

数字图像处理笔记

陈鸿峥

2019.09*

目录

| | |
|---------------------------|-----------|
| 1 概述 | 1 |
| 2 数字图像基础 | 2 |
| 2.1 人类视觉 | 2 |
| 2.2 图像数字化 | 2 |
| 2.3 像素间基本关系 | 3 |
| 3 空间域图像增强 | 4 |
| 3.1 基本灰度变换 | 4 |
| 3.2 直方图 | 8 |
| 3.3 空间滤波基础 | 9 |
| 3.4 图像锐化 | 11 |
| 4 频域率滤波 | 15 |
| 4.1 傅里叶级数与傅里叶变换 | 15 |
| 4.2 取样函数 | 17 |
| 4.3 单变量的离散傅里叶变换 | 18 |

本课程采用书目Rafael C. Gonzalez & Richard E. Woods, *Digital Image Processing (3rd ed)*¹。

1 概述

任何图像本质上就是一个二维函数， x 和 y 是空间坐标，在任何一对空间坐标上的函数值称为该点的强度或灰度。当 x , y 和幅值为有限的、离散的数值时，就称这个图像为数字图像。数字图像处理的输入为图像，输出为图像或图像的子集。

基本步骤：图像获取、图像滤波和增强、图像复原、彩色图像处理、小波与分辨率处理、压缩、形态学处理、分割、表示和描述、目标识别。

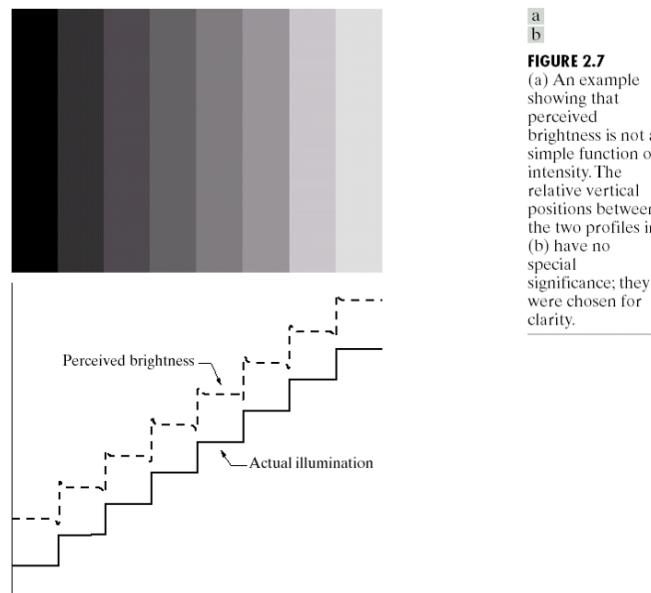
^{*}Build 20190924

¹<http://www.imageprocessingplace.com>

2 数字图像基础

2.1 人类视觉

- 人的视觉由眼睛中两部分光接收器（感受细胞）组成的：锥状体和杆状体。
- 成像原理：与光学透镜相似，但适应性强。看远处物体，肌肉会迫使晶状体变得扁平，晶状体的聚焦中心向前移动；物体离眼睛近时，肌肉使晶状体变厚，光心向视网膜成像区域靠近。
- 韦伯比： $\Delta I_c/I$ ，度量人的眼睛特定的适应级别对亮度变化的辨别力。在低的照明级别，亮度辨别较差（杆状体起作用）。在背景照明增强时，亮度辨别得到明显的改善（锥状体起作用），即对亮的东西敏感。
- 亮度不是简单的强度函数，下面是两个现象
 - 视觉系统倾向于不同强度区域边界周围的欠调(undershoot)和过调(overshoot)



- 同时对比现象

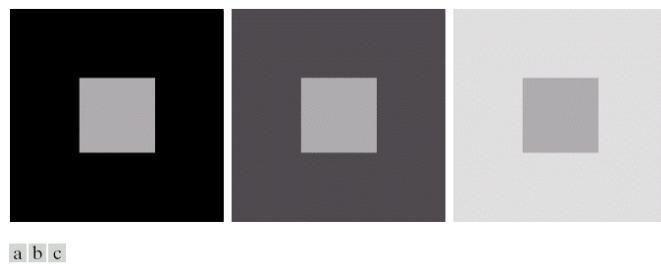


FIGURE 2.8 Examples of simultaneous contrast. All the inner squares have the same intensity, but they appear progressively darker as the background becomes lighter.

2.2 图像数字化

图像数字化包括两个步骤

- 取样（时空域）：剖分为像素，用一个像素值代替这一块， $f(x, y) \in [0, +\infty)$
- 量化（光色强度）：变为[0, 255]之间的整数

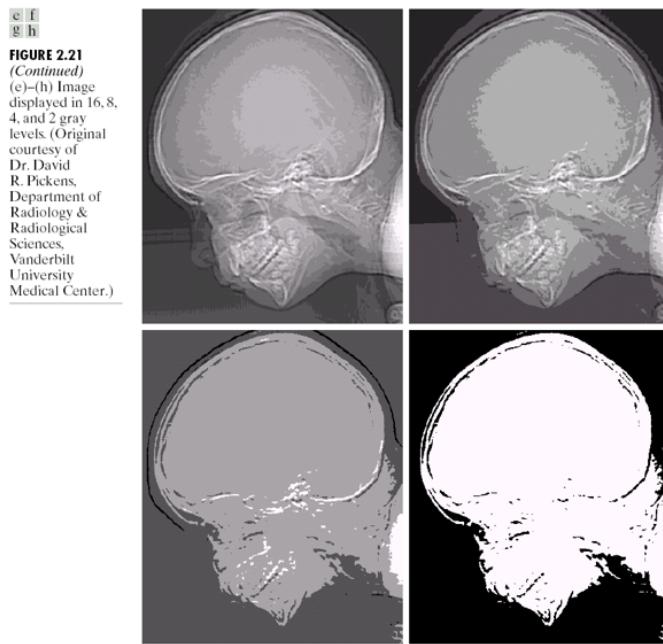
$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, N-1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(m) \end{bmatrix}$$

