调头时最高行驶速度<sup>[2]</sup>不得超过  $30km/h$ ，即  $8.34m/s$ 。为保证无人车转弯时安全行驶，我们假设调头时的速度为  $v_3 = v_2 = 5m/s$ ，且无人车在转弯过程匀速行驶，行驶时间为  $t_3$ 。经过分析，左侧直行过程为匀加速运动，为使得时间最短，我们取加速度  $a_3 = 3m/s^2$ ，此阶段的初始速度的大小

为调头速度的大小，即  $v_4 = v_3 = v_2$ ，此阶段的时长为  $t_4$ 。

由于轴距  $L$  为 2.8 米，由调查研究可以知，无人车的最小转弯半径<sup>[3]</sup>为:

$$R_{\min} = \frac{L}{\sin \alpha} \quad (4.1)$$

其中， $R_{\min}$  为无人车的最小转弯半径， $\alpha$  为无人车的前外轮最大转角，且为  $29.38^\circ$ 。根据 (4.1) 式，我们得出无人车的最小转弯半径为  $R_{\min} = 5.71m$ ，控制点到圆心的距离为  $R_k = 4.71m$ 。值得注意的是，此时的最小转弯半径前外轮到转弯轨迹圆心的距离，并非控制点到圆心的距离。验证控制点轨迹的曲率<sup>[4]</sup>为  $1/R_k = 0.212$ ，高于 0.21，因此该半径下的轨迹线不合理，同时考虑到一般的车辆轮胎宽度为  $d_l = 0.215m$  以及无人车轮胎与车身对称轴的距离  $l_3 = 1m$ ，因此，控制点到圆心的距离为  $R_k = R_{\min} - (l_3 - d_l) = 4.93m$ ，曲率为  $1/R_k = 0.203$ ，低于 0.205，因此该半径下的轨迹线较为合理，无人车的最小转弯半径转变为  $R_{\min} = 5.93m$ 。

接下来，重建直角坐标系，以题目一中第一种情况无人车转弯轨迹圆心为原点，以无人车在障碍物 D 右侧的前进方向为  $y$  轴，与  $y$  轴垂直向右方向为  $x$  轴。

为方便计算，我们将无人车看作一个质点，此质点即为控制点，计算时忽略前轮转弯时给控制点运动带来的误差。经过我们的分析，无人车调头有三种方案：即（1）右侧直行过程中，无人车减速后其控制点刚好处于将要离开障碍物的水平线上时开始向左转弯；（2）右侧直行过程中，无人车减速后其控制点处于未离开障碍物的水平线上时开始向左转弯；（3）右侧直行过程中，无人车减速后其控制点处于未离开障碍物的水平线上时先向右转弯，再向左转弯。

#### 4.2.1 第一种方案的优化问题

在右侧直行过程中，无人车减速后其控制点刚好处于将要离开障碍物的水平线上时开始向左转弯。根据附件里的位置数据，我们知道，控制点的初始位置位于点 (6.53023, 3.970426)，根据此点位置坐标，以及障碍物的各个坐标，我们得出，在右侧，控制点离开障碍物所经过的长度约为 11.03m，障碍物总长约为 16.03m。以调头总时间为目标函数，以题目所给出的加速度等信息为约束条件，建立一个目标规划模型，模型如下

$$\begin{aligned} \min t &= \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + t_4 \\ s.t. &\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ \frac{1}{2a_1}v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 11.03; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{\pi R_k}{v_3}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2}t_4^2 = 16.03. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中，目标函数中  $t$  表示右侧直行过程、转弯过程以及左侧直行过程所用的总时长。运用 Lingo 软件编写程序，得出总时长为  $t = 8.44s$ ，加速  $t_1$  时间后的速度  $v_1 = 8.14m/s$ ，



加速阶段匀加速运动的加速度的大小为  $a_1 = 3m/s^2$ ，减速阶段匀减速运动的加速度为  $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为  $t_1 = 2.71s$ ，减速阶段的时间为  $t_2 = 0.63s$ ，无人车在转弯过程匀速行驶的时间为  $t_3 = 3.10s$ ，左侧直行过程匀加速运动的时间为  $t_4 = 2.00s$ 。

接下来，用 matlab 对转弯过程的轨迹进行曲线拟合，拟合结果如图 4-2 所示。

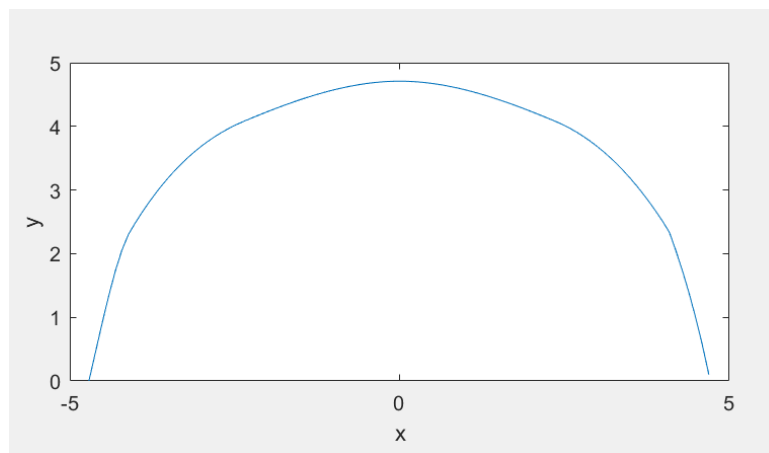


图 4-2 转弯过程的轨迹曲线拟合图

由图像可以看出，无人车转弯过程的轨迹为半圆，其半径为  $4.93m$ 。

然而，经过我们的验证，发现当控制点的转弯半径为  $4.93m$  时，虽然无人车可以调头，但是无人车调头之后，压到了第二和第三车道之间的车道线，如图 4-3 左图所示，并没有调头成功，该无人车不可能在第一车道和第二车道。因此需要改进控制点的转弯半径，使得无人车刚好在第三车道，且车身紧挨着第二和第三车道之间的车道线，如图 4-3 右图所示。

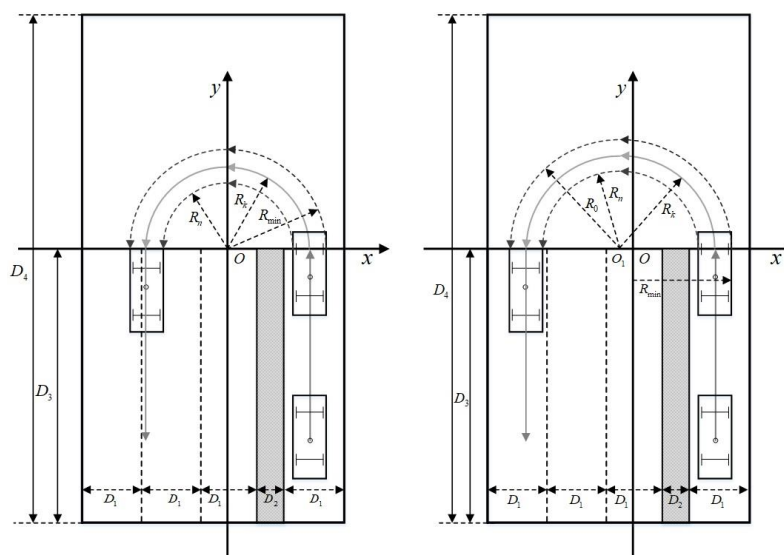


图 4-3 第一种情况优化前后对比图

根据附件数据，我们得出，障碍物的宽度为  $D_2 = 1.54m$ ，控制点到障碍物的距离为  $1.50m$ ，每一车道宽度为  $D_1 = 3.5m$ ，障碍物与  $y$  轴的距离  $4.93 - 1.54 - 1.50 = 1.89m$ 。由这些计算出来的数据，我们来计算此时的控制点转弯半径，得出  $R_k = 0.5 \times (3.5 - 1.89 + 3.5 + 1 + 4.93) = 5.52m$ ，其曲率为  $1/R_k = 0.181$ ，低于  $0.205$ ，满足条

件。将优化后的新的转弯半径代入模型（4.2）中，得出总时长为 $t = 8.16s$ ，加速 $t_1$ 时间后的速度 $v_1 = 6.93m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为 $a_1 = 3m/s^2$ ，减速阶段匀减速运动的加速度为 $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为 $t_1 = 2.31s$ ，减速阶段的时间为 $t_2 = 0.39s$ ，无人车在转弯过程匀速行驶的时间为 $t_3 = 3.47s$ ，左侧直行过程匀加速运动的时间为 $t_4 = 2.00s$ 。因此优化后的时间见下表 4-1：

表 4-1 第一种方案优化前后时间

时间段	改进前时间(s)	改进后时间(s)
$t_1$	2.71	2.31
$t_2$	0.63	0.39
$t_3$	3.10	3.47
$t_4$	2.00	2.00
$T$	8.44	8.17

