

人工智能笔记

陈鸿峥

2019.12*

目录

1	简介	2
1.1	概述	2
1.2	历史	2
2	搜索	3
2.1	无信息搜索	3
2.2	有信息搜索	6
2.3	博弈树搜索	8
3	限制可满足性问题	10
3.1	回溯(backtracking)搜索	11
3.2	向前检测	11
3.3	一般性边一致性(GAC)	12
4	知识表示与推理	13
5	确定性规划	15
5.1	情景演算	15
5.2	STRIPS	16
5.3	松弛问题	16
6	不确定性规划	17
6.1	基础知识	17
6.2	贝叶斯网络	18

*Build 20191231

7 机器学习	22
7.1 决策树	22
7.2 贝叶斯学习	22
7.3 聚类算法	23
7.4 神经网络	23
7.5 强化学习	24

1 简介

1.1 概述

- 1997 Deep Blue
- 2011 IBM Watson
- 2016 Google DeepMind

什么是AI?

- 像人类一样思考(thinking humanly): 中文屋子
- 理智思考(thinking rationally)
- 像人类一样行为(acting humanly): 图灵测试(1950)
- 理智行为(acting rationally)

常见术语

- 强AI: 机器像人类一样思考
- 弱AI: 机器有智能的行为
- 通用AI(AGI): 能够解决任何问题
- 窄AI: 专注于某一特定任务

不以模拟人类作为实现人工智能的最好方法

- 计算机和人类的体系结构不同: 数值计算、视觉、并行处理
- 对人类大脑的了解太少了!

1.2 历史

- 1950-70: Early excitement, great expectations
 - Samuel(1952)跳棋程序
 - Newell(1955)逻辑理论家
 - Dartmouth会议(1956): AI诞生

- 1970-90: Knowledge is power
- 1990-: rise of machine learning "AI Spring"
- 2010-: Deep learning

2 搜索

搜索主要包括无信息(uninformed)搜索和有信息搜索。

- 状态空间(state space)
 - 传统搜索：状态空间可见、动作确定性
 - 非传统搜索：局部搜索、模拟退火、爬坡
- 动作(action)：不同状态之间的转换
- 初始状态(initial state)
- 目标/期望(goal)

树搜索，边界集(frontier)是未探索的状态集合

Algorithm 1 Tree Search

```

1: procedure TREESearch((Frontier, Successors, Goal?))
2:   if Frontier is empty then
3:     return failure
4:   Curr = select state from Frontier
5:   if Goal?(Curr) then
6:     return Curr
7:   Frontier' = (Frontier - {Curr})  $\cup$  Successors(Curr)
8:   return TreeSearch(Frontier', Successors, Goal?)

```

搜索需要关注的几个特性：

- 完备性：若解存在，搜索是否总能找到解
- 最优性：是否总能找到最小代价的解
- 时间复杂性：最大需要被生成或展开¹的结点数
- 空间复杂性：最大需要被存储在内存中的结点数

2.1 无信息搜索

2.1.1 宽度优先搜索(BFS)

将后继加入边界集的后面， b 为最大状态后继数目/分支因子(branching factor)， d 为最短距离解的行动数（注意是**边数**，而不是**层数**！）

¹而不是探索的结点数目

- 完备性与最优性：所有短路总在长路前被探索，某一长度只有有限多条路径，最终可以检测所有长度为 d 的路径，从而找到最优解
- 时间复杂度： $1 + b + b^2 + \dots + b^d + (b^d - 1)b = O(b^{d+1})$ ，最差情况在最后一层的最后一个节点才探索到最优解，从而前面 b 个节点都要展开第 $d + 1$ 层
- 空间复杂度： $b(b^d - 1) = O(b^{d+1})$ ，需要将边界集都存储下来

2.1.2 深度优先搜索(DFS)

将后继加入边界集的前面，即总是展开边界集中最深的节点

- 完备性
 - 无限状态空间：不能保证
 - 有限状态空间无限路径：不能保证
 - 有限状态空间+路径/重复状态剪枝：可以保证
- 最优性：因完备性不能保证，故最优性也不能保证
- 时间复杂性： $O(b^m)$ ，其中 m 为状态空间的最长路的长度（若 $m \gg d$ ，则非常糟糕；但如果有大量解路径，则会快于BFS）
- 空间复杂性： $O(bm)$ ，线性空间复杂性是DFS最大的优点。边界集只包含当前路径的最深节点以及回溯节点（backtrack points为当前路径上节点的未探索的兄弟sibling）

2.1.3 一致代价(Uniform-cost)

一致代价搜索(Uniform cost search, UCS)²的边界集以路径开销升序排序，总是先展开最低开销的路径。如果每一个动作都是一样的代价，则一致代价等价于BFS。

- 完备性与最优性：假设所有转移都有代价 $\geq \varepsilon > 0$ ，所有更低代价的路径都在高代价路径之前被展开，只有有限多的路径开销小于最优解的开销，故最终一定会到达最优解
- 时间复杂性： $O(b^{C^*/\varepsilon+1})$ ，对应着BFS中 $d = C^*/\varepsilon$ ，其中 C^* 为最优解的开销，最坏情况就是每一层开销都很小为 ε
- 空间复杂性： $O(b^{C^*/\varepsilon+1})$

2.1.4 深度受限搜索(Depth-limited)

执行只在最大深度执行DFS，因此无穷路径长不会存在问题

- 完备性与最优性：不能保证，若解的深度大于 L
- 时间复杂度： $O(b^L)$
- 空间复杂度： $O(bL)$

²至于为什么叫Uniform，可以看<https://math.stackexchange.com/questions/112734/in-what-sense-is-uniform-cost-search-uniform>和<https://cs.stackexchange.com/questions/6072/why-is-uniform-cost-search-called-uniform-cost-search>，比较合理的解释是到达同一结点的cost都被认为是相同的（寻找最优解时）。一致的算法总是选择边界集中第一个元素。

2.1.5 迭代加深搜索(Iterative Deepening)

迭代加深搜索(Iterative Deepening Searching, IDS)逐渐增加最大深度 L ，对每一个 L 做深度受限搜索

- 完备性：可以保证
- 最优性：如果开销一致³，则可以保证
- 时间复杂性： $(d+1)b^0 + db + (d-1)b^2 + \dots + b^d = O(b^d)$ ，第0层搜了 $(d+1)$ 次，可以看到时间复杂度是比BFS优的
- 空间复杂性： $O(bd)$ ，同DFS

2.1.6 双向搜索(Bidirectional)

从源结点和汇结点同时采用BFS，直到两个方向的搜索汇聚到中间。

- 完备性：由BFS保证
- 最优性：若一致代价则可保证
- 时间复杂性： $O(b^{d/2})$
- 空间复杂性： $O(b^{d/2})$

2.1.7 环路/路径检测

- 环路(cycle)检测：检测当前状态是否与已探索的状态重复(BFS)
- 路径(path)检测：只检测当前状态是否与该路径上的状态重复(DFS)

