数学分析笔记整理V4.0

陈鸿峥

2018.10 *

目录

*Build 20181019

本文是笔者对数学分析这门数学基础课内容的一些整理，基本涵盖基本数学分析的全部内容，但以列举重要定理、提供不同思考问题的角度、提供解题思路为主，故不能当作教科书学习使用. 如果是众人皆知的事实，本文将不会提及，请读者自行翻书. 本文将基本微积分的知识进行了融合，优化了章节安排，将相似的内容放在一起，也方便大家融会贯通、复习整理. 文中的例题基本出自《数学分析简明教程》，部分出自《吉米多维奇习题集》，大多过程比较简练，主要阐述解题的思想和方法. 笔者数学水平有限，文中难免出现疏漏，如有不妥之处还请读者指出.

1 实数系基本定理

实数系的基本性质作为实分析的入门，有着举足轻重的作用，深挖的话会发现很多有意思或者是反直觉的结论，但我们在这里仅仅做出一些定理的阐述和证明的思路，更多的内容等待以后再进行补充. 虽然本章涉及到的内容比较抽象，但是读者应该能够脑补出相应的情形，通过直观的认知来得到证明或证伪的思路，这对其中的证明题非常有益.

1.1 实数连续性

实数连续性涉及到数系扩充的过程. 有理数之间存在空隙，因而数学家对其进行扩充，添加了无理数后变成实数系，而实数系竟然就弥补了之前有理数系的缺陷，变得稠密且连续，这是一个相当强的结论.

定义 1 (戴德金(Dedekind)连续性准则). *有大小顺序稠密的数系S，对于其任一分划$A|B$，$\exists$唯一$c \in S: \forall a \in A, b \in B : a \le c \le b$（即要么$A$有最大值，要么$B$有最小值），则称$S$连续.*

由此准则可以推出$\mathbb{Q}$不是连续的. 需要注意：

1. 分划的断点c不一定属于S（正因$c \notin S$，$\mathbb{Q}$不连续）
2. 分划要保证**不空、不漏、不乱**

定理 1 (实数基本定理). *对$\mathbb{R}$的任一分划$A|B$，$\exists$唯一$r \in S : \forall a \in A, b \in B : a \le r \le b$*

注意实数基本定理的证明是将实数全部以小数的形式表示，通过不断添加小数位数的方法来逼近割点，并没有用到后面的任何定理，可以算是根基.

定义 2 (确界). *如果实数集合A有上界，且上界中有最小数β，则定义A的上确界为$\sup A := \beta$；若A有下界，且下界中有最大数α，则定义A的下确界为$\inf A := \alpha$. 由定义可知，β为A上确界，当且仅当*

1. $\forall x \in A : x \le \beta$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$

类似地也有下确界的充要条件.

例 1. *若$f(x)$在$[a,b]$上有界，定义其振幅为*

$$\omega_f[a,b] = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

则

$$\omega_f[a,b]=\sup_{x',x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')|$$

分析. 设$\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)=M,\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)=m$，由确界的定义有

$$\forall x',x''\in[a,b]:\ f(x')\le M,f(x'')\ge m$$

故$f(x')-f(x'')\le M-m$. 又

$$\forall\varepsilon_0>0,\exists x_1,x_2:\ f(x_1)\ge M-\varepsilon_0,f(x_2)\le m+\varepsilon_0$$

故

$$\forall\varepsilon=2\varepsilon_0>0,\exists x_1,x_2:\ f(x_1)-f(x_2)\ge M-m-\varepsilon$$

符合上确界定义，原命题得证.

例 2. 设$f(x)$与$g(x)$在D上有界，且大于0，则

$$\inf_{x\in D}f(x)\cdot\inf_{x\in D}g(x)\le\inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)\cdot\sup_{x\in D}g(x)\le\sup_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\sup_{x\in D}f(x)\cdot\sup_{x\in D}g(x)$$

分析. 左右两式是显然的，下面证明中间式.
反证，如果$\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}>\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$，则

$$f(x)g(x)\ge\inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}>\inf_{x\in D}f(x)\cdot\sup_{x\in D}g(x)$$

欲导致矛盾，即证$\exists x_0:\ f(x_0)g(x_0)\le\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$
取$x_0=\arg\inf\limits_{x\in D}f(x)$，即可满足上式，故矛盾.
另外一条式子同理，故得证.

定理 2 (确界定理)**.** 实数集内，非空有上（下）界的数集必有上（下）确界存在.

戴德金分割、确界定理、单调有界定理（见定理8）都属于实数连续性的等价表述，可以相互推导.

1.2 实数闭区间紧致性

定义 3 (覆盖)**.** E为实数开区间构成的集合，S为实数子集，若$\forall x\in S$，有$(a,b)\in E$使得$x\in(a,b)$，则E为S的一个覆盖，记为

$$S\subset\bigcup_{E_\alpha\in E}E_\alpha$$

若E为有限区间组成，则称其为有限覆盖.

定理 3 (有限覆盖定理(Borel)/闭区间紧致性(compactness))**.** 实数闭区间$[a,b]$的任一个覆盖E，必存在有限的子覆盖

定义 4 (区间套). 一组实数的**闭**区间序列$[a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$，满足

a. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

则称$\{[a_n, b_n]\}$构成一个区间套

定理 4 (区间套定理). $\{[a_n, b_n]\}$是一个区间套，则存在唯一$r \in \mathbb{R}, s.t. \, r \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

区间套的三个条件一个都不能少，否则上面的结论不成立.

定理 5 (紧致性定理(Bolzano–Weierstrass)/凝聚点定理). 有界数列必有收敛子数列

上面几个定理在实分析证明题中都是利器，需要妥善使用.

有限覆盖定理关键处理好有限和无限的关系，常通过构造两者的矛盾来得证.

例 3. 用有限覆盖定理证明紧致性定理

分析. 考虑有界数列$\{x_n\}$在闭区间$[a, b]$内，即$a \le x_n \le b$.
反证，若$\{x_n\}$不存在收敛子列，则对于$[a, b]$内的每一个点x，都存在**开**区间I_x只含有限个x_n.
否则，若对于某一个点x_0的任意开区间I_{x_0}都含有无穷个x_n，则$\{x_n\}$的某一子列收敛于x_0，矛盾.
所有的I_x组成一个开区间覆盖（下式右侧），满足

$$[a, b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} I_x$$

左右两侧同时与$\{x_n\}$取交，

$$[a, b] \cap \{x_n\} \subset \left(\bigcup_{x\in[a,b]} I_x\right) \cap \{x_n\} = \bigcup_{x\in[a,b]} (I_x \cap \{x_n\})$$

由有限覆盖定理，右侧有限集合，而左侧无限，故矛盾.

上例采用值域（竖直方向）有限覆盖的方式，下例则采用定义域（水平方向）有限覆盖的方式求解.

例 4. 设$f(x)$在$[a, b]$上有定义，且在每一点处函数的极限存在，则$f(x)$在$[a, b]$上有界

分析. 某一点x的极限存在，推得$f(x)$在x的邻域$D_x = (x - \delta, x + \delta)$上局部有界.
所有的D_x组成一个开区间覆盖，满足

$$[a, b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} D_x$$

由有限覆盖定理，有限个D_x即可覆盖$[a, b]$，则取这有限个开区间上函数界的最大最小值即得到$f(x)$的界.

由于有限覆盖定理**有限**的性质，导致可以取一些数的最大最小值，而这个值是有限且确定的，这一点在证明一致连续性（见定理23）上也会用到.

区间套定理则更加灵活，往往采用**二分**的方法，注意关注最后的唯一点r具有什么性质（有点像戴德金分割），特别是涉及极限的证明.

例 5. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且有界，$\forall a\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)=a$在$[0,+\infty)$上只有有限个根或无根，求证$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在

分析. 设上下界为$[u,v]$，不断二等分，取含无限长$f(x)$的一侧（因$f(x)=\dfrac{u+v}{2}$只有有限个根或无根，故可以将这些根全部枚举出来后，剩下的部分就只能在$y=\dfrac{u+v}{2}$的一侧了）
最终确定唯一数r，要证明$r=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. 而由区间套的性质，当$n$充分大时，

$$f(x)\in[u_n,v_n]\subset(r-\varepsilon,r+\varepsilon)$$

进而得证.

用区间套定理证明的其他例子.

例 6.
1. 紧致性定理
   二分，取含有无穷项$\{x_n\}$的一侧
2. 单调有界定理
   二分，取含上界的一侧，r为上确界，也为$\{x_n\}$的极限
3. 连续函数介值定理（见*3.5*节）
   二分，取有正有负的一侧，r即为所求的点
4. 有界性定理
   反证，二分，取无界一侧
5. 最值定理
   二分，总有一侧含有一个点必另外一侧的所有点都大，取这一侧
6. 康托定理
   反证，三等分，取违反一致收敛定义的一侧；用有限覆盖定理证明较为简单

本节中出现的有限覆盖定理、区间套定理、紧致性定理都属于实数闭区间紧致性的等价表述，可以相互推导.

1.3 实数完备性

定理 6 (柯西(Cauchy)收敛原理)**.** 在实数系$\mathbb{R}$中，数列$\{x_n\}$有极限存在的充分必要条件是

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,n>N,m>N:|x_n-x_m|<\varepsilon$$

$\{x_n\}$称为$\mathbb{R}$的基本列，或柯西列.

用柯西收敛原理证明数列的收敛性其实非常方便，因为只需考虑两项，作差后解一个不等式即可.

证明数列发散一般通过找两个子列收敛至不同的数即可，或者用柯西收敛原理的否命题找到ε_0，使得两项作差后大于ε_0.

定理 7 (完备性定理(Cauchy))**.** 实数系$\mathbb{R}$是完备的，即$\mathbb{R}$中每个基本列都在$\mathbb{R}$中有极限存在，也即**对极限运算封闭**.

注意关于实数完备性的刻画，并没有涉及实数的顺序，这与前文的连续性不同.

2 极限

2.1 数列极限与函数极限对比

定义 5 (数列极限). 数列$\{x_n\}$满足

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^+,s.t.\,n>N:|x_n-A|<\varepsilon,$$

则记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

定义 6 (函数极限). 设$f(x)$在x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$上有定义，满足

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\,x\in\mathring{U}(x_0,\delta):|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

数列极限的基本性质

1. 有界性：有极限必有界
2. 保号性：必存在与极限同号的值，即$\exists N,s.t.\,n>N:|x_n|>\dfrac{|A|}{2}>0$
3. 保序性：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\implies\exists N,s.t\,n>N:x_n>y_n$
4. 唯一性：极限存在必唯一
5. 夹迫性：夹逼定理
6. 极限不等式：$\exists n,s.t.\,n>N,\in\mathbb{Z}^+,x_n\geq y_n\implies\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geq\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$

函数极限的基本性质

1. 局部有界性：在$\mathring{U}(x_0,\delta)$上有界
2. 局部保号性：必存在与极限同号的值，即$\exists\delta>0,s.t.\,x\in\mathring{U}(x_0,\delta):|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}>0$
3. 局部保序性：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b\implies\exists\delta>0,s.t.\,x\in\mathring{U}(x_0,\delta):f(x)>g(x)$
4. 唯一性：极限存在必唯一
5. 夹迫性：夹逼定理
6. 极限不等式：$\exists\delta>0,s.t.\,x\in\mathring{U}(x_0,\delta),f(x)\geq g(x)\implies\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\geq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$

极限的这些基本性质在各类证明题中应用相当广泛（常用于放缩），需要引起足够重视.

定理 8 (单调有界原理).

1. 单调上升（下降）有上（下）界的数列必有极限存在

2. 单调上升（下降）有上（下）界的函数必有右端点的左极限存在

3. 单调上升（下降）有下（上）界的函数必有左端点的右极限存在

定理 9 (海涅(Heine)定理)**.**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall\{x_n\}, \lim_{n\to\infty} x_n=x_0, x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)\text{都有}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

注：常用来证明函数极限不存在或作逼近用（见例*7*）

例 7. 若连续函数$f(x)$在有理点的函数值为0，则$f(x)\equiv 0$

分析. 用反证法，若不然，至少存在一个无理点x_0使得$f(x_0)\neq 0$，设

$$x_0=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \qquad \text{（十分经典的用小数表示无理数，同}Dedekind\text{分割）}$$

取数列$x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$，由此构造知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0\neq f(x_0)$，由海涅定理的逆否命题知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，与$f(x)$在$x=x_0$连续矛盾，因此$f(x)\equiv 0$

2.2 极限的四则运算

需要注意：

1. 极限的四则运算仅对**有限项**且**项数固定**的数列适用，如

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty\neq\sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

2. **加减有限量**对**趋于无穷**的量没有影响，如

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x+3})^{x+1}=e$$

2.3 几个重要极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 令$n=(1+h_n)^n$展开至二次项
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\sin x<x<\tan x$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 由离散推连续

2.4 用定义证明极限

1. 最后一步不等式$|g(n)-A|<\varepsilon$，小心左侧变负

2. 几种常见类型

   (a) 幂函数：$\dfrac{x^m}{x^n}(x\to\infty)=\dfrac{1}{x^{n-m}}\to 0$

   (b) 幂指型：$\dfrac{x^k}{a^x}(a>1,x\to\infty)=\dfrac{x^k}{(1+b)^x}<\dfrac{x^k}{C_x^{k+1}x^{k+1}}\to 0$

   (c) 指阶型：$\dfrac{a^n}{n!}(n\to\infty)=\dfrac{a}{n}\underbrace{\dfrac{a}{n-1}\cdots\dfrac{a}{a+1}}_{<1}\dfrac{a^a}{a!}<\dfrac{a}{n}\dfrac{a^n}{a!}\to 0$

   (d) 阶炸型：$\dfrac{n!}{n^n}(n\to\infty)=\dfrac{n}{n}\underbrace{\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{2}{n}}_{<1}\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}\to 0$

3. 常用放缩

   (a) $x^a(a>0)<a^x(a>1)<x!$

   (b) $n<(\dfrac{n}{2})^{\frac{n}{2}}<n!<n^n$　　取对数可证

   (c) $\dfrac{x}{x+1}\le\ln(x+1)\le x$

   (d) $(1+x)^n>1+nx$　　伯努利(Bernoulli)不等式

   (e) $\Big||a|-|b|\Big|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$　绝对值三角不等式

   (f) $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

   (g) $[x]\le x<[x]+1$　　高斯函数性质

4. 有界量直接取界，如$\sin x,(-1)^n$均直接取±1

5. 分子有理化，如证$\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x^2+5}=3$

6. 上一点常结合因式分解，如求$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$（当然用洛必达也是可以的）
   常用$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

7. 通过配凑（加一项减一项）凑出题设形式，后用绝对值三角不等式（常见于证明题）

8. 拆分为有穷项和无穷项部分讨论（见例8）

9. 用定义证函数极限时经常要先限制变量范围，常令$0<|x-x_0|<1$

例 8. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

2. 若$a_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

分析. *1.* $\because \lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \therefore \forall \varepsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+, s.t.\, n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon_1$

要证$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$，即证$\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{Z}^+, s.t.\, n > N : \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| < \varepsilon$

又

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\
&\le \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N_1+1} - a)}{n}\right| \\
&+ \left|\frac{(a_{N_1+2} - a)}{n}\right| + \cdots + \left|\frac{(a_n - a)}{n}\right| \quad \text{拆分有穷项与无穷项} \\
&< \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| + \frac{\varepsilon_1 (n - N_1)}{n} \\
&< \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| + \varepsilon_1 \qquad (*)
\end{aligned}$$

注意到$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| = 0$

即$\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+, s.t.\, n > N_2 : \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| < \varepsilon_1$

因此$(*)$式$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 = \varepsilon$，取$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, N = max(N_1, N_2)$即可

2. 当$a = 0$单独讨论

当$a > 0$时，由均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$\because \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$

$\therefore$ 由(1)有$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{a}$

注：本题的结论还是有一定用处的，可以记住

练习 1. $x_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$，则$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a$

练习 2. 证明$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

2.5 用其他方法证明极限

1. 化归重要极限证明

2. 根式型升指数：如$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n}$(函数连续性)$= 1$

3. 数列的单调有界原理：用于根式递推、分式递推

例 9. $x_0 = 1, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}, n = 1, 2, \cdots$，求$\lim_{n\to\infty} x_n$

分析. 先证明$\{x_n\}$单调增，即证$x_{n+1} > x_n$，由$1 + x_n > 0$知显然成立

再证明其有界，观察猜想$x_n < 2$（写多几项就可以估计出大致的界），用第一数学归纳法易证

进而由单调有界原理知$\{x_n\}$有极限，不妨设为A

对$x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$两侧求极限$(n \to \infty)$

得$A = 1 + \dfrac{A}{1+A}$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（已舍去负根）

练习 3. 设$x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$，证明$\{x_n\}$收敛.