#### 4.2.2 第二种方案的优化问题

在右侧直行过程中，无人车减速后其控制点处于未离开障碍物的水平线上时开始向左转弯。根据题目要求，无人车按轨迹行驶时，在调头完成之前，车身任何点不得与任何障碍物或者调头区域边界发生碰撞，且与障碍物至少保留一个最小安全距离，一般不小于  $0.3m$ 。因此，如图 4-4 左图所示，障碍物与  $y$  轴的距离 $1.89m$ ，无人车左侧距离障碍物为 $1.5m - 1m = 0.5m$ ，因此无人车左侧转弯半径为 $1.89 + 1.54 + 0.5 = 3.63m$ ，由此可得出无人车转弯时到离开障碍物的距离为 $\sqrt{3.63^2 - (1.8 + 1.54)^2} = 1.19m$ ，则无人车右侧直行距离为 $11.03 - 1.19 = 9.84m$ 。由附件数据，容易求出转弯角度为  $2.84$  弧度。

与第一种情况类似，以调头总时间为目标函数，以题目所给出的加速度等信息为约束条件，我们建立一个目标规划模型，模型如下

$$\begin{aligned}
 \min t &= \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + t_4 \\
 s.t. \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ \frac{1}{2a_1} v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 9.84; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{2.84 R_k}{v_3}; \\ t_4 + \frac{a_1}{2} t_4^2 = 16.03. \end{array} \right. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

其中，目标函数中 $t$ 表示右侧直行过程、转弯过程以及左侧直行过程所用的总时长。运用 Lingo 软件编写程序，得出总时长为 $t = 7.35s$ ，加速 $t_1$ 时间后的速度 $v_1 = 6.65m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为 $a_1 = 3m/s^2$ ，减速阶段匀减速运动的加速度为 $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为 $t_1 = 2.22s$ ，减速阶段的时间为 $t_2 = 0.33s$ ，无人车在转弯过程匀速行驶的时间为 $t_3 = 2.80s$ ，左侧直行过程匀加速运动的时间为 $t_4 = 2.00s$ 。

然而，经过我们的验证，发现当控制点的转弯半径为 $4.93m$ 时，虽然无人车可以调头，但是无人车调头之后，与第一种情况类似，同样也压到了第二和第三车道之间的车道线，如图 4-4 左图所示，并没有调头成功，该无人车不能在第一车道和第二车道。因此需要改进控制点的转弯半径，使得无人车刚好在第三车道，且车身紧挨着第二和第三车道之间的车道线，改进结果如图 4-4 右图所示。

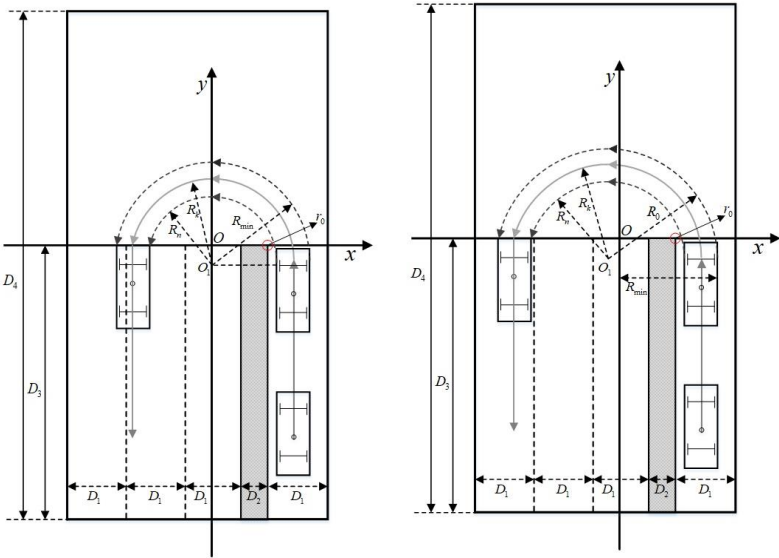


图 4-4 第二种情况改进前后对比图

同样地，我们计算此时的控制点转弯半径，得出 $5.52m$ ，其曲率为 $1/R_k=0.181$ ，低于 $0.205$ ，满足条件。将优化后的新的转弯半径代入模型（4.3）中，我们得出总时长为 $t = 7.69s$ ，加速 $t_1$ 时间后的速度 $v_1 = 6.65m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为 $a_1 = 3m/s^2$ ，减速阶段匀减速运动的加速度为 $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为 $t_1 = 2.22s$ ，减速阶段的时间为 $t_2 = 0.33s$ ，无人车在转弯过程匀速行驶的时间为 $t_3 = 3.14s$ ，左侧直行过程匀加速运动的时间为 $t_4 = 2.00s$ 。与第一种情况作对比，我们发现，第二种情况效率比较高。从表 4-2 可以看出与第一种情况作对比，我们发现，第二种情况效率比较高。

表 4-2 第二种方案优化前后时间

时间段	改进前时间(s)	改进后时间(s)
$t_1$	2.22	2.22
$t_2$	0.33	0.33
$t_3$	2.80	3.14
$t_4$	2.00	2.00
$T$	7.35	7.69

最后，我们运用 A\*算法的避障对其调头过程进行仿真，仿真结果如图 4-5 所示。

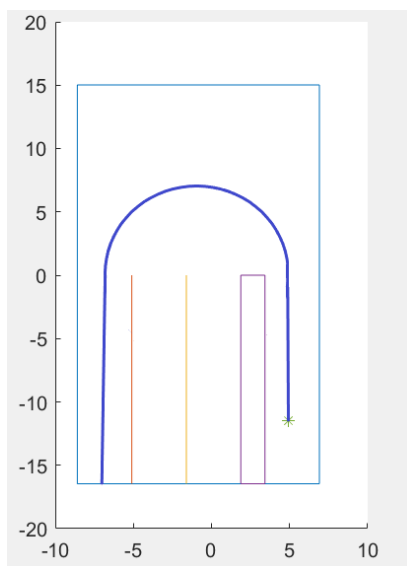


图 4-5 调头过程仿真结果图

### 4.2.3 第三种方案分析

在右侧直行过程中，无人车减速后其控制点处于未离开障碍物的水平线上时先向右转弯，再向左转弯<sup>[1]</sup>。前两种情况均未进入第一、二车道，只进入了第三车道，而第三种情况经过多次转弯进入第二车道，示意图如图 4-6 所示：

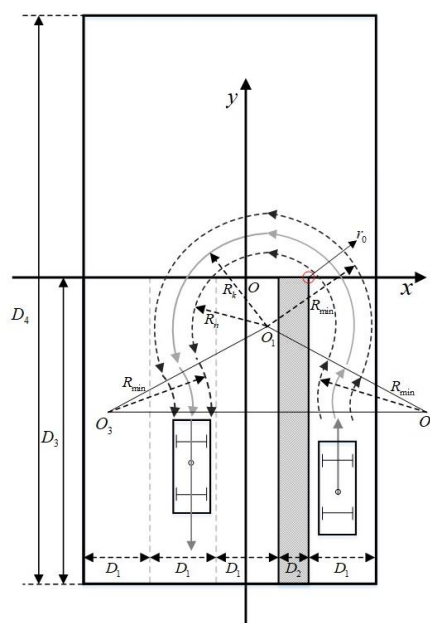


图 4-6 第三种情况示意图

先向右转弯，再向左转弯调头，再向右转弯合适的角度，再直行即进入第二车道。

## 五、问题二模型的建立与求解

当调头区域较为狭窄且不允许倒车时，我们可以采取多次转弯的方式来使得无人车调头成功。采取问题一中的第三种调头方案，无人车可顺利进入第二车道。下面，我们将研究只允许一次倒车并且从第一车道调头的情形。

## 5.1 第一种方案模型的建立与求解

### 5.1.1 第一种倒车调头的目标规划模型

在右侧直行过程中，无人车减速后其控制点刚好处于将要离开障碍物的水平线上时开始向左转弯。无人车在这一过程的行驶情况如下：

- (1) 无人车在右侧以某一恒定加速度直行，且加速度范围为  $0 \leq a_1 \leq 3m/s^2$ ；
- (2) 加速到某一位置后，无人车开始以某一恒定加速度减速，且加速度范围为  $-5m/s^2 \leq a_2 \leq 0$ ，减速到我们规定的速度  $5m/s$  时，无人车其控制点刚好处于将要离开障碍物的水平线上，此时开始向左转弯；
- (3) 转弯路径为一半径为  $4.93m$  的圆弧，速度恒为  $5m/s$ ；
- (4) 当无人车行驶到如图 5-1 所示位置  $C$  时开始以恒定加速度减速，使得无人车减速到离左侧边界  $0.3m$  时，速度为  $0$ ；
- (5) 当无人车行驶到离左侧边界  $0.3m$  时开始倒车，倒车轨迹为一半径为  $4.93m$  的圆弧，开始以恒定加速度加速，加速到如图 5-1 所示位置  $D$  点时停止；
- (6) 在  $D$  点以恒定加速度减速到某一位置，速度为  $0$ ；
- (7) 打方向盘，开始匀速行驶，路径为半径是  $4.93m$  的圆弧；
- (8) 当无人车行驶方向与水平垂直时，以某一加速度加速行驶，直至调头成功。