即数字图像包括位置属性 (x, y) 和像素大小 $f(x, y)$ 两个特征，用上面的二维矩阵表示，每个元素称为图像的像素。

- 像素越大越精确，每一块分得越细
- 计算机中字节处理最快，所以才用8位色(256位)

两种不同的分辨率

- 空间分辨率：图像中可分辨的最小细节，即图像大小（行×列）
- 灰度分辨率：一个像素值单位幅度上包含的灰度级数，通常是2的整数幂级数，如：用一个byte存一个像素值为256级
 - 人眼对灰度分辨率的敏感程度与图像内容复杂程度有关，如更偏爱人脸，而对人群不敏感
 - 当灰度分辨率不够，会产生伪轮廓



放大与缩小：近邻插值、双线性插值

2.3 像素间基本关系

定义 1 (邻域). 坐标为 (x, y) 的像素 p 的

- 4邻域 $N_4(p) = \{(x - 1, y), (x + 1, y), (x, y - 1), (x, y + 1)\}$
- 对角相邻像素 $N_D(p) = \{(x - 1, y - 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x + 1, y + 1)\}$

- 8邻域 $N_8(p) = N_4(p) \cup N_D(p)$

定义 2 (邻接性). 数字图像的邻接需要满足灰度值的邻接和物理位置的邻接。考虑 $V \subset [0, 255]$, 有三种邻接性:

- 4邻接: $q \in N_4(p)$ 且 $q, p \in V$
- 8邻接: $q \in N_8(p)$ 且 $q, p \in V$
- m 邻接混合邻接: 要么(1)4邻接, 要么(2) $q \in N_D(p)$ 且 $N_4(p) \cap N_4(q) \notin V$

若 S_1 中的某些像素和 S_2 中的某些像素邻接, 则这两个集合是邻接的。

注意混合邻接是为了消除8邻接的二义性, 见下图。

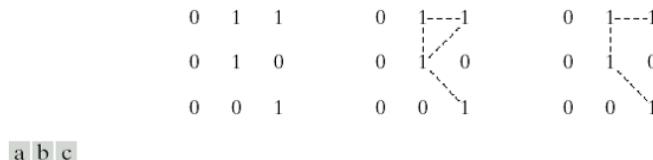


FIGURE 2.26 (a) Arrangement of pixels; (b) pixels that are 8-adjacent (shown dashed) to the center pixel; (c) m -adjacency.

定义 3 (通路). 若 (x, y) 到 (s, t) 有 4/8 通路, 则存在

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

其中 $(x_0, y_0) = (x, y), (x_n, y_n) = (s, t)$ 且 (x_i, y_i) 和 (x_{i-1}, y_{i-1}) 是 4/8 邻接的

定义 4 (连通集). 如果 S 中全部像素之间存在一个 4/8 通路, 或者说 S 仅有一个连通分量, 那么称 S 是 4/8 连通集。

3 空间域图像增强

图像增强目的是提高图像在特定应用领域的视觉质量, 包括光滑、锐化、提取边缘、反转、去噪以及各种滤波等。

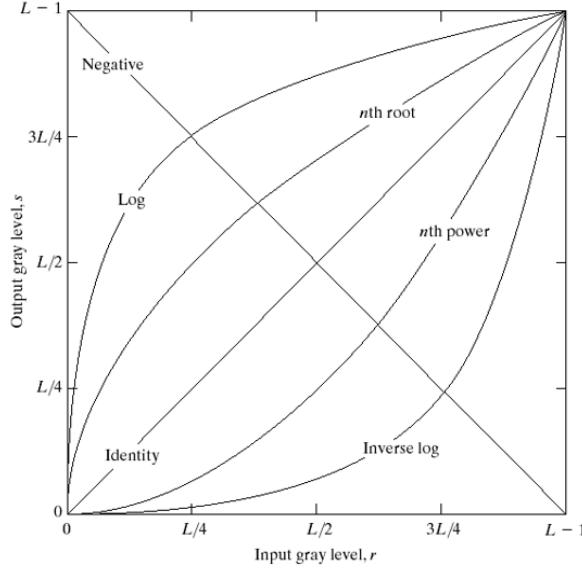
空间域图像增强的是直接对图像的像素进行操作, 基本关系式可表示如下:

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

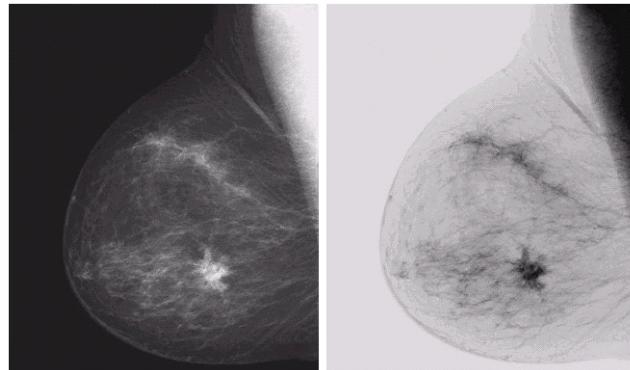
3.1 基本灰度变换

- 基本灰度函数: 线形、对数、幂次

FIGURE 3.3 Some basic gray-level transformation functions used for image enhancement.