注意不能将环路检测运用在BFS上，因为开销太大。

环路检测运用到UCS上依然可以保证最优性⁴。因为UCS第一次探索到某一状态的时候已经发现最小代价路径，因而再次探索该状态不会发现路径比原有的更小。

2.1.8 总结

	BFS	UCS	DFS	Depth-limited	IDS	Bidirectional
完备性	✓	✓	✗	✗	✓	✓
时间复杂度	$O(b^d)$	$O(b^{\lfloor C^*/\varepsilon \rfloor + 1})$	$O(b^m)$	$O(b^l)$	$O(b^d)$	$O(b^{d/2})$
空间复杂度	$O(b^d)$	$O(b^{\lfloor C^*/\varepsilon \rfloor + 1})$	$O(bm)$	$O(bl)$	$O(bd)$	$O(b^{d/2})$
最优性	✓	✓	✗	✗	✓	✓

例 1. N 个传教士和 N 个食人族要过河，他们都在河的左岸。现在只有一条船能够运载 K 个人，要把他们都运往右岸。要满足无论何时何地，传教士的数目都得大于等于食人族的数目，或者传教士数目为0。

分析. 考虑对问题形式化为搜索问题

³若开销不一致，则可以采用代价界(cost bound)来代替：仅仅展开那些路径开销小于代价界的路径，同时要记录每一层深搜的最小代价。这种方式的搜索开销会非常大，有多少种不同路径开销就需要多少次迭代循环。

⁴注意这在启发式搜索中不一定成立

- 状态 (M, C, B) ，其中 M 为左岸传教士数目， C 为左岸食人族数目， $B = 1$ 指船在左岸
- 动作 (m, c) 指运 m 个传教士和 c 个食人族到对岸
- 先决条件：传教士数目和食人族数目满足限制
- 效果： $(M, C, 1) \xrightarrow{(m,c)} (M - m, C - c, 0)$
 $(M, C, 0) \xrightarrow{(m,c)} (M + m, C + c, 1)$

2.2 有信息搜索

在无信息搜索中，我们从不估计边界集中最有期望(promising)获得最优解的结点，而是无区别地选择当前边界集中第一个结点。然而事实上，针对不同问题我们是有对结点的先验知识(apriori knowledge)的，即从当前结点到目标结点的开销有多大。而这就是有信息搜索(informed)，或者称为启发式搜索(heuristics)。

关键在于领域特定启发式函数 $h(n)$ 的设计，它估计了从结点 n 到目标结点的开销(cost)。注意满足目标状态的结点 $h(n) = 0$ 。

2.2.1 贪心最优搜索(Greedy Best-First Search)

直接使用 $h(n)$ 对边界集进行排序，但这会导致贪心地选择看上去离目标结点开销最小的路径。

如果存在环路，贪心最优搜索是不完备的，会陷入死循环。

2.2.2 A*搜索

综合考虑当前已走的开销和未来估计的开销。定义一个估值函数

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

其中 $g(n)$ 为路径到节点 n 的代价， $h(n)$ 为从 n 到目标节点的代价，采用 $f(n)$ 对边界集内的节点进行排序。

$f(n)$ 需要满足下列两个性质。

定义 1 (可采纳的(admissibility)). 假设所有代价 $c(n_1 \rightarrow n_2) \geq \varepsilon > 0$ ，令 $h^*(n)$ 为从 n 到目标节点 ∞ 的最优解⁵，若

$$\forall n: h(n) \leq h^*(n)$$

则称 $h(n)$ 是可采纳的。即一个可采纳的启发式函数总是低估了当前结点到目标结点的真实开销（这样才能保证最优解不被排除）。

定义 2 (一致性(consistency)/单调性(monotonicity)). 若对于所有的结点 n_1 和 n_2 ， $h(n)$ 满足（三角不等式）

$$h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow n_2) + h(n_2)$$

则称 $h(n)$ 是单调的。

⁵如果没有路径则 $h^*(n) = \infty$

定理 1. 一致性蕴含可采纳性

分析. 分类讨论

- 当结点 n 没有到目标结点的路径, 则 $h(n) \leq h^*(n) = \infty$ 恒成立
- 令 $n = n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow \dots \rightarrow n_k$ 为从结点 n 到目标结点的最优路径, 则可以用数学归纳法证明 $\forall i$:
 $h(n_i) \leq h^*(n_i)$, 如下从后往前推

$$h(n_i) \leq c(n_i \rightarrow n_{i+1}) + h(n_{i+1}) \leq c(n_i \rightarrow n_{i+1}) + h^*(n_{i+1}) = h^*(n_i)$$

定理 2. 可采纳性蕴含最优性

分析. 假设最优解有开销 C^* , 则任何最优解一定会在开销大于 C^* 的路径之前被展开。因此在最优解展开之前的路径一定有开销 $\leq C^*$, 最终我们一定会检测到最优解, 而且次优解不会在最优解之前被检测。

做环检测可能导致找不到最优解

但如果满足单调性, 有以下几个性质

命题 1. 路径上的 f 一定是非递减的

分析.

$$\begin{aligned} f(n) &= g(n) + h(n) \\ &\leq g(n) + c(n \rightarrow n') + h(n') \\ &= g(n') + h(n') \\ &= f(n') \end{aligned}$$

命题 2. 如果 n_2 在 n_1 之后被扩展, 则 $f(n_1) \leq f(n_2)$

分析. n_2 在边界上 n_1

命题 3. 当 n 在任何小于 f 值得路径之前被展开

分析.

命题 4. A^* 算法第一次展开某个状态时, 它已经找到了到达那个状态的最小开销路径。

分析.

若满足单调性, 则进行环检测不会破坏最优性

2.2.3 迭代加深 A^* (IDA)算法

A^* 算法有和BFS或UCS同样的空间复杂性问题, 而迭代加深 A^* 算法同样解决空间复杂度的问题

2.2.4 构造启发式函数

常常需要考虑一个更加简单的问题，然后让 $h(n)$ 为到达一个简单问题解的开销

例 2. 现有积木若干，积木可以放在桌子上，也可以放在另一块积木上面。有两种操作：

1. $\text{move}(x,y)$: 把积木 x 放到积木 y 上面，前提是积木 x 和积木 y 上面都没有其他积木
2. $\text{moveToTable}(x)$: 把积木 x 放到桌子上，前提是积木 x 上面无其他积木，且积木 x 不在桌子上

设计一个可采纳的启发式函数 $h(n)$

分析. $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$

2.3 博弈树搜索

博弈的一些前提

- 两个博弈玩家
- 离散值：游戏和决策都可以映射到离散空间
- 有限的：只有有限的状态和可能的决策
- 零和博弈：完全竞争，即如果一个玩家胜利，则另外一个失去同样数量的收益
- 确定性的：没有牵涉到概率性事件，如色子、抛硬币等
- 完美信息博弈：状态的所有方面都可以被完全观察，即没有隐藏的卡牌

剪刀石头布是简单的一次性(one-shot)博弈

- 一次移动
- 在博弈论中称为策略或范式博弈(strategic/normal form)

