

# 数字图像处理笔记

陈鸿峥

2019.10\*

## 目录

<b>1 概述</b>	<b>2</b>
<b>2 数字图像基础</b>	<b>2</b>
2.1 人类视觉 . . . . .	2
2.2 光和电磁波谱 . . . . .	3
2.3 图像数字化 . . . . .	4
2.4 像素间基本关系 . . . . .	5
<b>3 空间域图像增强</b>	<b>6</b>
3.1 基本灰度变换 . . . . .	6
3.2 直方图 . . . . .	10
3.3 空间滤波基础 . . . . .	12
3.4 图像锐化 . . . . .	14
<b>4 频率域滤波</b>	<b>18</b>
4.1 傅里叶级数与傅里叶变换 . . . . .	18
4.2 取样函数 . . . . .	21
4.3 二维傅里叶变换 . . . . .	22
4.4 频率域滤波 . . . . .	25
4.5 总结 . . . . .	27

本课程采用书目Rafael C. Gonzalez & Richard E. Woods, *Digital Image Processing (3rd ed)*<sup>1</sup>。

---

<sup>\*</sup>Build 20191009

<sup>1</sup><http://www.imageprocessingplace.com>

# 1 概述

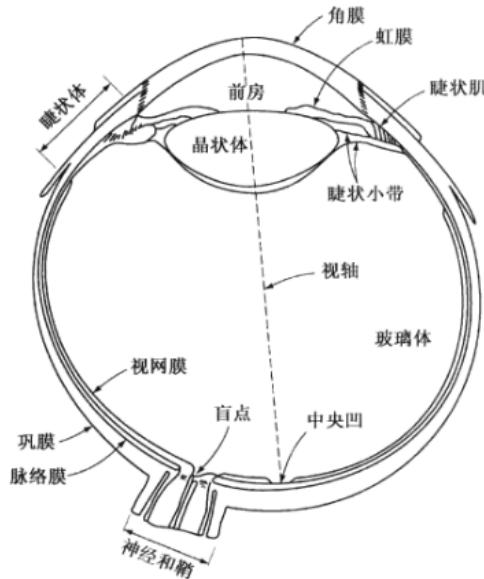
任何图像本质上就是一个二维函数， $x$ 和 $y$ 是空间坐标，在任何一对空间坐标上的函数值称为该点的强度或灰度。当 $x$ ,  $y$ 和幅值为有限的、离散的数值时，就称这个图像为数字图像。数字图像处理的输入为图像，输出为图像或图像的子集。

基本步骤：图像获取、图像滤波和增强、图像复原、彩色图像处理、小波与分辨率处理、压缩、形态学处理、分割、表示和描述、目标识别。

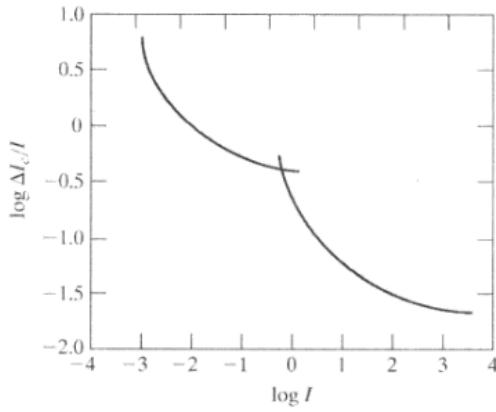
## 2 数字图像基础

### 2.1 人类视觉

- 人的视觉由眼睛中两部分光接收器（感受细胞）组成的：锥状体和杆状体。它们主要分布在视网膜的中间部分，称为中央凹，且对颜色高度敏感。

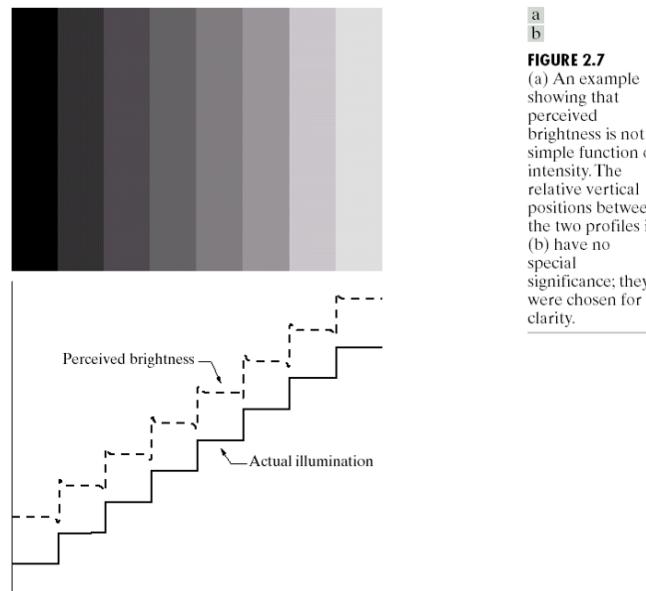


- 成像原理：与光学透镜相似，但适应性强。看远处物体，肌肉会迫使晶状体变得扁平，晶状体的聚焦中心向前移动；物体离眼睛近时，肌肉使晶状体变厚，光心向视网膜成像区域靠近。
- 具体数据：中心凹为视网膜中直径为1.5mm的圆形凹坑，或看为 $1.5\text{mm} \times 1.5\text{mm}$ 的方形传感器阵列。锥状体密度大约为 $150,000\text{个}/\text{mm}^2$ ，数量约337,000个。晶状体中心和视网膜沿视轴的距离/焦距为17mm。
- 韦伯比： $\Delta I_c/I$ ，度量人的眼睛特定的适应级别对亮度变化的辨别力。在低的照明级别，亮度辨别较差（杆状体起作用/微光视觉/暗视觉）。在背景照明增强时，亮度辨别得到明显的改善（锥状体起作用/白昼视觉/亮视觉），即对亮的东西敏感。

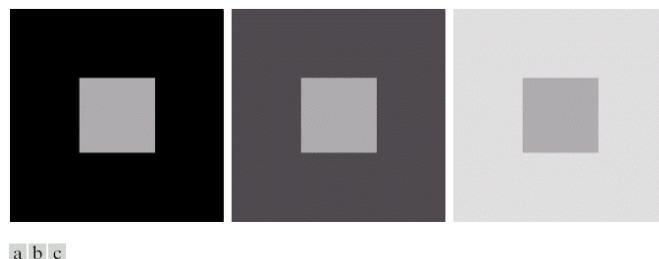


- 亮度不是简单的强度函数，下面是两个现象

- 视觉系统倾向于不同强度区域边界周围的欠调(undershoot)和过调(overshoot)



- 同时对比现象



**FIGURE 2.8** Examples of simultaneous contrast. All the inner squares have the same intensity, but they appear progressively darker as the background becomes lighter.

## 2.2 光和电磁波谱

- 波长 $\lambda$ 与频率 $v$ 关系:  $c = \lambda v$

- 没有颜色的光称为单色光/无色光，其唯一属性是它的强度。因感知单色光的强度从黑色到灰色变化，最后到白色，灰度级通常用来表示单色光的强度。

## 2.3 图像数字化

### 2.3.1 基本概念

用形如 $f(x, y)$ 的二维函数来表示图像， $0 < f(x, y) < \infty$ ，其可以用两个分量来表征

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

其中 $i(x, y) \in \mathbb{R}^+$ 为入射到被观察场景的光源照射总量， $r(x, y) \in (0, 1)$ 为场景中物体所反射的光照总量。

记单色图像在坐标 $(x_0, y_0)$ 处的强度/灰度为 $\ell = f(x_0, y_0) \in [L_{\min}, L_{\max}]$ ，通常令区间为 $[0, L - 1]$ ，其中 $\ell = 0$ 为黑色， $\ell = L - 1$ 为白色，其余中间值则为灰度色调。

图像数字化包括两个步骤

- 取样（时空域）：对坐标值进行数字化，剖分为像素，用一个像素值代替这一块， $f(x, y) \in [0, +\infty)$
- 量化（光色强度）：对幅值数字化，变为 $[0, 255]$ 之间的整数

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \cdots & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix}$$

即数字图像包括位置属性 $(x, y)$ 和像素大小 $f(x, y)$ 两个特征，用上面的二维矩阵表示，每个元素称为图像的像素，左上角为零点，向下为 $x$ 正方向，向右为 $y$ 正方向。