- 图像反转变换: $s = L - 1 - r$, 人眼的一个特点就是在背景相对光亮时对灰度层次有较好的分辨能力。

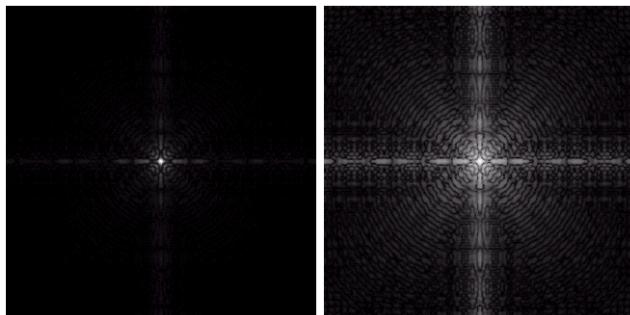


a b

FIGURE 3.4
(a) Original digital mammogram.
(b) Negative image obtained using the negative transformation in Eq. (3.2-1).
(Courtesy of G.E. Medical Systems.)

- 对数变换: $s = c \log(1 + r)$, c 是常数, $r \geq 0$, 适合大范围的数据压缩。任何具有对数函数曲线形状的变换都可以完成灰度的压缩和扩展功能。

FIGURE 3.5
(a) Fourier spectrum.
(b) Result of applying the log transformation given in Eq. (3.2-2) with $c = 1$.



- 幂次变换: $s = cr^\gamma$, c 和 γ 都为正常数

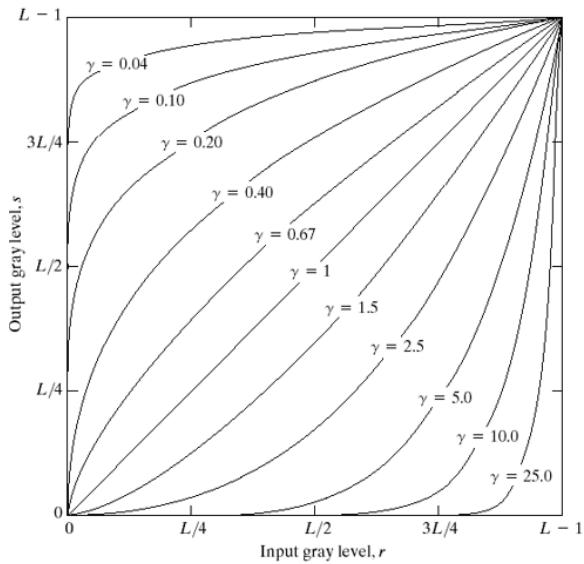
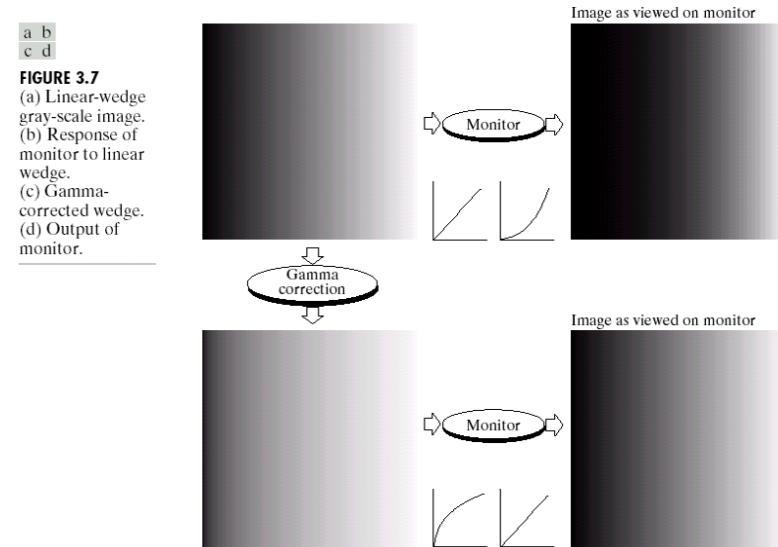


FIGURE 3.6 Plots of the equation $s = cr^\gamma$ for various values of γ ($c = 1$ in all cases).

伽马校正：大量的图像设备如捕捉卡、打印机、数码相机以及显示装置的响应（输出）就对应一个幂函数，通常称这个幂函数的指数为gamma。纠正这个幂次响应的处理称为伽玛校正(gamma correction)。



在一般的图像处理软件中，几乎都有伽玛校正的功能。这个功能可用于调整图像的对比度。如果图像偏暗，有些低灰度值的细节被掩盖时，可考虑用指数 $\gamma < 1$ 的伽玛校正；反之， $\gamma > 1$ 的校正对那些被“漂白”的细节会起作用。

- 分段线性变换

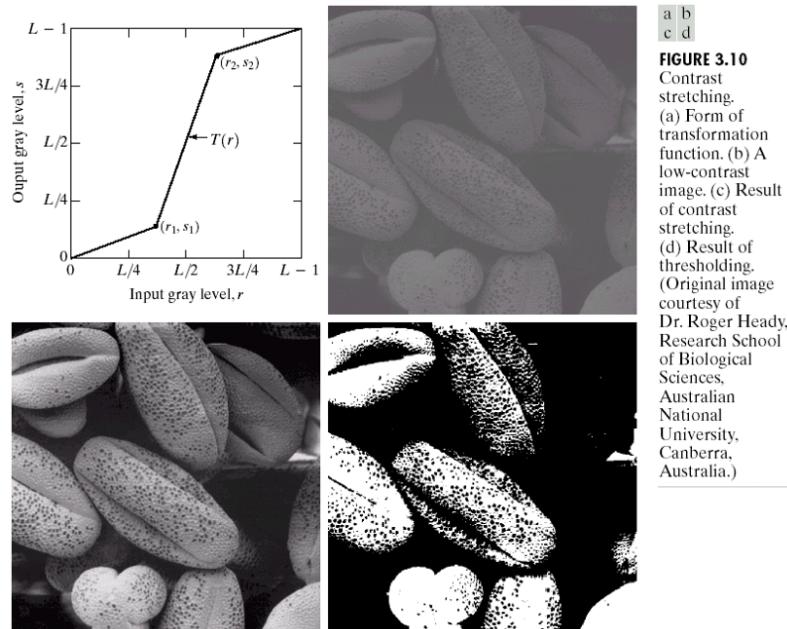


FIGURE 3.10
Contrast stretching.
(a) Form of transformation function.
(b) A low-contrast image.
(c) Result of contrast stretching.
(d) Result of thresholding.
(Original image courtesy of Dr. Roger Heady, Research School of Biological Sciences, Australian National University, Canberra, Australia.)