当无人车的行驶情况处于 (4) — (8) 时，为保证时间最短，我们取减速阶段加速度的最值  $-5m/s^2$ ，因此路程为  $5^2/(2 \times 5) = 2.5m$ ，该弧长对应的角度为  $2.5/4.93 = 0.51$  弧度，当减速到距离左侧边界  $0.3m$  时，控制点与  $y$  轴的距离为  $3.5 - 1.89 - 0.3 = 1.31m$ ，与  $x$  轴的距离为  $\sqrt{5.93^2 - 1.31^2} = 5.78m$ ，因此，该点坐标为  $(-1.31, 5.78)$ 。匀速与减速的总弧度为  $\arcsin(1.31/5.93) + \pi/2 = 1.80$  弧度，因此匀速对应的弧度为  $1.80 - 0.51 = 1.29$  弧度。图 6 中线段  $O_1O_2$  长度为  $5.93 + 3.93 = 9.86m$ ，线段  $AO_2$  长度为  $1.33 + 5.93 = 7.26m$ ，角度  $\angle \delta = \arcsin(7.26/9.86) = 0.828$  弧度， $\angle \delta_2 = \arcsin(1.31/9.86) = 0.133$  弧度，因此  $\angle \delta_1 = 0.69$  弧度， $\angle \beta = \pi - \pi/2 - 0.83 = 0.744$  弧度，则  $\angle \delta_1$  所对应的弧长为  $0.69 \times 4.93 = 3.40m$ ， $\angle \beta$  所对应的弧长为  $0.744 \times 4.93 = 3.67m$ 。线段  $O_1A$  的长度为  $\sqrt{9.68^2 - 7.26^2} = 6.40m$ ，线段  $O_1B$  的长度为  $9.68 \sin(1.34) = 9.42m$ ，由此，线段  $AB$  的长度为  $9.42 - 6.40 = 3.02m$ 。第一种倒车调头的示意如图 5-2 所示。

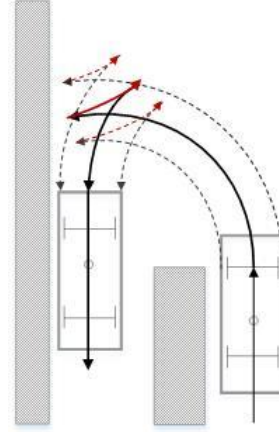
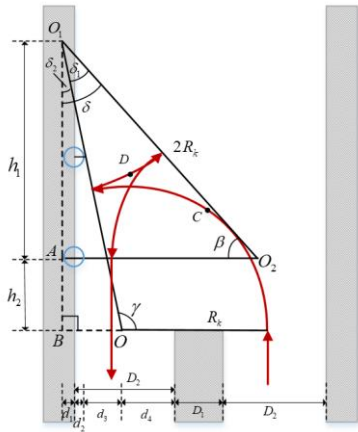


图 5-1 第一种倒车调头角度关系图    图 5-2 第一种倒车调头示意图

以调头总时间为目标函数，以题目所给出的加速度等信息为约束条件，建立一个目标规划模型，模型如下

$$\begin{aligned} \min t = & \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + \frac{(0-5)}{a_2} + \frac{v_{31}}{a_{31}} + \frac{v_{31}}{a_{32}} + \frac{3.67}{5} + t_4 \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ 0 \leq a_{31} \leq 3; \\ -5 \leq a_{32} \leq 0; \\ 0 < v_{31} \leq 5; \\ \frac{v_{31}^2}{2a_{31}} + \frac{0-v_{32}^2}{2a_{32}} = 3.40; \\ \frac{1}{2a_1} v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 11.03; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{1.29 R_k}{v_3}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2} t_4^2 = 3.54 + 16.03. \end{array} \right. \quad (5.1) \end{aligned}$$

其中，目标函数中 $t$ 表示右侧直行过程、转弯过程以及左侧直行过程所用的总时长。

### 5.1.2 第一种倒车调头模型的求解

根据模型（5.1），我们运用 Lingo 软件编写程序来求解该模型，得出倒车调头的总时长为 $t = 8.50s$ ，加速 $t_1$ 时间后的速度 $v_1 = 6.93m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为 $a_1 = 3m/s^2$ ，加速阶段匀减速运动的加速度为 $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为 $t_1 = 2.31s$ ，减速阶段的时间为 $t_2 = 0.39s$ ；无人车在转弯过程匀速行驶的时间为 $t_3 = 1.27s$ ，转弯过程减速时间为 $1.00s$ ，速度减为 $0$ 之后开始倒车，倒车过程中加速行驶时的加速度为 $a_{31} = 3m/s^2$ ，加速到速度为 $v_{31} = 0.92m/s$ 时开始减速，所用时长为 $0.31s$ ，倒车过程减速行驶时的加速度为 $a_{32} = -5m/s^2$ ，所用时间为 $0.18s$ ；减速至速度为 $0$ 后，无人车前轮左转弯，匀速行驶，此行驶过程的速度为 $5m/s$ ，所用时间为 $0.73s$ ；接着无人车开始直行，此直行过程匀加速运动的时间为 $t_4 = 2.31s$ 。

又考虑到停下来打方向盘的时间，即为 $470/400=1.175s$ ，共两次停下来，因此，共用时 $8.50+1.175+1.175=10.85s$ 。

## 5.2 第二种方案模型的建立与求解

### 5.2.1 第二种倒车调头的目标规划模型

在右侧直行过程中，无人车减速后其控制点刚好处于将要离开障碍物的水平线上时开始向左转弯。无人车在这一过程的行驶情况类似第一种方案。

我们以调头总时间为目标函数，以题目所给出的加速度等信息为约束条件，建立一个目标规划模型，模型如下

$$\begin{aligned} \min t = & \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + \frac{(0-5)}{a_2} + \frac{v_{31}}{a_{31}} + \frac{v_{31}}{a_{32}} + \frac{3.67}{5} + t_4 \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ 0 \leq a_{31} \leq 3; \\ -5 \leq a_{32} \leq 0; \\ 0 < v_{31} \leq 5; \\ \frac{v_{31}^2}{2a_{31}} + \frac{0-v_{32}^2}{2a_{32}} = 3.40; \\ \frac{1}{2a_1} v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 9.84; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{1.29 R_k}{v_3}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2} t_4^2 = 3.54 + 16.03. \end{array} \right. \quad (5.2) \end{aligned}$$

其中，目标函数中  $t$  表示右侧直行、转弯、倒车以及左侧直行过程所用的总时长。

### 5.2.2 第二种倒车调头模型的求解

根据模型 (5.2)，我们运用 Lingo 软件编写程序来求解该模型，得出倒车调头的总时长为  $t = 8.36s$ ，加速  $t_1$  时间后的速度  $v_1 = 6.65m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为  $a_1 = 3m/s^2$ ，加速阶段匀减速运动的加速度为  $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为  $t_1 = 2.22s$ ，减速阶段的时间为  $t_2 = 0.33s$ ；无人车在转弯过程匀速行驶的时间为  $t_3 = 1.27s$ ，转弯过程减速时间为  $1.00s$ ，速度减为 0 之后开始倒车，倒车过程中加速行驶时的加速度为  $a_{31} = 3m/s^2$ ，加速到速度为  $v_{31} = 0.92m/s$  时开始减速，所用时长为  $0.31s$ ，倒车过程减速行驶时的加速度为  $a_{32} = -5m/s^2$ ，所用时间为  $0.18s$ ；减速至速度为 0 后，无人车前轮左转弯，匀速行驶，此行驶过程的速度为  $5m/s$ ，所用时间为  $0.74s$ ；接着无人车开始直行，此直行过程匀加速运动的时间为  $t_4 = 2.31s$ 。第二种倒车调头的示意如图 5-3 所示。

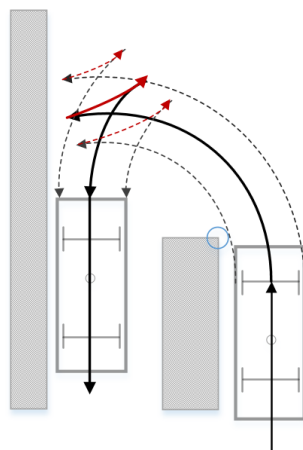


图 5-3 第二种倒车调头示意图

又考虑到停下来打方向盘的时间，即为  $470/400=1.175\text{ s}$ ，共两次停下来，因此，共用时  $8.36+1.175+1.175=10.71\text{ s}$ 。