另，本题的结论可用来求练习*12*.

4. 夹逼

(a) 取两头，全部换成同一项（例10）或者就只剩下一项（例11）

例 10. $S = \displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} S$

分析.

$$\frac{2n+1}{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} < S < \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n+1}{n} \quad \to 2(n \to \infty)$$

例 11. $S = \sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2 k}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} S$

分析.

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} < S < \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} \quad \to 1(n \to \infty)$$

类似地，可证明下面习题

练习 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i^n} = \max\limits_{1\le i\le m} a_i$

(b) 不等式放缩

例 12. $S = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} S$

分析.

$$2k = \frac{2k-1+2k+1}{2} \ge \sqrt{(2k-1)(2k+1)}$$

均值放缩以得到相同项，达到相消目的

$$0 < S \le \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}} = \frac{1}{2n+1} \quad \to 0(n \to \infty)$$

练习 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}}$

5. 洛必达(L'Hospital)法则

(a) 一定要先判断是否是未定型$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}$

(b) 求导后极限不存在不能说原极限不存在，如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x + x}{x} = 1 \neq \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x + 1}{1}$$

(c) 函数摆在分子还是分母需要考虑

(d) 一些奇怪的东西只要符合未定型也是可以用洛必达的，如下面的练习6

练习 6. 设$f(x)$在任一有限区间上可以积分，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$，证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = l$$

6. 证明极限不存在：通过找两种不同的趋近方式，得出结果不同

练习 7. 证明狄利克雷*(Dirichlet)*函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

在$[0,1]$不可积.

7. 泰勒公式(8.2节)或等价无穷小量代换(2.6.3节)

定理 10 (O'Stolz定理[1]). 若

(a) $y_{n+1} > y_n, n = 1, 2, \cdots$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

注：本定理算是洛必达法则的离散版本.

练习 8. 用*O'Stolz*定理证明极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n} = 0$

2. 例*8*的题*1*

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} = 1$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p+1} = \frac{1}{p+1}$

[1] 本定理可跳过，详细内容请见*https://en.wikipedia.org/wiki/Stolz%E2%80%93Ces%C3%A0ro_theorem*

2.6 无穷小量

2.6.1 渐近符号定义[2]

1. $f(n)=O(g(n))$ 类似于 $a\le b$

$$O(g(n))=\{f(n)\,|\,\exists c,n_0,s.t.\,0\le f(n)\le cg(n),\forall n\ge n_0\}$$

2. $f(n)=\Omega(g(n))$ 类似于 $a\ge b$

$$\Omega(g(n))=\{f(n)\,|\,\exists c,n_0,s.t.\,0\le cg(n)\le f(n),\forall n\ge n_0\}$$

3. $f(n)=\Theta(g(n))$ 类似于 $a=b$

$$\Theta(g(n))=\{f(n)\,|\,\exists c_1,c_2,n_0>0,s.t.\,0\le c_1g(n)\le f(n)\le c_2g(n),\forall n\ge n_0\}$$

4. $f(n)=o(g(n))$ 类似于 $a<b$ 可推出 $f(n)=O(g(n))$

$$o(g(n))=\{f(n)\,|\,\forall c>0,\exists n_0,s.t.\,0\le f(n)<cg(n),\forall n\ge n_0\}\quad\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

5. $f(n)=\omega(g(n))$ 类似于 $a>b$ 可推出 $f(n)=\Omega(g(n))$

$$\omega(g(n))=\{f(n)\,|\,\forall c>0,\exists n_0,s.t.\,0\le cg(n)<f(n),\forall n\ge n_0\}\quad\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$$

2.6.2 无穷小量定义

1. 同阶无穷小：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\ne 0$
2. k阶无穷小：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=c\ne 0,k>0$
3. 等价无穷小：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，也可记为$f(x)\sim g(x)$

注意：无穷小量不是一个数

2.6.3 等价无穷小量

以下列举的是比较常用的等价无穷小量($x\to 0$)，在极限乘除运算[3]中可以相互替代. 等价无穷小量实际上是一阶泰勒公式，详细的内容可在8.2节找到.

1. $\arcsin x\sim\sin x\sim x$

[2]摘自《算法导论》，可跳过

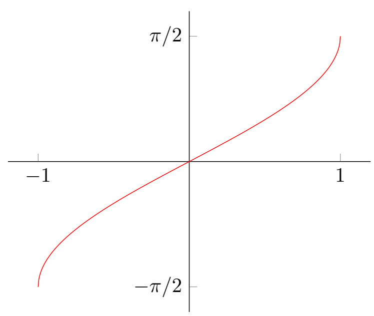
[3]求极限什么情况下可以在加减式中使用等价（无穷小）替换？ - 撒欢猪宝的回答 - 知乎 https://zhihu.com/question/49541771/answer/118408666

2. $\arctan x \sim \tan x \sim x$
3. $\ln(1+x) \sim x$
4. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
5. $e^x - 1 \sim x$
6. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

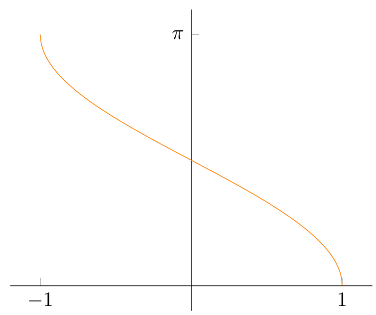
3 函数的一切

定义 7 ((基本)初等函数)**.** ***常函数***加上***反对幂三指***称为基本初等函数. 基本初等函数经过***有限次***四则运算或复合的函数称为初等函数.

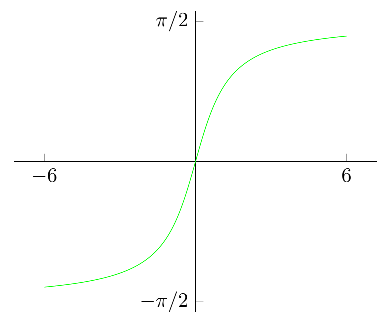
注意关注反三角函数的值域及图像，如下图所示.



$\arcsin x$



$\arccos x$



$\arctan x$

3.1 函数的基本性质

1. 定义域D、值域V
2. 奇偶性
3. 周期性
4. 有界性：注意是**有上界且有下界**，如二次函数就不能算有界
5. 连续性：见定义9，以下是间断点的分类
   (a) 可去间断点：可通过修改定义使其连续
   (b) 第一类间断点：左右极限都存在但不相等（跳跃间断点）
   (c) 第二类间断点：左右极限至少有一不存在
6. 单调性：若有一阶导，用一阶导判断；否则，用定义
7. 凹凸性：详见章节3.2
8. 零点：代数基本定理
9. 极值点：稳定点或不可导点，通过$f'(x)$的变化情况或$f''(x_0)$的正负性判断
10. 拐点[4]：凹凸分界点
11. 渐近线：水平、垂直、斜

[4]注意：稳定点是使$f'(x)=0$的$x=x_0$，而拐点是函数凹凸性发生改变的点$(x_0, f(x_0))$

以下是两组比较有用的函数表示方法，可以记住

1. 最大值最小值函数
$$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$$
$$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$$

2. 定义域为$\mathbb{R}$的函数$f(x)$表示为奇偶函数之和
$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\qquad \text{奇函数}$$
$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\qquad \text{偶函数}$$

3.2 凸函数

由于凸函数在计算机科学和数学领域都应用广泛，所以这里单独开一小节讲述几条关于凸函数的性质. 在本节中全部采用数学界常用的说法，即凸(convex)函数指课本上的下凸函数，凹(concave)函数指上凸函数.

定义 8 (凸函数). $f(x)$在(a,b)有定义，
$$\forall x_1,x_2\in(a,b),\lambda\in(0,1),f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$
则称$f(x)$在(a,b)上是凸函数

注意到这个定义中，凸函数并不是用二阶导大于0来定义的，甚至于连一阶导都没有用到，也就是说这个定义的适用范围更广了，无论函数是否可导，都可以说它是凸函数或者凹函数. 由定义可直接推出定理11

定理 11 (琴生(Jensen)不等式). $f(x)$在$[a,b]$为凸函数，则$\forall x_1,x_2\in[a,b]$
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

分析. 令凸函数定义中$\lambda=\dfrac{1}{2}$即得证，端点情况用极限考虑

定理 12. $f(x)$在(a,b)为凸函数，当且仅当
$$\forall x_1,x_2,x_3\in(a,b),x_1<x_2<x_3:\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

分析. 不等式两边乘开化简即得定义式

定理 13. $f(x)$在(a,b)可微，则$f(x)$在(a,b)为凸函数，当且仅当$f'(x)$在(a,b)单调上升. 进而$f(x)$在(a,b)上连续可微.

分析. 前者结合拉格朗日中值定理和定理*12*可得，后者由定理*31*可知.

推论. $f(x)$在(a,b)二阶可导，则当$f''(x)\geq 0$时，$f(x)$在(a,b)为凸函数

定理 14. $f(x)$在(a,b)可微，则$f(x)$在(a,b)为凸函数，当且仅当$f(x)$在所有点的切线上，即

$$f(x)\geq f(y)+f'(y)(x-y)$$

分析. 不妨设$x_1<y<x$，则由定理*12*有

$$\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

左侧令$x_1\to y$，得$f'(y)$，展开即得.

定理 15. $f(x)$在(a,b)为严格凸函数，若$c\in(a,b)$为$f(x)$的极小值点，则$x=c$是$f(x)$在(a,b)的唯一极小值点

分析. 反证法，假设存在另一极小值点c'，不妨设$c<c'$.
由函数极值的定义，$\exists\, 0<\delta<\dfrac{c'-c}{2}$，当$x\in U(c,\delta),f(x)\geq f(c)$；当$x\in U(c',\delta),f(x)\geq f(c')$
现任取$x_1\in U^+(c,\delta),x_2\in U^-(c',\delta)$，则$f(x_1)\geq f(c),f(x_2)\geq f(c')$，进而

$$\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c}\geq 0,\frac{f(c')-f(x_2)}{c'-x_2}\leq 0$$

注意到$c<x_1<x_2<c'$，由定理*12*，有

$$0\leq\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c}<\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}<\frac{f(c')-f(x_2)}{c'-x_2}\leq 0\qquad\text{（严格凸，原不等式不能取等）}$$

产生矛盾.

3.3 反函数

定理 16. 若$f(x)$在$[a,b]$连续且严格单调增，$\alpha=f(a),\beta=f(b)$，则反函数$f^{-1}(x)$在$[\alpha,\beta]$连续且严格单调增

定理 17. 若函数$y=f(x)$在x_0附近连续且严格单调，又$f'(x_0)\neq 0$，则其反函数$x=\varphi(y)$在点$y_0=f(x_0)$可导，且$\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

其实反函数只是变换了一下视角，将函数沿着$y=x$做了个对称，因此在题目中将视角变换回来反函数也就没什么特别的了. 练习9有一定难度，但是直观图像是很漂亮的.

练习 9. 设$y=\varphi(x),x\geq 0$是严格单调增的连续函数，$\varphi(0)=0$，$x=\psi(y)$是它的反函数，证明

(a) $\displaystyle\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\varphi(a)}\psi(y)\,\mathrm{d}y=a\varphi(a)$

(b) $\displaystyle\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{b}\psi(y)\,\mathrm{d}y\geq ab\qquad(a\geq 0,b\geq 0)$

3.4 复合函数极限法则与函数连续性的关系

[5]已知$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，欲得$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$

$$\text{考察定义}\begin{cases} i. & u\to u_0, u\neq u_0 \quad \Longrightarrow \quad f(u)\to A \\ ii. & x\to x_0, x\neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad u=g(x)\to u_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x\to x_0, x\neq x_0 \quad \Longrightarrow f(g(x))=A$$

知有以下两种途径，

1. 通过“强化”条件，增加条件$u\neq u_0$以实现，对应海涅定理及复合函数极限法则
   $x\to x_0, x\neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad u\to u_0, \boxed{u\neq u_0} \quad \Longrightarrow \quad f(u)\to A$
2. 通过“弱化”条件，忽视条件$u\neq u_0$以实现，对应函数的连续性
   $x\to x_0, x\neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad u\to u_0, \cancel{u\neq u_0} \quad \Longrightarrow \quad f(u)\to A$

进而有以下定理.

定理 18 (复合函数极限法则).
$u=g(x)$在$\mathring{U}(x_0)$有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，而$f(u)$在$\mathring{U}(u_0)$有定义，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且$g(x)\neq u_0$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$

定义 9 (函数连续性). 若$f(x)$在x_0的邻域内（包含x_0）有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$连续

定理 19 (函数连续性推论).
$u=g(x)$在$\mathring{U}(x_0)$有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，而$f(u)$在$\mathring{U}(u_0)$有定义，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且$f(u)$在$u=u_0$连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))=A$

总结来说，要么$u=g(x)$恒不为u_0，要么$f(u)$在$u=u_0$连续，二者任选其一可以推得以上结论.[6]

通过以上分析也就不难理解为什么在证明复合函数求导法则时不能直接用复合函数极限法则了.

3.5 闭区间连续函数性质

定理 20 (有界性定理). 若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界

定理 21 (最值定理). 若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值

定理 22 (介值定理). $f(x)$在$[a,b]$连续，记$m=\min(f(a),f(b)),M=\max(f(a),f(b))$，则$\forall c\in[m,M],\exists\xi\in[a,b],s.t.\,f(\xi)=c$

定义 10 (一致连续). $f(x)$在D（开、闭或半开半闭）有定义，$\forall\varepsilon>0,s.t./,\forall x_1,x_2\in D$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则称$f(x)$在$D$上一致连续

连续性只需考虑区间的每一点是否有适合连续定义的δ，这是函数的**局部性质**；而一致连续性要考虑$f(x)$在整个区间的情形，在整个区间内来找适合一致连续定义的δ，这是函数的**整体性质**.

[5]本部分来自zzd@hkust的笔记

[6]当然也可以自己构造不满足这两者的函数，请读者自己尝试

定理 23 (康托(Cantor)定理). $f(x)$为闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$一定在$[a,b]$上一致连续

例 13. 证明：设$f(x)$为区间(a,b)上的单调函数，若$x_0\in(a,b)$为$f(x)$的间断点，则x_0必为$f(x)$的第一类间断点

分析. 不妨设$f(x)$在(a,b)上单调上升，否则取$-f(x)$即可
由单调有界原理知，$f(x)$在区间(a,x_0)上单调上升有上界$f(x_0)$，必有$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\alpha$；
$f(x)$在区间(x_0,b)上单调上升有下界$f(x_0)$，必有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\beta$
进而$\alpha\le f(x_0)\le\beta$，但$\alpha\ne\beta$，否则由夹迫性，$f(x)$在$x=x_0$连续
因此x_0必为$f(x)$的第一类间断点.

定义 11 (利普希茨(Lipschitz)条件). 若存在常数K使得

$$|f(x')-f(x'')\le K|x'-x''|,\ x',x''\in(a,b)$$

则称$f(x)$在(a,b)上满足利普希茨条件.

若函数满足利普希茨条件，易知其一致连续.
涉及一致连续和导数的题目，常常结合拉格朗日中值定理一起使用，即

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}(x'-x'')\right|=|f'(\xi)||x'-x''|,\xi\in(x',x'')$$

例 14. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，求证：$f(x)$在$(a,+\infty)$上不一致连续

分析. 不一致连续即

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x'',|x'-x''|<\delta:\ |f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，所以

$$\forall K,\exists X,\forall x>X:\ f'(x)>K$$

令$\varepsilon_0=1,x'=X,x''=X+\dfrac{1}{K}>X$，则

$$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)||x'-x''|>K\frac{1}{K}=1$$

类似的拉格朗日中值定理分拆的方法，可以解决下面一题. 同时注意关注其对柯西收敛原理的应用（绝对值拆分，往条件靠）.

例 15. 设$f(x)$在$[a,b]$满足条件：

1. $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|,\forall x,y\in[a,b],0<k<1$
2. $f(x)$值域在$[a,b]$内

则对任意$x_0\in[a,b]$，令$x_{n+1}=f(x_n)$，有

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在
2. 方程$x=f(x)$的解在$[a,b]$上是唯一的，这个解就是上述极限值

分析. 由条件1结合拉格朗日中值定理，知$|f'(\xi)|\le k, \xi\in[a,b]$，故

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &= |f(x_n)-f(x_{n-1})| = |f'(\xi)||x_n-x_{n-1}| \\ &\le k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})| \\ &\le \cdots \\ &\le k^n|x_1-x_0|\end{aligned}$$

用柯西收敛原理（柯西列）证明收敛

$$\begin{aligned}|x_m-x_n| &= |x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\cdots+x_{n+1}-x_n| \\ &\le |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n| \\ &\le k^{m-1}|x_1-x_0|+k^{m-2}|x_1-x_0|+\cdots+k^n|x_1-x_0| \\ &< \frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0| < \varepsilon\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在.
因为$f(x)$可导，故$f(x)$连续

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$$

故$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$是$x=f(x)$的根.
下面证明唯一性. 若不然，存在$a,b(a\ne b)$，且$a=f(a)$，$b=f(b)$，则

$$|a-b| = |f(a)-f(b)| = |f'(\xi)||a-b| \le k|a-b| < |a-b|$$

矛盾，故根唯一.

