数理逻辑笔记

陈鸿峥

2020.05[*]

目录

1 命题逻辑

1.1 自然推断

定义 1 (命题(proposition)). *命题或声明式句子是指可判断为真或者假的句子。不可被分解的(indecomposable)命题为原子命题。*

关于命题公式的定义在这里不再给出，注意$\to$是右结合(right-associative)的，如$p \to q \to r$等价于$p \to (q \to r)$。

定义 2 (自然推断(deduction)). *假设有一系列前提(premise)公式$\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n$，及结论$\psi$，那么推断过程可记为*

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

这一表达式称为一个序列(sequent)，若一个证明可以被找到则称它是合法的(valid)。

推理的基本规则：

- and-introduction ($\wedge i$)：前提与前提为真

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

- and-elimination ($\wedge e_i$)：前提与中子成分为真

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

[*]Build 20200517

- negation-introduction ($\neg\neg i$)

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg i$$

- negation-elimination ($\neg\neg e$)

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\neg e$$

- implication-elimination $\to e$

$$\frac{\phi \quad \phi\to\psi}{\psi}\to e$$

- implies-introduction $\to i$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi\to\psi}\to i$$

- or-introduction $\vee e$

$$\frac{\phi}{\phi\vee\psi}\vee i_1 \qquad \frac{\psi}{\phi\vee\psi}\neg\neg i_2 \qquad \frac{\phi\vee\psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\vee e$$

- bottom/not-elimination

$$\frac{\bot}{\phi}\bot e \qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\neg e$$

- negation

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\neg i$$

例 1. 证明$p\wedge q, r\vdash q\wedge r$是合法的。

分析. 推理过程如下

1	$p\wedge q$	*premise*	
2	r	*premise*	
3	q	$\wedge e_2$	1
4	$q\wedge r$	$\wedge i$	$3,2$

$$\frac{\frac{p\wedge q}{q}\wedge e_2 \quad r}{q\wedge r}\wedge i$$

定义 3 (定理(theorem))**.** 有着合法序列$\vdash\phi$的逻辑公式ϕ称为定理。

三条进阶推理规则：

- 拒取式(modus tollens, MT)

$$\frac{\phi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi} MT$$

- 反证法(proof by contradition, PBC)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg\phi \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\phi} PBC$$

- 排中律(the law of the excluded middle, LEM)

$$\phi \vee \neg\phi \text{必有一个为真}$$

定义 4 (可证明等价性(provably equivalent)). 令ϕ和ψ为命题逻辑公式，ϕ和ψ是可证明等价的当且仅当序列$\phi \vdash \psi$和$\psi \vdash \phi$都是合法的，或者$\phi \dashv\vdash \psi$