### 5.2.3 第二种倒车调头模型的仿真

A\*算法是在路径规划中常用到的一种算法，该算法将启发式方法和常规算法相结合，融合了 BFS 算法和 Dijkstra 算法，更有益于搜索最优路径，因此本题用到基于 A\*算法的避障进行仿真。

#### (1) 建立仿真系统

利用 A\*算法，对汽车起点以及终点进行规划，最终在规划的多条路径中选择最佳的一条路径。将路径全部转化为一组坐标，通过寻找下一步的坐标，一步一步达到终点。从题目附件中我们可以得出，自动驾驶汽车掉头的边界点的坐标，因此我们可以确定一个区域，用于实现汽车的掉头。并将坐标以矩阵的形式存放于 Matlab 数据库中，同时把隔离障碍物 D 的坐标也存放于 Matlab 数据库中，并且通过小车初始位置的坐标 (4.92,11.5) 对小车进行定位，确定小车在调头区域的位置，将目标点的位置 (8,1) 确定出来定位在掉头区域中。得到起始点坐标之后在 Matlab 中建立非线性约束进行仿真研究，仿真结果如图 5-4 所示。

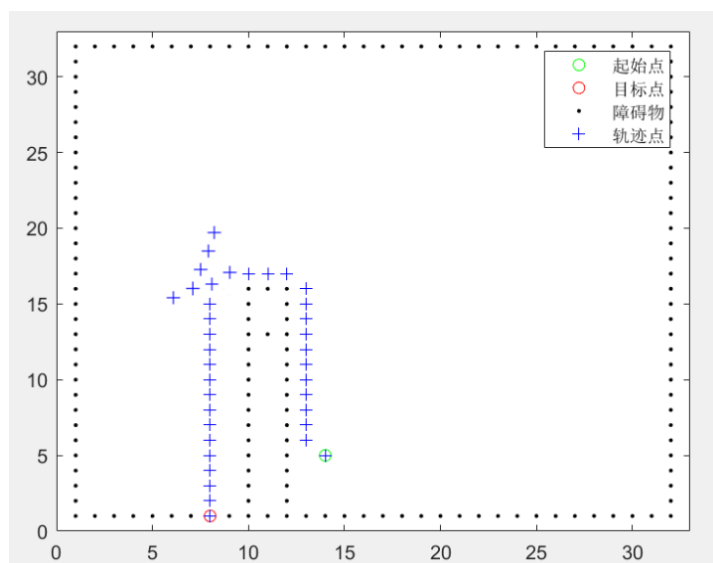


图 5-4 无人车仿真结果图



## (2) 仿真实验结果与分析

在仿真过程中，不需要考虑自动驾驶车辆的控制部分，根据仿真软件实时给出的环境中的参数，利用规划决策算法，规划出车辆局部行驶轨迹，便可控制车辆行驶。 $A^*$ 算法预先给出了掉头的区域坐标，掉头区域由道路从头到尾的坐标信息组成， $x$  和  $y$  代表的是该点在全局坐标系下的平面坐标，从该仿真实验可以看出，在车辆速度固定的情况下，车辆的前视距离的选择有一定的取值范围。在该范围以内，车辆能较好地跟踪预先定义的路径，一旦超出了该范围，车辆的跟踪效果便会变差。在车辆速度固定为  $5\text{m/s}$  时，通过仿真试验结果可得转弯效果良好。

### 5.3 第三种方案分析

在右侧直行过程中，无人车减速后其控制点处于未离开障碍物的水平线上时先向右转弯，再向左转弯。转弯的轨迹均为以  $4.93$  为半径的圆弧，此种情况也可以顺利倒车使得调头成功。第三种方案的示意图如图 5-5 所示。

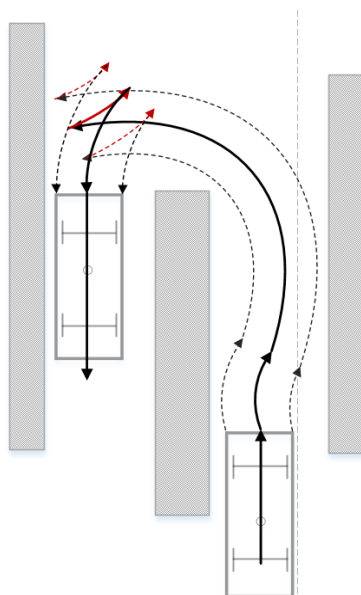


图 5-5 第三种方案的示意图

## 六、问题三模型的建立与求解

### 6.1 第一种情况的模型与求解

#### 6.1.1 第一种情况的目标规划模型

当道路上只存在其它静止障碍物  $F$  时，如图 6-1 所示，

在直角三角形  $ABC$  中，我们知道线段  $AB$  长度为  $5.93 + 0.3 = 6.23\text{m}$ ，由附件数据知，我们很容易得出线段  $BC$  长度为  $3.59\text{m}$ ，线段  $DC$  长度为  $3.00\text{m}$ ，因此，线段  $AC$  的长度为  $\sqrt{6.23^2 - 3.59^2} = 5.09\text{m}$ ，线段  $AD$  的长度为  $AC - DC = 2.09\text{m}$ 。

在直角三角形  $AEF$  中，线段  $AE$  的长度为  $4.93 \times 2 = 9.86\text{m}$ ，直角边  $EF$  的长度为  $3.93 + 1.61 = 5.54\text{m}$ ，因此易得另一直角边  $AF$  的长度为  $8.16\text{m}$ ， $\angle AEF = 0.97$  弧度，其对

应的弧长为  $0.97 \times 4.93 = 4.78m$ ， $\angle EAF = 0.60$  弧度，则无人车行驶的总弧长为  $(2\pi - 0.5\pi - 0.6) \times 4.93 + 4.78 = 25.04m$ ，最后直行的路程为  $16.03 - (8.16 - 2.09) = 9.96m$ 。

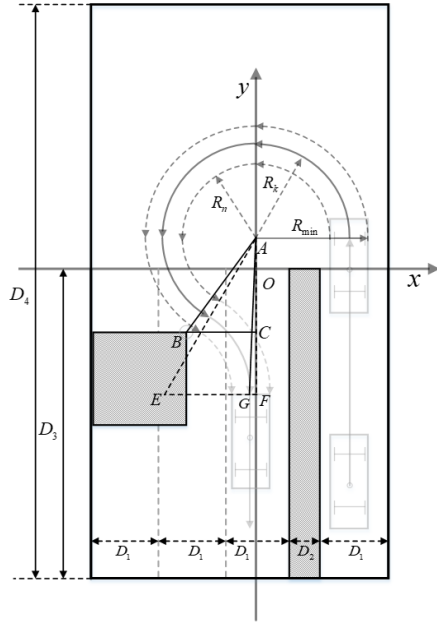


图 6-1 第一种情况角度关系图

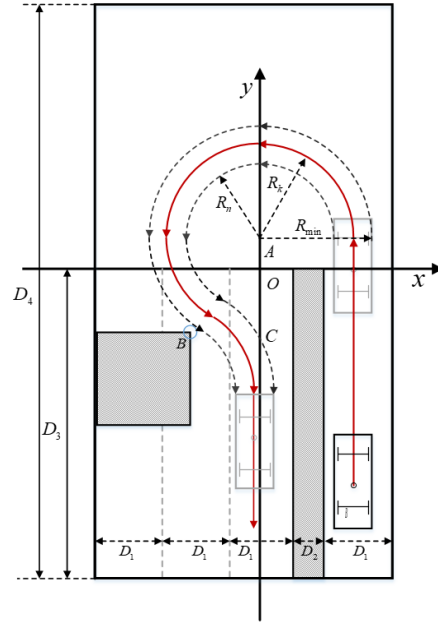


图 6-2 第一种情况轨迹示意图

以此信息作第一种情况的目标规划模型：

$$\begin{aligned} \min t &= \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + t_4 \\ s.t. &\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ \frac{1}{2a_1} v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 11.03; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{5.08 R_k}{5}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2} t_4^2 = 9.96. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1)$$

其中，目标函数中  $t$  表示右侧直行过程、转弯过程以及左侧直行过程所用的总时长。

### 6.1.2 模型求解

根据模型 (6.1)，我们运用 Lingo 软件编写程序来求解该模型，得出调头的总时长为  $t = 9.11s$ ，加速  $t_1$  时间后的速度  $v_1 = 6.93m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为  $a_1 = 3m/s^2$ ，加速阶段匀减速运动的加速度为  $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为  $t_1 = 2.31s$ ，减速阶段的时间为  $t_2 = 0.39s$ ；无人车在转弯过程匀速行驶的时间为  $t_3 = 5.01s$ ，接着无人

