

不定积分与定积分

Week 3

陈鸿峥

[https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math/blob/master/
Mathematical_analysis/main.pdf](https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math/blob/master/Mathematical_analysis/main.pdf)

December, 2018

① 基础公式

② 三种基本积分方法

③ 不同类型积分常见思路

- 有理分式
- 三角函数
- 根式

1

基础公式

基础公式

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

记得加C!

2

三种基本积分方法

凑微分/第一换元法

从积分项中提取部分出来拉到微分项中

例

$$\int \tan x \, dx$$

练习

$$\int \tan^3 x \, dx$$

第二换元法

- 直接换元（令 $x = g(u)$ ），注意 dx 也需要一起换.
- 常见于三角还原或消根式

例 (§6.2/例12)

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

分部积分法

- 先写成 $\int u(x) dv(x)$ 的形式，然后直接交换 $u(x), v(x)$ 即可
- 选取 $u(x)$ 顺序：对反幂三指，如求 $\int x^2 \cos x dx$ ，取 $u(x) = x^2$ ，化为 $\int x^2 d \sin x$

例

$$\int \ln x dx$$

常见公式 - 三角/反三角

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \quad \text{凑微分法, 小心 - 号}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \quad \text{凑微分}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \text{乘} \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \quad \text{乘} \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad \text{分部积分}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\tan x \sec x + \ln|\tan x + \sec x|) + C \quad \text{分部积分}$$

常见公式 - 根式/分式

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{分子分母除以 } a^2$$

$$\int \frac{dx}{\pm(x^2 - a^2)} = \pm \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad \text{裂项可得}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \text{将 } a^2 \text{ 提出来}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad \text{三角换元}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad \text{三角换元}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + C \quad \text{三角换元}$$

3

不同类型积分常见思路

3.1

有理分式

假分式

同样，对于求积分来说，**化简**也是关键的，**假分式**先除下来变为真分式（长除法）！

例

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$$

练习 (§6.1/1(5))

$$\int \frac{3x^2}{1 + x^2} dx$$

练习 (§6.1/1(6))

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

部分分式

全部变为真分式后，用**部分分式**进行拆分（代数基本定理），分母全部分解为一次乘二次的形式

$$\prod_{i=1}^k (x - a_i)^{j_i} \prod_{i=1}^s (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$$

结合分子，即有部分分式的两种基本形式

$$\frac{A}{(x - a)^n}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

如何积？

部分分式

- 多项式的因式分解（首尾系数猜根）

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$

- 线性因子掩盖法
- 补齐次数（对比系数解方程）

部分分式

因式分解

例

$$\int \frac{dx}{1+x^4}$$

配凑

配凑为分母形式

例

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$$

练习

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3} dx$$

配凑

配凑为导数形式

例

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

总结

分式积分是后面三角积分和根式积分的基础，要非常熟悉，方法要点总结如下：

- 假分式先除下来变为真分式，分母因式分解位一次乘二次，然后才使用部分分式
- 若非纯有理分式（如各种基本初等函数的组合）或分母次数太高，则将分子配凑成**分母形式**或**分母导数形式**以便分拆相加（这两种方式都十分常用）
- 一次式直接积出 \ln ，二次式分子配分母/分母配平方
- 小技巧：通过倒代换 $x = \frac{1}{t}$ 降低分母次数，有 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ 等部分的可以考虑，如 $\int \frac{dx}{x^{100} + x}$ 也可使用

3.2

三角函数

恒等变换

- 恒等式
- 半角
- 倍角（降幂升角）
- 积化和差
- 和差化积（不同角）
- 万能公式（弦化切）
- 辅助角（相同角）
- 关系式

$$1 + \sin kx = \left(\sin \frac{kx}{2} + \cos \frac{kx}{2} \right)^2 \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 x$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad (\tan x)' = \sec^2 x \quad (\sec x)' = \tan x \sec x$$

恒等变换

变换就是了!

练习 (§6.1/1(9))

$$\int (\tan^2 x + 3) dx$$

切化弦

例

$$\int \tan(x+a) \tan(x+b) dx$$

凑微分

结合凑微分法努力化为同名函数

例

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

练习 (§6.2/1(15))

$$\int \cos^5 x dx$$

化关系式

化为有关系的式子

例

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$$

万能公式

和洛必达一样，到迫不得已才使用

例

$$\int \frac{dx}{2 + \sin^2 x}$$

练习 (§6.2/6(12))

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

总结

- 第一步依然是化简/变换，目的是结合凑微分法努力化为同名函数，或是有一定关系的式子
- 迫不得已才采用万能公式，别一上来就太暴力
- 最终很大几率会化为分式积分
- 小技巧1：通过分子分母同乘的方法强行凑平方，如求 $\sec x$ 积分，分子分母同乘 $\cos x$
- 小技巧2：配对偶式，如 $\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx$

3.3

根式

根式

对于二次根式，采用**整块换元**或**根式内配方**后三角代换或直接用常用公式的方法

* 整块换元的形式

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, n > 1, ad - bc \neq 0$$

* 配方的形式

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, a > 0, b^2 - 4ac \neq 0, \text{或} a < 0, b^2 - 4ac > 0$$

根式

整块换元

例

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$$

配方

练习

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$$

根式

高次复杂根式

例 (§6.2/7(9))

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^4}}$$

练习 (§6.2/7(3))

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

根式

分式结合复杂根式

例

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

总结

- 同样，先化简至最简根式，如 $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$ 就不算最简根式
- 对于二次根式，采用**整块换元**；也可**根式内配方**后三角代换或直接用常用公式
- 对于简单高次根式的加减，用**最小公倍数法**消根号，如 \sqrt{x} 与 $\sqrt[3]{x}$ 同时存在，令 $x = t^{lcm(2,3)} = t^6$
- 对于复杂高次根式，凑微分不断换元使根式内多项式次数**降至一次**，再进行**整块换元**转化成有理分式
- 分式与根式结合，先用分式的配凑拆分等化简