但很多游戏是牵涉到多步操作的

- 轮回(turn-taking)游戏，如棋类
- 在博弈论中称为扩展形式博弈(extensive form)

两个玩家 A （最大化己方收益）和 B （最小化对方收益）

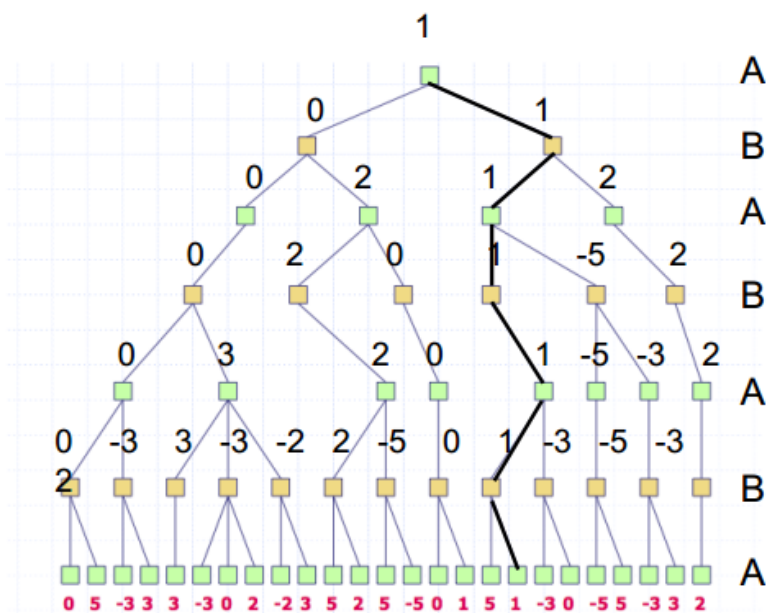
- 状态集合 \mathcal{S}
- 初始状态 $I \in \mathcal{S}$
- 终止位置 $T \subset \mathcal{S}$
- 后继：下一可能状态的集合
- 效益(utility)/收益(payoff)函数 $V : T \mapsto \mathbb{R}$ ，表明终止状态对 A 玩家有多好，对 B 玩家有多坏（都站在 A 角度给出）

minimax算法：自己选max，对方选min

- 构建整棵博弈树，然后将终止/叶子结点标上收益

- 回溯整棵树，然后将每个结点都标记上收益

$$U(n) = \begin{cases} \min\{U(c) : c \text{ is a child of } n\} & n \text{ is a Min node} \\ \max\{U(c) : c \text{ is a child of } n\} & n \text{ is a Max node} \end{cases}$$



用DFS可以遍历整棵树，同时保持线性的空间复杂度，每次回溯时更新结点为min/max即可
 α - β 剪枝

- 只要当前Max结点的值 \geq 祖先某一Min结点的值，就可以在该Max结点上做 α 剪枝
- 只要当前Min结点的值 \leq 祖先某一Max结点的值，就可以在该Min结点上做 α 剪枝

可以证明，如果原始情况需要访问 $O(b^D)$ 个结点，则经过 α - β 剪枝后只需访问 $O(b^{D/2})$ 个结点。

但在现实生活的游戏中，即使采用了 α - β 剪枝，博弈树也太过庞大。如棋类的分支因子大致是35，深度为10的树已经到 2.7×10^{14} 个结点。因此不能将整棵博弈树展开，需要采用一些启发式方式进行估计。

评价函数(evaluation)的一些需求：

- 对于终止状态，评价函数的序应与真实的收益函数相同
- 对于非终止状态，评价函数则应该与真实的胜率相关联
- 计算时间不能花太长
- 通常取多个特征，然后进行加权求和（先验知识）

在线(online)/实时(real-time)搜索

- 没有办法展开全部的边界集，因此限制展开的大小（在没找到去目标的真实路径就做出决定/直接选一条路就开始走）
- 在这种情况下，评价函数不仅仅引导搜索，更是提交真实的动作
- 虽然找不到最优解，但是求解时间大大缩减

Algorithm 2 Alpha-Beta Pruning

```
1: procedure ALPHABETA(n,Player,alpha,beta)
2:   if n is TERMINAL then
3:     return V(n)                                ▷ Return terminal states utility
4:   ChildList = n.Successors(Player)
5:   if Player == MAX then
6:     for c in ChildList do
7:       alpha = max(alpha, AlphaBeta(c,MIN,alpha,beta))
8:       if beta ≥ alpha then
9:         break
10:    return alpha
11:  else                                          ▷ Player == MIN
12:    for c in ChildList do
13:      beta = min(beta, AlphaBeta(c,MAX,alpha,beta))
14:      if beta ≤ alpha then
15:        break
16:    return beta                                ▷ Initial call: AlphaBeta(START-NODE,Player, $-\infty$ , $+\infty$ )
```

3 限制可满足性问题

在搜索问题中，状态表示是个黑箱，可以有多种多样的方法来表达。但实际上我们可以有特定的状态表示方法来解决大量不同的问题，在这种情况下的搜索算法可以变得很高效。

限制可满足性问题(Constraint Satisfaction Problem, CSP)指每一个状态都可以用一组特征值向量表示的问题。

- k 个特征/变量的集合 V_1, \dots, V_n
- 每一个变量都有一个包含有限值的论域 $\text{dom}[V_i]$ ，如

$$\text{height} = \{\text{short}, \text{average}, \text{tall}\}$$

- 一组限制条件 C_1, \dots, C_m
 - 每个限制条件都有一个作用域(scope)，表示作用在什么变量上，如 $C(V_1, V_2, V_4)$
 - 相当于一个布尔函数，从变量赋值到布尔值的映射，如

$$C(V_1 = a, V_2 = b, V_4 = c) = \text{True}$$

- 布尔函数可以以表形式给出，或以表达式形式给出，如 $C(V_1, V_2, V_4) = (V_1 = V_2 + V_4)$
 - 一个状态可以通过给每一个变量赋值得到
- CSP不关心到目标状态的移动步骤，而只关心是否存在这样一组变量满足目标。

3.1 回溯(backtracking)搜索

对每一个变量分别赋值，深搜方式，同时结合启发式函数，用于在每一步选择不同的赋值变量。

```
BT(Level)
  If all variables assigned
    PRINT Value of each Variable
    RETURN or EXIT (RETURN for more solutions)
                    (EXIT for only one solution)
  V := PickUnassignedVariable()
  Assigned[V] := TRUE
  for d := each member of Domain(V) (the domain values of V)
    Value[V] := d
    ConstraintsOK = TRUE
    for each constraint C such that
      a) V is a variable of C and
      b) all other variables of C are assigned:
          ;(rarely the case initially high in the search tree)
      IF C is not satisfied by the set of current
        assignments:
          ConstraintsOK = FALSE
    If ConstraintsOk == TRUE:
      BT(Level+1)

  Assigned[V] := FALSE //UNDO as we have tried all of V's values
  return
```