4 微商与微分

4.1 微分

课本上关于微分和微商的定义并不自然，不能让读者理解到其背后深刻的内涵，因此在这里我们尝试换个角度来理解.

定义 12. 对于函数$f(x)$，存在线性函数$L(x)$满足

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-L(x)|}{x-x_0}=0$$

则称$L(x)$是$f(x)$的线性逼近*(linear approximation)*. 对应地，如果存在$H(x)$满足

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-H(x)|}{(x-x_0)^n}=0$$

则称$H(x)$是$f(x)$的高阶(n阶)逼近(*high order approximation*).

定义 13 (可微性)**.** *函数$f(x)$在x_0可微，当且仅当它在$x=x_0$存在一个线性逼近*

上述定义告诉我们，若$f(x)$在x_0可微，则其线性逼近$L(x)$靠近$f(x_0)$的速度比x靠近x_0的速度快；而所谓的高阶逼近[7]，则对应着泰勒展开（8.2节）；更特殊地，我们可以定义出0阶逼近，那它代表的就是$f(x)$在$x=x_0$连续了. 因而我们也就能够理解下面这条熟知的定理了

定理 24. *可导一定连续，连续不一定可导*

因为可导（存在线性/一阶逼近）是比连续（存在常数/0阶逼近）更加强的性质，故可导是蕴含着连续的.

更一般地，结合线性代数的知识，我们可以有以下定义

定义 14. *对于函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，如果存在线性变换$T(\mathbf{x_0}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$使得*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}}\frac{\|f(\mathbf{x})-(f(\mathbf{x_0})+T(\mathbf{x_0})(\mathbf{x}-\mathbf{x_0}))\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|}=0$$

则称$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x_0}$可微，线性变换$T(\mathbf{x_0})$称为f在$\mathbf{x_0}$处的导数.

特殊地，取$n=m=1$，$f(x)$为一元函数；取$m=1$，$f(x)$为多元函数.

实际上这个定义也是采用逼近的思想，用一个n维的线性映射来逼近一个n元的函数.[8]

结合定义13我们可以得到，对于一元函数，可微与可导等价，因为$f(x)$可微就存在一个线性逼近$L(x)=T(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$，也就对应着这样一个线性变换$T(x_0)$，即其导数，故可导；反过来，$f(x)$可导，即存在一个线性变换$T(x_0)$，也就存在一个线性逼近$L(x)$同上定义符合逼近性质，进而推出$f(x)$可微.

但对于多元函数，可微（可以全微分）说明存在一个与曲面相切的（超）平面，那其各个方向的偏导数都应存在；而可导（可求偏导）只是存在某个方向的切线，不能推出可微.

至于高阶微分只需知道以下一些事实：

1. 一阶微分具有形式不变性（即$\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}y=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$形式相同），而高阶微分没有（即$\mathrm{d}^n y=f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n$不成立，乘法法则会多出几项），故高阶微分不可随意进行变量代换
2. 高阶微商的莱布尼茨公式
$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v(k)$$
3. 高阶微分的表示[9]：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y))=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^2y=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$
故$\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2$，而$\mathrm{d}^2y$自己作为一个算子整体，不可拆分

[7]高阶可微意味着存在高阶逼近，但高阶可微不代表高阶可导

[8]多元函数中可微与可导的直观区别是什么？ - 冯白羽的回答 - 知乎 https://www.zhihu.com/question/23468713/answer/26043048

[9]为什么二阶导数要这么记？ - Milo Yip的回答 - 知乎 https://www.zhihu.com/question/23166546/answer/23797756

4.2 求导

链式法则、对数求导法、隐函数求导、参数方程微分法等等在这里均不作详细说明，将各种求导公式（特别是三角反三角）记熟即可.

4.3 微分中值定理

定理 25 (费马(Fermart)定理). $f(x)$在$\mathring{U}(x_0)$有定义，在x_0达到极值，且$f(x)$在x_0可导，则$f'(x_0)=0$

定理 26 (罗尔(Rolle)定理). $f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，$f(a)=f(b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=0$

定理 27 (拉格朗日(Lagrange)中值定理(微分中值定理)). $f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或者

$$\theta=\frac{\xi-a}{b-a}\in(0,1),\xi=a+\theta(b-a),f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$$

定理 28 (柯西(Cauchy)中值定理). $f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，$g'(x)\neq 0$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

定理 29. $f(x),g(x),h(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0$$

需要理清以下几个关系：**连续可导(continuously differentiable)**[10]是指**导函数连续**，不是指原函数连续并且可导，因为可导已经蕴含了（可推出）连续，所以没必要再强调；也不是指二阶可导，由于连续不一定可导；但**二阶可导**蕴含了连续可导.

定义 15 (光滑函数). 若$f(x)$连续，则称其为C^0函数；若$f(x)$连续可导，则称其为C^1函数；若$f(x)$满足n阶连续可导，则称其为C^n函数. $\forall n,f(x)\in C^n$，则称$f(x)$光滑，并称其为C^∞函数

例 16.

$$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}\qquad (m\in\mathbb{Z}^+)$$

分析. *1.* $m\geq 1,f(x)$在$x=0$连续

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim x^m\sin\frac{1}{x}=f(0)=0$$

要满足上式且在$x<0$部分有定义，则$m\geq 1$，因$-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$，夹逼得$f(x)\to 0(x\to 0)$

[10] https://math.stackexchange.com/questions/1117323/the-definition-of-continuously-differentiable-functions

2. $m \geq 2, f(x)$在$x=0$可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{m-1}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

要使上式极限存在，则$m-1\geq 1 \implies m\geq 2$

3. $m \geq 3, f(x)$在$x=0$连续可导

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x})=0$$

同(2)理，$m-1\geq 1$且$m-2\geq 1 \implies m\geq 3$

由例16可以看出这几个术语的区别，如当$m=2$时，$f(x)$是病态的(pathological)，因其在$x=0$处可导但不连续可导.

下面这个补充的定理来自课本习题，结论十分简单，但相当有用.

定理 30 (达布(Darboux)定理)**.** $f(x)$在$[a,b]$可导，且$f'(a)\neq f'(b)$，k为介于$f'(a)$与$f'(b)$之间的任意实数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=k$

分析. 法一：
由上面的讨论知此题不能直接用连续函数介值定理做，因为题设只给了$f(x)$可导，但其导函数不一定连续，故我们需要另辟蹊径.
构造函数$F(x)=f(x)-kx$，因为$F(x)$在$[a,b]$连续，由闭区间连续函数最值定理，在$[a,b]$上必存在$f(x)$的最值点，记$\xi=\arg\max\ f(x)$.若$\xi\in(a,b)$，由费马定理立得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=k$.
下证$\xi\neq a,b$.
显然$F(x)$在(a,b)上可导，且

$$F'(a)=f'(a)-k, F'(b)=f'(b)-k$$

由题设知$F'(a),F'(b)$一正一负，不妨设$F'(a)>0,F'(b)<0$，由导数的定义我们有

$$F'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>0$$

$$F'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}<0$$

再由函数极限的局部保号性，存在δ_1，使得$x\in(a,a+\delta_1)$有

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>\frac{F'(a)}{2}>0$$

存在δ_2，使得$x\in(b-\delta_2,b)$有

$$\frac{F(x)-F(b)}{x-b}<\frac{F'(b)}{2}<0$$

则

$$F(a+\frac{\delta_1}{2})>F(a), F(b-\frac{\delta_2}{2})>F(b)$$

故我们找到两个点$a+\dfrac{\delta_1}{2}$和$b-\dfrac{\delta_2}{2}$，它们的函数值分别大于a,b两点的函数值，因此最大值点不会落在a,b上.

分析. 法二：
不妨设$f'(b)<k<f'(a)$（类似于增函数），考虑k与$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$的关系，不外乎三种可能

1. $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则直接利用微分中值定理即得证
2. $k>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，令

$$g(x)=\begin{cases}f'(a),\, x=a\\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, a<x\leq b\end{cases}$$

有$g(a)=f'(a)>k>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=g(b)$（假设），由于$g(x)$为连续函数，则由介值定理，

$$\exists x_0\in(a,b)\; s.t.\; g(x_0)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=k$$

进而由微分中值定理，

$$\exists\xi\in(a,x_0)\; s.t.\; f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=k$$

3. $k<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，令

$$g(x)=\begin{cases}f'(b),\, x=b\\ \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}, a\leq x<b\end{cases}$$

同理可证.
注：这种方法的思想即先找到一条割线，再通过拉格朗日中值定理找切线.

我们把导函数$f'(x)$可以取$f'(a)$与$f'(b)$之间任意值的这种性质称为介值性(intermediate value property). 由这个证明可以看出，达布定理只需要可导，而不需要导函数连续，这是比连续函数介值定理更强的性质.

推论 1. 若$f(x)$在$[a,b]$上可微，则$f'(x)$在$[a,b]$上不可能有第一类间断点

分析. 若不然，$\exists c\in[a,b]$是$f'(x)$的一个第一类间断点.
若$c\in(a,b)$，不妨设$f'(c^-)<f'(c^+)$，任取$r,s\in\mathbb{R}$使得$f'(c^-)<r<s<f'(c^+)$且$f'(c)\neq[r,s]$. （通过$sgn(x)$的图像脑补这种构造）由函数极限的局部保序性，$\exists\delta>0\,s.t.\,(c-\delta,c+\delta)\subset(a,b)$，且当$x\in(c-\delta,c)$时，$f'(x)<r$；当$x\in(c,c+\delta)$时，$f'(x)>s$.
于是当$x\in\mathring{U}(c,\delta)$时，$f'(x)\notin[r,s]$，这与达布定理的介值性矛盾.
同理可证得$c=a$或$c=b$的情况，进而$f'(x)$在$[a,b]$上不可能有第一类间断点.
注：本题也可用拉格朗日中值定理来求解.

定理 31. $f(x)$在(a,b)上可导，且$f'(x)$单调，证明$f'(x)$在(a,b)连续

分析. 由例*13*知，若$f'(x)$有间断点，则必为第一类间断点；但推论*1*又告诉我们$f'(x)$不可能有第一类间断点，两者相矛盾. 故$f'(x)$在(a,b)上没有间断点，即$f'(x)$在(a,b)连续

同时推论1也说明了：存在这样的函数，如$sgn(x)$，在区间上是黎曼可积的，但不存在原函数.

推论 2. $f(x)$在(a,b)上可微，若在$[a,b]$上$f'(x)\neq 0$，则$f'(x)$在$[a,b]$上保持同号（恒正或恒负）

下面的练习是中值定理和达布定理的综合应用，请读者自行尝试.（当然也有其他方法）

练习 10. $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，证明$\forall x_0\in(0,1),\exists\xi\in(0,1)\,s.t.\,f'(\xi)=f(x_0)$

关于一般题目中值定理的运用请见例17，常规思路即构造函数（具体怎么构造见例18），目的是：

1. 补充定义保证函数在整个区间上**连续**
2. 通过代数变换使趋于无限的极限过程变为在**有限**区间上讨论
3. 若用罗尔定理函数能够保证端点值相等

例 17. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：存在$\xi\in(a,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

分析. 令$b>a$，构造

$$F(t)=\begin{cases}f(\dfrac{a-b}{t-b}a) & t\in(a,b)\\ A\quad t=a,b\end{cases}\qquad\qquad \text{补充定义}$$

则易知$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)可导，且$F(a)=F(b)=A$
由罗尔定理，$\exists\xi_0\in(a,b)$使得

$$F'(\xi)=-\frac{(a-b)a}{(\xi_0-b)^2}f'(\frac{a-b}{\xi_0-b}a)=0$$

$\because b>a,\xi_0\in(a,b)\qquad\therefore f'(\dfrac{a-b}{\xi_0-b}a)=0$
故取$\xi=\dfrac{a-b}{\xi_0-b}a\in(a,+\infty)$，即有$f'(\xi)=0$

例 18. $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，且$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上取到它的最小值

分析. 根据构造函数的目的，我们希望找到这样一个函数$x\to+\infty(t\to a),x\to-\infty(t\to b)$，那$u(t)=\tan t$不失为一个好函数.
同样我们希望$v(t)\to c(f(x)\to+\infty)$，不假思索地，用$v(t)=\arctan t$即可满足条件.
则我们构造出

$$g(t)=\begin{cases}\arctan f(\tan t),\, t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\\ \dfrac{\pi}{2},\, t=-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

虽然函数长得比较难看，但它是符合题设条件的，即$g(t)\to\dfrac{\pi}{2},f(x)\to+\infty(t\to\dfrac{\pm\pi}{2},x\to\pm\infty)$.
又$g(t)$在$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上连续，由连续函数最值定理知存在最小值，又由极限的保号性，知最小值一定不会在

端点处取到，进而得证.

注：连续不一定可导，故本题不可用罗尔定理

例 19. $f(x)$在$[a,+\infty)$有界，$f'(x)$存在，证明$A=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

分析. 使用反证法，不妨设$A>0$，则由极限的保号性知$\exists x_0,x>x_0:f'(x)>\dfrac{A}{2}>0$
对区间$[x_0,x]$用拉格朗日中值定理有$\exists\xi\in(x_0,x):f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，进而$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+\dfrac{A}{2}(x-x_0)$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与$f(x)$有界矛盾.

5 不定积分

5.1 三种基本积分方法

1. 凑微分法

2. 第二换元法（记得换元时 $\mathrm{d}x$也要换）

3. 分部积分法

   - 先写成$\displaystyle\int u(x)\,\mathrm{d}v(x)$的形式，然后直接交换$u(x),v(x)$即可
   - 选取$u(x)$顺序：**对反幂三指**，如求$\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$，取$u(x)=x^2$，化为$\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}\sin x$

5.2 常见公式

比较基础的公式在此不再列举，以下积分是在题目中比较常见，均需熟练掌握推导

1. 对数

$$\int\ln x\,\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C\qquad\text{凑微分法}$$

2. （反）三角函数

$$\int\tan x\,\mathrm{d}x=-ln|\cos x|+C\qquad\text{凑微分法,小心}-\text{号}$$

$$\int\cot x\,\mathrm{d}x=ln|\sin x|+C\qquad\text{分部积分}$$

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=ln|\sec x+\tan x|+C\qquad\text{乘}\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$$

$$\int\csc x\,\mathrm{d}x=ln|\csc x-\cot x|+C\qquad\text{乘}\frac{\csc x+\cot x}{\csc x+\cot x}$$

$$\int\arcsin x\,\mathrm{d}x=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\qquad\text{分部积分}$$

$$\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\tan x\sec x+\ln|\tan x+\sec x|)+C\qquad\text{分部积分}$$

3. 根式/分式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \text{分子分母除以}a^2$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\pm(x^2-a^2)} = \pm\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \text{裂项可得}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \text{将}a^2\text{提出来}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C \qquad \text{三角换元，注意会有}1/a\text{，但为常数}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C \qquad \text{分子有理化+分部积分}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} + C \qquad \text{分子有理化+分部积分}$$

注意：

1. 不要忘记加C
2. 对$\frac{1}{x}$求积分出来是$\ln|x|+C$，有绝对值

5.3 不同类型积分的常见思路

1. 有理分式

- 假分式先除下来变为真分式，然后用部分分式
- 若非纯有理分式（如各种基本初等函数的组合，见例21），或分母次数太高（见例22），则将分子配凑成分母形式或分母导数形式以便分拆相加（这两种方式都十分常用）
- 分母一定要先分解为一次乘二次的形式（虚数的情况请看例20），也即分解为

$$\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{j_i}\prod_{i=1}^{s}(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}$$

  结合分子，也就有部分分式的两种基本形式

$$\frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

- 前者直接积，后者配平方（见例23）
- 小技巧：通过倒代换$x=\frac{1}{t}$降低分母次数（见例28法二），有$\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}$等部分的可以考虑，如$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{100}+x}$也可使用

例 20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$

分析. 先对分母进行分解，$1+x^4=(x+\sqrt{i})(x-\sqrt{i})(x+\sqrt{-i})(x-\sqrt{-i})$
之所以是这4个根，是因为我们知道$1+(x^2)^2=0$的解为$x^2=\pm i$，故上式也就理所当然了[11]
由于复根不好看，所以合并一下就变成$1+x^4=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$，然后就可以用部分分式那一套去算了

例 21.