车开始直行，此直行过程匀加速运动的时间为  $t_4 = 1.40s$ 。第一种情况的调头示意如图 6-2 所示，仿真结果如图 6-3 所示。

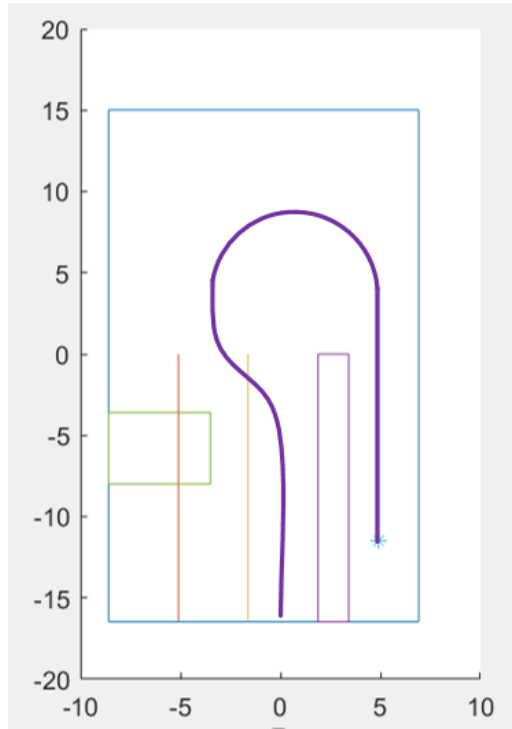


图 6-3 第一种情况的调头仿真结果图

## 6.2 第二种情况的模型与求解

### 6.2.1 第二种情况的目标规划模型

当道路上只存在其它静止障碍物  $G$  时，如图 6-4 所示，

在直角三角形  $ABC$  中，我们知道线段  $AB$  长度为  $3.93 - 0.3 = 3.63m$ ，由附件数据知，我们很容易得出线段  $BC$  长度为  $1.16m$ ，因此，线段  $AC$  的长度为  $\sqrt{3.63^2 - 1.16^2} = 3.44m$ ，线段  $AO$  的长度为  $4.56m$ ，则我们得出无人车右侧直行路程为  $4.56 + 11.03 = 15.59m$ 。

在直角三角形  $AGF$  中，易知线段  $OF$  的长度为  $4.1m$ ，线段  $AF$  的长度为  $\sqrt{4.56^2 + 4.10^2} = 6.13m$ ，直角边线段  $AG$  的长度为  $4.93m$ 。又  $\angle FAO = 0.84$  弧度，则  $\angle GAF = \arccos \frac{AG}{AF} = 0.64$  弧度，因此容易得出  $\theta = 2\pi - \angle GAF - \angle FAO - 0.5\pi = 3.23$  弧度，无人车转弯时行驶的圆弧长为  $3.23 \times 4.93 = 15.92m$ 。从  $G$  点开始沿着圆弧切线直行，直行到点  $F$  后再次以一个微小的角度转弯，为计算方便，忽略该转弯消耗的时间。这段直行路程为  $GF = \sqrt{AF^2 - AG^2} = 3.64m$ 。最后从  $F$  点开始直行，这段直行的路程为  $16.03m$ 。直行阶段的加速度大小是恒定不变的。

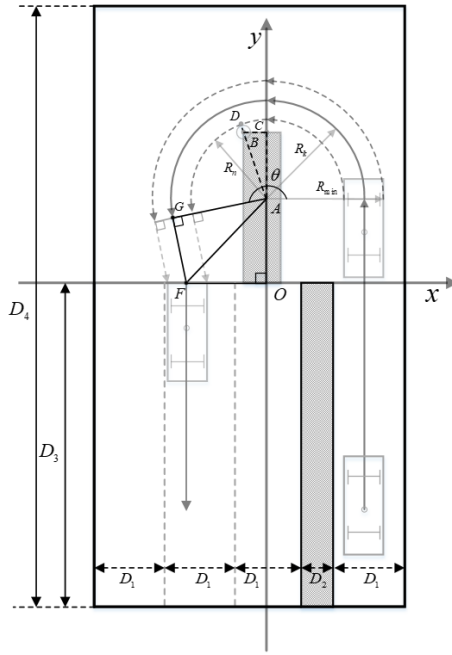


图 6-4 第二种情况角度关系图

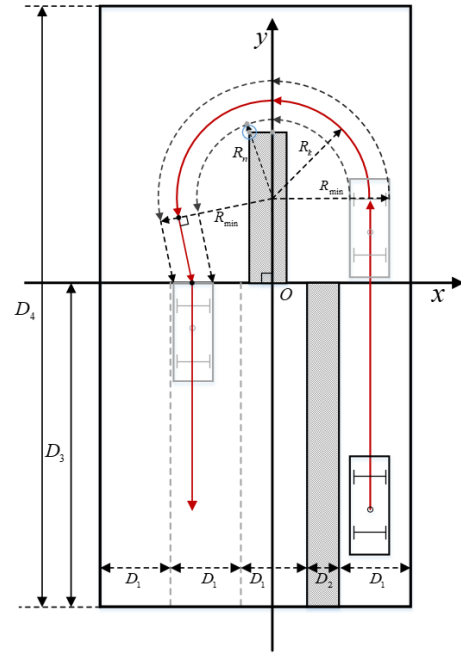


图 6-5 第二种情况轨迹示意图

以此信息作第二种情况的目标规划模型：

$$\begin{aligned} \min t &= \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + t_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ \frac{1}{2a_1}v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 15.59; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{3.23 R_k}{5}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2}t_4^2 = 19.67. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中，目标函数中  $t$  表示右侧直行过程、转弯过程以及左侧直行过程所用的总时长。

值得注意，此情况只采用了问题一的第二种方案，第一种方案与之类似，本文不再赘述。

## 6.2.2 模型求解

根据模型 (6.2)，我们运用 Lingo 软件编写程序来求解该模型，得出调头的总时长为  $t = 8.69s$ ，加速  $t_1$  时间后的速度  $v_1 = 7.86m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为  $a_1 = 3m/s^2$ ，加速阶段匀减速运动的加速度为  $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为  $t_1 = 2.62s$ ，减速阶段的时间为  $t_2 = 0.57s$ ；无人车在转弯过程匀速行驶的时间为  $t_3 = 3.18s$ ，接着无人

车开始直行，此直行过程匀加速运动的时间为 $t_4 = 2.32s$ 。第二种情况的调头示意如图 6-5 所示仿真结果如图 6-6 所示。

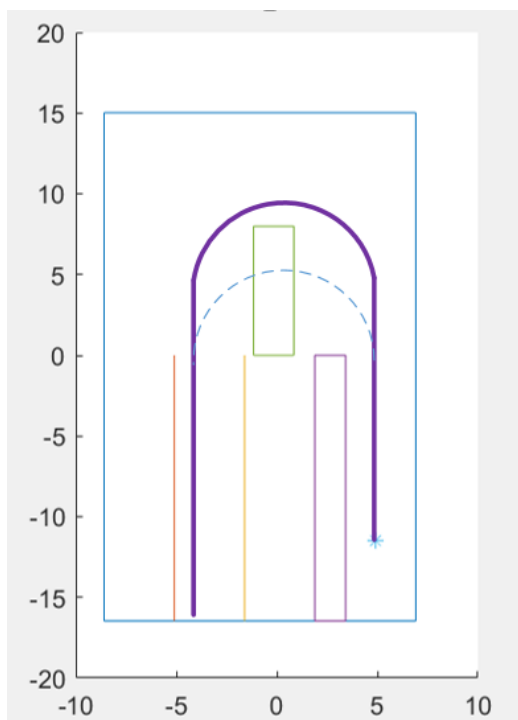


图 6-6 第二种情况的调头仿真结果图

此外，此种情况还有其它两种可能，从第三车道调头成功，如图 6-7 所示，从第一车道调头成功，如图 6-8 所示。

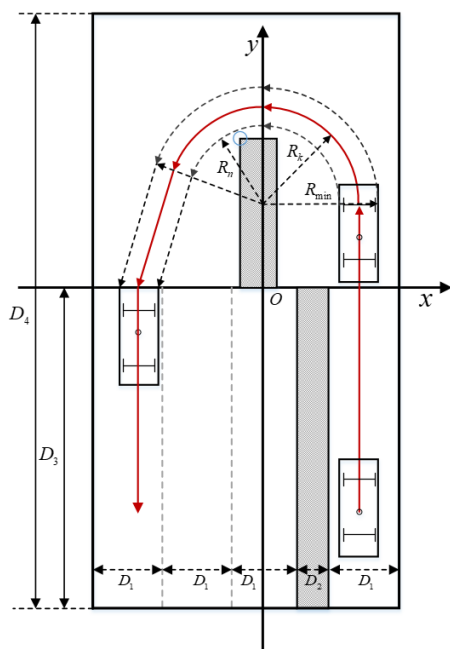


图 6-7 第三车道调头示意图

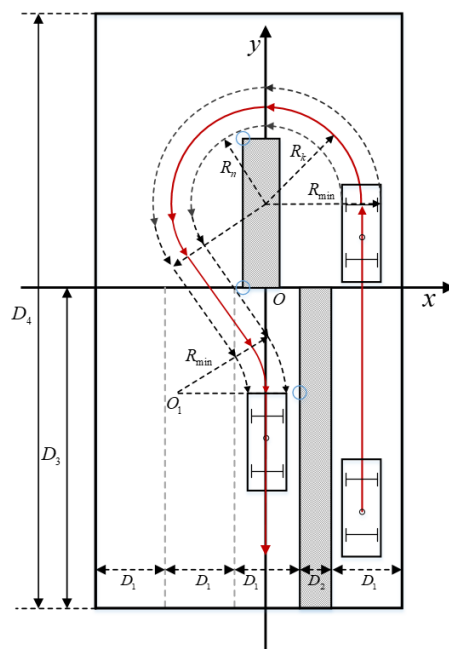


图 6-8 第一车道调头示意图

## 6.3 第三种情况的模型与求解

### 6.3.1 第三种情况的目标规划模型

当道路上存在其它静止障碍物 F 和 G 时，如图 6-9 所示，

在直角三角形  $ABC$  中，我们已经知道线段  $AO$  的长度为  $4.56m$ ，则我们得出无人车右侧直行路程为  $4.56+11.03=15.59m$ 。