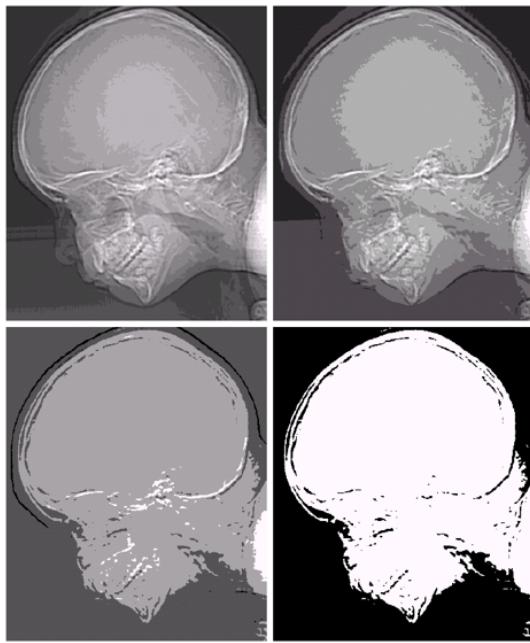
- 像素越多越精确，相当于每一块分得越细
- 计算机中字节处理最快，所以才用8位色(256位)

### 2.3.2 图像分辨率

一副数字图像占用空间 $M \times N \times k$

- 空间分辨率：图像中可分辨的最小细节，即图像大小（行×列）
- 灰度分辨率：一个像素值单位幅度上包含的灰度级数，通常是2的整数幂级数 $L = 2^k$ ，如：用一个byte存一个像素值为256级
  - 人眼对灰度分辨率的敏感程度与图像内容复杂程度有关，如更偏爱人脸，而对人群不敏感
  - 当灰度分辨率不够，会产生伪轮廓

c | f  
 g | h  
**FIGURE 2.21**  
*(Continued)*  
 (e)–(h) Image displayed in 16, 8, 4, and 2 gray levels. (Original courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology & Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)



### 2.3.3 图像缩放

将新位置放缩回原图，然后有下列方法

- 最近邻插值：将最邻近像素的灰度将其赋值给新图像中的值
- 双线性(bilinear)插值<sup>2</sup>:  $v(x, y) = ax + by + cxy + d$ , 用周围4个最邻近点进行逼近，4个系数可以用由4个最近邻点的位置方程确定。即设 $Q_{11} = (x_1, y_1), Q_{12} = (x_1, y_2), Q_{21} = (x_2, y_1), Q_{22} = (x_2, y_2)$ ，进而

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(Q_{11}) \\ f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) \\ f(Q_{22}) \end{bmatrix}$$

- 双三次内插:  $v(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$

### 2.4 像素间基本关系

定义 1 (邻域). 坐标为 $(x, y)$ 的像素 $p$ 的

- 4邻域 $N_4(p) = \{(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\}$
- 对角相邻像素 $N_D(p) = \{(x-1, y-1), (x+1, y-1), (x-1, y+1), (x+1, y+1)\}$
- 8邻域 $N_8(p) = N_4(p) \cup N_D(p)$

定义 2 (邻接性). 数字图像的邻接需要满足灰度值的邻接和物理位置的邻接。考虑 $V \subset [0, 255]$ ，有三种邻接性：

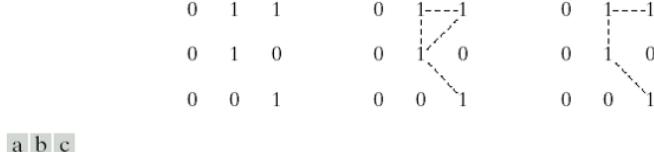
---

<sup>2</sup>注意这种方法其实不是线性的，计算方法可见<https://www.wikihow.com/Do-a-Double-Linear-Interpolation>

- 4邻接:  $q \in N_4(p)$  且  $q, p \in V$
- 8邻接:  $q \in N_8(p)$  且  $q, p \in V$
- $m$ 邻接/混合邻接: 要么(i) 4邻接, 要么(ii)  $q \in N_D(p)$  且  $N_4(p) \cap N_4(q)$  没有来自  $V$  中数值的像素

若  $S_1$  中的某些像素和  $S_2$  中的某些像素邻接, 则这两个集合是邻接的。

注意混合邻接是为了消除8邻接的二义性, 见下图。



**FIGURE 2.26** (a) Arrangement of pixels; (b) pixels that are 8-adjacent (shown dashed) to the center pixel; (c)  $m$ -adjacency.

**定义 3 (通路).** 若存在  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , 其中  $(x_0, y_0) = (x, y), (x_n, y_n) = (s, t)$  且  $(x_i, y_i)$  和  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  是 4/8 邻接的, 则称  $(x, y)$  到  $(s, t)$  有 4/8 通路。

**定义 4 (连通集).** 如果  $S$  中全部像素之间存在一个 4/8 通路, 或者说  $S$  仅有一个连通分量, 那么称  $S$  是 4/8 连通集。

**定义 5 (距离度量).** 正定性、对称性、三角不等式。图像中主要采用欧氏距离  $D_e$ 、城市街区距离 (*Manhattan*)  $D_4$ 、棋盘距离  $D_8$  (8邻域到中心点的距离都相同)。

### 3 空间域图像增强

图像增强目的是提高图像在特定应用领域的视觉质量, 包括光滑、锐化、提取边缘、反转、去噪以及各种滤波等。

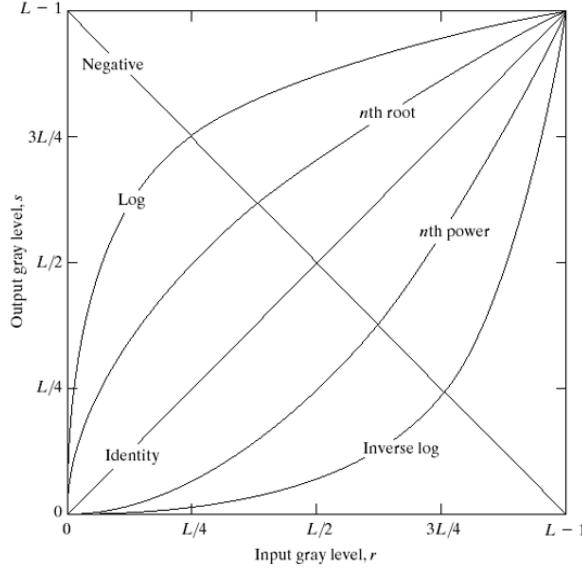
空间域图像增强的是直接对图像的像素进行操作, 基本关系式可表示如下:

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

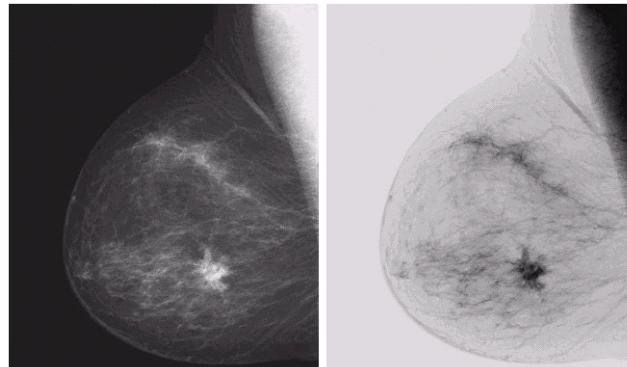
#### 3.1 基本灰度变换

- 基本灰度函数: 线形、对数、幂次

**FIGURE 3.3** Some basic gray-level transformation functions used for image enhancement.



- 图像反转变换:  $s = L - 1 - r$ , 人眼的一个特点就是在背景相对光亮时对灰度层次有较好的分辨能力。

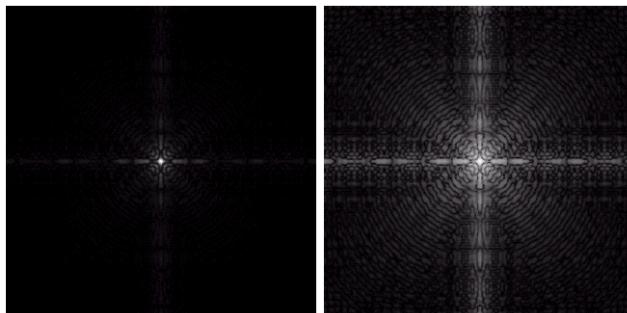


a b

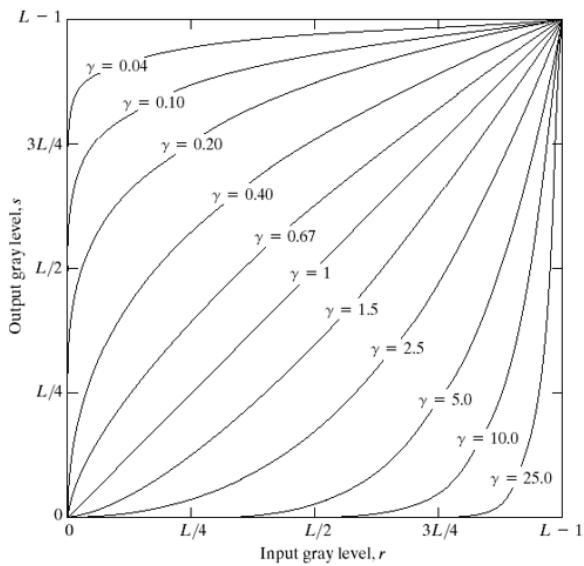
**FIGURE 3.4**  
(a) Original digital mammogram.  
(b) Negative image obtained using the negative transformation in Eq. (3.2-1).  
(Courtesy of G.E. Medical Systems.)