- 灰度切割：在图像中提高特定灰度的亮度

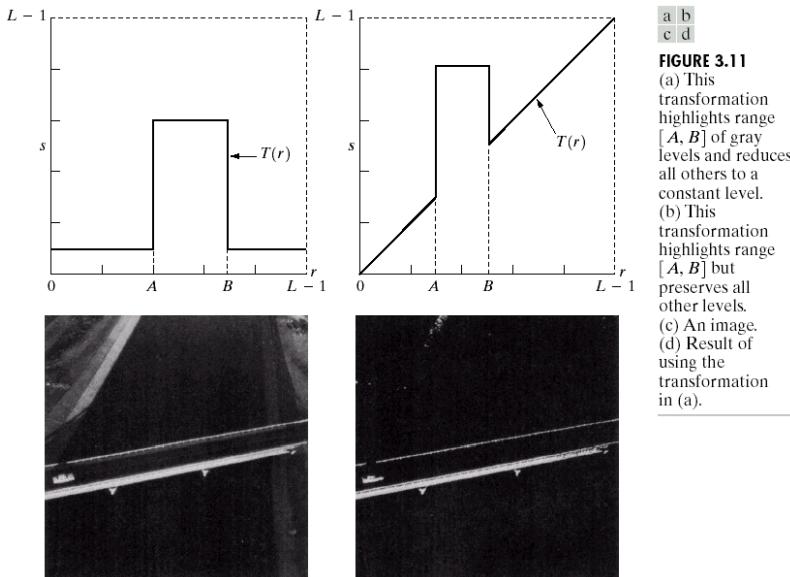


FIGURE 3.11
(a) This transformation highlights range $[A, B]$ of gray levels and reduces all others to a constant level.
(b) This transformation highlights range $[A, B]$ but preserves all other levels.
(c) An image.
(d) Result of using the transformation in (a).

位图切割：8位灰度图象可以分割成8个位面，每个是一个二值图像。高位表示了重要的信息，低位给出了不同程度的细节。

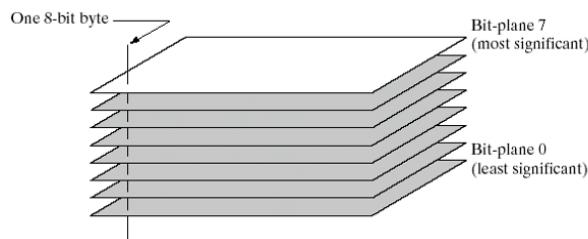


FIGURE 3.12
Bit-plane representation of an 8-bit image.

位图的作用

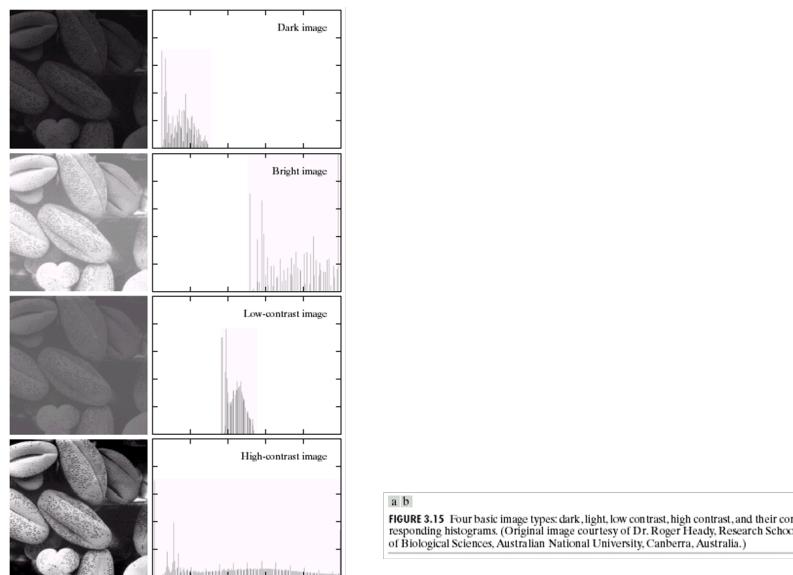
- 信息隐藏：藏在中间位，低位会被丢弃，高位太清楚
- 视频传输：先传高位，再传低位，逐渐清晰

3.2 直方图

定义 5 (直方图). 灰度级别为 $[0, L - 1]$ (直方图一定从 0 开始!)。数字图像直方图是离散函数 $h(r_k) = n_k$ ，其中 r_k 是第 k 级灰度， n_k 是图像中灰度级为 r_k 的像素个数 (频数)。除以总数 n 就得到归一化的直方图。