在直角三角形  $ADE$  中，易知线段  $AE = 3.59m$ ，线段  $AD$  的长度为  $3.93m$ ，则求得线段  $ED$  的长度为  $\sqrt{3.93^2 - 3.59^2} = 1.60m$ 。因此， $\angle EAD = 0.42$  弧度，无人车转弯时行驶的圆弧长为  $(\pi + 0.42) \times 4.93 = 17.55m$ 。

先开始沿着圆弧切线直行，然后再次以一个微小的角度转弯，为计算方便，忽略该转弯消耗的时间。在直角三角形  $DJB$  中， $\angle BDJ = \angle EAD = 0.42$  弧度，因此线段  $DB$  的长度为  $(2+0.3)/\sin 0.42 = 5.64m$ 。在直角三角形  $GFH$  中，线段  $GH$  的长度为  $3.59-1.61-0.3=1.68m$ ，因此线段  $FH$  的长度为  $1.68/\sin 0.42 = 4.12m$ ，线段  $FG$  的长度为  $3.76m$ 。最后开始直行，直行的路程为  $16.03-3-3.76=9.27m$ ，总直行路程为  $9.27+5.64+4.12=19.03m$ 。直行阶段的加速度大小是恒定不变的。

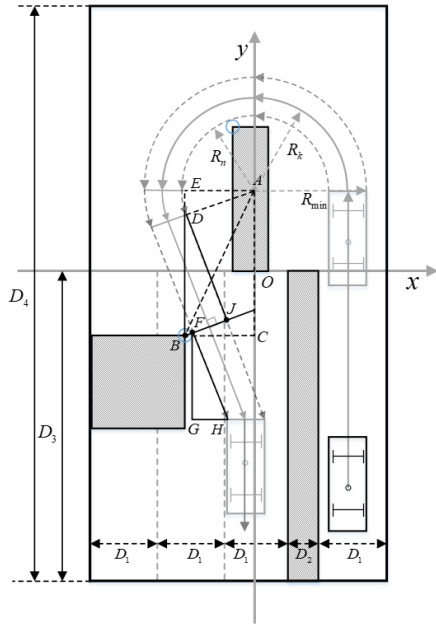


图 6-9 第三种情况角度关系图  
以此信息作第三种情况的目标规划模型：

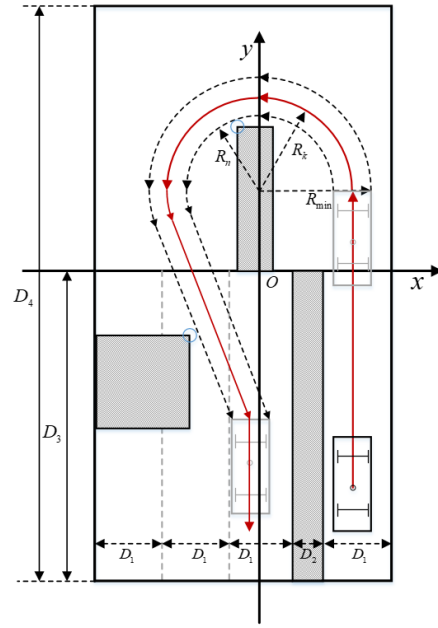


图 6-10 第三种情况轨迹示意图

$$\begin{aligned}
\min t &= \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + t_4 \\
s.t. &\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ \frac{1}{2a_1}v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 15.59; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{3.56 R_k}{5}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2}t_4^2 = 19.03. \end{cases} \quad (6.3)
\end{aligned}$$

其中，目标函数中 $t$ 表示右侧直行过程、转弯过程以及左侧直行过程所用的总时长。

值得注意，此情况只采用了问题一的第二种方案，第一种方案与之类似，本文不再赘述。

### 6.3.2 模型求解

根据模型（6.3），我们运用 Lingo 软件编写程序来求解该模型，得出调头的总时长为 $t = 8.97s$ ，加速 $t_1$ 时间后的速度 $v_1 = 7.86m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为 $a_1 = 3m/s^2$ ，加速阶段匀减速运动的加速度为 $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为 $t_1 = 2.62s$ ，减速阶段的时间为 $t_2 = 0.57s$ ；无人车在转弯过程匀速行驶的时间为 $t_3 = 3.51s$ ，接着无人车开始直行，此直行过程匀加速运动的时间为 $t_4 = 2.27s$ 。第三种情况的调头示意如图 6-10 所示，仿真结果<sup>[5]</sup>如图 6-11 所示。



图 6-11 第三种情况的调头仿真结果图

## 七、问题四模型的建立与求解

### 7.1 无障碍物调头模型与求解

由附件坐标数据，我们容易得出人行横道与隔离障碍物 D 的距离为  $2.32m$ ，由于控制点的最小转弯半径为  $4.93m$ ，因此无人车在人行横道下方不能通过。

我们考虑后轮穿过人行横道之后再调头。根据附件所给数据，不难得出人行横道的宽度为  $2.7m$ ，人行横道与隔离障碍物 D 的距离为  $2.32m$ ，无人车的控制点与两个后轮横轴的距离为  $1.07m$ ，因此无人车在右侧直行的距离为  $17.12m$ 。我们采用问题一的第二种方案优化后的转弯半径，其控制点转弯半径为  $5.52m$ 。左侧直行路程也可直接求得，其为  $22.12m$ 。根据这些条件，我们在问题一第二种方案改进后模型的基础上，建立以下目标规划模型：

$$\begin{aligned} \min t &= \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + t_4 \\ s.t. &\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ \frac{1}{2a_1} v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 17.12; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{2.84 R_k}{v_3}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2} t_4^2 = 22.12. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.1)$$

根据模型 (7.1)，我们运用 Lingo 软件编写程序来求解该模型，得出调头的总时长为  $t = 9.00s$ ，加速  $t_1$  时间后的速度  $v_1 = 8.14m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为  $a_1 = 3m/s^2$ ，加速阶段匀减速运动的加速度为  $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为  $t_1 = 2.71s$ ，减速阶段的时间为  $t_2 = 0.63s$ ；无人车在转弯过程匀速行驶的时间为  $t_3 = 3.14s$ ，接着无人车开始直行，此直行过程匀加速运动的时间为  $t_4 = 2.52s$ 。无障碍时的调头示意如图 7-1 所示，运用 Matlab 软件模拟该过程的调头轨迹，如图 7-2 所示。