- 对数变换:  $s = c \log(1 + r)$ ,  $c$ 是常数,  $r \geq 0$ , 适合大范围的数据压缩。任何具有对数函数曲线形状的变换都可以完成灰度的压缩和扩展功能。

**FIGURE 3.5**  
(a) Fourier spectrum.  
(b) Result of applying the log transformation given in Eq. (3.2-2) with  $c = 1$ .

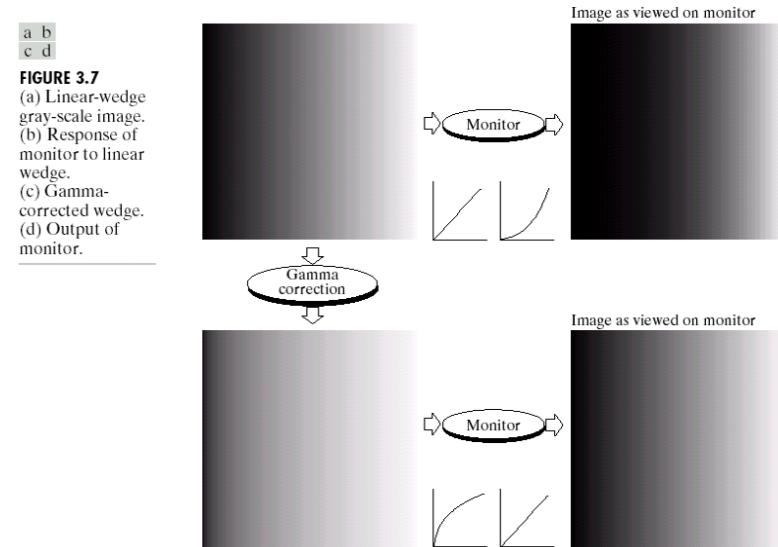


- 幂次变换:  $s = cr^\gamma$ ,  $c$ 和 $\gamma$ 都为正常数



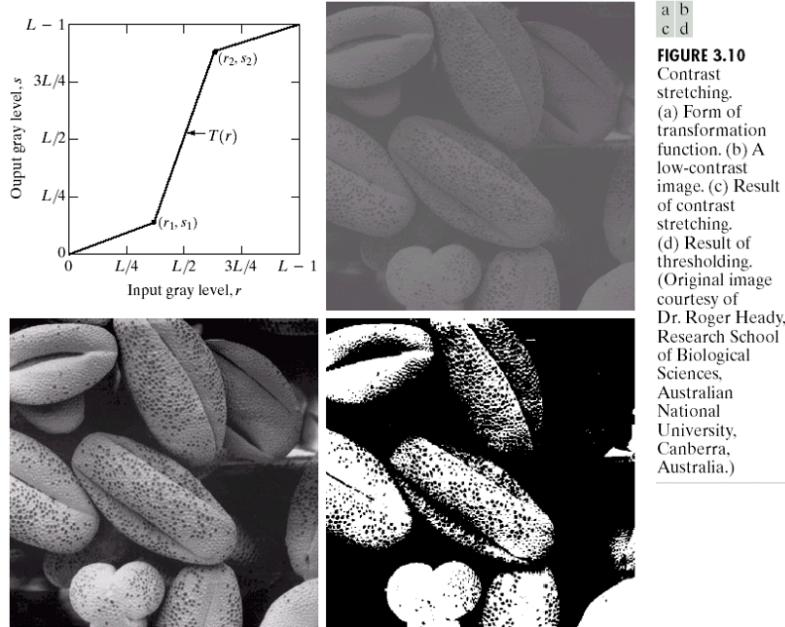
**FIGURE 3.6** Plots of the equation  $s = cr^\gamma$  for various values of  $\gamma$  ( $c = 1$  in all cases).

**伽马校正：**大量的图像设备如捕捉卡、打印机、数码相机以及显示装置的响应（输出）就对应一个幂函数，通常称这个幂函数的指数为gamma。纠正这个幂次响应的处理称为伽玛校正(gamma correction)。

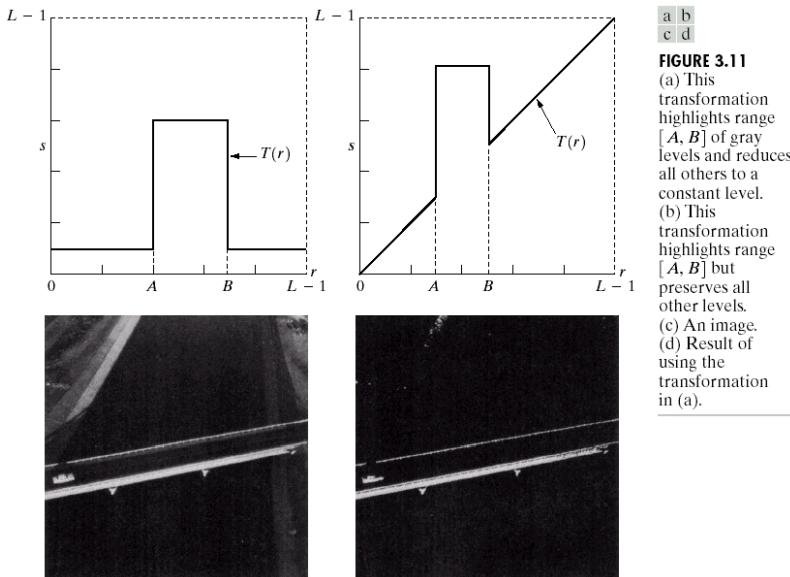


在一般的图像处理软件中，几乎都有伽玛校正的功能。这个功能可用于调整图像的对比度。如果图像偏暗，有些低灰度值的细节被掩盖时，可考虑用指数 $\gamma < 1$ 的伽玛校正（变亮）；反之， $\gamma > 1$ 的校正对那些被“漂白”的细节会起作用（变暗）。

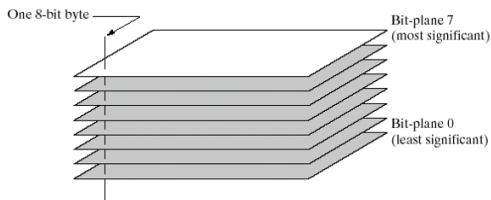
- 分段线性变换



- 灰度切割：在图像中提高特定灰度的亮度



位图切割：8位灰度图象可以分割成8个位面，每个是一个二值图像（中间切一半）。高位表示了重要的信息，低位给出了不同程度的细节。



**FIGURE 3.12**  
Bit-plane representation of an 8-bit image.

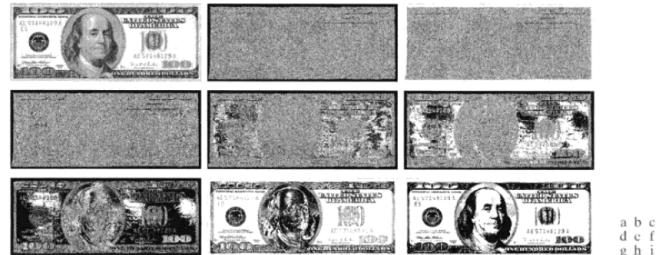


图 3.14 一幅大小为  $500 \times 1192$  像素的 8 比特灰度图像; (b)~(i) 比特平面 1 到 8, 其中比特平面 1 对应于最低阶比特。每个比特平面都是一幅二值图像

位图的作用

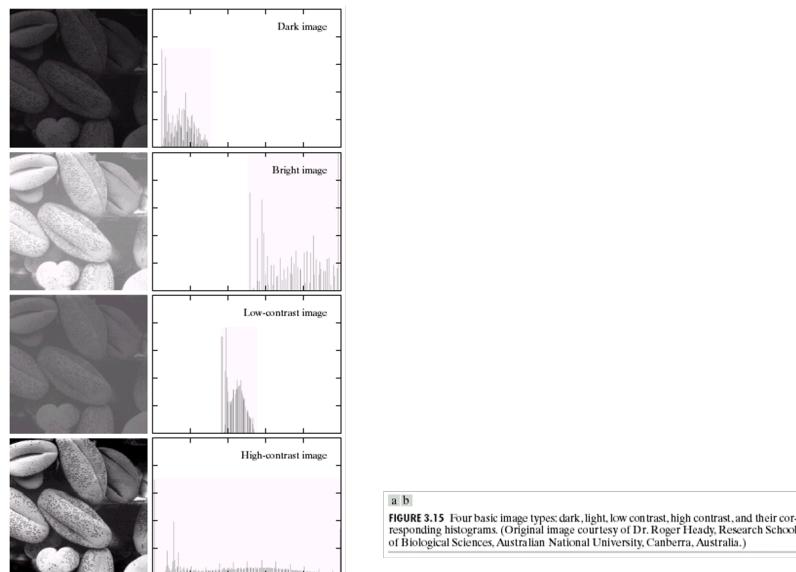
- 信息隐藏: 藏在中间位, 低位会被丢弃, 高位太清楚
- 视频传输: 先传高位, 再传低位, 逐渐清晰