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x && \text{分子配凑为分母形式}\\&=\int\frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x && \text{分拆}\\&=\frac{e^x}{x+1}-\int e^x\,\mathrm{d}\frac{1}{x+1}-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x && \text{分部积分}\\&=\frac{e^x}{x+1}+\int\frac{e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x && \text{刚好消掉}\\&=\frac{e^x}{x+1}+C\end{aligned}$$

例 22.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{(x+1)^2-2(x+1)+3}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x && \text{分子几次就配几次式}\\&=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}-2\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2}+3\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^3} && \text{分拆}\\&=\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+C\end{aligned}$$

例 23.

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x && \text{分子配凑为分母导数形式}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+1/2)}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} && \text{分拆}\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

2. 三角函数

- 可以三角恒等变换的要先变换，熟悉半角、倍角（降幂升角）、积化和差和差化积（不同角）、辅助角（相同角）等等的使用，对以下公式的正用反用要相当敏感，懂得灵活转换
  - $1+\sin kx=\left(\sin\frac{kx}{2}+\cos\frac{kx}{2}\right)^2$，$1+\cos x=2\cos^2 x$
  - $\tan^2 x+1=\sec^2 x$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\sec x)'=\tan x\sec x$
- 第一步最终目的是结合凑微分法努力化为同名函数（见例24），或是有一定关系的式子（见例25）
- 没有好方法，最后才采用万能公式（见例26），别一上来就太暴力
- 最终很大几率会化为分式型积分
- 小技巧1：通过分子分母同乘的方法强行凑平方，如求$\sec x$积分，分子分母同乘$\cos x$

[11]实际上这样写是不严谨的，具体有关复数根的细节等之后有空再讲吧

- 小技巧2：配对偶式，如$\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$

例 24.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(1-\cos^2)\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{恒等变换} \\
&= \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\cos x \qquad \text{凑微分，化同名} \\
&\xlongequal{t=\cos x} \int \left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{化为分式型} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

例 25.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x} &= \int \sec x\,\mathrm{d}\cot x \qquad \text{凑微分，熟悉偏门三角函导数} \\
&= \sec x\cot x - \int \cot x\sec x\tan x\,\mathrm{d}x \qquad \text{分部积分会将}\cot x\text{消去，故才有上一步的凑微分} \\
&= \sec x\cot x - \int \sec x\,\mathrm{d}x \\
&= \sec x\cot x - \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

注；本题也可分子分母同乘$\cos x$，化为分式解决，但较为麻烦

例 26.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\frac{1-\cos 2x}{2}} \qquad \text{降幂升角} \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{5-\cos 2x} \\
&= 2\int \frac{1+\tan^2 x}{5(1+\tan^2 x)-(1-\tan^2 x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{万能公式} \\
&\xlongequal{t=\tan x} 2\int \frac{1+t^2}{6t^2+4}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{换元，记得微分也要变} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2} \qquad \text{化为分式型} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

注；本题分母若变为$3-\cos^2 x$没什么作用，故应先考虑倍角公式，实现降幂

例 27. 三角函数相乘怎么玩，请见此题分解

$$\begin{aligned}
\int \tan(x+a)\tan(x+b)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin(x+a)\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{切化弦} \\
&= \int \left(\frac{\sin(x+a)\sin(x+b)+\cos(x+a)\cos(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)} - 1\right)\mathrm{d}x \\
&\quad \text{加一项减一项，目标消}x \\
&= \int \left(\frac{\cos(a-b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)} - 1\right)\mathrm{d}x \qquad \text{用和差角公式进行合并} \\
&= -x + \cos(a-b)\int \frac{\sin((a+x)-(b+x))\,\mathrm{d}x}{\sin(a-b)\cos(x+a)\cos(x+b)} \qquad \text{同乘}\sin(a-b) \\
&= -x + \cot(a-b)\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)\,\mathrm{d}x}{\cos(x+a)\cos(x+b)} \qquad \text{拆开} \\
&= -x + \cot(a-b) - \int (\tan(x+a)-\tan(x+b))\,\mathrm{d}x \\
&= -x + \cot(a-b) - \ln\left|\frac{\cos(x+a)}{\cos(x+b)}\right| + C
\end{aligned}$$

注：同乘的部分我们采用了$\sin(a-b)$而不是$\cos(a-b)$，因$\sin(x+y)$拆分后有交叉的$\sin x\cos y$项，可以与分母相消. 同样的方法可计算$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$等等，留给读者做练习

3. 根式

- 对于二次根式，采用整块换元（见例28法一）；也可根式内配方后三角代换或直接用常用公式（见例28法二）
  - * 整块换元的形式

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \text{其中} n>1, ad-bc\neq 0$$

  - * 配方的形式

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x, \text{其中} a>0, b^2-4ac\neq 0, \text{或} a<0, b^2-4ac>0$$

- 对于简单高次根式的加减，用最小公倍数法消根号，如$\sqrt{x}$与$\sqrt[3]{x}$同时存在，令$x=t^{lcm(2,3)}=t^6$
- 对于复杂高次根式，凑微分不断换元使根式内多项式次数降至一次，再进行整块换元转化成有理分式（见例30）
- 当然以上的讨论都是针对化简至没法再化简的根式而言，如$\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$就不算最简根式
- 分式与根式结合，先用分式的配凑拆分等化简（见例29）

例 28. 法一：

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} &\xlongequal{t^2=\frac{1-x}{1+x}} \int t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \qquad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{直接将整块根式换掉}\\
&= -4\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt\\
&= -4(\frac{1}{2})\int t\,\mathrm{d}\frac{1}{1-t^2} \qquad \text{很有技巧的凑微分}\\
&= -2(\frac{t}{1-t^2}-\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}) \qquad \text{分部积分}\\
&= -2\frac{t}{1-t^2}-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\\
&= -\frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{x}-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+C \qquad \text{将}t\text{回代}
\end{aligned}$$

法二：

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} &= \int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad \text{分子有理化}\\
&= \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{分拆}\\
&\xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t^2}{\sqrt{t^2-1}}+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}} \qquad \text{倒代换}\\
&= -\sqrt{t^2-1}+\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+C\\
&= -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+C \qquad \text{将}t\text{回代}
\end{aligned}$$

例 29.

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{分子配凑分母形式，小技巧：留下常数}a^2\\
&= \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{a^2}\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad \text{技巧是直接把后面那一项放入微分中，求导看差什么再补}\\
&= \frac{1}{a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}+C \qquad \text{分部积分，刚好消去}
\end{aligned}$$

例 30.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{1+x^4}} &= \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt[4]{1+x^4}} && \text{分子分母同乘}x\text{凑微分}\\
&\xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1+t^2}} && \text{换元降次}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2\sqrt[4]{1+t^2}} && \text{分子分母同乘}t\text{凑微分，与第一步相同}\\
&\xlongequal{u=t^2} \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt[4]{1+u}} && \text{换元降次}\\
&\xlongequal{v^4=1+u} \int \frac{v^2\,\mathrm{d}v}{v^4-1} && \text{整块换元}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}v}{v-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}v}{v+1} && \text{部分分式}\\
&= \frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}\right| + C && \text{回代}
\end{aligned}$$

这题如果用倒代换$t=\dfrac{1}{x}$变成求$-\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[4]{1+t^4}}$反而不这么好做，因为这题与之前的题刚好相反，得先升幂，凑微分后才可以进行降幂；否则直接降幂会把根式前的x消掉，次数反而不齐了，请读者自行体会这其中的区别.

5.4 例题

1. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$　　凑微分
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{A\sin^2 x + B\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$　　配对偶
4. $\displaystyle\int \cos^5\ \mathrm{d}x$　　不用分部积分
5. $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,\mathrm{d}x$　　积化和差
6. $\displaystyle\int \frac{\sec x}{(1+\sec x)^2}\,\mathrm{d}x$　　恒等变换
7. $\displaystyle I_n = \int \tan^n x\,\mathrm{d}x$　　用I_{n-2}递推
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$　　倒代换
9. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}$　　配方配凑
10. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$　　配分母形式

6 定积分

6.1 黎曼积分

定义 16 (Riemann积分)**.** $f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

将区间任意分成n个小区间，每个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n$$

记$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$，在每个小区间上任取一点$\xi \in [x_{i-1}, x_i]$，作和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

若$f(x)$在$[a,b]$可积

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

积分基本性质

1. 有界性：可积函数必有界
2. 线性性：相同积分区间两函数
3. 可加性：同一函数连续积分区间
4. 单调性：$f(x), g(x)$在$[a,b]$可积，$f(x) \le g(x), x \in [a,b]$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
5. 绝对值不等式：$f(x)$在$[a,b]$可积，则$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

定理 32 (闭区间连续函数可积定理)**.** 若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$可积

定理 33 (积分第一中值定理)**.** 若$f(x), g(x)$在$[a,b]$连续，且$g(x)$在$[a,b]$不变号，则在$[a,b]$中存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

特别地，$g(x) \equiv 1$时，有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

在证明题中，绝对值不等式和积分中值定理常常一起出现，同样也是证明的利器.

定理 34. 若$f(x)$在$[a,b]$可积，则变上限定积分$F(x) = \int_a^x f(t)dt$是$[a,b]$上的连续函数

定理 35 (微积分基本定理). $f(x)$在$[a,b]$可积，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的任一原函数，$F'(x)=f(x)$，则$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$

定理 36 (柯西不等式(积分形式)). $f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，则

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

等号成立当且仅当$f(x),g(x)$线性相关

分析. 可通过构造二次函数，令$\Delta\ge 0$证明；
也可利用线性代数的知识，定义内积[12]$\langle u,v\rangle=\displaystyle\int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$，通过$\|u\|\|v\|\ge|\langle u,v\rangle|$得证

定理 37 (三角不等式(积分形式)). $f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，则

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\ge\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

等号成立当且仅当$g(x)=\lambda f(x),\lambda\ge 0$

分析. 对应线性代数中$\|u\|+\|v\|\ge\|u+v\|$

例 31. $f(x)$在$[a,b]$上可积，其积分为I，改变$[a,b]$内有限个点的$f(x)$值，使其变成另一函数$f^*(x)$，证明$f^*(x)$也在$[a,b]$上可积，且积分仍为I

分析. 设改变了k个点的函数值，这些点为$c_1,c_2,\cdots,c_k$
构造

$$F(x)=f(x)-f^*(x)=\begin{cases}0,x\notin\{c_1,c_2,\cdots,c_k\}\\ f(x)-f^*(x),x\in\{c_1,c_2,\cdots,c_k\}\end{cases}$$

用分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$将区间任意分成$n$个小区间，每个小区间的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},i=1,2,\cdots,n$，记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$
在每个小区间上任取一点$\xi\in[x_{i-1},x_i]$，作和式$\sigma=\displaystyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 则

$$k\lambda\min_{x\in[a,b]}F(x)\le\sigma\le k\lambda\max_{x\in[a,b]}F(x)$$

当$\lambda\to 0$，由极限的夹迫性知$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=0$
故$F(x)$在$[a,b]$上可积，

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-f^*(x)]\,\mathrm{d}x=0$$

由定积分的线性性，

$$\int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=I-0=I$$

[12]线性代数没学好的请自行翻书

因此$f^*(x)$在$[a,b]$上可积，且积分仍为I.

学完微分积分后会涌现出很多不等式证明题，但其实很多时候不需要太多的代数技巧，直接求导即可解决（对于单变量函数）.见例32法一其实就是高考题做法.

例 32. 设$f'(x)$在$[a,b]$连续，且$f(a)=0$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{(b-a)^2}{2}\max_{a\le x\le b}|f'(x)|$$

分析. 法一:

为方便计算，不妨将$f(x)$平移至$[0,t], t>0$，则$f(0)=0$，即证

$$\left|\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{t^2}{2}\max_{0\le x\le t}|f'(x)|$$

构造

$$g(t)=\frac{t^2}{2}\max_{0\le x\le t}|f'(x)|-\left|\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| \qquad \text{（注意是关于}t\text{的函数）}$$

则$g(0)=0$，$g'(t)=t\max\limits_{0\le x\le t}|f'(x)|$

要令$g'(t)\ge 0$，即令$\max\limits_{0\le x\le t}|f'(x)|\ge\left|\dfrac{f(t)}{t}\right| \quad (*)$

由拉格朗日中值定理，在$(0,t)$上必$\exists\xi>0\ s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(t)-0}{t-0}$

故最大值必然大于等于区间内某一点的值$|f'(\xi)|$，即$(*)$式成立

进而$g'(t)\ge 0, g(t)\ge 0$，原不等式成立.

分析. 法二:

先证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f'(x)(x-b)\,\mathrm{d}x \quad (*)$$

因为

$$\begin{aligned}
-\int_a^b f'(x)(x-b)\,\mathrm{d}x &= -\int_a^b (x-b)df(x)\\
&= -\left[f(x)(x-b)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right] \qquad \text{分部积分}\\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即证得$(*)$式.则原式

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f'(x)(x-b)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \max_{a\le x\le b}|f'(x)|\left|\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \max_{a\le x\le b}|f'(x)|\frac{(x-b)^2}{2}\Big|_a^b \\
&= \frac{(b-a)^2}{2}\max_{a\le x\le b}|f'(x)|
\end{aligned}
$$

同理可证下面的练习.

练习 11. 设$f''(x)$在$[a,b]$连续，且$f(a)=f(b)=0$，证明：

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$

6.2 可积性

定义 17 (达布(Darboux)和)**.** 设$f(x)$在$[a,b]$有界，对$[a,b]$的任意分法

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

记

$$M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x),\, m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$$

分别称

$$S = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i,\, s = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$$

为$f(x)$对应这一分法的达布上和与达布下和

有以下几个定理.

定理 38.

1. 达布上和是黎曼和的上确界，达布下和是黎曼和的下确界
2. 若添加新的分点，达布上和不增大，达布下和不减小
3. 任一个达布下和总不超过任一个达布上和

定理 39 (达布定理)**.** 当$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$时，达布上和的极限为上积分，达布下和的极限为下积分

$$\lim_{\lambda\to 0} S = \overline{I},\, \lim_{\lambda\to 0} s = \underline{I}$$

且$s\le \overline{I}\le \underline{I}\le S$，其中，下积分$\underline{I}$为全体下和的上确界，上积分为$\overline{I}$为全体上和的下确界.

定理 40 (可积的充要条件). $f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积的充要条件是上积分$\overline{I}$等于下积分$\underline{I}$. 充要条件可另外表述为

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0\,.$$

或者记

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)-\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')-f(x'')|$$

则

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$$

以下给出几类特殊的可积函数是可积.

1. 在$[a,b]$连续
2. 在$[a,b]$单调
3. 在$[a,b]$上有界且仅有有限个间断点的函数

注意：存在单调但有无穷个间断点且可积的函数

证明函数在某个区间上可积，即证明$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$式收敛于0，关键在于振幅的处理.

例 33. $f(x)$在$[0,1]$上有界，不连续点为$x=\dfrac{1}{n},n\in\mathbb{Z}^+$，则$f(x)$在$[0,1]$上可积.

分析. 关键在于将和式拆分为有限部分和无限部分考虑.
考虑到$f(x)$在$[0,\delta)(\delta>0)$部分包含无穷多个不连续点，而$f(x)$在$[\delta,1]$只含有有穷个不连续点.
故尝试将和式拆为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{j}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=j+1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

其中，区间为

$$x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_j<\delta<x_{j+1}<\cdots<x_n=1$$

因为$f(x)$在$[\delta,1]$有界且含有有穷个不连续点，故$f(x)$在$[\delta,1]$可积，由可积的充要条件有，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0,\lambda=\max_i\{\Delta x_i\}<\delta_0:\left|\sum_{i=j+1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

再考虑无穷个不连续点的部分. 因为$f(x)$在$[0,1]$有界，所以

$$\exists M>0:|f(x)|<M$$

进而振幅$\omega_i<2M$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{j}\omega_i\Delta x_i\right|\le\sum_{i=1}^{j}|\omega_i||\Delta x_i|\le 2M\sum_{i=1}^{j}|\Delta_i|=2Mx_j<2M\delta$$

综上，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{4M}$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right|\le\left|\sum_{i=1}^{j}\omega_i\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=j+1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right|<2M\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

（注意$[0,\delta)$部分并不关心分多少份，只关心δ的值，故在$[\delta,1]$部分限制λ的最大值并不影响最终结果）进而得证.

证明可积性第一步通常是对振幅ω_i进行放缩，放缩成关于上确界M_i和下确界m_i的表达式. 如果条件已经给出某些函数可积，则证明的时候努力往条件的形式靠即可，类似于极限的证明题.