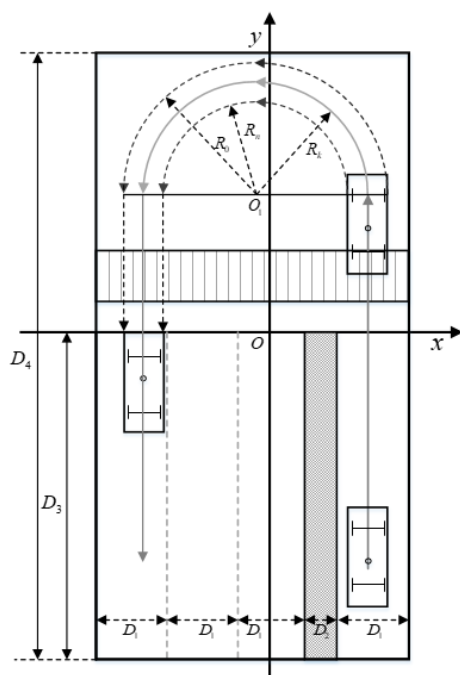


图 7-1 无障碍时的调头示意图

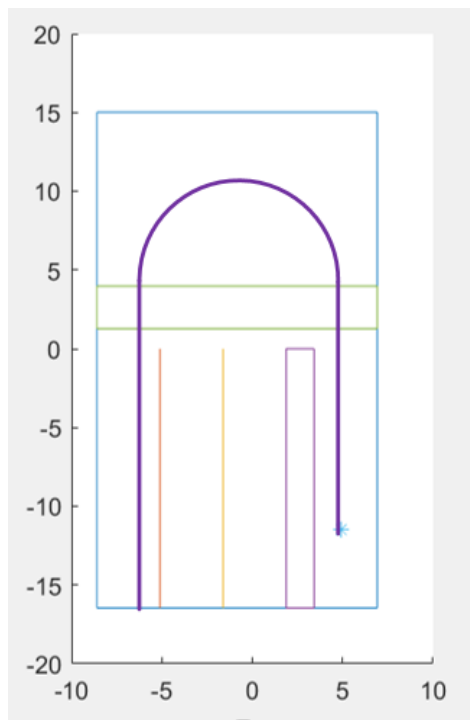


图 7-2 无障碍时的调头轨迹

由图 7-2 可以清楚地看到，无人车在第三车道调头离开。无人车也可经过多次转弯进入第一、第二车道调头离开，本文不再过多讨论。

## 7.2 有障碍调头模型与求解

我们考虑除隔离障碍物  $D$  以外的其它障碍  $F$ 、 $G$  都存在时，后轮穿过人行横道之后再调头。计算过程与问题三的第三种情况类似，我们可以轻易得出右侧直行过程总路程为  $17.12m$  左侧直行过程总路程为  $25.70m$ 。我们在问题三中第三种情况的模型的基础上，建立以下目标规划模型：

$$\begin{aligned}
\min t &= \frac{v_1}{a_1} + \frac{5-v_1}{a_2} + t_3 + t_4 \\
s.t. &\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq 3; \\ -5 \leq a_2 \leq 0; \\ \frac{1}{2a_1} v_1^2 + \frac{v_1(5-v_1)}{a_2} + \frac{a_2[(5-v_1)/a_2]^2}{2} = 17.12; \\ v_1 > 5; \\ t_3 = \frac{3.56 R_k}{5}; \\ 5t_4 + \frac{a_1}{2} t_4^2 = 25.70. \end{cases} \quad (7.2)
\end{aligned}$$

根据模型 (7.2)，我们运用 Lingo 软件编写程序来求解该模型，得出调头的总时长为  $t = 9.64s$ ，加速  $t_1$  时间后的速度  $v_1 = 8.14m/s$ ，加速阶段匀加速运动的加速度的大小为  $a_1 = 3m/s^2$ ，加速阶段匀减速运动的加速度为  $a_2 = -5m/s^2$ ，加速阶段的时间为  $t_1 = 2.71s$ ，减速阶段的时间为  $t_2 = 0.63s$ ；无人车在转弯过程匀速行驶的时间为  $t_3 = 3.51s$ ，接着无人车开始直行，此直行过程匀加速运动的时间为  $t_4 = 2.79s$ 。无障碍时的调头示意图如图 7-3 所示，运用 Matlab 软件模拟该过程的调头轨迹，如图 7-4 所示。

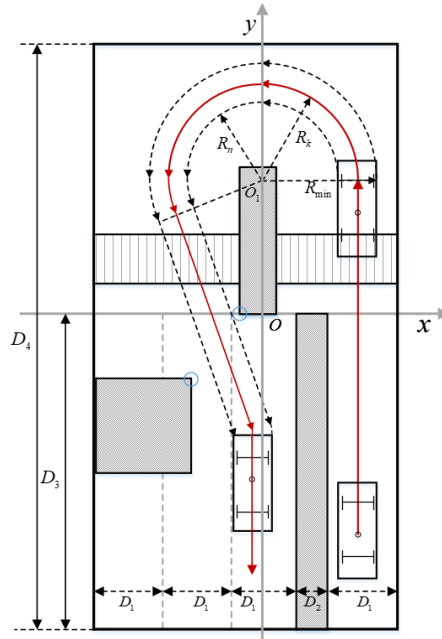


图 7-3 有障碍时的调头示意图

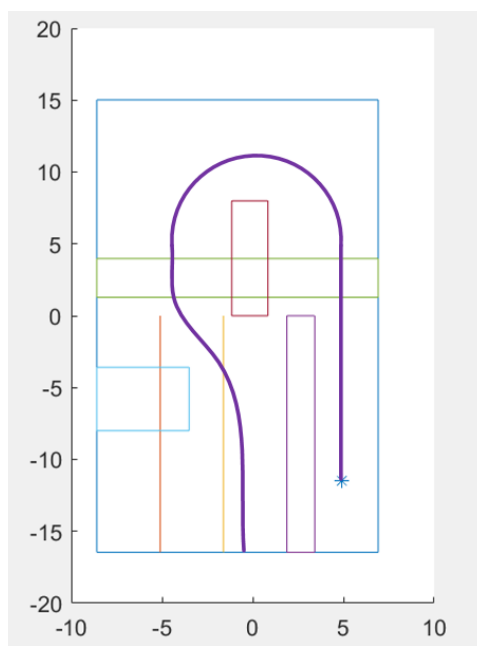


图 7-4 有障碍时的调头轨迹

由图 7-4 可以清楚地看到，无人车在第一车道调头离开。

## 八、问题五模型的建立与求解

### 8.1 无人行横道时调头

当有障碍物 F、G，没有人行横道时，规定 F、G 向下以恒定速度向下方移动，此恒定速度为  $30\text{ km/h} \approx 8.34\text{ m/s}$ 。当无人车行驶到还未离开隔离障碍物 D，开始转弯时，所用时间为  $2.55\text{ s}$ ，F、G 在这段时间移动的路程为  $2.55 \times 8.34 = 21.27\text{ m}$ 。由附件数据，我们得出障碍物 G 的长度为  $8.00\text{ m}$ ，则障碍物 G 完全离开需要移动  $8.00 + 16.03 = 24.03\text{ m}$ 。

$2.55\text{ s}$  时，障碍物 G 在车道的长度只剩下了  $2.76\text{ m}$ ，障碍物 F、G 的位置已经不影响无人车调头了。因此，无人车在这种情况下的调头模型同 (4.3) 模型的改进模型，顺利进入第三车道调头。无人行横道时调头的仿真如图 8-1 所示。

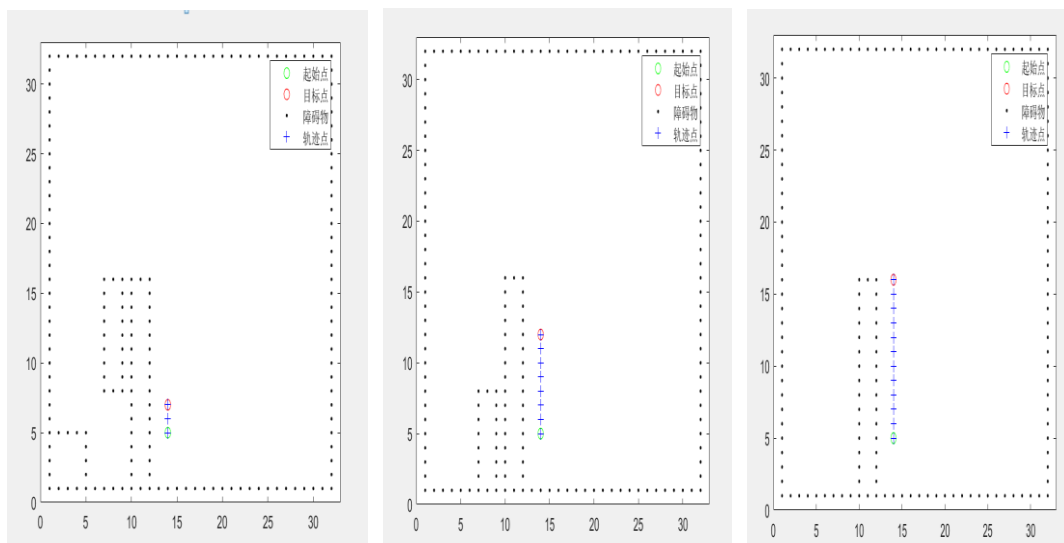


图 8-1 无人行横道时调头的仿真图

从图中可以看出，无人车分别在 $1s$ 、 $2s$ 和 $2.55s$ 时的行驶轨迹，当无人车以最大加速度 $3m/s^2$ 匀加速向前行驶时，障碍物F和G也在以恒定速度向相反方向行驶，当无人车到达我们模拟的转弯点时，其障碍物F和G已经消失在了我们规定的调头区域，因此无论F、G怎么移动都不会影响无人车的调头路径。