## 3.2 直方图

**定义 6 (直方图).** 灰度级别为  $[0, L - 1]$  (直方图一定从 0 开始!)。数字图像直方图是离散函数  $h(r_k) = n_k$ , 其中  $r_k$  是第  $k$  级灰度,  $n_k$  是图像中灰度级为  $r_k$  的像素个数 (频数)。除以总数  $n$  就得到归一化的直方图。

### 3.2.1 直方图均衡化

有亮度差才能看到细节, 最好是均衡分布, 实现高对比度。



**FIGURE 3.15** Four basic image types, dark, light, low-contrast, high-contrast, and their corresponding histograms. (Original image courtesy of Dr. Roger Head, Research School of Biological Sciences, Australian National University, Canberra, Australia.)

直方图均衡化/线性化则是寻求一种变换使得变换后的图像具有尽可能均匀分布的直方图, 用于图像增强最大的特点是自动化, 有强大的适应性强的功能。通常需要满足下列条件:

- $T(r)$  在  $0 \leq r \leq L - 1$  中为单值且单调递增
- 当  $0 \leq r \leq L - 1$  时,  $0 \leq T(r) \leq L - 1$

步骤如下:

1. 概率  $p_r(r_k) = n_k/n, k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$

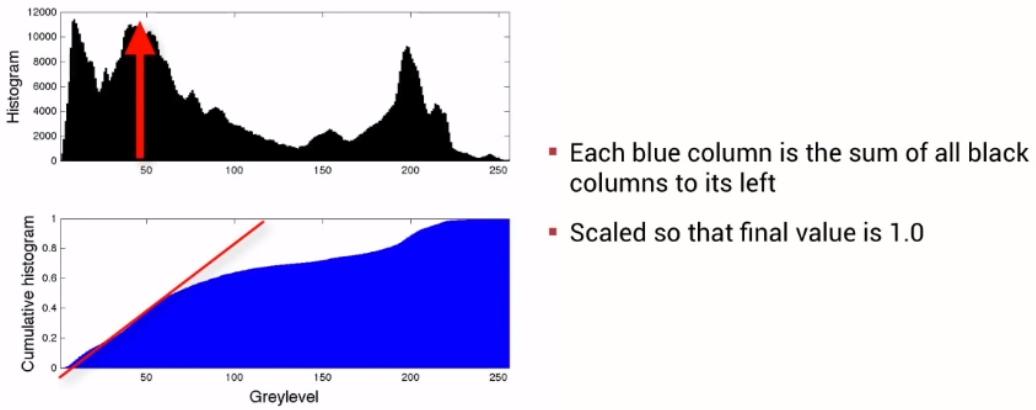
2. 累计分布函数(PDF)

$$P(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

3. 变换函数

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \cdot \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

4. 将  $s_k$  四舍五入转换为标准灰度级别，如有相同  $[s_k]$  则合并



分析. 若  $r$  为离散型随机变量， $T(r)$  为单调递增函数 ( $T^{-1}$  存在且单调)，且  $s = T(r)$ ，则由概率论有

$$p_s(s) = p_r(r) \left. \frac{\partial r}{\partial s} \right|_{r=T^{-1}(s)} = p_s(T^{-1}(s)) |T^{-1}(s)|$$

考虑变换函数为  $r$  的累积分布函数 (CDF)

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega) d\omega$$

对  $s$  求导并代入上面的式子可得  $p_s(s) = 1$ ，故实现均衡。算法实际上就是求累积分布函数，使得原本亮度小的像素能够映射到亮度大的空间。

### 3.2.2 直方图匹配

当两幅图像比对时，通常要使其直方图形式一致（如不同光照条件下的同一场景）。先是做空间归一化（伸缩、旋转），然后再做像素的归一化。

做法是使两幅图像均衡化后的结果相同，即

$$\begin{aligned}s &= T(r) = \int_0^r p_r(w) dw \\s &= G(z) = \int_0^z p_z(t) dt \\&\implies z = G^{-1}(s) = G^{-1}(T(r))\end{aligned}$$

具体步骤如下：

1. 计算出原图的直方图

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}$$

2. 给出输出图像期望的直方图  $p_z(z)$ ，并令

$$v_k = G(z_k) = (L - 1) \sum_{i=0}^k p_z(z_i) = s_k$$

3. 寻找区间  $[0, L - 1]$  的最小整数  $\hat{z}$ ，使得

$$G(\hat{z}) - s_k \geq 0$$

即由  $k$  映射到  $\hat{z}$

**定义 7** ( $n$  阶矩). 设  $p_r(r_k) = n_k/n$ ，则  $r$  的第  $n$  阶中心矩为

$$\mu_r(r_k) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - \bar{r})^n p(r_k)$$

其中  $\bar{r} = \sum_{i=1}^{L-1} r_i p(r_i)$  为  $r$  的平均值。特别地，当  $n = 2$  时为方差。

### 3.3 空间滤波基础

滤波的概念来自信号处理中的傅里叶变换，空间滤波指的是直接对图像像素进行处理的操作。滤波器(filter)有时也叫掩模(mask)、核(kernel)、模板(template)或窗口(window)。

#### 3.3.1 线性滤波

空间域线性滤波基本公式：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

常见的情况是， $a = b$  为奇数，如 1、3、5。

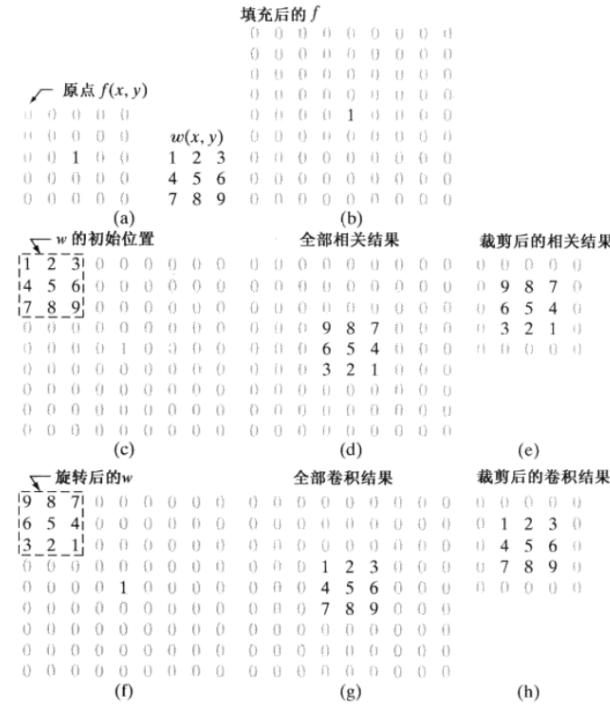
**定义 8** (相关与卷积). 一个 $m \times n$ 的滤波器 $w(x, y)$ 与 $M \times N$ 图像 $f(x, y)$ 的相关操作定义为

$$w(x, y) \circ f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

一个 $m \times n$ 的滤波器 $w(x, y)$ 与 $M \times N$ 图像 $f(x, y)$ 的卷积定义为

$$w(x, y) * f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$

其中右侧等号表示将 $f$ 旋转 $180^\circ$  (或先沿 $x$ 轴翻折, 再沿 $y$ 轴翻折)



### 空间滤波对边界的处理方法

- 重复边缘值
- 卷绕输入图像
- 补零 (最常用)
- 忽略

常用的平滑滤波器 (左侧是均值滤波)

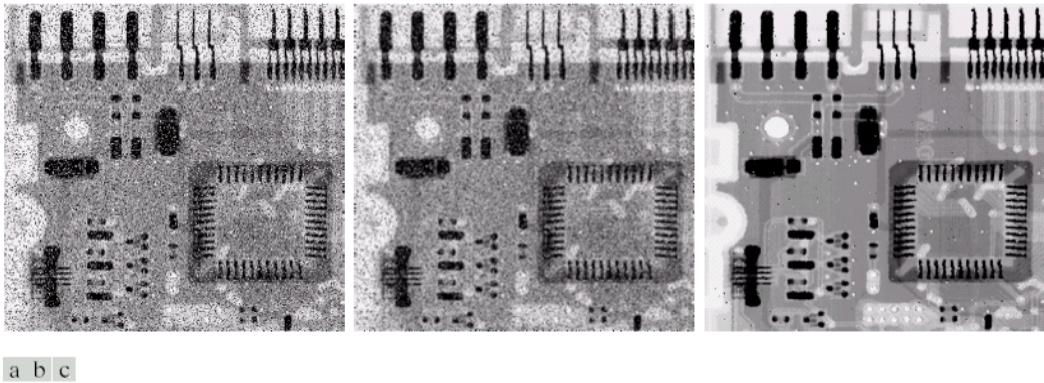
$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