回溯的问题在于不能提前探测到某一变量已经没有可以赋值了，导致依然要进入一层进行搜索。因此考虑前瞻式算法，即限制传播(propagation)。

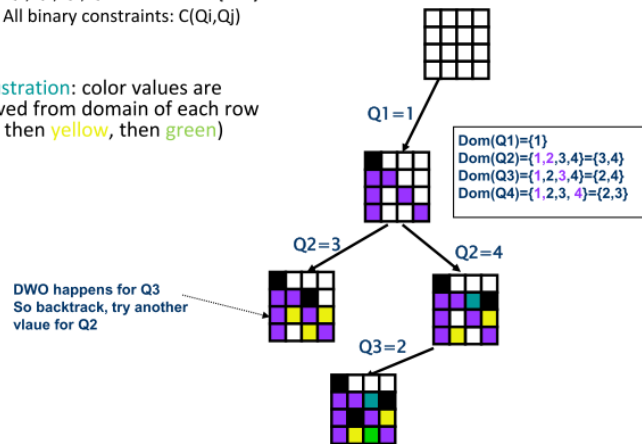
- 甚至可以在还未进行搜索之前就采用
- 传播本身需要耗费资源，因此这里存在一个权衡

3.2 向前检测

1. 选择一个未被赋值的变量 V 。这里可以采用最小剩余值(Minimum Remaining Values, MRV)作为启发式函数，即先选论域小的变量。
2. 选择论域 $\text{dom}[V]$ 中的值对 V 进行赋值 d
3. 将 d 向前传递给含有 V 的限制 C ，主要考察那些只剩一个未赋值变量 X 的限制
4. 检测 $\text{FCCheck}(C, X)$ 是否出现论域清空(Domain Wipe Out, DWO)，即 X 没得选值了。这里 FCCheck 做的则是核心的限制传播部分，当 $V = d$ 后把 X 不能取的值删去
5. 如果不出现DWO，则进入下一层（选择新的未赋值变量赋值）
6. 否则需要恢复当层 FCCheck 剪枝的部分，即 d 不可取， V 要重新取值

- 4X4 Queens
 - Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 with domain $\{1..4\}$
 - All binary constraints: $C(Q_i, Q_j)$

- FC illustration: color values are removed from domain of each row (blue, then yellow, then green)



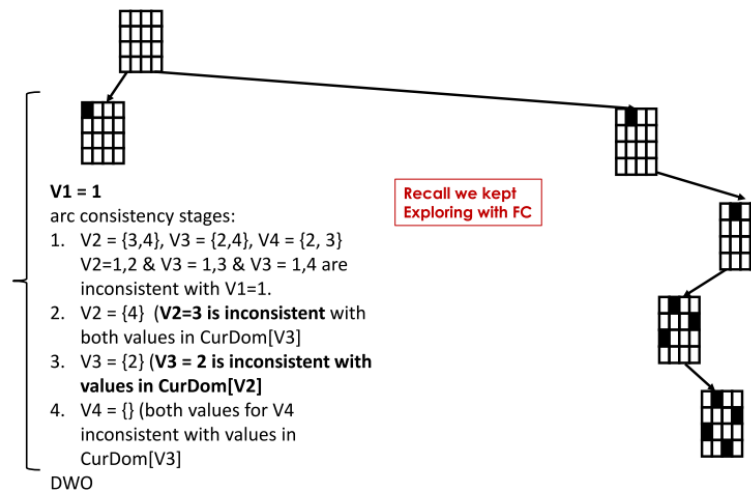
3.3 一般性边一致性(GAC)

定义 3 (一致). 限制 $C(X, Y)$ 是一致的, 当且仅当对于所有 X 的值都存在某些 Y 满足 C , 即 $\forall X \exists Y : C(X, Y)$ 。

定义 4 (一般性边一致性(Generalized Arc Consistency, GAC)). 限制 $C(V_1, V_2, \dots, V_n)$ 是关于 V_i 边一致的, 当且仅当 $\forall V_i, \exists V_1, \dots, V_{i-1}, V_{i+1}, \dots, V_n$ 满足 C 。限制 C 是 GAC 的当且仅当对于每一变量都是 GAC 的。一个 CSP 是 GAC 的当且仅当它的限制都是 GAC 的。

有 GAC 算法:

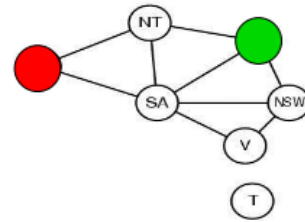
- 在 $V_i = d$ 下, 没有其他变量赋值能够满足该限制, 则 d 是边不一致的, 进而可以被剪枝剪掉。
- 注意当从论域中移除一个值时可能导致新的不一致, 故需要采用队列的方式, 不断将需要检测边一致性限制添加, 直到队列为空, 即限制条件变为 GAC。
- 近似可理解为将后续搜索步骤都前移到剪枝部分。



向前检测和边一致性检测的区别如下

- Assign $\{Q=green\}$
- Effects on other variables connected by constraints with Q
 - NT can no longer be green = $\{B\}$
 - NSW can no longer be green = $\{R, B\}$
 - SA can no longer be green = $\{B\}$
- DWO there is no value for SA that will be consistent with $NT \neq SA$ and $NT = B$

Note Forward Checking would not have detected this DWO.



4 知识表示与推理

一阶逻辑(First-Order Logic,FOL)

- 个体/常量(0-ary)
- 类型(unary)谓词: $A(x), B(x)$
- 关系 (二元谓词): $L(x, y)$

定义 5 (项(term)). 每一个变量都是一个项。若 t_1, \dots, t_n 都为项, 且 f 为 n 参数的函数, 则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 是一个项。

定义 6 (公式(formular)). 公式包括以下几种情况:

- 若 t_1, \dots, t_n 都是项, 且 P 是 n 元的谓词符号, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 是一个公式
- 若 t_1, t_2 都是项, 那么 $(t_1 = t_2)$ 是一个原子公式
- 若 α, β 都是公式, v 是一个变量, 则 $\neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \neg\beta), \exists v.\alpha, \forall v.\alpha$ 都是公式

定义 7 (句子(sentence)). 没有自由变量的公式

定义 8 (替换). $\alpha[v/t]$ 表示 α 中所有自由出现的 v 都用项 t 替代

定义 9 (解释(interpretation)). 一个解释是一个对 (pair) $\mathcal{I} = \langle D, I \rangle$, 其中

- D 是论域, 可以是任何非空集
- I 是从谓词到函数符号的映射
- 如果 P 是一个 n -参数的谓词符号, $I(P)$ 是一个在 D 上的 n -参数的关系, 即 $I(P) \subset D^n$

定义 10 (赋值(denotation)). 变量指派(*assignment*) μ 是一个从变量集合到论域 D 的映射

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathcal{I},\mu} &= \mu(v) \\ \|f(t_1, \dots, t_n)\|_{\mathcal{I},\mu} &= I(f)(\|t_1\|_{\mathcal{I},\mu}, \dots, \|t_n\|_{\mathcal{I},\mu})\end{aligned}$$