## 8.2 有人行横道时调头

当有障碍物F、G，并且有人行横道<sup>[6-8]</sup>时，我们规定障碍物F、G向下以恒定速度向下方移动，此恒定速度为 $30km/h \approx 8.34m/s$ 。当无人车行驶到还未离开隔离障碍物D，开始转弯时，所用时间为 $3.34s$ ，F、G在这段时间移动的路程为 $3.34 \times 8.34 = 27.86m$ 。已知障碍物G完全离开需要移动 $24.03m$ 。

$3.34s$ 时，障碍物G以及完全离开，障碍物F、G的位置已经不影响无人车调头了。因此，无人车在这种情况下的调头模型同(7.2)的模型，顺利进入第一车道调头。也可进入第二、第三车道调头，本文不再过多讨论。有人行横道时调头的仿真如图8-2所示。

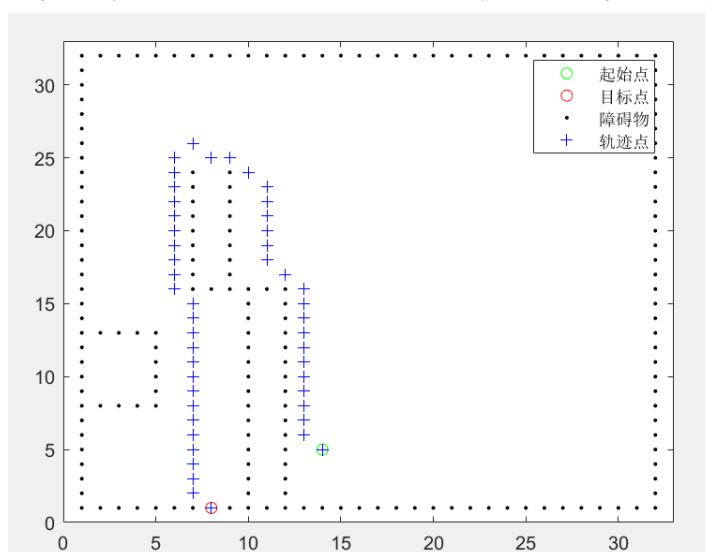


图 8-2 有人行横道时调头的仿真图

## 九、问题六模型简化

为保证无人驾驶的安全性，无人车的轨迹规划算法必须拥有尽可能高的求解成功率，即应倾向使用更收敛更稳定，失败率更低的计算方法；同时为了能对路况进行快速反应，需要以尽可能高的频率进行计算，即计算复杂度尽量低。

因此，为了提高我们的算法的求解成功率并降低求解消耗的时间，我们需要：

- (1) 减少不必要的参数，简化我们的模型；
- (2) 分析问题减少无人车转弯的次数，使用较为简单的方案；
- (3) 将整体分析和主次结构的单独分析<sup>[9]</sup>进行比较，即将整体模型与无人车每一段行驶模型比较，简化计算；
- (4) 数据预处理：将输入数据进行统一整理，去除无效或无意义的数

## 十、模型的评价与改进

### 10.1 模型的优点

1. 该模型能够预知周围障碍物的存在，提前对周围存在的障碍物做出避让行为，使车辆在掉头转弯时能够匀速转弯，提高了乘车人的舒适性；
2. 该模型采用插值拟合算法为无人车进行路径规划，具有原理结构简单、生成路径平滑等特点；
3. 该模型采用单目标分段函数寻优，决策变量根据优先级的先后次序考虑的比较全面，将目标规划问题能够高效的求解出来；
4. 在对无人车掉头模型的建立时，本文将掉头路径拆分成直线路径和曲线路径的组合，使得在对无人车路径跟踪实现的比较容易。

### 10.2 模型的缺点

1. 在对该题所提出的路径规划算法的仿真实验中，障碍物的设置均为静止状态，没有考虑运动障碍物；
2. 本文结合传统 A\* 算法进行路径规划仿真分析，仿真结果虽然能够到达目标点，但同时也具有规划路径不够平滑等缺陷；
3. 由于简单的车辆模型没有考虑诸多的实际环境影响，使得无人车在路径跟踪时出现较大偏差。

### 10.3 模型的改进

1. 本文速度参数的选取是依照现行交通安全法实施条例来设计的，设计速度值低于实际值，如果提高车辆行驶速度，无人车避障掉头的速度优化效果还能进一步提高；
2. 人行道与调头区域空间还有进一步的优化空间，可以在保证安全的前提下缩短无人车掉头的时间；
3. 该模型并未对障碍物进行明确区分，在以后的模型建立中，可以从对障碍物的识别和分类做起。

## 参考文献

- [1] 黄沛琛,王紫虹.作业车辆导航自动调头路径规划与跟踪[J].自动化应用,2015(12):9-12.
- [2] 中华人民共和国道路交通安全法实施条例[J].浙江政报,2004(28):4-13.
- [3] 石永金,王常清.汽车列车的转弯半径计算[J].汽车实用技术,2021(6):96-100.
- [4] 赵海兰,高松,孙宾宾.全自动平行泊车路径规划方法研究[J].科学技术与工程,2017,17(7):263-269.
- [5] 修彩靖,郭继瞬,梁伟强.自动驾驶避障策略研究[J].中国汽车工程学会年会论文集,2020:90-94
- [6] Peng Chen, Weiliang Zeng, Guizhen Yu.Assessing right-turning vehicle-pedestrian conflicts at intersections using an integrated microscopic simulation model[J].Accident Analysis and Prevention,129(2019):211-224,2019.
- [7] Mohammad Shokrolah Shirazi , Brendan Tran Morris .Trajectory prediction of vehicles turning at intersections using deep neural networks [J].Machine Vision and Applications,2019.
- [8] 赵亚茹.U型回转平面交叉口相关技术指标研究[D].陕西:长安大学,2019.
- [9] 刘健,王萍.巨型钢框架高层钢结构住宅体系的简化计算原则[J].住宅产业,2016,(08):69-74.

## 附录

所用软件: Matlab, Lingo

问题一:

第(1)种情况

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4; (目标函数)
a2<=5;
a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=11.03; (右侧直行过程)
v1>5;
t3=3.14*((2.8/0.49)-1+0.215)/5; (转弯过程)
5*t4+0.5*a1*t4*t4=16.03; (左侧直行过程)
```

优化后:

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;
a2<=5;
a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=11.03;
v1>5;
t3=3.14*5.52/5;
5*t4+0.5*a1*t4*t4=16.03;
```

第(2)种情况

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;
a2<=5;
a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=9.84;
v1>5;
t3=2.84*((2.8/0.49)-1+0.215)/5;
5*t4+0.5*a1*t4*t4=16.03;
```

优化后:

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;
a2<=5;
a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=9.84;
v1>5;
t3=2.84*5.52/5;
5*t4+0.5*a1*t4*t4=16.03;
```

## 问题二：

### 第（1）种情况

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+(5-0)/a2+v31/a31+v31/a32+3.67/5+t4;  
a2<=5;  
a2>0;  
a1<=3;  
a1>0;  
a31>0;  
a31<3;  
a32>0;  
a32<5;  
v31<5;  
v31>0;  
v31*v31/2*a31+v31*v31/2*a32=3.40;  
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=11.03;  
v1>5;  
t3=1.29*((2.8/0.49)-1+0.215)/5;  
5*t4+0.5*a1*t4*t4=3.54+16.03;
```

### 第（2）种情况

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+(5-0)/a2+v31/a31+v31/a32+3.67/5+t4;  
a2<=5;  
a2>0;  
a1<=3;  
a1>0;  
a31>0;  
a31<3;  
a32>0;  
a32<5;  
v31<5;  
v31>0;  
v31*v31/2*a31+v31*v31/2*a32=3.40;  
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=9.84;  
v1>5;  
t3=1.29*((2.8/0.49)-1+0.215)/5;  
5*t4+0.5*a1*t4*t4=3.54+16.03;
```

## 问题三：

### 第一种情况

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;  
a2<=5;  
a2>0;  
a1<=3;  
a1>0;  
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=11.03;  
v1>5;  
t3=5.08*4.93/5;  
5*t4+0.5*a1*t4*t4=9.96;
```

### 第二种情况

```
min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;  
a2<=5;
```



```

a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=15.59;
v1>5;
t3=3.23*4.93/5;
5*t4+0.5*a1*t4*t4=19.67;

```

### 第三种情况

```

min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;
a2<=5;
a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=15.59;
v1>5;
t3=3.56*4.93/5;
5*t4+0.5*a1*t4*t4=19.03;

```

### 问题四：

#### 无障碍

```

min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;
a2<=5;
a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=17.12;
v1>5;
t3=2.84*5.52/5;
5*t4+0.5*a1*t4*t4=22.12;

```

#### 有障碍

```

min=(v1/a1)+(v1-5)/a2+t3+t4;
a2<=5;
a2>0;
a1<=3;
a1>0;
0.5*v1*v1/a1+v1*(v1-5)/a2+0.5*a2*(v1-5)/a2*(v1-5)/a2=17.12;
v1>5;
t3=3.56*4.93/5;
5*t4+0.5*a1*t4*t4=25.70;

```