

不定积分与定积分

Week 3

陈鸿峥

[https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math/blob/master/
Mathematical_analysis/main.pdf](https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math/blob/master/Mathematical_analysis/main.pdf)

December, 2018

① 基础公式

② 三种基本积分方法

③ 不同类型积分常见思路

- 有理分式
- 三角函数
- 根式

1

基础公式

基础公式

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

记得加C!

2

三种基本积分方法

凑微分/第一换元法

从积分项中提取部分出来拉到微分项中

例

$$\int \tan x \, dx$$

练习

$$\int \tan^3 x \, dx$$

第二换元法

- 直接换元（令 $x = g(u)$ ），注意 dx 也需要一起换.
- 常见于三角还原或消根式

例 (§6.2/例12)

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

分部积分法

- 先写成 $\int u(x) dv(x)$ 的形式，然后直接交换 $u(x), v(x)$ 即可
- 选取 $u(x)$ 顺序：对反幂三指，如求 $\int x^2 \cos x dx$ ，取 $u(x) = x^2$ ，化为 $\int x^2 d \sin x$

例

$$\int \ln x dx$$

常见公式

见笔记

3

不同类型积分常见思路

3.1

有理分式

假分式

同样，对于求积分来说，**化简**也是关键的，**假分式**先除下来变为真分式（长除法）！

例

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$$

练习 (§6.1/1(5))

$$\int \frac{3x^2}{1 + x^2} dx$$

练习 (§6.1/1(6))

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

部分分式

全部变为真分式后，用**部分分式**进行拆分（代数基本定理），分母全部分解为一次乘二次的形式

$$\prod_{i=1}^k (x - a_i)^{j_i} \prod_{i=1}^s (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$$

结合分子，即有部分分式的两种基本形式

$$\frac{A}{(x - a)^n}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

如何积？

部分分式

- 多项式的因式分解（首尾系数猜根）

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$

- 线性因子掩盖法
- 补齐次数（对比系数解方程）

部分分式

例

$$\int \frac{dx}{1+x^4}$$

配凑

配凑为分母形式

例

$$\int \frac{x^x}{(x+1)^2} dx$$

练习

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3} dx$$

配凑

配凑为导数形式

例

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

总结

- 假分式先除下来变为真分式，然后用部分分式
- 若非纯有理分式（如各种基本初等函数的组合）或分母次数太高，则将分子配凑成分母形式或分母导数形式以便分拆相加（这两种方式都十分常用）
- 分母一定要先分解为一次乘二次的形式（虚数也可），也即分解为

$$\prod_{i=1}^k (x - a_i)^{j_i} \prod_{i=1}^s (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$$

结合分子，也就有部分分式的两种基本形式

$$\frac{A}{(x - a)^n}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

- 前者直接积，后者配平方
- 小技巧：通过倒代换 $x = \frac{1}{t}$ 降低分母次数，有 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ 等部分的可以考虑，如 $\int \frac{dx}{x^{100} + x}$ 也可使用

3.2

三角函数

恒等变换

- 半角
- 倍角（降幂升角）
- 积化和差
- 和差化积（不同角）
- 万能公式
- 辅助角（相同角）

恒等变换

练习 (§6.1/1(9))

$$\int (\tan^2 x + 3) dx$$

恒等变换

结合凑微分法努力化为同名函数

例

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

化为有关系的式子

例

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$$

3.3

根式

根式

见笔记