3.2.1 直方图均衡化

有亮度差才能看到细节，均衡分布



直方图均衡化/线性化则是寻求一种变换使得变换后的图像具有尽可能均匀分布的直方图，用于图像增强最大的特点是自动化，有强大的适应性强的功能。步骤如下：

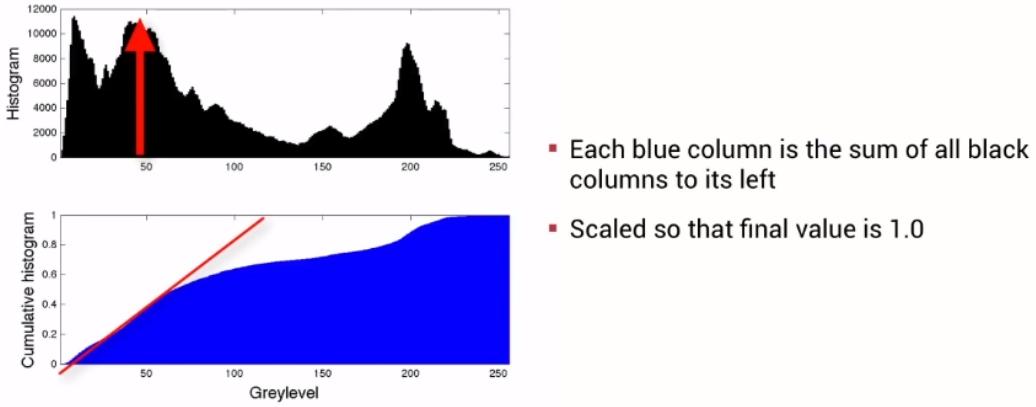
- 概率 $p_r(r_k) = n_k/n, k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$
- 累计分布函数(PDF)

$$P(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

- 变换函数

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \cdot \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

- 将 s_k 四舍五入转换为标准灰度级别，如有相同 $\lceil s_k \rceil$ 则合并



分析. 若 r 为离散型随机变量, $T(r)$ 为单调递增函数 (T^{-1} 存在且单调), 且 $s = T(r)$, 则由概率论有

$$p_s(s) = p_r(r) \frac{\partial r}{\partial s} \Big|_{r=T^{-1}(s)} = p_s(T^{-1}(s)) |T^{-1}(s)|$$

考虑变换函数为 r 的累积分布函数(CDF)

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega) d\omega$$

对 s 求导并代入上面的式子可得 $p_s(s) = 1$, 故实现均衡。算法实际上就是求累积分布函数, 使得原本亮度小的像素能够映射到亮度大的空间。

3.2.2 直方图匹配

当两幅图像比对时, 通常要使其直方图形式一致(如不同光照条件下的同一场景)。先是做空间归一化(伸缩、旋转), 然后再做像素的归一化。

做法是使两幅图像均衡化后的结果相同, 即

$$\begin{aligned} s &= T(r) = \int_0^r p_r(w) dw \\ s &= G(z) = \int_0^z p_z(t) dt \implies z = G^{-1}(s) = G^{-1}(T(r)) \end{aligned}$$

定义 6 (n 阶矩). 设 $p_r(r_k) = n_k/n$, 则 r 的第 n 阶中心矩为

$$\mu_r(r_k) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_k)$$

其中 $m = \sum_{i=1}^{L-1} r_i p(r_i)$ 为 r 的平均值。特别地, 当 $n = 2$ 时为方差。

3.3 空间滤波基础

滤波的概念来自信号处理中的傅里叶变换, 空间滤波指的是直接对图像像素进行处理的操作。滤波

器(filter)有时也叫掩模(mask)、核(kernel)、模板(template)或窗口(window)。

3.3.1 线性滤波

空间域线性滤波基本公式：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

一个 $M \times N$ 的滤波器 $w(x, y)$ 与图像 $f(x, y)$ 的相关操作定义为

$$w(x, y) \circ f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

一个 $M \times N$ 的滤波器 $w(x, y)$ 与图像 $f(x, y)$ 的卷积定义为

$$w(x, y) * f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

空间滤波对边界的处理方法

- 重复边缘值
- 卷绕输入图像
- 补零
- 勿略

常用的平滑滤波器（左侧是均值滤波）

| | | | | | |
|-----|-----|-----|------|-----|------|
| 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/16 | 1/8 | 1/16 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/8 | 1/4 | 1/8 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/16 | 1/8 | 1/16 |

一般公式

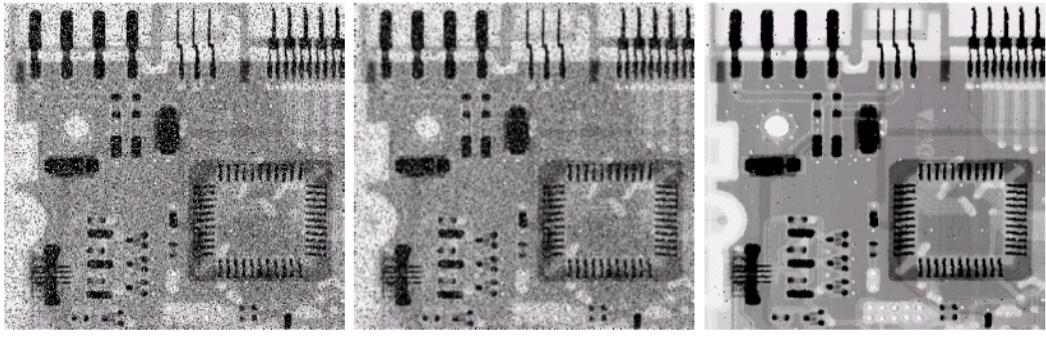
$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

3.3.2 非线性滤波

排序统计滤波器是一种非线性的、非卷积滤波器。排序统计滤波器在滤波器包围的像素范围内排序，然后由统计排序结果决定的值代替中心像素的值。按排序输出的位置分，可分为：中值滤波、最大值滤波、最小值滤波。

中值滤波比均值滤波更适合做椒盐噪声²的去除，因为噪声总是最大最小，故做中值滤波容易去除。

²特别大或特别小的噪声



a b c

FIGURE 3.37 (a) X-ray image of circuit board corrupted by salt-and-pepper noise. (b) Noise reduction with a 3×3 averaging mask. (c) Noise reduction with a 3×3 median filter. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)