例 34. 若$|f(x)|$可积，则$|f(x)^\alpha|,\alpha>0$可积

分析. 1° 若$\alpha\in\mathbb{Z}^+$，有

$$\omega_i'\le M_i^\alpha-m_i^\alpha=(M_i-m_i)(\cdots)$$

其余证明与例*35*中2°的方法相同，故成立

2° 若$\alpha\notin\mathbb{Z}^+$，且$\alpha\in(0,1)$，则设$\alpha=\dfrac{1}{p},p>1$

因为$|f(x)|$可积，所以

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\lambda<\delta:\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

设$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则对于$|f(x)|^{\frac{1}{p}}$，由赫尔德*(Hölder)*不等式，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i&\le\sum_{i=1}^{m}(M_i^{\frac{1}{p}}-m_i^{\frac{1}{p}})\Delta x_i\qquad\text{类似例35中}2^\circ\text{的方法}\\&=\sum_{i=1}^{m}(M_i^{\frac{1}{p}}-m_i^{\frac{1}{p}})(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}}(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}\\&\le\left(\sum_{i=1}^{m}(M_i^{\frac{1}{p}}-m_i^{\frac{1}{p}})^p\Delta x_i\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le\left(\sum_{i=1}^{m}(M_i-m_i)\Delta x_i\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i\right)^{\frac{1}{q}}\qquad(*)\\&=\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x_n)^{\frac{1}{q}}\to0\end{aligned}$$

故$|f(x)|^{\frac{1}{p}}$可积

3° 若$\alpha\notin\mathbb{Z}^+$，且$\alpha>1$ 设$\alpha=[\alpha]+\dfrac{1}{p}$，因为$[\alpha]\in\mathbb{Z}^+$，由$1^\circ$知$|g(x)|^{[\alpha]}$可积，由$2^\circ$知$|g(x)|^{\frac{1}{p}}$可积，进而$|g(x)|^\alpha=|g(x)|^{[\alpha]}|g(x)|^{\frac{1}{p}}$可积

（因为$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，由平方可积可推得乘法可积）

$(*)$式补充证明：即证$(M_i^{\frac{1}{p}}-m_i^{\frac{1}{p}})^p\le M_i-m_i$
由于M_i,m_i为$|g(x)|$在某个区间上得上确界、下确界，所以$M_i,m_i>0$
原式等价于

$$\left(\frac{m_i}{M_i}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(1-\frac{m_i}{M_i}\right)^{\frac{1}{p}}\ge 1,\ 0\le\frac{m_i}{M_i}\le 1$$

构造$h(x)=x^{\frac{1}{p}}+(1-x)^{\frac{1}{p}}$，求导易知当$x=\dfrac{1}{2}$时有最大值，$x=0$或$1$时有最小值$h(0)=h(1)=1$，故$(*)$式成立.

例 35. 讨论$f(x),f^2(x),|f(x)|$可积性的关系

分析. 1° 若$f(x)$可积，$|f(x)|$必可积

若$M_i,m_i>0$，则$M_i'-m_i'=M_i-m_i$
若$M_i,m_i<0$，则$M_i'-m_i'=M_i-m_i$
若$M_i>0,m_i<0$，则$M_i'-m_i'\le M_i-m_i$
用2°同样的方法可证得$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i=0$，故$|f(x)|$可积

2° 若$f(x)$可积，$f^2(x)$必可积
若$f(x)$可积，则$f(x)$有界，即$\exists M>0:|f(x)|<M$
且$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i=0$
由极限的定义有

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\lambda<\delta:\left|\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

对于$f^2(x)$，由例*2*可得

$$\begin{aligned}\omega_i'&=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)-\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)\\&\le\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)\cdot\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)-\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)\cdot\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)\\&=M_i^2-m_i^2\end{aligned}$$

所以，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$\lambda<\delta$时有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i\right|&\le\left|\sum_{i=1}^{m}(M_i^2-m_i^2)\Delta x_i\right|\\&=\left|\sum_{i=1}^{m}(M_i+m_i)(M_i-m_i)\Delta x_i\right|\\&\le\left|\sum_{i=1}^{m}2M\omega_i\Delta x_i\right|\\&<2M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i=0$，$f^2(x)$可积

3° 若$|f(x)|$可积，$f(x)$不一定可积

狄利克雷函数的平移$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x\in\mathbb{Q}\\ -\dfrac{1}{2} & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}\end{cases}$

4° 若$|f(x)|$可积，$f^2(x)$必可积

同2°，将证明中所有$f(x)$替换成$|f(x)|$即可

5° 若$f^2(x)$可积，$f(x)$不一定可积

同3°构造反例

6° 若$f^2(x)$可积，$f|x|$必可积

令$g(x)=f^2(x)$，则$\sqrt{g(x)}=|f(x)|$.

由例*34*，令$\alpha=\dfrac{1}{2}$即可成立.

综上，除了$|f(x)|$或$f^2(x)$可积无法推出$f(x)$可积，其他都可以相互推导.

6.3 定积分的计算

关键掌握不定积分的求法，定积分就能迎刃而解了，最大不同只在于定积分换元时需要把上下限一起改变（出现上限小于下限的情况也是正常的）.

用定义计算的题则要懂得配凑出黎曼和的形式，如下面的练习12.

练习 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

6.4 定积分的近似计算

定义 18 (定积分梯形公式)**.**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

若$f''(x)$在$[a,b]$上连续，且$|f''(x)|\le M, x\in[a,b]$，则梯形公式误差可作如下估计

$$|R_n|\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

定义 19 (抛物线公式/辛普森(Simpson)公式)**.**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&\approx\frac{b-a}{6n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})]\\&=\frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})]\end{aligned}$$

若$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上连续，且$|f^{(4)}(x)|\le M, x\in[a,b]$，则

$$|R_{2n}|\le\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M$$

7 无穷级数与广义积分

本章中会将正项级数、一般项级数、广义积分（无穷限积分、瑕积分）、函数项级数放在一起进行比较，当然也会涉及各类级数各自的特性. 由于将内容进行整合，故最重要的各类判别法总结在7.4节才进行讲述.

7.1 级数的基本性质

定义 20 (无穷级数). $\{u_n\}$为数列，称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和，称其收敛到$S$.

可由数列极限性质直接推导出来的定理在此不再赘述.

定理 41 (数项级数收敛的必要条件). 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

注意此定理并非充分条件，如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(n+1)$发散，但其一般项趋于0. 并且，此定理也只适用于数项级数，广义积分并不具有这样的性质.

在进行数项级数收敛性判断时，第一步就得先判定其一般项是否趋于0，然后再考虑其他判别方法. 如果遇到比较简单的数列，可以直接求和的，那就先求和再讨论，如下面的例36.

例 36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx, |r|<1$

分析. 用三角函数的复数形式. 由棣莫弗公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，得到$\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$，其中$i^2=-1$.

$$\begin{aligned}
LHS&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n(e^{inx}-e^{-inx})\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(re^{ix}\frac{1-(re^{ix})^n}{1-re^{ix}}-re^{-ix}\frac{1-(re^{-ix})^n}{1-re^{-ix}}\right)&&\text{等比数列求和}\\
&\xlongequal{z=re^{ix}}\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}-\frac{\bar z}{1-\bar z}\right)&&\text{因}|z|<1\text{故}\lim_{n\to\infty}z^n=0\\
&=\frac{1}{2}\frac{z-\bar z}{1-(z+\bar z)+r^2}&&z\bar z=r^2\text{，通分}\\
&=\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}
\end{aligned}$$

注：当然也可以用三角函数积化和差和差化积去做，但相比起复数法会复杂很多

关于数列求和的各种技巧，如裂项求和、错位相消、分子有理化、三角恒等变形等均要熟悉.

7.1.1 正项级数

定义 21 (正项级数). 级数的每一项都**非负**，则称其为正项级数. 由此知正项级数一定为实级数.

定理 42 (正项级数收敛的充要条件). 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件是$\{S_n\}$有上界

分析. 必要性：极限有界性；充分性：单调有界原理

例 37. p级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当$p \leq 1$时发散，$p > 1$时收敛（$p = 1$时也称为调和级数）

下面的柯西积分判别法是用连续量来研究离散量很好的例子，遇到$\ln n, \dfrac{1}{n^p}$等可考虑

定理 43 (柯西积分判别法). $f(x)$在$[0, +\infty)$连续且单调下降，$u_n = f(n)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛充要条件是

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

存在

例 38.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}, p \in \mathbb{R}$$

分析. *1.* 当$p = 1$时，$f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$在$[2, +\infty)$单调递减

$$\lim_{n \to \infty} \int_2^n \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

由柯西积分判别法，原级数发散

2. 当$p \leq 1$时，$\dfrac{1}{n^p \ln n} \geq \dfrac{1}{n \ln n}$，由比较判别法，原级数发散

3. 当$p > 1$时，$\dfrac{1}{n^p \ln n} < \dfrac{1}{n^p}$，由比较判别法，原级数收敛

7.1.2 一般项级数

定义 22 (交错级数). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0$

下面的莱布尼茨判别法是判断交错级数收敛简便而有效的方法.

定理 44 (莱布尼茨(Leibniz)判别法)**.** 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$的一般项$\{u_n\}$单调下降趋于0，则交错级数收敛

注意莱布尼茨判别法是判断收敛性，而不是判断绝对收敛性的，后面多种判别法一起运用时经常会搞混. 由于前面的有限项对最终的极限没有影响，因此交错级数的一般项只要从某个n开始单调下降趋于0就可以使用莱布尼茨判别法了.

当然不是所有交错级数都能让你一眼望穿，直接使用判别法，如下面这个例子就需要进行拆分，再分别判断.

例 39.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

分析. 泰勒展开

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

因$\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$单调下降趋于0，由莱布尼茨判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛

又由p级数的性质知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛.

但$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原级数发散.

下面的阿贝尔变换和阿贝尔引理均为阿贝尔判定法的铺垫，证明均不难，记住几何意义可以现推.

定理 45 (阿贝尔(Abel)变换)**.** 两组数列$\{a_n\},\{b_n\}$，设$\{b_n\}$的部分和数列为$\{B_n\}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i&=\sum_{i=1}^{n}a_i(B_i-B_{i+1})\\&=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_n\end{aligned}$$

定理 46 (阿贝尔引理)**.** 设$\{a_n\}$单调，$\{B_n\}$为$\{b_n\}$的部分和有界M，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\le M(|a_1|+2|a_n|)$$

7.1.3 代数运算

1. 结合律：**条件/绝对收敛**级数任意加括号，和不变；但不能随意去括号
2. 交换律：**绝对收敛**成立；条件收敛适当重排，可使新级数发散或收敛到某一特定值(Riemman)
3. 分配律：**绝对收敛**成立(Cauchy)

下面对级数的乘法再做深入讨论.

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$，考虑乘积$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$，可以发现有多种不同的求和顺序，如

- 对角线法（柯西乘积）

$$\begin{tikzcd}
a_1b_1 & a_1b_2 \arrow[dl] & a_1b_3 \arrow[dl] & \cdots \arrow[dl] & a_1b_m \\
a_2b_1 & a_2b_2 \arrow[dl] & a_2b_3 \arrow[dl] & \cdots & a_2b_m \\
a_3b_1 & a_3b_2 \arrow[dl] & a_3b_3 & \cdots & a_3b_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_m
\end{tikzcd}$$

$$S = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} \left(= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad (\text{从0开始}) \right)$$

- 矩形法

$$\begin{tikzcd}
a_1b_1 & a_1b_2 \arrow[d] & a_1b_3 \arrow[d] & \cdots & a_1b_m \\
a_2b_1 & a_2b_2 \arrow[l] & a_2b_3 \arrow[d] & \cdots & a_2b_m \\
a_3b_1 & a_3b_2 \arrow[l] & a_3b_3 \arrow[l] & \cdots & a_3b_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 \arrow[l] & a_nb_3 \arrow[l] & \cdots & a_nb_m
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
S &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_k b_{k-i}\right)
\end{aligned}$$

关于相乘的结果，有以下结论.

定理 47 (级数相乘). 分以下三种情况讨论

1. *(Cauchy)* 若A和B都绝对收敛，则以任意方式相乘，结果都为AB
2. *(Mertens)* 若A或B中有一者条件收敛，另外一者绝对收敛，则柯西乘积为AB
3. 若A和B都条件收敛，则最终结果不一定收敛

7.2 广义积分

定义 23 (无穷限积分). 设$f(x)$在$[a,+\infty)$有定义，并且在任意有限区间$[a,A]$上可积，定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x = I$$

为$[a,+\infty)$的无穷限积分

定义 24 (瑕积分). 设$f(x)$在$(a,b]$有定义，并且在任意区间$[a+\eta,b]$上可积$(\eta>0)$，在$(a,a+\eta]$无界，定义

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

为$[a,+\infty)$的瑕积分

注意在无穷项积分中$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$收敛并不能推出$f(x)\to0(x\to+\infty)$，这与数项级数不同，如例60说明了这一点.

下面的积分第二中值定理类似于数列的阿贝尔变换，用于证明广义积分的阿贝尔判定法.

定理 48 (积分第二中值定理). 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，而$g(x)$在$[a,b]$上单调，则在$[a,b]$中存在ξ使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\ \mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

在进行广义积分的收敛性判定时，一般先尝试其是否可以进行正常的积分，即求不定积分（详细方法见第5章），之后才考虑用各类判别法. 并且在实际运算过程中要记得分段，最好每一个区间只含一个瑕点，在端点或者内点都可.

例 40.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

分析. 如果只是判断收敛性，则用比较判别法

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\Big/\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

而$\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}x$收敛（注意瑕点），故原积分收敛.

如果要求值，则变得相当麻烦，法一：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{2u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}/2u}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{\sqrt{2}/2u}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(u^2-\sqrt{2}u+1)}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(u-\sqrt{2}/2\right)}{\left(u-\sqrt{2}/2\right)^2+\left(\sqrt{2}/2\right)^2}\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(u^2+\sqrt{2}u+1)}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(u+\sqrt{2}/2\right)}{\left(u+\sqrt{2}/2\right)^2+\left(\sqrt{2}/2\right)^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}u-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}u+1)\right)\Bigg|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}
$$

法二：倒代换，令$u=\dfrac{1}{t}$，则原式变为$-2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$，接下来步骤同例*20*.

7.3 函数项级数

7.3.1 函数列

对于函数列$\{f_n(x)\}$可以将其看为二元函数$f(n,x)$，但实际上我们在研究它的性质的时候往往是针对某个点$x=x_0$（确定的x），令$n\to\infty$. 这样看的话，函数项级数与数项级数没有太大差别.

定义 25 (极限函数)**.**

$$
f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\forall x\in X
$$

称为函数列$\{f_n(x)\}$的极限函数

由于在不同点函数值构成的数列收敛的快慢不一致，在快慢发生急剧变化的地方，极限函数可能会变成间断，因此引入**一致收敛**的概念，以描述函数各处收敛速度差不多的性质.

定义 26 (一致收敛)**.** $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon),\forall n>N,x\in X$，有

$$
|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon
$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在X一致收敛到$f(x)$. 或记

$$
\rho_n=\sup_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|
$$

$\{f_n(x)\}$在X一致收敛到$f(x)$当且仅当$\rho_n\to 0(n\to\infty)$.

函数列的一致收敛性一般按照定义证明，与极限定义证明方法类似，在此不再赘述，关键在于把x看成常数，n看成变量.

注意不一致收敛的定义与平时的定义改写有较大区别，在此说明.

定义 27 (不一致收敛)**.** $\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{Z}^+,\exists n>N$与$x_n\in[a,b]$，使得

$$|f_n(x_n)-f(x)|\geq\varepsilon_0$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在X不一致收敛到$f(x)$

下面是一个关于一致收敛性很有趣的例子.

例 41.

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$$

讨论在以下区间的一致收敛性

1. $x\in[0,b],b<1$
2. $x\in[0,1)$

分析. 易得极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

1. $\forall\varepsilon>0,|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{x^n}{1+x^n}\leq x^n\leq b^n,x\in[0,b],b<1$
   则取$N=\lfloor\log_b\varepsilon\rfloor+1$，当$n>N$时，$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$，故一致收敛
2. $\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{3},\forall N,\exists n=N+1>N$，取$x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\in[0,1)$，则

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{1/2}{1+1/2}=\frac{1}{3}\geq\varepsilon_0=\frac{1}{3}$$

   故不一致收敛

初看会感觉这两者很矛盾，但细想是有区别的. 前者的上确界小于1，而后者的上确界等于1，其中的极限过程已经超出了人脑能脑补的程度了.