定义 11 (满足). $\mathcal{I}, \mu \models \alpha$ 读作 \mathcal{I}, μ 满足 α

- $\mathcal{I}, \mu \models \alpha \iff \langle \|t_1\|_{\mathcal{I},\mu}, \dots, \|t_n\|_{\mathcal{I},\mu} \rangle \in I(P)$
- $\mathcal{I}, \mu \models (t_1 = t_2) \iff \|t_1\|_{\mathcal{I},\mu} = \|t_2\|_{\mathcal{I},\mu}$

定义 12 (子句(clause)). 文字(*literal*)是原子公式或它的取反, 一个子句是文字的析取(*disjunction*), 如 $p \vee \neg r \vee s$, 写作 $(p, \neg r, s)$ 。特殊地, 空子句 $()$ 代表为假。公式(*formula*)则是子句的合取(*conjunction*)。

归结(resolution) 反驳(refutation)

\vdash

- 消除蕴含: $A \rightarrow B \iff \neg A \vee B$
- 将非向内推: 德摩根定律
- 标准化变量: 重命名变量使得每一个量词都是唯一的
- 消除存在量词(skolemize): 引入新的函数符号, 如 $\forall x P(x)$ 改为 $P(g(y))$
- 将所有量词带到最前面: 只有全局量词, 且名字均不同
- 析取分配到合取
- 压平
- 转化为子句: 将量词全部移除

定义 13 (MGU). 两个公式 f 和 g 的替换 σ

-
-

计算MGU的算法: 不断代入新的元, 使其一致

利用归结(两条文字合一变真删除)看是否能得到空子句

答案抽取(answer extraction)

- 将询问 $\exists x P(x)$ 用 $\exists x [P(x) \wedge \neg \text{answer}(x)]$ 替换 (因为取非后变成 $\forall x P(x) \implies \text{answer}(x)$)
- 直到获得任意子句只包含答案的谓词

例 3. 对下列查询进行归结及答案查询

- *Whoever can read $R(x)$ is literate $L(x)$*
- *Dolphins $D(x)$ are not literate*
- *Flipper is an intelligent dolphin $I(x)$*

Who is intelligent but cannot read?

分析. 对语句进行形式化

$\forall x(R(x) \rightarrow L(x))$	1	$(\neg R(u), L(u))$
$\forall x(D(x) \rightarrow \neg L(x))$	2	$(\neg D(v), \neg L(v))$
$D(Flip) \wedge I(Flip)$	3	$D(Flip)$
	4	$I(Flip)$
$Q:\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$	5	$(\neg I(y), R(y), answer(y))$
$R[4, 5]/y = Flip$	6	$(R(Flip), answer(Flip))$
$R[1, 6]/u = Flip$	7	$(L(Flip), answer(Flip))$
$R[2, 7]/v = Flip$	8	$(\neg D(Flip), answer(Flip))$
$R[3, 8]$	9	$(answer(Flip))$

因此得到 *Flipper* 是聪明的但是不能阅读

一组子句是否可满足是NP完全的[Cook,1972]

5 确定性规划

智能体应该能够对世界做出动作(action), 而不仅仅是通过搜索解决问题或推理及知识表示。核心是对动作的效果进行推理, 并且计算什么动作能够达成特定的效果。

本节中主要关注确定性规划, 即有完全的初始状态描述及确定性的动作效果。

5.1 情景演算

情景演算(Situation Calculation, SitCalc)三个基本部分

- 动作(action): 一组谓词
- 情景(situations): 动作序列, $do(a, s)$ 为动作、情景到新情景的函数映射, S_0 为初始情景

$$do(put(a, b), do(put(b, c), S_0))$$

要区别情景与状态(state), 如将硬币转两次, 情景/动作历史不同, 但状态都是一样的

- 流(fluent): 从情景到情景的谓词或函数 (动态变化过程), 用谓词或函数符号描述, 其中最后一个参数为情景, 如 $Holding(r, x, s)$ 代表机器人 r 在状态 s 下拿着物体 x , 有

$$\neg Holding(r, x, s) \wedge Holding(r, x, do(pickup(r, x), s))$$

- 条件(precondition): 动作执行的前提条件
- 影响(effect): 执行动作后改变的流。如下在情景 s 下执行修复动作后, x 就不是破碎的

$$\neg Broken(x, do(repair(r, x), s))$$

情景演算的形式化仅陈述了执行动作的影响，而没有阐述没影响的部分。但是给定一个流只有很少的动作会被影响，而大多数都保持不变。

而框架(frame)问题则是找到一种高效的方法来确定动作的非效果(non-effects)。而不是显式地将它们全部写下来，可以考虑用一阶逻辑。

形式化后的情景即可以利用归结进行规划，但是开销会非常大。

5.2 STRIPS

传统的规划没有不完全或不确定的信息，因此可以做以下假设。

- 封闭世界假设(Closed-World Assumption, CWA): 初始状态的信息是完备的，用于表示世界状态的知识库是一系列真实的原子事实（与数据库类似）。如 $emp(A, C)$ 不在数据库中，则 $\neg emp(A, C)$ 为真。
- 动作的前提只能是原子命题的合取
- 动作的影响只会使原子命题变真或变假，不会出现条件影响或析取影响

STRIPS(Stanford Research Institute Problem Solver):

- 世界被表示成封闭世界知识库(CW-KB)，一个STRIPS的动作表示成更新CW-KB的方式
- 一个动作生成新的KB，用以描述新的世界

在SitCalc中我们可能有不完全的信息（用一阶逻辑公式表示），而在STRIPS中，我们有完整的信息（用CW-KB）表示。

STRIPS中需要用3个列表来表示一个动作

- 动作的前提`pre`
- 动作增加的影响`add`
- 动作减少的影响`delete`

例子如下: $pickup(X)$:

- $Pre : handempty, clear(X), ontable(X)$
- $Adds : holding(X)$
- $Dels : handempty, clear(X), ontable(X)$

注意STRIPS的表达力还是有限制的，如它没有条件(conditional)影响。因此需要有表达力更强的语言Action Description Language(ADL)，允许在前提中有任意公式，而且可以有条件和全称影响。

可以将规划看成是一个搜索问题，每个动作都是由一个CW-KB到CW-KB的映射，但搜索空间会非常巨大。

5.3 松弛问题

放松(relaxed)问题即考虑忽略删除动作的列表，这样可能得到有用的启发式函数估计。

定理 3. 放松问题的一个最优规划的长度是原始问题最优规划长度的下界

证明. 由于我们将所有影响都添加了, 并且不删除负面影响, 因此很直觉地会很快得到目标。令 P 为原始问题, P' 为放松问题, 我们希望得到 $Sols(P) \subset Sols(P')$, 则有 $Minlen(Sols(P')) \leq Minlen(Sols(P))$ 。