同理除了中值滤波，也可以构造第 X 百分点的滤波器。通常 $X < 50$ 图像趋于变暗， $X > 50$ 图像趋于变亮。

3.4 图像锐化

3.4.1 图像微分

积分运算可以做平滑，微分运算可以做锐化！ 锐化的目的即突出图像中的细节或者增强被模糊的细节。

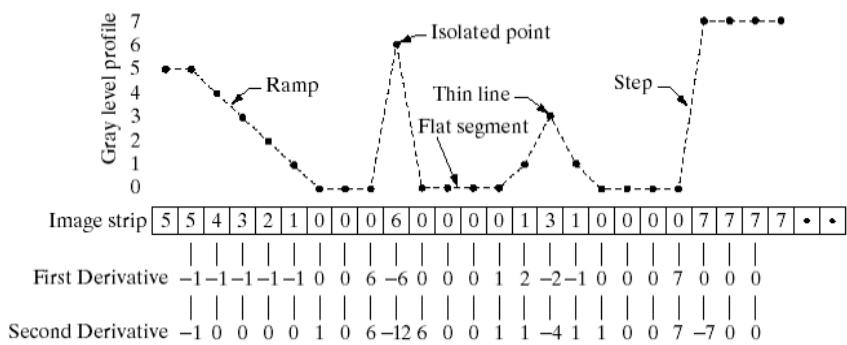
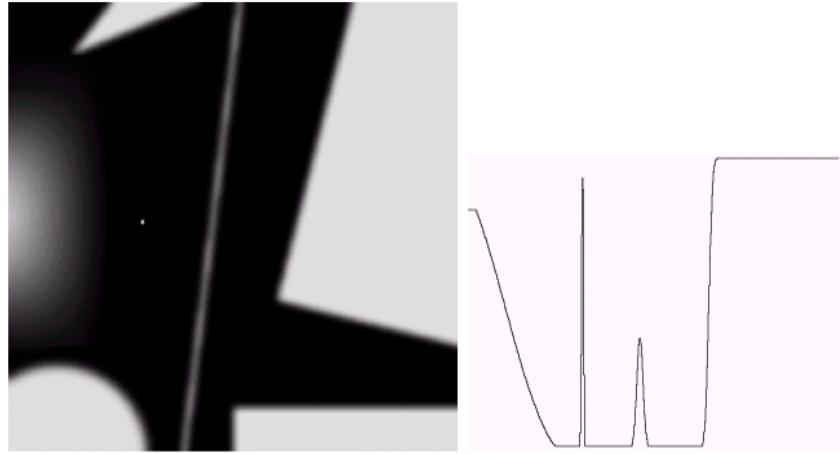
考虑离散情况

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= f(x+1) - f(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \end{cases}$$

斜边缘、 δ /冲击边缘、阶梯边缘

a
b
c

FIGURE 3.38
 (a) A simple image. (b) 1-D horizontal gray-level profile along the center of the image and including the isolated noise point.
 (c) Simplified profile (the points are joined by dashed lines to simplify interpretation).



- 一阶微分产生较“宽”的边界，二阶微分产生较“细”的边界
- 二阶微分处理对细节有较强的响应，如细线和孤立点
- 一阶微分对阶梯状的灰度变化有较强的响应
- 二阶微分在处理阶梯状灰度变化时产生双响应
- 如果灰度的变化相似，二阶微分对线的反应比对阶梯强，对点的反应比对线强

3.4.2 拉普拉斯算子

定义 7 (拉普拉斯(Laplacian)算子). 对连续函数情形，最简单且各向同性的二阶微分算子是拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

离散情况

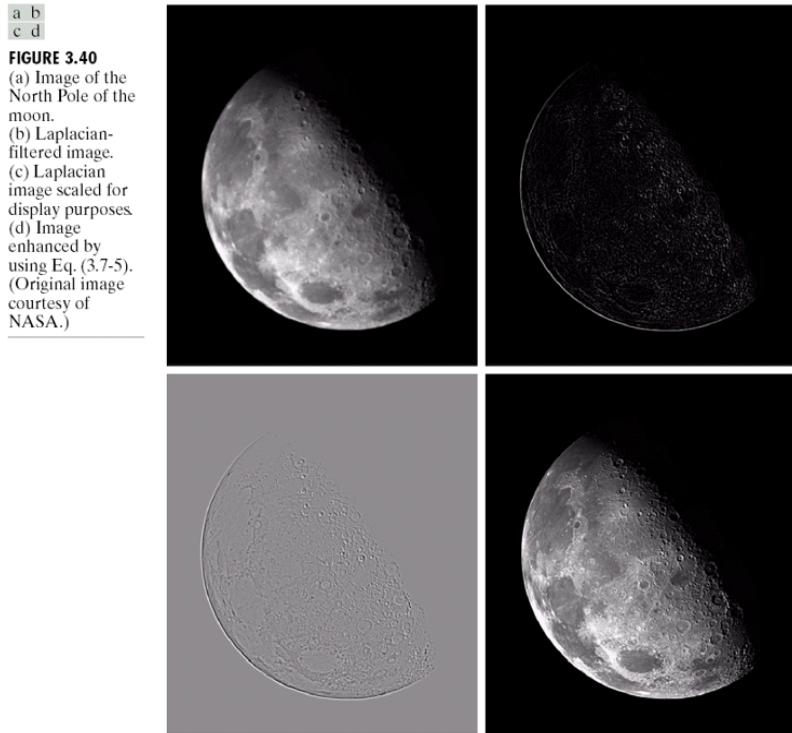
$$\nabla^2 = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

