## 数理逻辑笔记

陈鸿峥

2020.05\*

## 目录

 1 命题逻辑
 1.1 自然推断
 1.1 自然推断

## 1 命题逻辑

## 1.1 自然推断

定义  $\mathbf{1}$  (命题(proposition)). 命题或声明式句子是指可判断为真或者假的句子。不可被分解的(indecomposable)命题为原子命题。

关于命题公式的定义在这里不再给出,注意—是右结合(right-associative)的,如 $p \to q \to r$ 等价于 $p \to (q \to r)$ 。

定义 2 (自然推断(deduction)). 假设有一系列前提(premise)公式 $\phi_1,\phi_2...,\phi_n$ , 及结论 $\psi$ , 那么推断过程可记为

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

这一表达式称为一个序列(sequent),若一个证明可以被找到则称它是合法的(valid)。

推理的基本规则:

• and-introduction ( $\wedge i$ ): 前提与前提为真

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

• and-elimination ( $\wedge e_i$ ): 前提与中子成分为真

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

<sup>\*</sup>Build 20200517

• negation-introduction 
$$(\neg \neg i)$$

$$\frac{\phi}{\neg \neg \phi} \neg \neg i$$

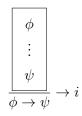
• negation-elimination  $(\neg \neg e)$ 

$$\frac{\neg \neg \phi}{\phi} \neg \neg \epsilon$$

• implication-elimination  $\rightarrow e$ 

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to \epsilon$$

• implies-introduction  $\rightarrow i$ 



ullet or-introduction  $\vee e$ 

• bottom/not-elimination

$$\frac{\perp}{\phi} \perp e$$
  $\frac{\phi}{\perp} \neg \phi \neg e$ 

• negation



**例 1.** 证明 $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ 是合法的。

分析. 推理过程如下

$$\begin{array}{cccc} 1 & p \wedge q & premise \\ 2 & r & premise \\ 3 & q & \wedge e_2 & 1 \\ 4 & q \wedge r & \wedge i & 3, 2 \\ \\ & & \frac{p \wedge q}{q} \wedge e_2 & r \\ & & q \wedge r \end{array} \wedge i$$

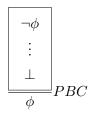
定义  $\mathbf{3}$  (定理(theorem)). 有着合法序列 $\vdash \phi$ 的逻辑公式 $\phi$ 称为定理。

三条进阶推理规则:

• 拒取式(modus tollens, MT)

$$\frac{\phi \to \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi} MT$$

• 反证法(proof by contradition, PBC)



• 排中律(the law of the excluded middle, LEM)

$$\phi \lor \neg \phi$$
必有一个为真

定义 4 (可证明等价性(provably equivalent)). 令 $\phi$ 和 $\psi$ 为命题逻辑公式, $\phi$ 和 $\psi$ 是可证明等价的当且仅当序列 $\phi \vdash \psi$ 和 $\psi \vdash \phi$ 都是合法的,或者 $\phi \dashv \!\!\! \vdash \psi$