定义 28 (一致有界)**.**

$$\exists M>0,s.t.\forall x\in X,n:\ |f_n(x)|\leq M$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在X一致有界

定理 49.
1. $f_n(x)$在$[a,b]$上有界，并且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$，则$f_n(x)$在$[a,b]$上一致有界
2. $f_n(x)$在$[a,b]$上一致连续，并且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续
3. $f_n(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，并且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积

分析. 1. 因$f_n(x)$在$[a,b]$有界，设$|f_n(x)| < M_n$

因$f_n(x) \to f(x)$，取$\varepsilon = 1$，则当$n > N$时，$|f_n(x) - f(x)| < 1$，故$|f(x)| < |f_{N+1}(x)| + 1 < M_{N+1} + 1$

进而$\forall n > N : |f_n(x)| < |f(x)| + 1 < M_{N+1} + 2$，取$M = \max(M_1, M_2, \ldots, M_N, M_{N+1} + 2) > 0$，则$\forall n : |f_n(x)| < M$，$f_n(x)$在$[a,b]$上一致有界

2. 最后要证$|f(x_1) - f_{N+1}(x_1) + f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2) + f_{N+1}(x_2) - f(x_2)| < \varepsilon$，拆分一下分别用定义即可

3. 用定积分定义证，比较麻烦

定理 50 (函数列的分析性质). 1. *(连续)若函数列$\{f_n(x)\}$每一项都在$[a,b]$连续，且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛到$f(x)$，则$f(x)$连续*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x_0) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

2. *(可积)若函数列$\{f_n(x)\}$每一项都在$[a,b]$连续，且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛到$f(x)$，则$f(x)$可积*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x$$

3. *(可微)若函数列$\{f_n(x)\}$每一项都在$[a,b]$有连续微商$f_n'(x)$，$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$**逐点**收敛到$f(x)$，且$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$**一致**收敛到$\sigma(x)$，则$f(x)$可微，且*

$$f'(x) = (\lim_{n \to +\infty} f_n(x))' = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x) = \sigma(x)$$

例 42. 1. *若函数列$\{f_n(x)\}$每一项都在$[a,b]$连续，且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛到$f(x)$，$x_n \in [a,b]$，且$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，则$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x_0)$*

2. *$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛到$f(x)$，$x_0 \in (a,b)$且$\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$，则$\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$*

分析. 1. 证$|f_n(x_n) - f(x_0)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

2. 证$|f(x) - a| = |f(x) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - a_{N+1} + a_{N+1} - a| < \varepsilon$，其中会用到柯西列

7.3.2 和函数

定义 29 (和函数). 对于函数列$\{u_n(x)\}$，定义和函数

$$\begin{aligned} S(x) :&= \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \forall x \in X \end{aligned}$$

当函数项级数可以求和时，要先把和求出来. 把x看成常数，函数项级数会往往变成一个等比数列，这样就可以求和了.

例 43. 按定义讨论下面级数的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x\in(-\infty,+\infty)$$

分析. 设部分和数列为$S_n(x)$，和函数（若存在的话）为$S(x)$，则$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$使得$\forall n>N$有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

注意到

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}=-x^2\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)^k=\frac{x^2}{2+x^2}\left(1-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)^n\right)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\frac{x^2}{2+x^2}$$

因此

$$\begin{aligned}|S_n(x)-S(x)|&=\left|\frac{x^2}{2+x^2}\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^n}\right|\\&=\frac{x^2}{(1+x^2)^n(2+x^2)}\\&\le\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+nx^2}\qquad\text{伯努利不等式}\\&\le\frac{1}{2}\frac{x^2}{nx^2}\\&=\frac{1}{2n}<\varepsilon\end{aligned}$$

取$N=\lfloor\frac{1}{2\varepsilon}\rfloor+1$，则当$n>N$时上式成立，故一致收敛

其实函数项级数就和普通的数项级数没有太大差别，用在数项级数的判别法，在函数项级数这里照样可以用，需要改动的地方不过是在一些地方加上“一致”罢了. 下面这条定理就是定理41的函数项级数版本.

定理 51 (函数项级数一致收敛必要条件)**.** 函数项级数X一致收敛的必要条件是一般项构成的函数序列$\{u_n(x)\}$在X一致收敛于0

而下面这个判别法则是数项级数没有的判别法，非常强大，屡用不爽.

定理 52 (M判别法(Weierstrass))**.** 若对函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$，存在$M_k$使得

$$|u_k(x)|\le M_k,\forall x\in X$$

而正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}M_k$收敛，则$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$X$一致收敛

技巧在于，把一般项里含x的项都放缩去掉，只留下关于n的项

例 44. 若函数列$\{u_n(x)\}$的每一项都是$[a,b]$的单调函数，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$的端点处绝对收敛，则该级数在$[a,b]$上一致收敛

分析. 由函数的单调性，及M判别法

$$u_n(x) < \max(|u_n(a)|,|u_n(b)|)$$

故$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛

当x实在消不掉时，可采用一些“巧妙”的方法，如下.

例 45.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2},|x|>0$$

分析. 因直接对分母用均值不等式，得到$\frac{1}{n}$并无法判断收敛性，故换种方式
$\forall x_0,|x_0|>0,\exists\delta>0,\delta\in(0,|x_0|),\forall|x|\geq\delta$，有

$$\left|\frac{nx}{1+n^4x^2}\right|\leq\frac{n|x|}{n^4x^2}=\frac{1}{n^3|x|}\leq\frac{1}{n^3\delta}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\delta}$收敛，由$M$判别法，原级数在$|x|\geq\delta$一致收敛
又x_0的任意性，知原级数在$|x|>0$一致收敛

定理 53 (迪尼(Dini))**.** 若函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$连续，$u_n(x)\geq 0$，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$**逐点**收敛到$S(x)$，$S(x)$在$[a,b]$连续，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛

定理 54 (和函数的分析性质)**.** 与一般函数列的分析性质非常类似

1. *(连续)*若函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$连续，且函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛到$S(x)$，则$S(x)$在$[a,b]$连续

2. *(逐项积分)*若函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$连续，且函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛到$S(x)$，则$S(x)$可积

$$\int_a^b S(x)\ \mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\ \mathrm{d}x$$

3. *(逐项微分)*若函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$有连续微商$u_n'(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$**逐点**收敛到$S(x)$，

且$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$在$[a,b]$**一致**收敛到$\sigma(x)$，则$S(x)$可微，且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sigma(x)$$

例 46. 若函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$连续，且函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,b)$一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛

分析. 取一个小于ε的值，对$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$用柯西收敛原理后，两侧取极限$x \to a^+, x \to b^-$，即得证.（因连续性取极限会导致取等，故要取小于$\varepsilon$的值）

关于和函数分析性质的运用，可以见下例.

例 47.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi, |r| < 1$$

分析. 由例*36*知

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, |r| < 1$$

当$|r| < 1$时，$|2r^n \cos nx| \le 2|r|^n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} 2|r|^n$收敛，由$M$判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$一致收敛
又级数的每一项$\{r^n \cos nx\}$都在$(-\infty, +\infty)$连续，故可逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\,\mathrm{d}x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^n \cos nx\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

7.4 敛散性判定方法总结

本小节阐述对于正项级数、一般项级数、无穷限积分、广义积分、函数项级数中的某几个都通用的判别法. 为方便表述和记忆，用BNF范式表述，有点泛型编程(Generic Programming)的思想在里面，下面先做一些符号说明.

$$\langle s \rangle ::= u_n \;\Big|\; v_n$$

$$\langle f \rangle ::= f(x) \;\Big|\; g(x)$$

$$\langle fs \rangle ::= u_n(x) \;\Big|\; v_n(x)$$

7.4.1 比较判别法

比较判别法是为通用的判别法，对于上述五种级数积分均可采用，但要注意只能用于判定**正项**的级

数或积分，即其**绝对收敛**性，使用时注意**加上绝对值**

$$\langle T\rangle ::= |\langle s\rangle| \;\Big|\; |\langle f\rangle| \;\Big|\; |\langle fs\rangle|$$
$$\langle U\rangle ::= \sum_{n=1}^{\infty}|\langle s\rangle| \;\Big|\; \int_a^{+\infty}|\langle f\rangle|\,\mathrm{d}x \;\Big|\; \int_a^b|\langle f\rangle|\,\mathrm{d}x(\text{a为瑕点}) \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty}|\langle fs\rangle|$$

- 一般形式：

$$T_1 \le T_2\text{，}U_2\text{收敛则}U_1\text{收敛，}U_1\text{发散则}U_2\text{发散}$$

- 极限形式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_1}{T_2}=l\text{，}l\in[0,+\infty)\text{，}U_2\text{收敛则}U_1\text{收敛；}l\in(0,+\infty],U_2\text{发散则}U_1\text{发散}$$

一般形式的比较判别法需要熟悉常见的放缩技巧（见2.4节），如有界量$(\sin x,(-1)^n)$直接取界、均值不等式、估计等.

极限形式的比较判别法常常与重要极限/无穷小量代换牵连在一起，需要懂得构造.

例 48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$

分析. 一般形式：

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\ge\frac{1}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2\sqrt{n(n+1)}}\ge\frac{1}{2n+1}$$

看似平淡无奇，但分母将加号变为乘号后再用均值不等式避免反号的技巧十分高超

例 49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

分析. 极限形式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{4\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}$$

这个降角很有技巧，为使用重要极限做准备

极限形式还有比较常见的方法是直接取某一分式作为分母，如$\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n^2}$等

例 50.

$$\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

分析. 这里就取三角函数内的$\dfrac{1}{x}$作为比较对象

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)+\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}\\
=&\,1
\end{aligned}
$$

注意数项级数还有另一种形式：$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$，判别条件与一般形式的类似.

7.4.2 正项判别法

同样也是判定绝对收敛

$$
\begin{aligned}
\langle T_i\rangle &::= |\langle s_i\rangle| \;\Big|\; |\langle fs_i\rangle|\\
\langle U\rangle &::= \sum_{n=1}^{\infty}|\langle s\rangle| \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty}|\langle fs\rangle|
\end{aligned}
$$

注意这里要将函数项级数看成x为常数的数项级数，但以下几种判别法只能判定收敛，而**不能**判定一致收敛性.

1. 达朗贝尔(D'Alembert)判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n}=l\text{，}l<1\text{收敛，}l>1\text{发散}$$

2. 拉阿比(Raabe)判别法：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{T_n}{T_{n+1}}-1\right)=S\text{，}S>1\text{收敛，}S<1\text{发散}$$

3. 柯西(Cauchy)根式判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{T_n}=l\text{，}l<1\text{收敛，}l>1\text{发散}$$

4. 高斯(Gauss)判别法：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\gamma_n}{n^{\beta}}$$

   其中$\alpha,\beta>1$都为常数，且数列$\{\gamma_n\}$有界，则当$\alpha>1$时数列收敛，$\alpha\le 1$时数列发散（没有失效的情况！）

达朗贝尔和拉阿比判别法（以及上述高斯判别法）常用在前后项可以相消的情况，如阶乘、指数.
柯西根式判别法则用在明显的指数形式，如整个T的n次幂等.

例 51.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

分析. 指数阶乘采用达朗贝尔判别法，注意加绝对值

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n |x| = \frac{|x|}{e}$$

故$|x|<e$时原级数绝对收敛；$|x|>e$时，原级数发散；当$|x|=e$时，达朗贝尔判别法失效.
但由**斯特林*(Stirling)*公式**

$$n! = \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\lambda_n}$$

其中

$$\frac{1}{12n+1} < \lambda_n < \frac{1}{12n}$$

故

$$n!\left(\frac{e}{n}\right)^n = \frac{\sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\lambda_n} e^n}{n^n} = \sqrt{2\pi n} e^{\lambda_n} \nrightarrow 0$$

由数项级数的收敛定理知$|x|=e$时发散

例 52.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\frac{1}{n^\beta}, \alpha,\beta>0$$

分析. 明显的阶乘暗示，先求

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{n+\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta$$

由拉阿比判别法

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+1}{n+\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - 1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n - \alpha}{n+\alpha} \\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{(n+1)\left(1+\frac{\beta}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n - \alpha}{1+\frac{\alpha}{n}} \text{最好别用洛必达，用二项式展开} \\ &= 1-\alpha+\beta\end{aligned}$$

当$1-\alpha+\beta>1$，即$\alpha<\beta$时级数收敛；当$1-\alpha+\beta<1$，即$\alpha>\beta$时级数发散；当$\alpha=\beta$时拉阿比判别法

失效，采用高斯判别法

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{n+1}{n+\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \\ &= \frac{n+1}{n+\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{n+\alpha+1-\alpha}{n+\alpha}+\frac{\alpha(n+1)}{n(n+\alpha)}+\frac{(n+1)\alpha(\alpha-1)}{2n^2(n+\alpha)}+\frac{n+1}{n+\alpha}\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left[\frac{(n+1)\alpha(\alpha-1)}{2(n+\alpha)}+\frac{n+1}{n+\alpha}\mathcal{O}(1)\right] \\ &= 1-\frac{-1}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2}\end{aligned}$$

γ_n极限存在故有界，因此$\alpha=\beta$时原级数发散

柯西根式判别法可以用在一些奇奇怪怪的数列上，只有它有什么的n次方就行.

例 53.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$$

分析. 由柯西根式判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2 x}{\sqrt[n]{n}}=2\sin^2 x$$

故当$2\sin^2 x<1$即$k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$时，原级数绝对收敛

同理可得其他情况. 综合有，原级数在$k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$绝对收敛，在$x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$条件收敛，在$k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}$发散，其中$k\in\mathbb{Z}$

7.4.3 一般判别法

这里要区别一致收敛和绝对收敛概念的适用范围.

一致收敛用于函数项级数，是指其在各个点收敛的速度都差不多.

绝对收敛用于数项级数或广义积分，对于函数列的某个点x_0也可以讨论其绝对收敛性.

至于函数列的一致收敛性，只能通过定义来证明.

$$\begin{aligned}\langle T\rangle &::= \langle s\rangle \;\Big|\; \langle f\rangle \;\Big|\; \langle fs\rangle \\ \langle U\rangle &::= \sum_{n=1}^{\infty}\langle s\rangle \;\Big|\; \int_a^{+\infty}\langle f\rangle\,\mathrm{d}x \;\Big|\; \int_a^b\langle f\rangle\,\mathrm{d}x(\text{a为瑕点}) \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty}\langle fs\rangle \\ \langle V\rangle &::= \sum_{n=1}^{\infty}\langle s\rangle\langle s\rangle \;\Big|\; \int_a^{+\infty}\langle f\rangle\langle f\rangle\,\mathrm{d}x \;\Big|\; \int_a^b\langle f\rangle\langle f\rangle\,\mathrm{d}x(\text{a为瑕点}) \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty}\langle fs\rangle\langle fs\rangle\end{aligned}$$

1. 绝对收敛必收敛

2. 柯西(Cauchy)收敛原理：注意下面的求和是广义和，即包含了积分

$$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n', n''>N: \sum_{n'}^{n''} T<\varepsilon \Leftrightarrow U(\text{一致})\text{收敛}$$

注意，数列中同样有柯西收敛原理，形式完全相同，只是没有求和符号，对应柯西列的概念（见定理6）.

3. 狄利克雷(Dirichlet)判别法：
   T_1单调(一致)收敛于0，T_2的**部分和**(一致)有界，则V(一致)收敛

4. 阿贝尔(Abel)判别法：
   T_1单调(一致)有界，U_2(一致)收敛，则V(一致)收敛

柯西收敛原理在证明题中使用简直就是大杀器，绝大多数证明收敛的题目都可以用它倒腾出来

例 54. 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$$

分析. 即证$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N$时

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\right|<\varepsilon$$

因$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，由柯西收敛原理，$\exists N_1, \forall n>N_1$都有

$$\left|a_{N_1+1}+a_{N_1+2}\cdots+a_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又因N_1是一个确定的值，故$\exists N_2 \forall n>N_2$

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1 a_{N_1}}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\right| &\leq\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1 a_{N_1}}{n}\right|+\left|\frac{N_1+1}{n} a_{N_1+1}\right|+\left|\frac{N_1+2}{n} a_{N_1+2}\right|+\cdots+\left|\frac{n}{n} a_n\right| \\
&<\frac{\varepsilon}{2}+a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n \\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

取$N=\max(N_1, N_2)$即得证

例 55. 对数列$\{a_n\},\{b_n\}$定义$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，$\Delta b_k=b_{k+1}-b_k$，求证

1. 若$\{S_n\}$有界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$$

2. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$都收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

分析. 这题相当复杂，但却是练习用定义证明的绝佳好题.