拉普拉斯变换目的是获得细节，加回原图像才能进行锐化。

其实直接从滤波器的表示也可以直观看出这种滤波对图像的突变有比较强的响应（即在突变的位置有较大的输出值），对灰度变化缓慢的区域滤波响应的值会变得很小（变暗）。因此，用拉普拉斯算子作用后，产生的图像将是在暗背景上的一些灰色边线和一些突变点。若将原始图像叠加到拉普拉斯变换后

的图像，既可以保护拉普拉斯锐化处理的效果，同时又能复原背景信息。拉普拉斯图像增强基本方法：

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - \nabla^2 f & \text{拉普拉斯滤波中心系数为负} \\ f(x, y) + \nabla^2 f & \text{拉普拉斯滤波中心系数为正} \end{cases}$$



定义 8 (反锐化掩膜(unsharp masking)). 把原图的一个模糊过的图像从原图中减去，从而得到一个相对清晰的图像

$$f_s(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

就像一个模糊的负片和一个正片放在一起冲洗出相对清晰的照片

定义 9 (高提升滤波(high-boost filtering)). 添加一个系数项 A 得到

$$f_{hb}(x, y) = Af(x, y) - \bar{f}(x, y) = (A - 1)f(x, y) + f_s(x, y)$$

其中 $A \geq 1$ ，目的为提升原图亮度，前一部分调整了原图的灰度，后一部分是锐化过的图像。 A 越大则细节越不清晰，因为原图变亮了。

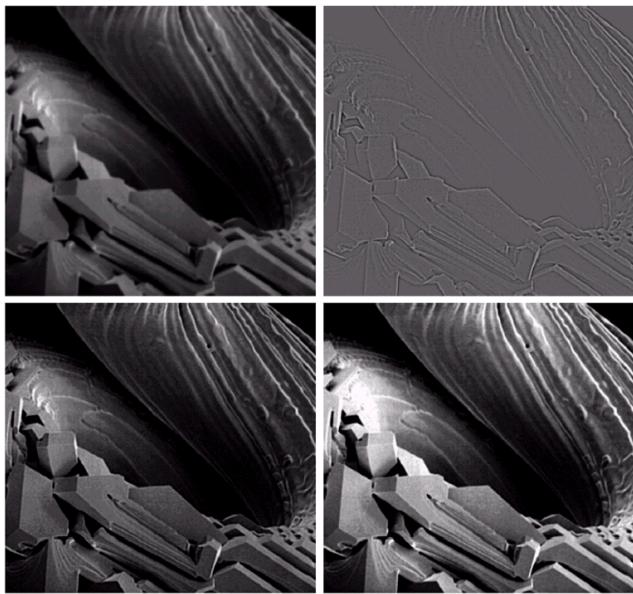
可以得到基于拉普拉斯算子的高提升滤波

$$f_{hb}(x, y) = \begin{cases} Af(x, y) - \nabla^2 f & \text{Laplacian中心系数为负} \\ Af(x, y) + \nabla^2 f & \text{Laplacian中心系数为正} \end{cases}$$

当 $A = 1$ 时就是拉普拉斯图像增强方法，当 A 足够大时，锐化效果将变得不明显。

a b
c d

FIGURE 3.43
 (a) Same as Fig. 3.41(c), but darker.
 (a) Laplacian of (a) computed with the mask in Fig. 3.42(b) using $A = 0$.
 (c) Laplacian enhanced image using the mask in Fig. 3.42(b) with $A = 1$. (d) Same as (c), but using $A = 1.7$.



3.4.3 梯度

一阶微分在灰度的跳跃性间断处（边界处）有较强的响应，所以在一些情况下也可以用于图像增强。考虑二维函数的梯度

$$\nabla f = \begin{bmatrix} G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

定义 L_2 范数/模

$$\nabla f = (G_x^2 + G_y^2)^{1/2} = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}$$

L_2 模具有各向同性的性质，但计算不方便，故常用 L_1 范数做代替

$$\nabla f \approx |G_x| + |G_y|$$

注意：通常在不引起混淆的情况下，把梯度的模称为梯度。

- Robert 交叉梯度算子

$$\nabla f = |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

- Sobel 算子：水平边缘增强

$$\nabla f = |(z_y + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|$$

| |
|---|
| a |
| b |
| c |

a

b

c

d

e

FIGURE 3.44
A 3×3 region of an image (the z 's are gray-level values) and masks used to compute the gradient at point labeled z_5 . All masks coefficients sum to zero, as expected of a derivative operator.

| | | |
|-------|-------|-------|
| z_1 | z_2 | z_3 |
| z_4 | z_5 | z_6 |
| z_7 | z_8 | z_9 |

| | | | |
|----|---|---|----|
| -1 | 0 | 0 | -1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |

| | | | | | |
|----|----|----|----|---|---|
| -1 | -2 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | -1 | 0 | 1 |

通常实际使用时是多种滤波器混合使用。下列是Matlab中预定义的滤波器。

- Gaussian低通滤波器：抑制噪声
- Sobel水平边缘增强滤波器
- Prewitt水平边缘增强滤波器
- Laplacian近似二维拉普拉斯运算滤波器
- Log高斯拉普拉斯滤波器
- Average均值滤波器
- Unsharp模糊对比增强滤波器

