数理逻辑笔记

陈鸿峥

2020.07*

目录

1 命题逻辑

1.1 自然推断

定义 1 (命题(proposition)). *命题或声明式句子是指可判断为真或者假的句子。不可被分解的(indecomposable)命题为原子命题。*

关于命题公式的定义在这里不再给出，注意$\to$是右结合(right-associative)的，如$p \to q \to r$等价于$p \to (q \to r)$。

定义 2 (自然推断(deduction)). *假设有一系列前提(premise)公式$\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n$，及结论$\psi$，那么推断过程可记为*

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

这一表达式称为一个序列(sequent)，若一个证明可以被找到则称它是合法的(valid)。

推理的基本规则：

- and-introduction ($\wedge i$)：前提与前提为真

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

*Build 20200730

- and-elimination ($\wedge e_i$)：前提与中子成分为真

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

- negation-introduction ($\neg\neg i$)

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg i$$

- negation-elimination ($\neg\neg e$)

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg e$$

- implication-elimination $\rightarrow e$

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow e$$

- implies-introduction $\rightarrow i$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow i$$

- or-introduction $\vee e$

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee i_1 \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \neg\neg i_2 \qquad \frac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi} \vee e$$

- bottom/not-elimination

$$\frac{\bot}{\phi} \bot e \qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot} \neg e$$

- negation

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\neg\phi} \neg i$$

例 1. 证明$p \wedge q, r \vdash q \wedge r$是合法的。

分析. 推理过程如下

1	$p \wedge q$	*premise*	
2	r	*premise*	
3	q	$\wedge e_2$	1
4	$q \wedge r$	$\wedge i$	$3, 2$

$$\frac{\frac{p\wedge q}{q}\wedge e_2 \quad r}{q\wedge r}\wedge i$$

定义 3 (定理(theorem))**.** 有着合法序列$\vdash \phi$的逻辑公式ϕ称为定理。

三条进阶推理规则：

- 拒取式(modus tollens, MT)

$$\frac{\phi\to\psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}MT$$

- 反证法(proof by contradition, PBC)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\phi}PBC$$

- 排中律(the law of the excluded middle, LEM)

$$\phi\vee\neg\phi\text{必有一个为真}$$

定义 4 (可证明等价性(provably equivalent))**.** 令ϕ和ψ为命题逻辑公式，ϕ和ψ是可证明等价的当且仅当序列$\phi\vdash\psi$和$\psi\vdash\phi$都是合法的，或者$\phi\dashv\vdash\psi$

1.2 形式语言

定义 5 (良定公式(well-formed formula))**.** 原子、与或非、蕴含均为良定公式

良定公式可用BNF(Backus Naur Form)定义

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi\wedge\psi \mid \phi\vee\psi \mid \phi\to\psi \mid (\phi)$$

The following tree is a parse tree of a well-formed formula.

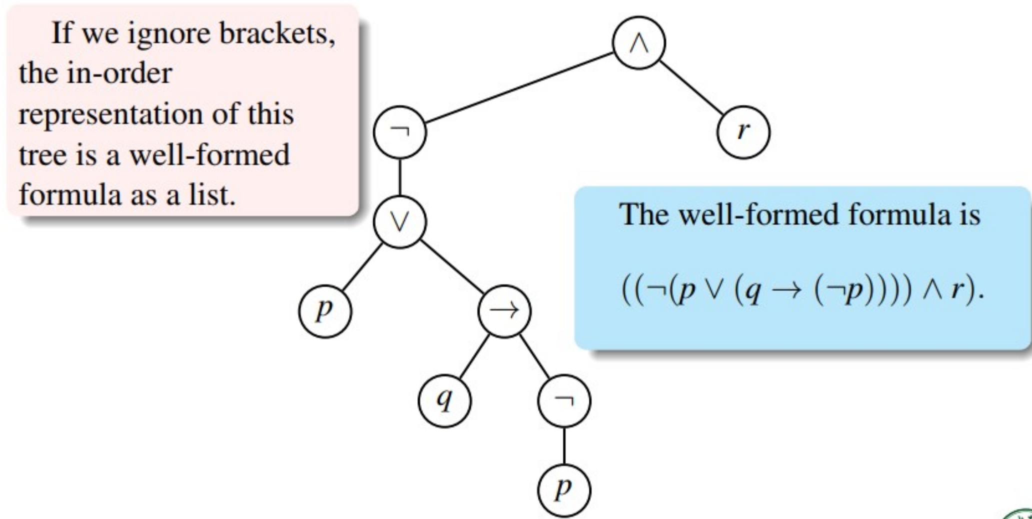

FIG: A parse tree representing a well-formed formula

1.3 语义

定义 6 (模型(model)). 在前提$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$和结论$\psi$上定义另一关系，记作

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$$

真值包括两个元素T和F，公式ϕ的模型*(model)*或估值*(valuation)*是指对ϕ中的每一原子命题都有一个真值指派*(assignment)*。对$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$的真值指派决定了$\psi$的真值，称为$\psi$的解释*(interpretation)*，可表示为真值表中的一行。

如果对于所有$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$的估值都为$T$，$\psi$也估值为$T$，那么称

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$$

成立*(hold)*，且称$\models$为语义包含*(semantic entailment)*关系。

定理 1 (正确性(soundness)). 令$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$和$\psi$都是命题逻辑公式，若$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$是合法的[1]，那么$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$成立。（事实上这两者是等价关系）

定义 7 (恒真式(tautology)/矛盾式(contradiction)). 命题逻辑ϕ被称为恒真式当且仅当它在所有估值下都取值为T，也即$\models \phi$。若在某个估值/解释I_0下值为T，则称其可满足。若所有估值均为F，则为矛盾式。

定理 2. 若$\models \eta$成立，则$\vdash \eta$是合法的。换句话说，若η是永真式，则η是定理。

1.4 规范形式

定义 8 (语义等价). ϕ和ψ都是命题逻辑的公式，称其等价当且仅当$\phi \models \psi$和$\psi \models \phi$成立，记作$\phi \equiv \psi$，也等价于$\models (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$成立。

[1]假设$\phi_1, \ldots, \phi_n$为真，可以推出ψ为真

定义 9 (合取范式(conjunction normal form, CNF))**.** *BNF定义如下：*

- 文字*(literal)*：$L ::= p \mid \neg p$
- 句子*(clause)*：$D ::= L \mid L \vee D$
- 公式*(formula)*：$C ::= D \mid (D) \mid D \wedge C$

例子如

$$(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$$

定义 10 (霍尔公式(Horn formula))**.** 若命题逻辑公式ϕ能用下面的语法，表示成H的一个示例

$$P ::= \bot \mid \top \mid p \qquad A ::= P \mid P \wedge AC ::= A \to PH ::= C \mid C \wedge H$$

则称C的每个实例为霍尔从句*(clause)*。

1.5 SAT求解器

线性求解器只接受以下几种形式的公式

$$\phi ::= p \mid (\neg \phi) \mid (\phi \wedge \phi)$$

例 2. $\phi = p \wedge \neg(q \vee \neg p)$，计算$T(\phi) = p \wedge \neg\neg(\neg q \wedge \neg\neg p)$，则有语法树和$DAG$如下