1. 欲用柯西收敛原理，即$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当$n > N$时，$\forall p \in \mathbb{Z}^+$有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\right| < \varepsilon$

用阿贝尔变换

$$\begin{aligned} LHS &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(S_k - S_n)(b_k - b_{k+1}) + b_{n+p}(S_{n+p} - S_n)\right| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(|S_k - S_n||\Delta b_k| + |b_{n+p}||S_{n+p} - S_n|) \qquad (\star) \end{aligned}$$

因为$\{S_n\}$有界，故

$$\exists M > 0, s.t. \forall n \in \mathbb{Z}^+ : |S_n| \le M \qquad (1')$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$收敛，故

$$\exists N_1 > 0, s.t. \forall n > N_1, \forall p \in \mathbb{Z}^+ : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}|\Delta b_k|\right| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad (2')$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，故

$$\exists N_2 > 0, s.t. \forall n > N_2 : |b_n| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad (3')$$

结合$(1')(2')(3')$式，得

$$(\star) \le 2M\frac{\varepsilon}{4M} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$$

取$N = \max(N_1, N_2)$即可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

再由阿贝尔变换

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + b_n S_n = -\sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta b_k + b_n S_n$$

左右取极限$n \to \infty$有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n + \lim_{n\to\infty}(b_n S_n)$$

又$\{S_n\}$有界，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty}(b_n S_n) = 0$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$$

2. 同*1*理，由阿贝尔变换有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(|S_k - S_n||\Delta b_k| + |b_{n+p}||S_{n+p} - S_n|) \qquad (\star)$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，故由数列极限的有界性知，其部分和数列$\{S_n\}$有界，即

$$\exists M_1 > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+ : |S_n| \leq M_1 \qquad (a')$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta b_n$收敛，其部分和数列

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta b_k = b_{n+1} - b_1$$

极限存在，故$\{b_n\}$有极限，进而$\{b_n\}$有界，即

$$\exists M_2 > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+ : |b_n| \leq M_2 \qquad (b')$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$都收敛，取$M = \max(M_1, M_2)$，由柯西收敛原理

$$\exists N_1 > 0, \forall n > N_1, \forall p \in \mathbb{Z}^+ : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = |S_{n+p} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (c')$$

$$\exists N_2 > 0, \forall n > N_2, \forall p \in \mathbb{Z}^+ : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \Delta b_k\right| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad (d')$$

结合$(a')(b')(c')(d')$式，取$N = \max(N_1, N_2)$，得

$$(\star) \leq 2M\frac{\varepsilon}{4M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

由柯西收敛原理知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

下面的例56、例57是一些小结论.

例 56. *1.* 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$不一定收敛

2. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛

3. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$绝对收敛

分析. *1.* 取$a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. 当n足够大时有$a_n < 1$，则$a_n^2 = a_n \cdot a_n \leq a_n$，由比较判别法知收敛

3. 同*2*理

例 57. 关于na_n的一些例子

1. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$收敛，$na_n$不一定趋于*0*

2. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$收敛，$a_{n+1} \leq a_n$，则$\lim\limits_{n \to \infty} na_n = 0$

3. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\lim\limits_{n \to \infty} na_n = 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

4. 若$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$收敛，且$f(x)$在$[a, +\infty)$单调下降，则$\lim\limits_{n \to \infty} xf(x) = 0$

分析. *1.* 取$a_n = \dfrac{1}{n^2}, n \neq k^2, k \in \mathbb{Z}^+$，$a_{k^2} = \dfrac{1}{k^2}, k \in \mathbb{Z}^+$
分开两个p级数求和，当然收敛；因子列$k^2 a_{k^2} \to 1$，故na_n不趋于0

2. 由柯西收敛原理

$$(n - N)a_n = a_n + \cdots + a_n \leq a_N + \cdots + a_n < \varepsilon$$

又$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$，故

$$na_n < Na_n + \frac{\varepsilon}{2} < N\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

进而$\lim\limits_{n \to \infty} na_n = 0$

3. 由$\lim\limits_{n \to \infty} na_n = 0$及$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$$

4. 同*2*，但要先反证得$f(x) \geq 0$

下面例58无论是方法还是结论都相当重要，类似地可以证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$在$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$时收敛.

例 58.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

分析. 当$x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$时，级数一般项为0，显然绝对收敛

当$x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$时，由三角函数积化和差公式，裂项相消可得

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x$$

故

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq\frac{\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\cos\frac{2n+1}{2}x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

即$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$有界，而$\{\frac{1}{n}\}$单调下降趋于0，由狄利克雷判别法知原级数收敛

下面是几道变形例题.

例 59.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},x\in(0,\pi)$$

分析. *1.* 当$p>1$时，$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leq\frac{1}{n^p}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，由比较判别法，原级数绝对收敛

2. 当$0<p\leq1$时，由例*58*类似的方法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$有界，而$\{\frac{1}{n^p}\}$单调下降趋于0，故由狄利克雷函数判别法，原级数收敛

但由于（**相当关键的一步**）

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geq\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$收敛（狄利克雷），故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|$发散，即原级数条件收敛

3. 当$p\leq0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx\neq0$. 若不然，则

$$0=\lim_{n\to\infty}\cos nx\neq0=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\cos 2nx}{2}=\frac{1}{2}$$

矛盾，而$\frac{1}{n^p}\geq1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{nx}{n^p}\neq0$，由数项级数收敛的必要条件知原级数发散

综上，原级数$p>1$时绝对收敛，$p\in(0,1]$时条件收敛，$p\leq0$时发散

例 60.

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 \ \mathrm{d}x$$

分析.

$$\int_1^{A} \sin x^2 \ \mathrm{d}x = \int_1^{A^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u$$

这步替换相当关键，因$\dfrac{1}{\sqrt{u}}$单调递减趋于0，$\sin u$积分有界，故由狄利克雷判定法，原积分收敛

类似地如$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$等，都可用上述思想解决.

例 61.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x \ \mathrm{d}x$$

分析. *1.* 先证明收敛性

$$\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{\ln x}}\frac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}$$

因为$\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$单调递减趋于0，$\sin x$积分有界，故由狄利克雷判别法，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{\ln x}} \ \mathrm{d}x$收敛

而$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}} = 0$，故$\dfrac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}$有界

又$\left(\dfrac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}\right)' = \dfrac{2-\ln\ln x}{2x\ln x^{\frac{3}{2}}}$，故当$x \geq e^{e^2}$时，$\dfrac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}$单调递减

由阿贝尔判别法，原积分收敛

2. 再证明绝对收敛性

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| \geq \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin^2 x = \frac{|\ln\ln x}{2\ln x} - \frac{(\ln\ln x)\cos 2x}{2\ln x}$$

类似地，由阿贝尔判别法知，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{(\ln\ln x)\cos 2x}{2\ln x} \ \mathrm{d}x$收敛

而当x充分大时，$\dfrac{\ln\ln x}{\ln x} \geq \dfrac{1}{x}$，故由比较判别法$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{|\ln\ln x|}{2\ln x} \ \mathrm{d}x$发散

进而$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin^2 x \ \mathrm{d}x$发散

由比较判别法，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{|\ln\ln x|}{\ln x}|\sin x| \ \mathrm{d}x$发散

综上，原积分条件收敛

注：这题的思路需要非常清晰，否则各种判别法混着使用很容易就迷失自我.

7.4.4 方法总结

1. 尝试求出和式或积分具体的值
2. 用某些收敛充要(必要)条件判断不会发散
3. 比较判别法最先考虑，绝对收敛用正项判别法，一般收敛性或一致收敛性用一般判别法

8 幂级数

幂级数不过是特殊的函数项级数，因此判定定理的使用方法与无穷级数的完全一致，而本章的很多定理都是第7章定理的直接推论.

8.1 收敛半径与收敛域

定义 30 (幂级数). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$称为幂级数，注意它的各个项严格按照升序排列

定理 55 (阿贝尔(Abel)第一定理). *若幂级数在$x_1 \neq 0$处收敛，则在$|x| < |x_1|$上都**绝对**收敛；若在$x_2 \neq 0$处发散，则在$|x| > |x_2|$都发散.*

注意对于幂级数区间的两个端点$x = \pm r$要单独讨论其敛散性.

定义 31. *对于任意给定的幂级数，存在唯一的$r \in [0, +\infty]$，使得幂级数在$|x| < r$绝对收敛，在$|x| > r$发散，其中r称为收敛半径. 用达朗贝尔判别法可给出幂级数的收敛半径$r = \dfrac{1}{\rho}$，其中*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

定理 56 (阿贝尔第二定理). *若幂级数收敛半径为$r > 0$，*

1. *则$\forall b \in (0, r)$，幂级数在$[-b, b]$**一致**收敛*
2. *且幂级数在r收敛，则幂级数在$[0, r]$一致收敛*
3. *且幂级数在$-r$收敛，则幂级数在$[-r, 0]$一致收敛*

注意：不能说明$(-r, r)$一致收敛，如$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$（同例41解释）

由定理56与定理54可直接得到以下推论.

推论 (幂级数和函数的分析性质). *若幂级数的收敛半径为$r > 0$，则其和函数*

1. *在$(-r, r)$连续*
2. *在收敛区间内部可以逐项微分与逐项积分，且新的幂级数收敛半径仍为r*
3. *在$(-r, r)$任意次可微，且$S^{(k)}$等于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$逐项微商$k$次后得到的幂级数*

分析. *结合定理56的注意事项，和函数的连续性看似与定理54矛盾，实则不然，下面的证明短小而意味深长，值得慢慢体会.*
$\forall x_0 \in (-r, r)$，令$b = \dfrac{r + |x_0|}{2}$，则$|x_0| < b < r$
由阿贝尔第二定理，幂级数在$[-b, b]$一致收敛，而$a_n x^n$在$(-\infty, +\infty)$连续，故由定理54知，和函数在$[-b, b]$连续，特别地在x_0连续.
*由$x_0 \in (-r, r)$的**任意性**，和函数在$(-r, r)$连续.*

运用逐项微分和逐项积分的方法，可以求得一些复杂级数的和. 关键在于如何经过变换使得新的函数可以求和. 注意逐项积分求的是定积分，而不是不定积分. 也就是说$x=0$的项必须要考虑进去，因为不一定为0.

例 62.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n} \qquad \text{收敛域}[-1,1]\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2\frac{(-1)^{(n-1)}}{(2n-1)}t^{2n-1}\,\mathrm{d}t\\
=&\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2(-1)^{n-1}t^{2n-2}\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}t\\
=&\,2\int_0^x\int_0^u\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^{n-1}\right)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
=&\,2\int_0^x\int_0^u\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\
=&\,2\int_0^x\arctan u\,\mathrm{d}u \qquad \text{分部积分}\\
=&\,2x\arctan x-\ln(1+x^2)
\end{aligned}
$$

8.2 泰勒公式

8.2.1 基本性质

泰勒(Taylor)公式在函数拟合方面有着举足轻重的作用，推导的方式也多种多样，通常通过一阶一阶逐渐逼近的方式得到，关于其通俗易懂的解释可见[13].

定理 57 (带余项的泰勒公式)**.** *$f(x)$在$x=a$有n阶微商，即$f^{(n)}(a)$存在，则*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)\,,$$

其中，佩亚诺(Peano)余项为

$$R_n(x)=o((x-a)^n)(x\to a)$$

其仅仅表示了$x\to a$时误差的变化，更加精确的误差估计可用以下几种余项公式. 积分余项

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

拉格朗日余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

柯西余项

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),\theta\in(0,1),\xi\in(a,x)$$

[13]怎样更好地理解并记忆泰勒展开式？ - 陈二喜的回答 - 知乎 http://zhihu.com/question/25627482/answer/313088784

当$a=0$时，泰勒公式即为麦克劳林(Maclaurin)公式.

用泰勒公式可以求解一些复杂的极限，如下面的例子所示.

例 63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sin x}{2\ln(1+x^2)}$

分析. 由带佩亚诺余项的泰勒公式有

$$\cos\sin x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(x^2)(x\to 0)$$

$$\ln(1+x^2)=x^2+o(x^2)$$

因而

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{2x^2}=\frac{1}{4}$$

当然，洛必达法则也是求解的. 但对于一些特殊的极限，只有通过等价无穷小量代换，极限才容易求得，否则易陷入求导无穷无尽的套子里.

关于泰勒公式应该展开至几阶，一般遵循“分式上下同阶，加减幂次最低”原则[14]. 只要保证相关级数的项齐全即可，如求

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

不能只将$\ln(1+1/x)$展开至一阶，因为乘开后会有$1/(2x)$项，但这并不涵盖所有的x^{-1}项，故展开至二阶才可以确保结果的准确性.

下面是加减法的例子.

例 64. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x})$

分析.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}&=x\left(\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\&\sim x\left(\left(1+\frac{1}{3}\frac{3}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{-2}{x}-\frac{1}{8}\left(\frac{-2}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)\to 1(x\to+\infty)\end{aligned}$$

泰勒级数也可用来证明一些函数不等式，一般展开至二阶即可.

例 65. $f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数，且$f'(a)=f'(b)=0$，则存在$c\in(a,b)$，使得

$$|f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

分析. 将$f(x)$在$x=a$处展开，则$f(x)=f(a)+\dfrac{f''(c_1)}{2}(x-a)^2, c_1\in(a,x)$

将$f(x)$在$x=b$处展开，则$f(x)=f(b)+\dfrac{f''(c_2)}{2}(x-b)^2, c_2\in(x,b)$

[14]利用泰勒公式求极限时，如何确定泰勒公式展开到第几阶？ - 摆渡人宝刀君的回答 - 知乎 https://www.zhihu.com/question/52636834/answer/195479110

分别取$x=\dfrac{a+b}{2}$代入上面两式得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(c_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=f(b)+\frac{f''(c_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

进而

$$\frac{4}{(b-a)^2}|f(a)-f(b)|=\frac{1}{2}|f''(c_2)-f''(c_1)|\leq\frac{1}{2}(|f''(c_2)|+|f''(c_1)|)$$

因为$f''(x)$连续，故

$$\min\{|f''(c_1)|,|f''(c_2)|\}\leq\frac{|f''(c_1)|+|f''(c_2)|}{2}\leq\max\{|f''(c_1)|,|f''(c_2)|\}$$

所以由连续函数介值定理，

$$\exists c\in[c_1,c_2]:\ |f''(c)|=\frac{|f''(c_1)|+|f''(c_2)|}{2}$$

综上，

$$\exists c\in(a,b):\ |f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

下面定理表明若函数可以展开成幂级数，则一定为泰勒级数

定理 58 (唯一性)**.** 若$f(x)$在(x_0-r,x_0+r)可展开为关于$x-x_0$的幂级数，则必为$f(x)$在x_0的泰勒级数

函数无穷次可微并不是可展开成幂级数的充分条件，如$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

定理 59 (充要条件)**.** $f(x)$在$(-r,r)$能够展开为幂级数，当且仅当$\forall x\in(-r,r)$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

推论 (充分条件)**.** 若$f(x)$的各阶微商在$(-r,r)$**一致有界**，则$f(x)$在$(-r,r)$可以展开成泰勒级数

8.2.2 常见公式

$$\begin{aligned}
e^x&=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\\
\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots,\ x\in(-1,1)\\
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots,\ x\in(-1,1]
\end{aligned}$$

由这些常见的公式，我们可以快速写出一些函数的泰勒级数展开. 关键在于如何将原函数通过变换，变成我们熟悉的函数.

例 66. 下面是一些例子，最终的展开式不作赘述，只阐述前面变换的部分.

1. $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$
2. $\dfrac{x}{\sqrt{1-3x}} = x(1+(3x))^{\frac{1}{2}}$
3. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \displaystyle\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$
4. $\dfrac{1}{1-3x+2x^2} = \dfrac{2}{1-2x} - \dfrac{1}{1-x}$
5. $\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$

用柯西乘积（7.1.3节）的方式，可求得更多级数的泰勒展开式.

例 67.

$$\begin{aligned}
(\arctan x)^2 &= \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \\
&= \left(\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t\right)^2 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\frac{(-1)^{n-k}x^{2(n-k)+1}}{2(n-k)+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2(n-k)+1)}\right)x^{2(n+1)},\ |x|\le 1
\end{aligned}$$

不仅如此，我们也可以得到一些特殊级数的和.

例 68. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

分析. 本题是著名的巴塞尔*(Basel)*问题[15]，最先由欧拉用下面的方法解决.
由$\sin x$的泰勒级数展开有

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

可以看出左侧的根为$x=\pm n\pi, n\in\mathbb{Z}^+$，由魏尔斯特拉斯分解定理[16]，可将左式写成如下形式

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{x} &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \\
&= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots
\end{aligned}$$

[15] Basel Problem, https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

[16] Weierstrass Factorization Theorem, https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_factorization_theorem，最初欧拉没有用本定理，因而并不严谨.

提取二次项得

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

对$\sin x/x$展开式左右两侧对比系数有

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{3!}$$

移项即得证.

9 傅里叶级数

9.1 基本概念

定理 60 (三角函数系). 三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

中任意两个不同函数都正交，即在$[-\pi,\pi]$[17]上的内积为0.

定义 32 (绝对可积). 设$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$黎曼可积或者是瑕积分，且$f(x)$在$[-\pi,\pi]$的积分绝对收敛

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\ \mathrm{d}x<+\infty$$

则$f(x)$在$[-\pi,\pi]$绝对可积.

定义 33 (傅里叶级数). 设$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$绝对可积，则

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x & n=0,1,2,\ldots \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x & n=1,2,\ldots \end{cases}$$

为$f(x)$的傅里叶系数，由此得到$f(x)$的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

一般要单独求出a_0，同时注意a_0前面要乘$\frac{1}{2}$，a_n和b_n前面要乘$\frac{1}{\pi}$.