4 频域率滤波

4.1 傅里叶级数与傅里叶变换

定义 10 (傅里叶级数). $f(t)$ 为以 T 为周期的函数，绝对可积

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$$

其中

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

傅里叶级数中每一个基函数都是一个单频谐波，对应的系数（频谱）表明原函数对这种频率成分贡

献的大小（原函数在这个谐波上的投影）

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}x} dx$$

定义 11 (冲激). 某一点处积分为无穷

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dx = 1$$

具有取样(*sifting*)特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dx = f(0)$$

定义 12 (冲激串). 无限多个分离的周期冲激单元 ΔT 之和

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T)$$

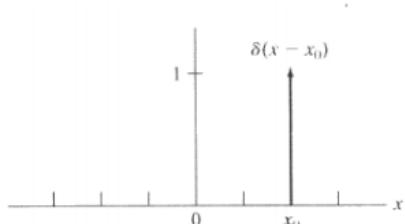


图 4.2 位于 $x = x_0$ 处的单位离散冲激。变量 x 是离散的，任何不在 $x = x_0$ 处的 δ 都是 0

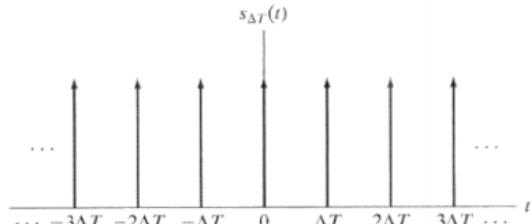


图 4.3 一个冲激串

定义 13 (傅里叶变换与反变换). 傅里叶变换

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi ut} dt$$

反变换

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi ut} du$$

由于傅里叶变换是 $f(t)$ 乘上正弦项的展开，正弦项的频率由 u 决定（变量 t 已经被积分），积分后只剩下频率，故称傅里叶变换域是频率域。

例 1. 矩形函数

$$f(t) = \begin{cases} A & -W/2 \leq t \leq W/2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

的傅里叶变换为

$$F(u) = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi u t} dt = AW \frac{\sin(\pi\mu W)}{\pi\mu W} = AW \text{sinc}(\mu W)$$

定义 14 (卷积).

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

定理 1 (卷积定理). 建立起空间域和频率域的联系

$$f(t) * h(t) \iff F(\mu)H(\mu)$$

且

$$f(t)h(t) \iff F(\mu)*H(\mu)$$

即空间域两个函数卷积的傅里叶变换等于两个函数的傅里叶变换在频率域的乘积

4.2 取样函数

模拟取样

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

可以得到采样函数 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶变换 $\tilde{F}(u)$ 为

$$\tilde{F}(u) = \mathcal{F}\{\tilde{f}(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(u) * S(u)$$

其中

$$S(u) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

进而

$$\tilde{F}(u) = F(u) * S(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)S(u - \tau) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(u - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

定理 2 (奈奎斯特(Nyquist)采样定理). 如果以超过函数最高频率的两倍的采样率来获得样本，则连续的带限函数可以完全从它的样本集恢复，即

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$

若以低于两倍的采样率来采样则会出现混淆现象

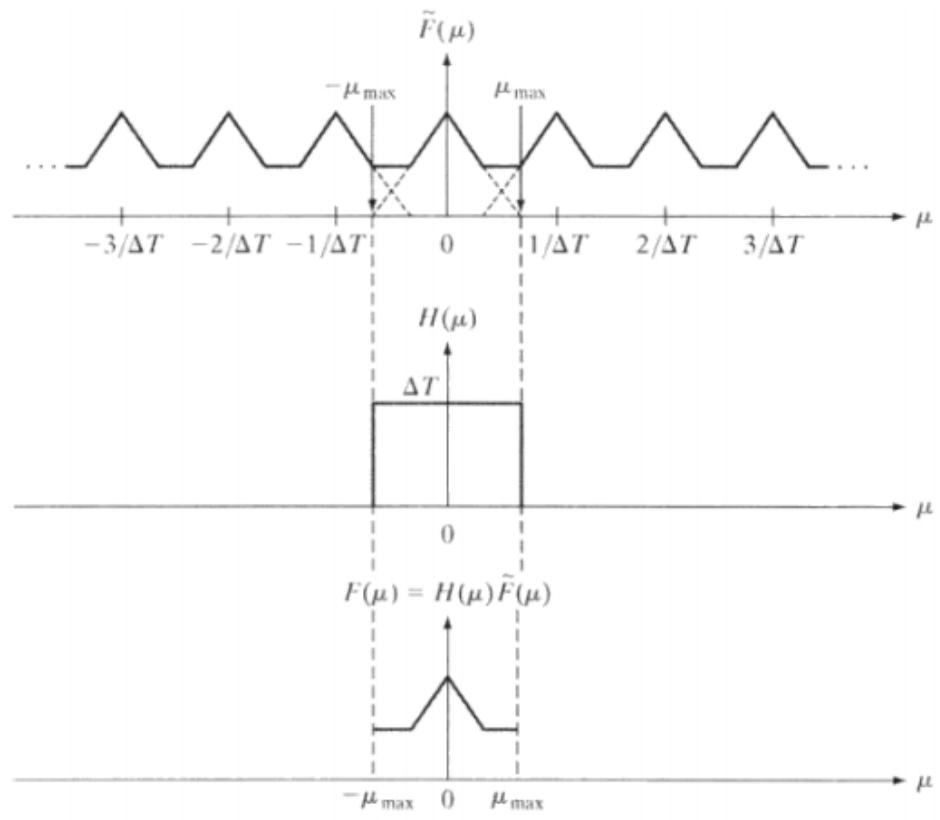


图 4.9 (a)一个欠取样带限函数的傅里叶变换(图中来自邻近周期的干扰显示为虚线); (b)图 4.8(b)中所用的同一个理想低通滤波器; (c)图(a)和图(b)的乘积。来自邻近周期的干扰导致了混淆,而混淆妨碍了 $F(\mu)$ 的完美复原,并因此妨碍了原始带限连续函数的完美复原。请与图 4.8 比较

空间域表达式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \operatorname{sinc}[(t - n\Delta T)/\Delta T]$$

4.3 单变量的离散傅里叶变换

$$|F(u)|^2 = F(u) \cdot F^*(u)$$