1/9	1/9	1/9	1/16	1/8	1/16
1/9	1/9	1/9	1/8	1/4	1/8
1/9	1/9	1/9	1/16	1/8	1/16

### 3.3.2 非线性滤波

排序统计滤波器是一种非线性的、非卷积滤波器。排序统计滤波器在滤波器包围的像素范围内排序，然后由统计排序结果决定的值代替中心像素的值。按排序输出的位置分，可分为：中值滤波、最大值滤波、最小值滤波。

中值滤波比均值滤波更适合做椒盐噪声<sup>3</sup>的去除，因为噪声总是最大最小，故做中值滤波容易去除。



**FIGURE 3.37** (a) X-ray image of circuit board corrupted by salt-and-pepper noise. (b) Noise reduction with a  $3 \times 3$  averaging mask. (c) Noise reduction with a  $3 \times 3$  median filter. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)

同理除了中值滤波，也可以构造第 $X$ 百分点的滤波器。通常 $X < 50$ 图像趋于变暗， $X > 50$ 图像趋于变亮。

## 3.4 图像锐化

### 3.4.1 图像微分

积分运算可以做平滑，微分运算可以做锐化！ 锐化的目的即突出图像中的细节或者增强被模糊的细节。

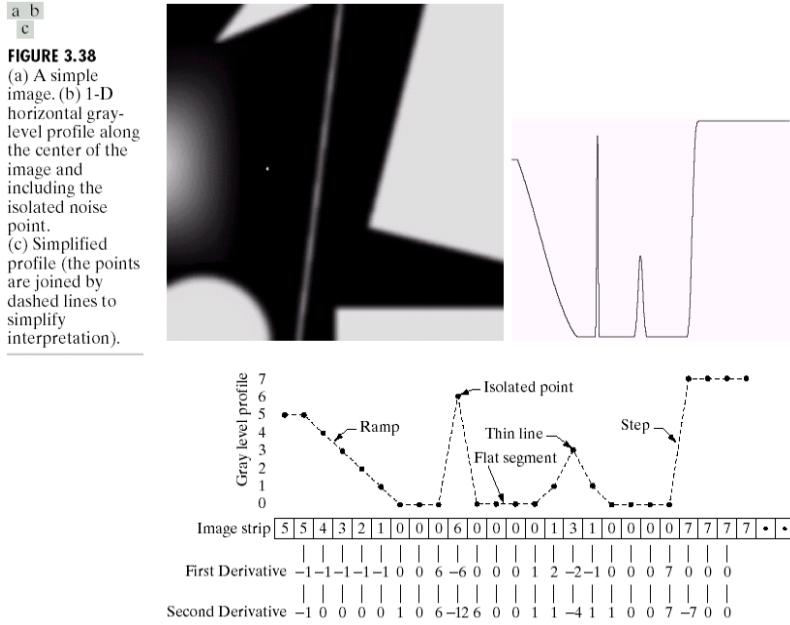
考虑离散情况

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \end{cases}$$

斜边缘、 $\delta$ /冲击边缘、阶梯边缘

---

<sup>3</sup>特别大或特别小的噪声



- 一阶微分产生较“宽”的边界，二阶微分产生较“细”的边界
  - 二阶微分处理对细节有较强的响应，如细线和孤立点
  - 一阶微分对阶梯状的灰度变化有较强的响应
  - 二阶微分在处理阶梯状灰度变化时产生双响应
  - 如果灰度的变化相似，二阶微分对线的反应比对阶梯强，对点的反应比对线强

### 3.4.2 拉普拉斯算子

**定义 9** (拉普拉斯(Laplacian)算子). 对连续函数情形, 最简单且各向同性的二阶微分算子是拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

离散情况

$$\nabla^2 = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

拉普拉斯变换目的是获得细节，加回原图像才能进行锐化。

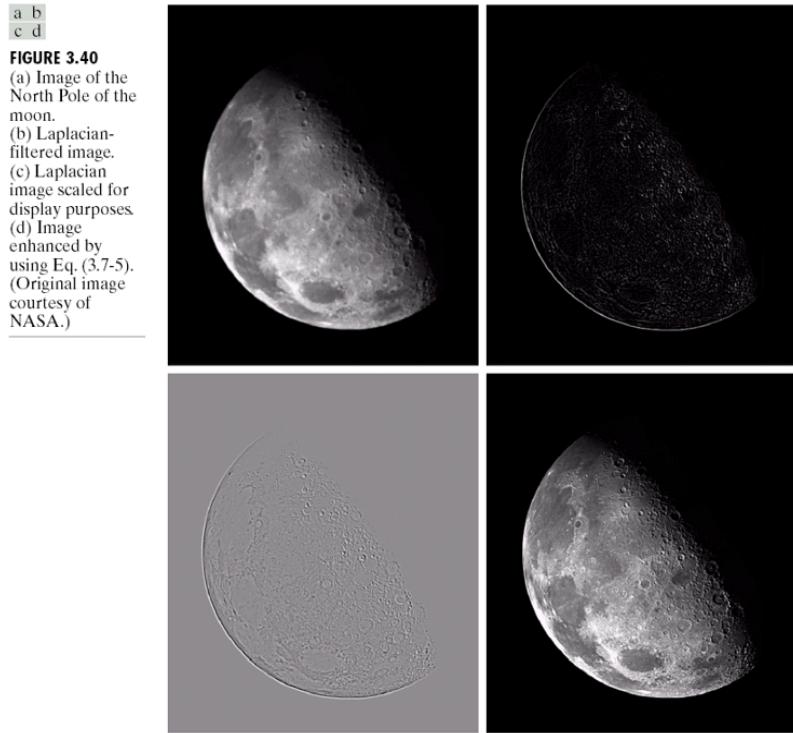
0	1	0	1	1	1	0	-1	0	-1	-1	-1
1	-4	1	1	-8	1	-1	4	-1	-1	8	-1
0	1	0	1	1	1	0	-1	0	-1	-1	-1

图 3.37 (a) 实现式(3.6-6)所用的滤波器模板; (b) 用于实现带有对角项的该公式的扩展的模板; (c)~(d) 实践中常用的其他两个拉普拉斯实现

其实直接从滤波器的表示也可以直观看出这种滤波对图像的突变有比较强的响应（即在突变的位置有较大的输出值），对灰度变化缓慢的区域滤波响应的值会变得很小（变暗）。因此，用拉普拉斯算子作

用后，产生的图像将是在暗背景上的一些灰色边线和一些突变点。若将原始图像叠加到拉普拉斯变换后的图像，既可以保护拉普拉斯锐化处理的效果，同时又能复原背景信息。拉普拉斯图像增强基本方法：

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - \nabla^2 f & \text{拉普拉斯滤波中心系数为负} \\ f(x, y) + \nabla^2 f & \text{拉普拉斯滤波中心系数为正} \end{cases}$$



**定义 10** (反锐化掩膜(unsharp masking)). 把原图的一个模糊过的图像从原图中减去，从而得到一个相对清晰的图像

$$f_s(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

就像一个模糊的负片和一个正片放在一起冲洗出相对清晰的照片

**定义 11** (高提升滤波(high-boost filtering)). 添加一个系数项  $A$  得到

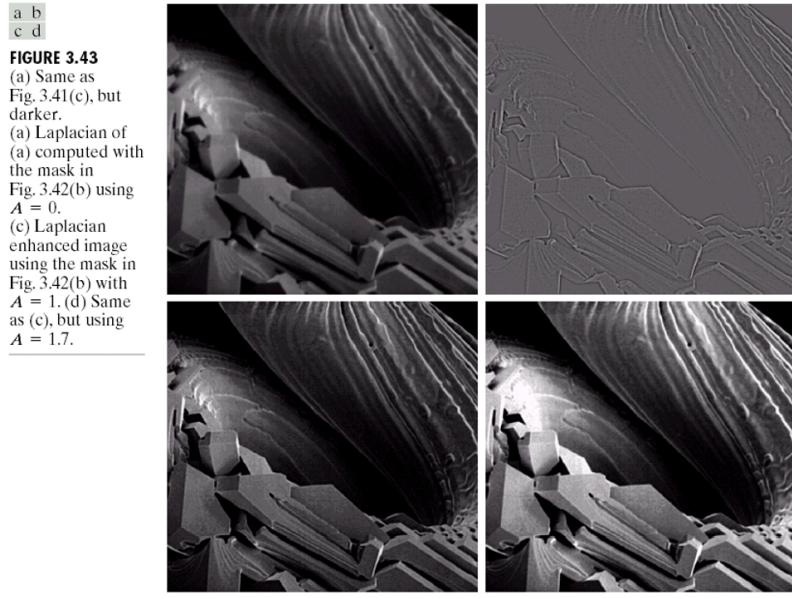
$$f_{hb}(x, y) = Af(x, y) - \bar{f}(x, y) = (A - 1)f(x, y) + f_s(x, y)$$