- 令 a_0, \dots, a_{n-1} 为 P 的解, 证明它也是 P' 的一个解。令 s_0 为初始状态, 令 $s_{i+1} = s_i \cup add(a_i) - del(a_i), \forall i < n$, 且 $Goal \subset s_n, pre(a_i) \subset s_i, \forall i < n$ 。
- 又令 $s'_0 = s_0$, 且 $s'_{i+1} = s'_i \cup add(a_i)$, 通过数学归纳法证明 $s_i \subset s'_i, \forall i \leq n$ 。
 - 归纳奠基: $i = 0$ 时 $s_0 \subset s'_0 = s_0$
 - 归纳假设: 假设 $s_i \subset s'_i, \forall i < n$, 证明 $s_{i+1} \subset s'_{i+1}$
 - 推理: 因为 a_i 在 s_i 中是可采纳的, 即 $pre(a_i) \subset s_i$, 因此 $pre(a_i) \subset s_i \subset s'_i$, 即 a_i 在 s'_i 中是可采纳的。所以得到

$$s_{i+1} = s_i \cup add(a_i) - del(a_i) \subset s'_i \cup add(a_i) = s'_{i+1}$$

进而 $Goal \subset s_n \subset s'_n$, 且 $pre(a_i) \subset s_i \subset s'_i, \forall i < n$, 因此 a_0, \dots, a_{n-1} 也是 P' 的一个解。□

因此最优放松问题的规划可以作为 A^* 算法的可采纳启发式函数。然而在放松问题中计算一个最优的问题是NP难的, 可以从 S 开始建立层次(layered)结构使其到达目标。

可达性分析: $s_0, a_1, s_1, \dots, a_n, s_n$, 直到 $s_n \subset Goal$, 或者状态层 s_n 不再改变(到达不动点)。

命题 5. 令 a_0, \dots, a_{n-1} 为 S_0 中可采纳的动作序列, 令 $s_0 = S_0$, 且 $s_{i+1} = s_i \cup add(a_i) - del(a_i)$ 。那么 $\forall i < n, \exists j, k \leq i$ 使得 $a_i \in A_k$ 且 $s_i \subset S_j$

分析. 用数学归纳法

- 归纳奠基: $i = 0$ 显然成立
- 归纳假设: 假设 $\forall i < n \exists j \leq i: s_i \subset S_j$
- 因为 $pre(a_i) \subset s_i, pre(a_i) \subset S_j$, 令 k 为最小的 $u \leq j$ 使得 $pre(a_i) \subset S_u$, 那么 $a_i \in A_k$, 故 $add(a_i) \subset S_{k+1} \subset S_{j+1}$ 因此

$$s_{i+1} \subset s_i \cup add(a_i) \subset S_j \cup S_{j+1} = S_{j+1}$$

定理 4. 假设 $Goal \subset S_k$, 对于 $i < k$, 令 A'_{i-1} 为调用 $CountActions(G_i, S_i)$ 的结果, 则 A'_0, \dots, A'_{k-1} 为松弛问题的一个解。

证明. 用数学归纳法 □

定理 5. 假设状态层不再改变且目标不被满足, 则原始规划问题是不可解的。

证明. 用反证法, 假设 a_0, \dots, a_{n-1} 为原始问题的一个解, 则 $Goal \subset s_n$ 。由前面的命题, 存在 $m \leq n$ 使得 $Goal \subset s_n \subset S_m$, 导致矛盾。□

6 不确定性规划

6.1 基础知识

一组变量 V_1, \dots, V_n 以及其对应的有限域 $dom[V_i]$, 很容易导致指数的计算复杂度。

定理 6 (全概率公式). $\{B\}_{i=1}^k$ 为全集 U 的一个划分, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap B_k) \\ &= \mathbb{P}(A | B_1) \mathbb{P}(B_1) + \cdots + \mathbb{P}(A | B_k) \mathbb{P}(B_k)\end{aligned}$$

定理 7 (条件独立). 若

$$\mathbb{P}(B | A \cap C) = \mathbb{P}(B | A)$$

, 则在给定 A 的情况下 B 条件独立于 C (C 没有给 A 增加知识)。若对于所有 $x \in \text{dom}[X], y \in \text{dom}[Y], z \in \text{dom}[Z]$,

$$\mathbb{P}(X = x \wedge Y = y | Z = z) = \mathbb{P}(X = x | Z = z) \mathbb{P}(Y = y | Z = z)$$

则在给定 $Z = z$ 下, $X = x$ 和 $Y = y$ 条件独立。

命题 6 (独立性性质). • 若 A 和 B 独立, 则 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

• 给定 A , B 和 C 条件独立, 则

$$\mathbb{P}(B \cap C | A) = \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(C | A)$$

定理 8 (贝叶斯公式). 条件概率定义

$$\mathbb{P}(X | Y) = \mathbb{P}(XY) / \mathbb{P}(Y) \implies \mathbb{P}(XY) = \mathbb{P}(X | Y) \mathbb{P}(Y)$$

注意与贝叶斯公式区分

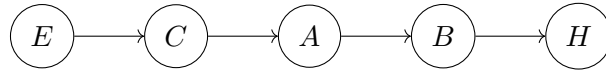
$$\mathbb{P}(Y | X) = \frac{\mathbb{P}(XY)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{\mathbb{P}(X | Y) \mathbb{P}(Y)}{\mathbb{P}(X)}$$

定理 9 (链式法则).

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1 | A_2 \cap \cdots \cap A_n) \mathbb{P}(A_2 | A_3 \cap \cdots \cap A_n) \mathbb{P}(A_{n-1} | A_n) \mathbb{P}(A_n)$$

6.2 贝叶斯网络

6.2.1 基础知识



有以下概率公式成立

- $\mathbb{P}(H | B, A, E, C) = \mathbb{P}(H | B)$
- 由链式法则和独立性假设

$$\mathbb{P}(HBACE) = \mathbb{P}(H | BACE) \mathbb{P}(B | ACE) \mathbb{P}(A | CE) \mathbb{P}(C | E) \mathbb{P}(E)$$

$$\mathbb{P}(HBACE) = \mathbb{P}(H | B) \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A | C) \mathbb{P}(C | E) \mathbb{P}(E)$$

- 通用公式

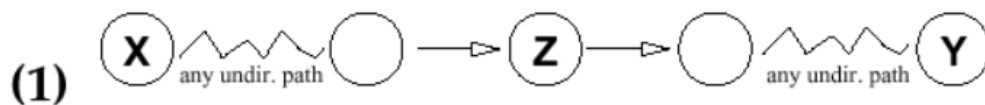
$$\mathbb{P}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{P}(X_n | \text{Par}(X_n)) \cdots \mathbb{P}(X_1 | \text{Par}(X_1))$$

- 单点概率（由全概率公式和条件概率定义）

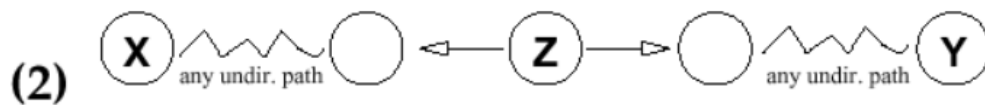
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a) &= \sum_{c_i \in \text{dom}[C]} \mathbb{P}(a | c_i) \mathbb{P}(c_i) \\ &= \sum_{c_i \in \text{dom}[C]} \mathbb{P}(a | c_i) \sum_{e_i \in \text{dom}[E]} \mathbb{P}(c_i | e_i) \mathbb{P}(e_i) \end{aligned}$$