先判断$f(x)\sin nx$和$f(x)\cos nx$是否奇函数或偶函数，奇函数对称区间求积分则为0，偶函数变两倍.

下面给出一些常见函数的傅里叶展开，区间均为$(-\pi,\pi)$. 最好都自己推导一遍，虽然很简单，但是很麻烦也很容易出错.

[17]其实任意长度为2π的区间都满足

- $f(x)=x$：

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

- $f(x)=x^2$：对x的展开式逐项积分+例69的结论

$$f(x)\sim \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

- $f(x)=|\sin x|$：积化和差

$$f(x)\sim \frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}\cos nx$$

- $f(x)=|\cos x|$

$$f(x)\sim -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx$$

- $f(x)=e^x$z：分部积分移项求和，可以用双曲函数$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$表示

$$f(x)\sim \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{n^2+1}\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{n^2+1}\sin nx\right)$$

- $f(x)=|x|$

$$f(x)\sim \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos nx$$

- $f(x)=\operatorname{sgn} x$

$$f(x)\sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(1-(-1)^n)\sin nx$$

下面考虑任意区间的傅里叶级数.

定义 34 (任意区间的傅里叶级数)**.** 设$f(x)$以$2l$为周期，在$[-l,l]$绝对可积，则做变换$x=\dfrac{l}{\pi}t$可得傅里叶系数为

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ \mathrm{d}x \quad n=0,1,2,\dots\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ \mathrm{d}x \quad n=1,2,\dots\end{cases}$$

如果$f(x)$定义在$[a,b]$上，则做将平移a个单位，转移到$[0,l](l=b-a)$区间上，再考虑以下两种延拓方法，拓展至整条数轴.

- 奇延拓：$F_o(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$
- 偶延拓：$F_e(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$

注意延拓后积分要乘2.

9.2 收敛性

定理 61 (黎曼局部化定理). 若$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$绝对可积，则$f(x)$在x_0的收敛或发散，只与$f(x)$在x_0附近的性质有关.

定理 62 (利普希茨(Lipschitz)判别法). 若$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$绝对可积，且在x_0满足$\alpha>0$阶利普希茨条件，即存在$\delta>0$与常数M使得

$$|f(x_0\pm t)-f(x_0)|\leq Mt^{\alpha},\ 0<t\leq\delta$$

推论. 若$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$绝对可积，且在x_0有左右微商$f'_+(x_0),f'_-(x_0)$存在，则$f(x)$的傅里叶级数在x_0收敛到$f(x_0)$

定义 35 (逐段可微). 若$[a,b]$**可以**分为有限个区间

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得$f(x)$在每个开区间(x_{i-1},x_i)都可导，而在区间的端点有左右极限$f(x_i^{\pm})$存在，且对$i=0,1,\cdots,n$，有

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_i+t)-f(x_i^+)}{t},\ \lim_{t\to0^-}\frac{f(x_i+t)-f(x_i^-)}{t}$$

存在，则$f(x)$在$[a,b]$逐段可微.

定理 63 (收敛的充分条件). 若$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$**逐段可微**，则$f(x)$的傅里叶级数在$f(x)$的连续点收敛到$f(x)$，在$f(x)$的不连续点（第一类间断点或可去间断点）收敛到$\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

定理 64 (逐项积分定理). 设$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$内除有限个可去间断点或第一类间断点外是连续的，则

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛
2. $\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t-\frac{a_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n(1-\cos nx)}{n}$

下面用傅里叶级数的方法再求一次例68的级数和.

例 69. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

分析. 法一：用$f(x)=x^2,x\in[-\pi,\pi]$构造.
因为$f(x)$为偶函数，所以$b_n=0$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\ \mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2}$$

因为$f(x)$处处连续，在$x\neq(2k+1)\pi$均可微，而在$x=(2k+1)\pi$有左右微商存在，故

$$f(x)=x^2=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

处处成立. 分别令$x=\pi$，$x=0$，得

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad \frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

法二：用傅里叶展式

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ 0<x<2\pi$$

结合逐项积分定理可求. 法三：对$f(x)=(x-1)^2$在$(0,1)$上偶延拓，得到

$$f(x)=(x-1)^2=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

令$x=0$即得

定理 65 (费耶(Fejer)). 若$f(x)$是以2π为周期的连续函数，设傅里叶级数的部分和为

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

则部分和的算术平均

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x)$$

当$n\to\infty$时在$[-\pi,\pi]$一致收敛于$f(x)$.

推论. 若$f(x)$是以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$有界可积，且$f(x)$在x_0连续，则$\sigma_n(x_0)\to f(x_0)(n\to\infty)$.

例 70. 若$f(x)$以2π为周期且连续，其傅里叶系数全为0，则$f(x)\equiv 0$

分析. 因为$f(x)$以2π为周期且连续，故在x_0收敛，设其傅里叶级数在x_0收敛于S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=S$$

进而由费耶定理

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x_0)=S=f(x_0)$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)=f(x_0)=0$，即$f(x)$在$x_0$收敛于0
由$x_0\in(-\infty,+\infty)$的任意性，知$f(x)=0$.

10 多元函数简介

10.1 平面点集

定义 36. 设E为平面点集，若P_0为

1. 内点：存在邻域所有点都属于E，$\exists\delta>0: O(P_0,\delta)\subset E$
2. 外点：存在邻域所有点都不属于E，$\exists\delta>0: O(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$
3. 边界点：任意邻域都含有属于E的点也有非E的点，$\forall\delta>0: O(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing\wedge O(P_0,\delta)\backslash E\neq\varnothing$
4. 聚点：任意**空心**邻域都含有E的点，$\forall\delta>0: O^*(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$

注：内点必为聚点，**一般**聚点集即为内点和边界点的并集

上面的定义关注**点**的性质，下面的定义则关注这些点构成的**集合**的性质

定义 37. 几类重要的平面点集

1. 开集：类比开区间，所有E中的点都是内点
2. 闭集：类比闭区间，所有聚点都属于E；或定义为**补集为开集**的集合
3. 连通集：E中任两点都可用曲线相连
4. 开区域：开集且连通
5. 闭区域：开区域与其边界构成的集合

需要注意以下几点:

a. 开集定义不是所有内点都属于E，因为内点必属于E. 开集换种说法应该是E中没有非内点的点
b. 闭区域不是定义为闭集且连通，考虑点集$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\vee(x-2)^2+y^2\le 1\}$是闭集且两个圆借助点$(1,0)$连通，但是去掉边界后，两个圆不再连通，即两个圆的内部不构成开区域，进而E不是闭集

定理 66. 开集的并是开集，闭集的交是闭集，**有限个**开集的交是开集，**有限个**闭集的并是闭集

反例如下，无限个开集的交却为闭集

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=0$$

无限个闭集的并却为开集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]=(-1,1)$$

定义 38 (对角线). $E \subset \mathbb{R}^n$的对角线为

$$d(E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} d(x_1, x_2)$$

若$d(E)$是有限数，则称E有界

定义 39 (紧集). 设E为平面点集，若集合E的任一覆盖都有有限子覆盖，则称E为紧集. 紧集具有以下性质

1. 若E为$\mathbb{R}^n$的紧集，则E为$\mathbb{R}^n$的闭集
2. 任意含于E的闭集都为紧集
3. $E \subset \mathbb{R}^n$是紧集当且仅当E是有界闭集

10.2 多元函数的极限

定义 40 (平面点列的极限). $\{P_n = (x_n, y_n)\}$为平面点列，若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, s.t. n > N : r(P_n, P_0) < \varepsilon,$$

则记$\lim_{n \to \infty} P_n = P_0$

定义 41 (有界). 若存在$M > 0$使得$r(P_n, O) \leq M$，则称$\{P_n\}$有界

对于实数系的各种定理，拓展到二维依然可用

定理 67. 1. 柯西收敛原理：$\{P_n\}$收敛充要条件为$r(P_n, P_m) < \varepsilon$

2. 致密性定理：$\{P_n\}$有界，则$\{P_n\}$必有收敛子列
3. 矩形套定理：存在唯一点P_0含于所有矩形之中
4. 有限覆盖定理：E为平面上有界闭集，ξ为E的一个覆盖，则ξ中存在有限个开集$G_1, G_2, \ldots, G_n$使得$E \subset \bigcup_{i=1}^n G_i$
5. 海涅定理：$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$的充要条件为对$O^*(P_0, \delta)$中任意满足$P_n \to P_0 (n \to \infty)$的点列$\{P_n\}$，有$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = A$

定义 42 (二元函数的（全面）极限). f在$P_0(x_0, y_0)$的某个空心邻域有定义，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall P \in O^*(P_0, \delta)\text{或}K^*(P_0, \delta) : f(P) \in O(A, \varepsilon)$$

则记$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

从二元函数的极限中我们得知，要使P的极限为P_0，则P可以以不同方向不同路径趋近P_0，这是一个非常强的条件，因此也可以由此证明某些极限不存在。如$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$，令$y$沿$kx$趋近于0，可证明$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$不存在。

定理 68 (全面极限与累次极限的关系). 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$（有限或无限），当$y\neq y_0$时，$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y)$，则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\phi(y)=A$$

若在某点函数的全面极限和两个累次极限都存在，则三者必相等；若两个累次极限都存在但不相等，则全面极限必不存在；注意两个累次极限是可以不相等的.

10.3 多元函数的连续性

定义 43 (连续性). 若函数f在点P_0的邻域有定义，若$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称$f(P)$在$P_0$连续

有界闭区域连续函数的性质与一元连续函数在闭区间的性质类似（见3.5节）

定理 69. $f(P)$在有界闭集E上连续，则

1. 有界性定理：$f(P)$在E上有界
2. 最值定理：$f(P)$在E上有最大值和最小值
3. 一致连续性定理：$f(P)$在E上一致连续
4. 介值定理：若$f(P)$在区域G连续，$P_1,P_2\in G, f(P_1)<f(P_2)$，则$\forall c\in(f(P_1),f(P_2)),\exists P_0\in G, s.t. f(P_0)=c$

11 微分方程

通过分离变量法求解一阶微分方程，注意要将微分算子看成是可以运算的（乘除）.

例 71. 单摆的近似运动方程.

分析. 由牛顿第二定律有

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta$$

其中，s为扫过的弧长，因圆周角$\theta=\dfrac{s}{l}$，故

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g\sin\frac{s}{l}$$

该方程比较难解，我们只考虑当$\theta\to 0$时，上式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g\frac{s}{l}$$

令$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=p(s)$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}p$$

故可将方程变为一阶方程

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = -\frac{g}{l}s$$

分离变量得

$$p\,\mathrm{d}p = -\frac{g}{l}s\,\mathrm{d}s$$

解得

$$p^2 = -\frac{g}{l}s^2 + C_1$$

最大偏离时弧长为s_0，此时速度为0，可得C_1，于是

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 = \frac{g}{l}(s_0^2 - s^2)$$

开方，分离变量积分得

$$\arcsin\frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2$$

假定开始时，摆处于铅垂线上，则

$$s = s_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

即为周期$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$的简谐运动.

12 微积分的应用

这一章其实最关键的是建模，即如何用微元的思想对具体问题进行刻画. 至于具体的积分计算，则是第5章、第6章的内容.

12.1 面积

1. 直角坐标

$$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

   积分上下限即两曲线端点

2. 参数方程$(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$（简单闭曲线$\Gamma$，端点相连$x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta)$，其他地方不相交[18]）

$$\mathrm{d}A = y(t)\,\mathrm{d}x(t) \implies A = -\oint_\Gamma y\,\mathrm{d}x$$

   积分上下限为α, β

3. 极坐标（曲线$r(\theta)$与向径$\theta = \alpha, \theta = \beta$所围成的区域）

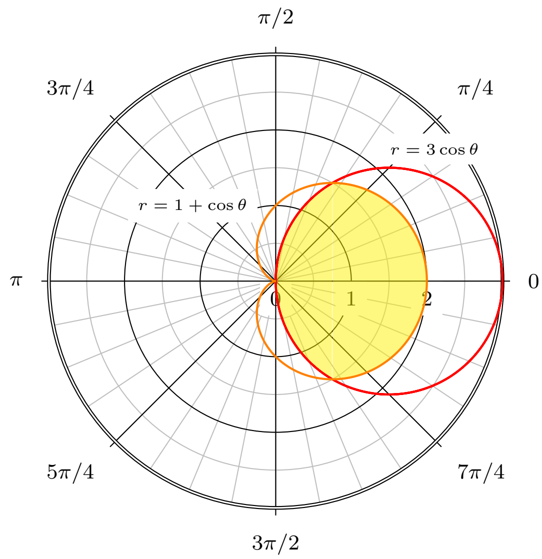
$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

[18]规定曲线的正向：沿着曲线的正向走，其包围的有界区域始终在曲线左侧

积分上下限为α, β

例 72. 求$r = 3\cos\theta$和$r = 1 + \cos\theta$所围公共部分的面积

分析. 两条曲线如下图所示，黄色部分即为要求的面积.



注意在实际解题过程中，并没有图画作为辅助，因此需要自己判断积分区间.
首先求定义域.

$$r \geq 0 \implies \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

其次求出两曲线交点.

$$r = 1 + \cos\theta = 3\cos\theta \implies \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

判断对称性. 由于$\cos\theta$为偶函数，故两曲线都关于极轴对称.
考虑内外关系，对小极径所在曲线进行积分.

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta\right) = \frac{5}{4}\pi$$

如果是单一极坐标曲线求面积，则一般关注其最大最小极径以及其对称性.

12.2 体积

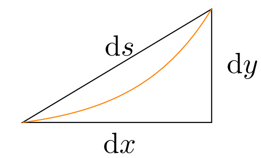
1. 旋转体（不是绕x轴、y轴旋转，则先做一个平移）

$$\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

2. 已知截面积

$$\mathrm{d}V = A(x) \, \mathrm{d}x$$

12.3 弧长



$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

1. 直角坐标

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + [f'(x)]^2)\,\mathrm{d}x^2$$

2. 参数方程

$$\mathrm{d}s^2 = ([x(t)]^2 + [y(t)]^2)\,\mathrm{d}t^2$$

3. 极坐标（通过$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$转直角坐标推导）

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}r^2$$

12.4 曲率

定义 44 (曲率). 用切线夹角与弧长之比来衡量曲线的弯曲程度，即

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|$$

1. 直角坐标

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. 参数方程（由参方推其他两个）

$$K = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. 极坐标

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

12.5 表面积

旋转体的表面积可以通过以下的微元公式得到

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s$$

注意想清楚取多少部分进行旋转，如上式的y仅仅是坐标轴一侧的y.

例 73. 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$绕$x$轴旋转所得旋转体的表面积

分析. 本题解题方法来源于[19]. 对椭圆隐函数求导得

$$\frac{2x\,\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{2y\,\mathrm{d}y}{b^2}=0$$

故

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{y}\,\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}$$

进而

$$\mathrm{d}S=2\pi y\,\mathrm{d}s=2\pi\frac{1}{a^2}\,\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}\,\mathrm{d}x$$

两边进行积分有

$$S=2\frac{2\pi}{a^2}\int_0^a\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}\,\mathrm{d}x$$

将

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

代入有

$$S=4\pi\,\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

其中，$\varepsilon^2=\sqrt{a^2-b^2}\Big/a^2$为椭圆离心率的平方，参数方程$x=a\sin\theta$

$$S=4\pi\,ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

三角代换，令$\sin\phi=\varepsilon\sin\theta$，则$\cos\phi\,\mathrm{d}\phi=\varepsilon\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，故

$$S=4\pi\,\frac{ab}{\varepsilon}\int\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi$$

直接对其积分即可，将结果逐步回代得

$$S=2\pi\,\frac{ab}{\varepsilon}\left(\arcsin(\varepsilon)+\varepsilon\,\frac{b}{a}\right)=2\pi\,b^2\left(1+\frac{a}{b}\,\frac{\arcsin(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

12.6 质心

定理 70 (古鲁金(Guldin)第一定理)**.** 质量分布均匀的平面曲线弧的质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$由下式得出

$$2\pi\bar{x}l=S_1\qquad 2\pi\bar{y}l=S_2$$

其中，S_1和S_2分别为曲线弧绕y轴和绕x轴所得旋转体的侧面积，l为弧长.

其基本思想即将旋转体的侧面积转化为圆柱的侧面积.

[19]Math StackExchange - How to Find the Surface Area of Revolution of An Ellipsoid from Ellipse Rotating, https://math.stackexchange.com/questions/1379341

定理 71 (古鲁金第二定理)**.** 质量分布均匀的平面图形绕此平面上一条与之不相交的直线旋转，所得旋转体的体积由下式给出

$$V = 2\pi\bar{y}S$$