其中  $A \geq 1$ ，目的为提升原图亮度，前一部分调整了原图的灰度，后一部分是锐化过的图像。 $A$  越大则细节越不清晰，因为原图变亮了。

可以得到基于拉普拉斯算子的高提升滤波

$$f_{hb}(x, y) = \begin{cases} Af(x, y) - \nabla^2 f & \text{Laplacian中心系数为负} \\ Af(x, y) + \nabla^2 f & \text{Laplacian中心系数为正} \end{cases}$$

当 $A = 1$ 时就是拉普拉斯图像增强方法，当 $A$ 足够大时，锐化效果将变得不明显。



**FIGURE 3.43**  
 (a) Same as Fig. 3.41(c), but darker.  
 (a) Laplacian of (a) computed with the mask in Fig. 3.42(b) using  $A = 0$ .  
 (c) Laplacian enhanced image using the mask in Fig. 3.42(b) with  $A = 1$ . (d) Same as (c), but using  $A = 1.7$ .

### 3.4.3 梯度

一阶微分在灰度的跳跃性间断处（边界处）有较强的响应，所以在一些情况下也可以用于图像增强，常用作边缘检测。考虑二维函数的梯度

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{bmatrix} G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

定义 $L_2$ 范数/模

$$\nabla f = (G_x^2 + G_y^2)^{1/2} = \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$L_2$ 模具有各向同性的性质，但计算不方便，故常用 $L_1$ 范数做代替

$$\nabla f \approx |G_x| + |G_y|$$

注意：通常在不引起混淆的情况下，把梯度的模称为梯度。

- Robert交叉梯度算子

$$\nabla f = |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

- Sobel算子：水平边缘增强

$$\nabla f = |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|$$

**FIGURE 3.44**  
A  $3 \times 3$  region of an image (the  $z$ 's are gray-level values) and masks used to compute the gradient at point labeled  $z_5$ . All masks coefficients sum to zero, as expected of a derivative operator.

$z_1$	$z_2$	$z_3$
$z_4$	$z_5$	$z_6$
$z_7$	$z_8$	$z_9$

-1	0	0	-1
0	1	1	0

-1	-2	-1	-1	0	1
0	0	0	-2	0	2
1	2	1	-1	0	1

通常实际使用时是多种滤波器混合使用。下列表为Matlab中预定义的滤波器。

- Gaussian 低通滤波器
- Sobel 水平边缘增强滤波器
- Prewitt 水平边缘增强滤波器：将Sobel的系数绝对值全改为1
- Laplacian 近似二维拉普拉斯运算滤波器
- Log (Laplacian of Gaussian)高斯拉普拉斯滤波器
- Average 均值滤波器
- Unsharp 模糊对比增强滤波器

## 4 频率域滤波

### 4.1 傅里叶级数与傅里叶变换

**定义 12** (傅里叶级数). 设 $f(t)$ 为以 $T$ 为周期的函数，绝对可积，则 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$$

其中 $j$ 为虚数单位，

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

傅里叶级数中每一个基函数都是一个单频谐波，对应的系数/频谱表明原函数对这种频率成分贡献的大小（原函数在这个谐波上的投影）

**定义 13** (冲激/狄利克 $\delta$ 函数). 面积为1的长方形不断压扁，最后变成宽为0，高为无穷大的函数（左侧为连续情况，右侧为离散情况）

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dx = 1 \quad \sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

具有取样(*sifting*)特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dx = f(t_0) \quad \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$

**定义 14** (冲激串). 无限多个分离的周期冲激单元 $\Delta T$ 之和

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

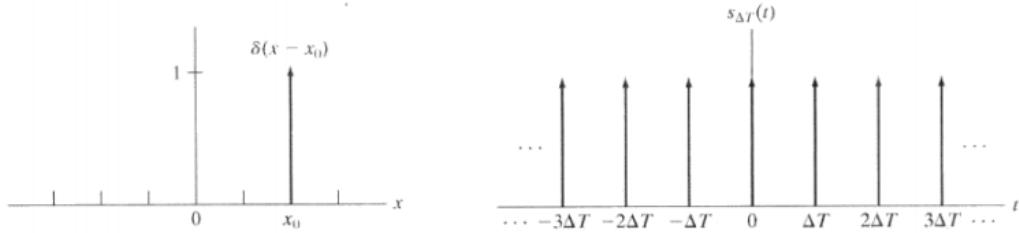


图 4.2 位于 $x = x_0$ 处的单位离散冲激。变量 $x$ 是离散的，任何不在 $x = x_0$ 处的 $\delta$ 都是 0

图 4.3 一个冲激串

**定义 15** (傅里叶变换与反变换). 连续情形的傅里叶变换(函数投影, 取负号得共轭)和反变换为

$$F(u) = \Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi ut} dt$$

$$f(t) = \Im^{-1}[F(u)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi ut} du$$

这两者构成一个傅里叶变换对。对于离散情形有

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}$$

由于傅里叶变换是 $f(t)$ 乘上正弦项的展开, 正弦项的频率由 $\mu$ 决定(变量 $t$ 已经被积分), 积分后只剩下频率, 故称傅里叶变换域是频率域。注意坐标轴已经变化了, 现在横轴为频率。

**例 1.** 矩形函数

$$f(t) = \begin{cases} A & -W/2 \leq t \leq W/2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi u t} dt \\ &= \frac{-A}{j2\pi\mu} [e^{-j2\pi\mu W} - e^{j2\pi\mu W}] \\ &= AW \frac{\sin(\pi\mu W)}{\pi\mu W} = AW \operatorname{sinc}(\mu W) \end{aligned}$$

**例 2.** 冲激的傅里叶变换 (由取样特性)

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = e^{-j2\pi\mu 0} = 1$$

而位于  $t = t_0$  的冲激傅里叶变换为

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt = e^{-j2\pi\mu t_0}$$

周期冲激串的傅里叶变换

$$S(\mu) = \Im[s_{\Delta T}(t)] = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

**定义 16 (卷积).** 连续情形有

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

离散情形有

$$f(x) * h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m) h(x - m)$$

**定理 1 (卷积定理).** 建立起空间域和频率域<sup>4</sup>的联系

$$f(t) * h(t) \iff F(\mu)H(\mu) \quad f(t)h(t) \iff F(\mu)*H(\mu)$$

即空间域两个函数卷积的傅里叶变换等于两个函数的傅里叶变换在频率域的乘积

分析.

$$\begin{aligned} \Im[f(t) * h(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi\mu t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [H(\mu) e^{-j2\pi\mu\tau}] d\tau \\ &= H(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [e^{-j2\pi\mu\tau}] d\tau \\ &= H(\mu)F(\mu) \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup> $t$ 所在的域称为空间域,  $\mu$ 所在的域称为频率域

## 4.2 取样函数

例 3. 求取样函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

的傅里叶变换

分析. 由卷积定理

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u) &= \Im[\tilde{f}(t)] = \Im[f(t)s_{\Delta T}(t)] \\ &= F(u) * S(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)S(u - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(u - \frac{n}{\Delta T}\right)\end{aligned}$$

定理 2 (奈奎斯特(Nyquist)采样定理). 如果以超过函数最高频率的两倍的采样率来获得样本，则连续的带限函数<sup>5</sup>可以完全从它的样本集恢复，即