因此每个结点只需存一个条件概率表(conditional probability table, CPT)。

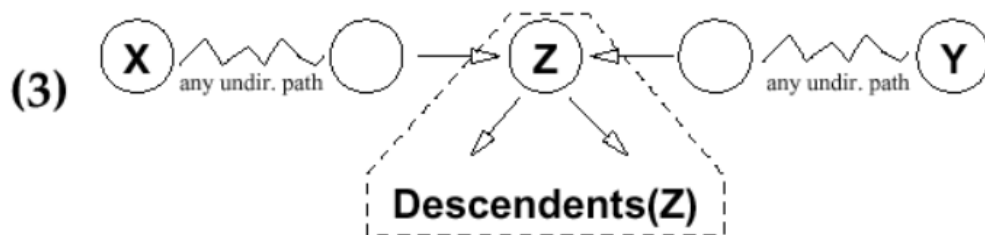
定义 14 (D分隔(separation)). 若一组变量 E 阻隔(block)了 X 到 Y 的所有无向路径 P , 则称 E D-分隔了 X 和 Y , 且有给定证据 E 下, X 和 Y 条件独立。 E 阻隔(block)了路径 P 当且仅当在路径上存在某点 Z 使得下面任一成立。



If Z in evidence, the path between X and Y blocked



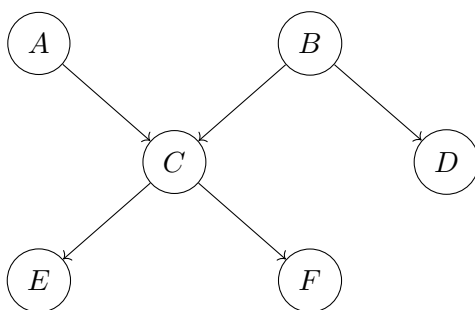
If Z in evidence, the path between X and Y blocked



If Z is **not** in evidence and **no** descendent of Z is in evidence, then the path between X and Y is blocked

注意第3种情况, 证据集中没有给交叉结点及其子结点, 则父亲节点都独立。

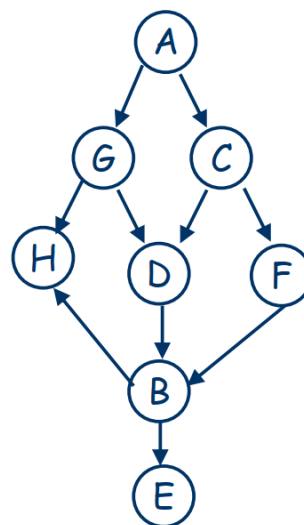
例 4. 考虑如下贝叶斯网络



在此例中 $\mathbb{P}(c \mid a, b, \neg d, \neg e, \neg f) \neq \mathbb{P}(c \mid a, b)$ 。

determine if **A and E are independent** given the evidence:

1. A and E given no evidence? **No**
2. A and E given {C}? **No**
3. A and E given {G,C}? Y
4. A and E given {G,C,H}? Y
5. A and E given {G,F}? **No**
6. A and E given {F,D}? Y
7. A and E given {F,D,H}? **No**
8. A and E given {B}? Y
9. A and E given {H,B}? Y
10. A and E given {G,C,D,H,D,F,B}? Y



Why the answer to 7 is No?

例 5. 注意第3种情况的适用条件，由于 H 在证据集中，所以并不满足第3种情况。在第7个例子中， $AGHBE$ 没有被阻隔，故给定 FDH ， A, E 也不独立。

6.2.2 贝叶斯推断

推断过程如下：

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(a \mid d, e) &= \mathbb{P}(a, d, e) / \mathbb{P}(d, e) \\
 &= \mathbb{P}(a, d, e) / \sum_A \mathbb{P}(a, d, e) \\
 \mathbb{P}(a, d, e) &= \sum_{B, C} \mathbb{P}(a, B, C, d, e)
 \end{aligned}$$

故只需计算 $\mathbb{P}(a, d, e)$ 。

采用动态规划的思想，存储子项，减少计算量。

记因子为某些变量的函数，如 $\mathbb{P}(C \mid A) = f(A, C)$

- 乘积： $h(X, Y, Z) = f(X, Y) \times g(Y, Z)$
- 求和： $h(Y) = \sum_{x \in \text{dom}[X]} f(x, Y)$
- 因子限定： $h(Y) = f(a, Y)$

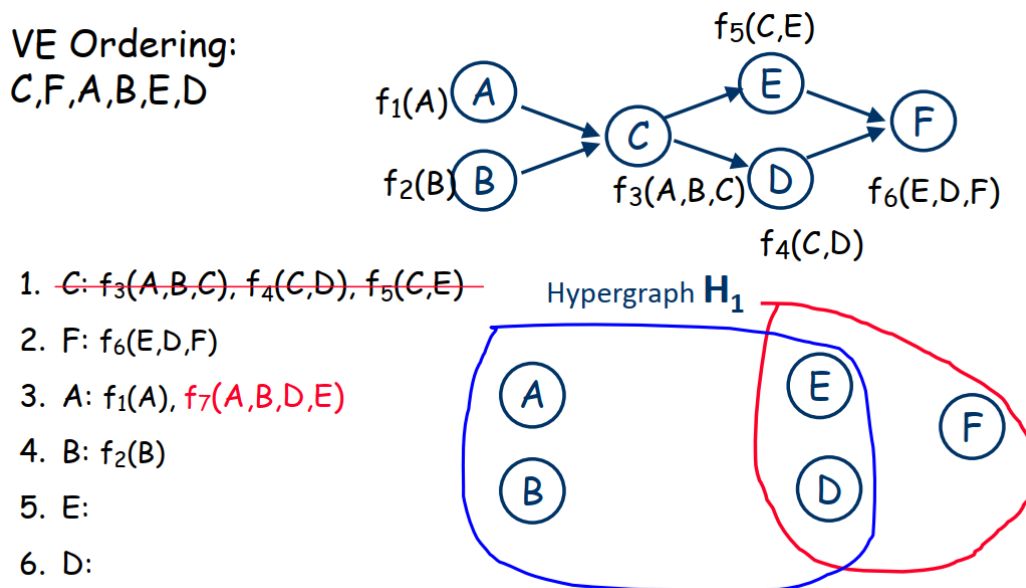
算法 1 (变量消除(Variable Elimination, VE)). 给定贝叶斯网络, 条件概率表 F , 询问 Q , 证据 E , 其余变量为 Z , 计算 $\mathbb{P}(Q | E)$ 。

1. 对于 $f \in F$ 中每一变量, 将其替换为 $f_{E=e}$ (因子限定)
2. 对于每一 $Z_j \in Z$, 按给定 Z_j 顺序, 并按照以下步骤消除:

- f_1, f_2, \dots, f_k 为含有 Z_j 的因子
- 计算新的因子 $g_j = \sum_{Z_j} f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k$
- 将 f_i 从 F 中移除, 并将新的因子 g_j 添加到 F 中