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$

若以低于两倍的采样率来采样则会出现混淆现象

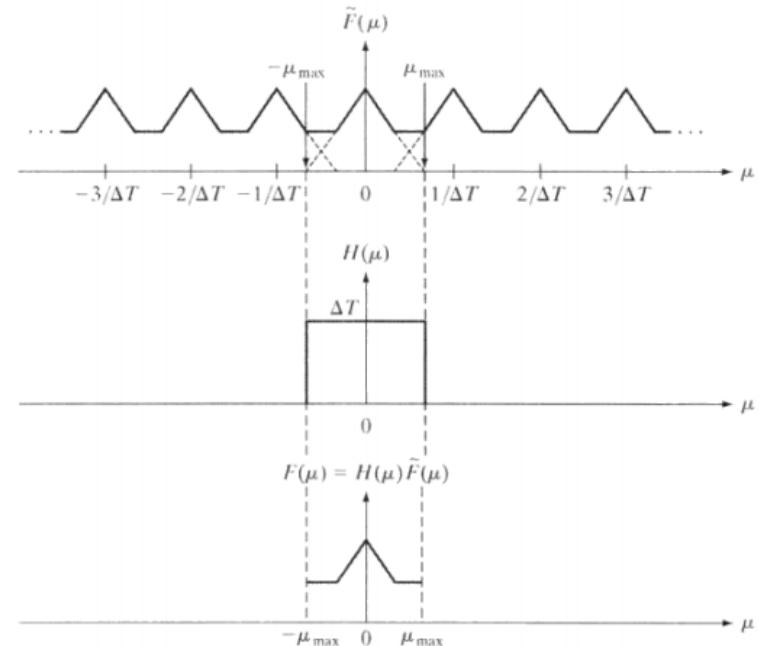


图 4.9 (a)一个欠取样带限函数的傅里叶变换(图中来自邻近周期的干扰显示为虚线)；(b)图 4.8(b)中所用的同一个理想低通滤波器；(c)图(a)和图(b)的乘积。来自邻近周期的干扰导致了混淆，而混淆妨碍了  $F(\mu)$  的完美复原，并因此妨碍了原始带限连续函数的完美复原。请与图 4.8 比较

<sup>5</sup>对于以原点为中心的有限区间（带宽）之外的频率值，其傅里叶变换为零。

由取样数据重建函数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \operatorname{sinc}\left[\frac{t-n\Delta T}{\Delta T}\right]$$

### 4.3 二维傅里叶变换

**定义 17** (二维冲激).

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & t = z = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

有取样特性

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0)$$

**定义 18** (二维离散傅里叶变换). 二维连续傅里叶变换对

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(ut+vx)} dt dz \\ f(t, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ut+vx)} du dv \end{aligned}$$

二维离散傅里叶变换对

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2j\pi(ux/M+vy/N)} \\ f(x, y) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2j\pi(ux/M+vy/N)} \end{aligned}$$

**定理 3** (二维采样定理). 二维取样基于二维冲激串

$$\tilde{f}(t, z) = f(t, z) s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

取样率需要满足

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max} \quad \frac{1}{\Delta Z} > 2v_{\max}$$

**定义 19** (傅里叶谱和相角). 由于二维DFT通常为复函数，因此用极坐标形式表示

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{j\varphi(u, v)}$$

其中幅度

$$|F(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(u, v) + \operatorname{Im}^2(u, v)}$$

称为傅里叶谱，而

$$\varphi(u, v) = \arctan \left[ \frac{\operatorname{Im}(u, v)}{\operatorname{Re}(u, v)} \right]$$

为相角，

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2$$

为功率谱

注意  $F(u, v)$  的大小只是代表某一频率分量的数目，类似于直方图的概念。频率域的坐标轴为  $u, v$ ，因此中心点为  $(0, 0)$ ，

$$F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN\bar{f}(x, y)$$

为图像的平均灰度。即  $u$  方向和  $v$  方向上最低频的位置，零点处两个方向的频率都为零，因此这个量经常也被称为频谱的直流分量(DC)。

**例 4 (陷波滤波器(notch filter))**. 使得处理后的图像均值为 0，从而使图像的整体灰度降低

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & (u, v) = (M/2, N/2) \\ 1 & others \end{cases}$$

#### 例 4.13 一个简单函数的二维傅里叶谱。

图 4.24(a) 显示了一幅简单的图像，图 4.24(b) 显示了该图像的谱，其值被标定到区间  $[0, 255]$ ，并以图像形式显示。空间域和频率域的原点都在左上角。在图 4.24(b) 中，两件事情是很明显的。如期望的那样，变换的原点的周围区域包含了最高值(在图像中表现为最亮)。然而，注意，谱的 4 个角包含有类似的高值。原因是在前一节中讨论的周期性。为中心化该谱，如式(4.6-8)指出的那样，在计算 DFT 之前，我们简单地用  $(-1)^{x+y}$  乘以 (a) 中的图像。图 4.24(c) 显示了结果，很明显它更易于观察(注意关于中心点的对称性)。由于直流项支配着谱的值，在显示的图像中，其他灰度的动态范围被压缩了。为了给出那些细节，如 3.2.2 节描述的那样，我们执行一次对数变换。图 4.24(d) 给出了  $(1 + \log|F(u, v)|)$  的显示，细节再现的提高是明显的。本章和后续几章中的多数谱均按这种方式标定过。

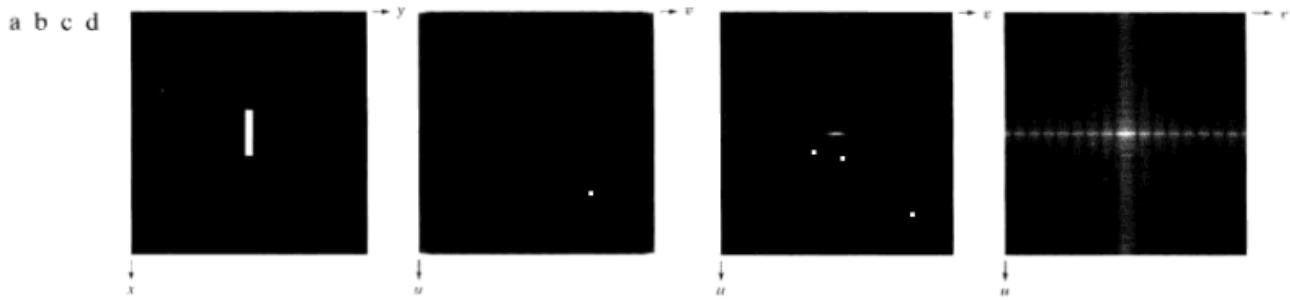


图 4.24 (a) 图像；(b) 在 4 个角显示亮点的谱；(c) 中心化后的谱；(d) 经对数变换后，增加了细节的结果。谱的零交叉在垂直方向较靠近，因为图(a)中的矩形在该方向上较长。全书所用的坐标习惯把空间域和频率域的原点放在左上角处

相角对形状起着决定性作用！灰度信息则由谱携带。

#### 例 4.14 傅里叶谱和相角的进一步说明。

图 4.27(b) 是图 4.27(a) 的 DFT 的相角。该阵列将通过视觉分析引导我们将其与对应图像中的特性关联起来。然而，在决定形状特点时，相位的重要性在图 4.27(c) 中是很明显的，它仅仅用相位信息（也就是，用公式  $|F(u, v)|=1$ ）计算式(4.6-15)的反傅里叶变换得到。尽管灰度信息已丢失了（记住，该信息由谱携带），但图像中关键的形状特性是不会在图 4.27(a) 中弄错的。

图 4.27(d) 是仅使用式(4.6-15)的谱并计算其 IDFT 得到的。这意味着若将指数项置为 1，这也同样意味着置相位角为 0，结果不会是意外的。它仅包含灰度信息，直流项占支配地位。图像中没有形状信息，因为相位已置为零了。

最后，图 4.27(e) 和(f) 再一次证明了在确定一幅图像的特性内容时相位所起的支配作用。图 4.27(e) 是使用图 4.24(a) 中矩形的谱和对应于妇女图像的相角计算式(4.6-15)的 IDFT 得到的。妇女的形状显然支配了这一结果。反之，矩形支配了图 4.27(f)，它是使用妇女图像的谱和矩形的相角计算得到的。

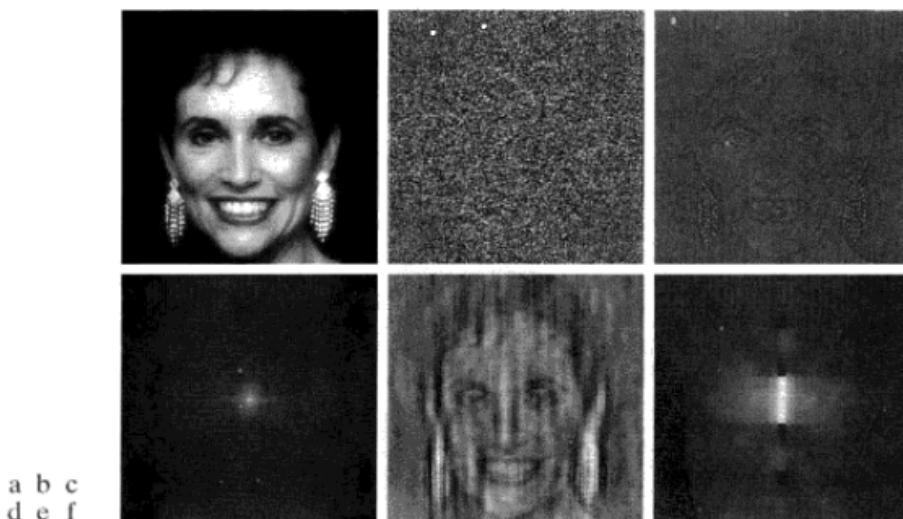


图 4.27 (a) 妇女图像；(b) 相角；(c) 仅使用相角重建的妇女图像；(d) 仅使用谱重建的妇女图像；(e) 使用对应于妇女图像的相角和对应于图 4.24(a) 中矩形的谱重建的妇女图像；(f) 使用矩形的相角和妇女图像的谱重建的图像

**定理 4** (二维卷积定理)。二维的卷积定义如下

$$f(x, y) * h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x-m, y-n)$$

同样有傅里叶变换对

$$f(x, y) * h(x, y) \iff F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y)h(x, y) \iff F(u, v) * H(u, v)$$

注意周期靠近会导致互相干扰而导致缠绕错误，因此需要进行零延拓(padding)。

假设函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 分别有 $A$ 个和 $B$ 个点组成，对这两个函数同时添加零，使其具有相同的周期

$$f_e = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \end{cases} \quad h_e = \begin{cases} h(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B \leq x \leq P \end{cases}$$

同样对于二维图像滤波，若 $f(x, y)$ 大小为 $A \times B$ ,  $h(x, y)$ 大小为 $C \times D$ , 则延拓函数

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \wedge 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \vee B \leq y \leq Q \end{cases} \quad h_e(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \wedge 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq P \vee D \leq y \leq Q \end{cases}$$

其中 $P \geq A + C - 1$ ,  $Q \geq B + D - 1$ , 通常可取 $P = 2M$ ,  $Q = 2N$ 。

**定义 20** (相关). 相关性相当于算内积

$$g(x, y) = f(x, y) \circ h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x+m, y+n)$$

**定理 5** (相关定理).

$$\begin{aligned} f(x, y) \circ h(x, y) &\iff F^*(u, v) H(u, v) \\ f^*(x, y) h(x, y) &\iff F(u, v) \circ H(u, v) \end{aligned}$$

#### 4.4 频率域滤波

之所以要到频率域做滤波，是因为直观且计算比空间滤波容易（卷积耗时）

- 低通滤波器：平滑/模糊图像，设 $D(u, v)$ 为频率域中点 $(u, v)$ 与频率矩形中心的距离， $D_0$ 为截止频率

理想(ILPF)	$n$ 阶布特沃斯(BLPF)	高斯
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$	$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$

原点在频率中心，半径为 $r$ 的圆包含的功率为

$$\alpha = \left( \sum_u \sum_v \frac{P(u, v)}{P_T} \right) \times 100\% = \left( \sum_u \sum_v \frac{P(u, v)}{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2} \right) \times 100\%$$

由于截止频率点处跳变太直接，物理无法实现，故是理想滤波器；而且会产生滤波模糊和振铃现象。一阶BLPF没有振铃，二阶BLPF振铃很小，随着阶数增高振铃增大，故通常用二阶。

- 高通滤波器： $H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$ , 锐化图像（噪声、边缘、细节），只获得高频特征，没有背景，留下细节

理想(IGPF)	$n$ 阶布特沃斯(BGPF)	高斯
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$

- 拉普拉斯滤波

$$H(u, v) = -4\pi^2 \left[ (u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right] = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

前面的系数可以去掉。拉普拉斯图像由下式给出

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathfrak{I}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

图像增强可以由下式实现

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

- 高频增强滤波：锐化/加强图像，高频增强，细节变得明显

$$\begin{aligned} F_{lp}(u, v) &= H_{lp}(u, v)F(u, v) \\ F_{hp}(u, v) &= F(u, v) - F_{lp}(u, v) \\ &= (1 - H_{lp}(u, v))F(u, v) \\ &= H_{hp}(u, v)F(u, v) \\ G(u, v) &= F(u, v) + F_{hp}(u, v) \\ &= (1 + H_{hp}(u, v))F(u, v) \end{aligned}$$

其中  $k = 1$  为钝化模板， $k > 1$  为高提升滤波

- 同态滤波器：高频增强，整个图像亮度又不能太亮（一片的亮度与低频有关） $\implies$  抑制低频/环境光，提升高频/细节

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

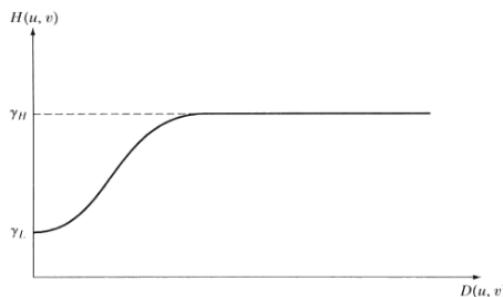
其中  $i(x, y) \in (0, \infty)$  为照射分量（影响低频，一片）； $0 < r(x, y) < 1$ ，反射率影响边缘/高频。先取对数，然后再做傅里叶变换，最后记得取指数返回

$$\ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

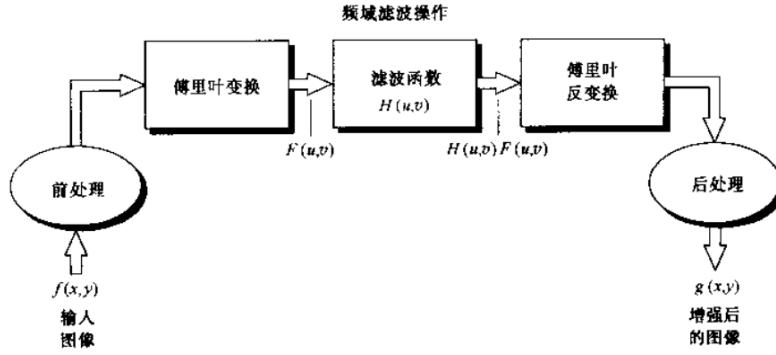
同态滤波器

$$H(u, v) = (r_H - r_L)[1 - e^{-c(D^2(u, v)/D_0^2)}] + r_L$$

其中  $c$  用于控制滤波器函数斜面的锐化， $r_L < 1$ ， $r_H > 1$



## 频率域滤波的步骤



1. 给定大小为  $M \times N$  的输入图像  $f(x, y)$ , 选择填充参数  $P = 2M, Q = 2N$
  2. 对  $f(x, y)$  添加必要的0, 形成大小为  $P \times Q$  的填充后的图像  $f_p(x, y)$
  3. 用  $(-1)^{x+y}$  乘以  $f_p(x, y)$ , 做频谱中心化处理
  4. 用上面结果计算DFT, 得到  $F(u, v)$
  5. 生成一个实对称的滤波函数  $H(u, v)$ , 大小为  $P \times Q$ , 中心在  $(P/2, Q/2)$  处。用阵列相乘得到  $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$
  6. 计算上式得到的IDFT, 并恢复原图像
- $$g_p(x, y) = \text{Re}[\Im[G(u, v)]](-1)^{x+y}$$
7. 通过从  $g_p(x, y)$  的左上角提取  $M \times N$  大小的区域, 得到最终结果  $g(x, y)$

## 4.5 总结

傅里叶变换的一些性质

- 线性性:

$$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \iff aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$$

- 平移性质:

$$\begin{aligned} f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} &\iff F(u - u_0, v - v_0) \\ f(x - x_0, y - y_0) &\iff F(u, v)e^{-2j\pi(x_0u/M+y_0v/N)} \end{aligned}$$

特别地, 平移到频率矩形中心  $(M/2, N/2)$

$$\begin{aligned} f(x, y)(-1)^{x+y} &\iff F(u - M/2, v - N/2) \\ f(x - M/2, y - N/2) &\iff F(u, v)(-1)^{u+v} \end{aligned}$$

- 旋转性质: 使用极坐标  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, u = \omega \cos \varphi, v = \omega \sin \varphi$ , 有

$$f(r, \theta + \theta_0) \iff F(\omega, \varphi + \varphi_0)$$

- 周期性:

$$F(u, v) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$$

$$f(x, y) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$$

- 对称性: 实函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换是共轭对称/哈密特对称的

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

而虚函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换是共轭反对称的

$$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$$

- 可分性: 2D-FFT 可变成两个1D-FFT

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \left( \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi ux/M} \right) e^{-j2\pi vy/N}$$

常见函数的傅里叶变换

离散单位冲激	$\delta(x, y) \iff 1$
矩形函数	$\text{rect}[a, b] \iff ab \frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua} \frac{\sin(\pi ub)}{\pi ub} e^{-j\pi(ua+vb)}$
正弦函数	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \iff j\frac{1}{2}[\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
余弦函数	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \iff j\frac{1}{2}[\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
微分	$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \iff (ju)^n F(u), \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \iff (j2\pi u)^m (j2\pi v)^n F(u, v)$
高斯	$A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \iff A e^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$

用前向变换计算傅里叶反变换, 以消除两套冗余电路

$$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$