3. 剩下的因子只包含询问 Q 中的变量, 则计算它们的乘积归一化得到 $\mathbb{P}(Q | E)$

可以采用桶消除(bucket elimination)算法, 每次将新生成的因子放在第一个可被应用的桶中。下图展示的是超图(hypergraph), 最大超边(hyperedge)的大小即为最大的CPT表项/VE算法的复杂度。



多树(polytree): 单连通(singly connected)的贝叶斯网络, 即在任意两个结点间只有一条路径。

最小填充(min-fill)启发式: 总是先消除产生最小因子大小的变量, 这种方法可以使得在线性时间内求解多树。

定义 15 (相关性(relevance)). 给定证据 E 询问 Q , 则有以下几种情况:

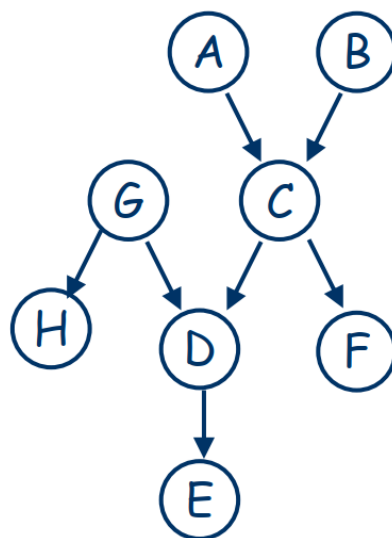
- Q 自身当然是相关的
- 若结点 Z 相关, 则它的父母也相关
- 若 $e \in E$ 是一个相关结点的后代, 则 E 也是相关的

Query: $P(F)$

- relevant: F, C, B, A

Query: $P(F|E)$

- relevant: F, C, B, A
- **also: E, hence D, G**
- intuitively, we need to compute $P(C|E)$ to compute $P(F|E)$



例 6. 但询问 $P(F|H)$, 则 D, E, G 是不相关的。而且这种算法会过度估计相关的变量。

7 机器学习

7.1 决策树

假定样本集合 D 中第 k 类样本所占比例为 $p_k (k = 1, 2, \dots, |\mathcal{Y}|)$, 则 D 的信息熵定义为

$$\text{Ent}(D) = - \sum_{k=1}^{|\mathcal{Y}|} p_k \log_2 p_k$$

又假定离散属性 a 有 V 个可能取值 $\{a^1, a^2, \dots, a^V\}$, 第 v 个分支结点包含了 D 中所在属性 a 上取值为 a^v 的样本, 记为 D^v , 进而可定义信息增益

$$\text{Gain}(D, a) = \text{Ent}(D) - \sum_{v=1}^V \frac{|D^v|}{|D|} \text{Ent}(D^v)$$

每次选择最大增益的属性进行划分, 即

$$a_* = \arg \max_{a \in A} \text{Gain}(D, a)$$

以信息增益为准则来选择划分属性的算法即为ID3决策树。

7.2 贝叶斯学习

先验 $\mathbb{P}(H)$ 、似然 $\mathbb{P}(d|H)$ 、证据 $d = \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, 有贝叶斯公式 (先验推后验)

$$\mathbb{P}(H|d) = \alpha \mathbb{P}(d|H) \mathbb{P}(H)$$

假设独立同分布 $\mathbb{P}(d | h) = \prod_j \mathbb{P}(d_j | h)$

- 贝叶斯学习: $\mathbb{P}(X | d) = \sum_i \mathbb{P}(X | d, h_i) \mathbb{P}(h_i | d) = \sum_i \mathbb{P}(X | h_i) \mathbb{P}(h_i | d)$
- 极大后验(MAP)学习: $\mathbb{P}(X | d) \approx \mathbb{P}(X | h_{MAP})$

$$h_{MAP} = \arg \max_{h_i} \mathbb{P}(h_i | d) = \arg \max_{h_i} \mathbb{P}(h_i) \mathbb{P}(d | h_i)$$

- 最大似然(ML)学习: $\mathbb{P}(X | d) \approx \mathbb{P}(X | h_{ML})$

$$h_{ML} = \arg \max_{h_i} \mathbb{P}(d | h_i)$$

基于属性条件独立性假设

$$\mathbb{P}(c | \mathbf{x}) = \frac{\mathbb{P}(c) \mathbb{P}(\mathbf{x} | c)}{\mathbb{P}(\mathbf{x})} = \frac{\mathbb{P}(c)}{\mathbb{P}(\mathbf{x})} \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(x_i | c)$$

其中 d 为属性数目, x_i 为 \mathbf{x} 在第 i 个属性上的取值。因对所有类别来说 $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ 相同, 因此贝叶斯判定准则为

$$h_{NB}(\mathbf{x}) = \arg \max_{c \in \mathcal{Y}} \mathbb{P}(c) \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(x_i | c)$$

令 D_c 表示训练集 D 中第 c 类样本组成的集合, 有

$$\mathbb{P}(c) = \frac{D_c}{D} \quad \mathbb{P}(x_i | c) = \frac{|D_{c,x_i}|}{|D_c|}$$

7.3 聚类算法

- 硬聚类: 每个样本都决定放在哪一个类别中
- 软聚类: 每个样本都被指派每个类别的概率分布

K-means 算法

- E步: 对于每一个类别 i 和特征 X_j , 有

$$pval(i, X_j) \leftarrow \frac{\sum_{e: class(e)=i} val(e, X_j)}{|\{e : class(e) = i\}|}$$

- M步: 对于每一个样本 e , 指派 e 给类别 i 使得

$$\min_i \sum_{j=1}^n (pval(i, X_j) - val(e, X_j))^2$$

7.4 神经网络

定理 10 (一致近似理论(Universal Approximator Theorem)). 具有至少一个隐层的深度神经网络可以无

限逼近任意连续函数

前向后向传播过程:

- 前向过程:

$$in_j = \sum_i w_{ij} a_i \quad a_j = g(in_j)$$

- 后向过程:

$$\text{output: } \Delta_j = g'(in_j)(y_j - a_j)$$

$$\text{hidden: } \Delta_i = g'(in_i) \sum_j w_{ij} \Delta_j$$

注意以下两条求导公式

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{1 + e^{-x}} & \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} &= (1 - \sigma(x))\sigma(x) \\ \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & \frac{\partial \tanh(x)}{\partial x} &= 1 - \tanh^2(x) \end{aligned}$$

7.5 强化学习

目标:

$$\max_{\pi_\theta} \left[\sum_{t=1}^{\infty} \gamma^t r_t \right]$$

给定策略 π :

$$Q^\pi(s, a) = \sum_{s'} \mathbb{P}(s' | a, s) (R(s, a, s') + \gamma V^\pi(s'))$$

$$V^\pi(s) = Q(s, \pi(s))$$

Q学习: 随机选择动作 a , 观察回报 r 和下一状态 s'

$$Q[s, a] \leftarrow Q[s, a] + \alpha(r + \gamma \max_{a'} Q[s', a'] - Q[s, a])$$