不定积分与定积分

Week 3

陈鸿峥

https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math/blob/master/Mathematical_analysis/main.pdf

December, 2018

1. 基础公式

2. 三种基本积分方法

3. 不同类型积分常见思路
    - 有理分式
    - 三角函数
    - 根式

1

基础公式

基础公式

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

记得加C!

2

三种基本积分方法

凑微分/第一换元法

从积分项中提取部分出来拉到微分项中

例

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x$$

练习

$$\int \tan^3 x \,\mathrm{d}x$$

第二换元法

- 直接换元（令$x = g(u)$），注意 $\mathrm{d}x$也需要一起换.
- 常见于三角还原或消根式

例 (§6.2/例12)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

分部积分法

- 先写成$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x)$的形式，然后直接交换$u(x), v(x)$即可
- 选取$u(x)$顺序：**对反幂三指**，如求$\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$，取$u(x)=x^2$，化为$\int x^2\,\mathrm{d}\sin x$

例

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x$$

常见公式 - 三角/反三角

$$\int \tan x \, dx = -ln|\cos x| + C \qquad \text{凑微分法,小心} - \text{号}$$

$$\int \cot x \, dx = ln|\sin x| + C \qquad \text{凑微分}$$

$$\int \sec x \, dx = ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \text{乘}\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$\int \csc x \, dx = ln|\csc x - \cot x| + C \qquad \text{乘}\frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C \qquad \text{分部积分}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\tan x \sec x + \ln|\tan x + \sec x|) + C \qquad \text{分部积分}$$

常见公式 - 根式/分式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$ 分子分母除以a^2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\pm(x^2-a^2)} = \pm\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$ 裂项可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$ 将a^2提出来

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$ 三角换元

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$ 三角换元

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} + C$$ 三角换元

3

不同类型积分常见思路

3.1

有理分式

假分式

同样，对于求积分来说，化简也是关键的，**假分式**先除下来变为真分式（长除法）！

例

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, \mathrm{d}x$$

练习 (§6.1/1(5))

$$\int \frac{3x^2}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x$$

练习 (§6.1/1(6))

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$$

部分分式

全部变为真分式后，用**部分分式**进行拆分（代数基本定理），分母全部分解为一次乘二次的形式

$$\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{j_i}\prod_{i=1}^{s}(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}$$

结合分子，即有部分分式的两种基本形式

$$\frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

如何积？

部分分式

- 多项式的因式分解（首尾系数猜根）

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$

- 线性因子掩盖法
- 补齐次数（对比系数解方程）

部分分式

因式分解

例

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

配凑

配凑为分母形式

例

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

练习

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$$

配凑

配凑为导数形式

例

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

总结

分式积分是后面三角积分和根式积分的基础，要非常熟悉，方法要点总结如下：

- 假分式先除下来变为真分式，分母因式分解位一次乘二次，然后才使用部分分式
- 若非纯有理分式（如各种基本初等函数的组合)或分母次数太高，则将分子配凑成**分母形式或分母导数形式**以便分拆相加（这两种方式都十分常用）
- 一次式直接积出ln，二次式分子配分母/分母配平方
- 小技巧：通过倒代换$x=\frac{1}{t}$降低分母次数，有$\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}$等部分的可以考虑，如$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{100}+x}$也可使用

3.2

三角函数

恒等变换

- 恒等式
- 半角
- 倍角（降幂升角）
- 积化和差
- 和差化积（不同角）
- 万能公式（弦化切）
- 辅助角（相同角）
- 关系式

$$1+\sin kx=\left(\sin\frac{kx}{2}+\cos\frac{kx}{2}\right)^2 \qquad 1+\cos x=2\cos^2 x$$

$$\tan^2 x+1=\sec^2 x \qquad (\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\sec x)'=\tan x\sec x$$

恒等变换

变换就是了!

练习 (§6.1/1(9))

$$\int (\tan^2 x + 3)\,\mathrm{d}x$$

切化弦

例

$$\int \tan(x+a)\tan(x+b)\,\mathrm{d}x$$

凑微分

结合凑微分法努力化为同名函数

例

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

练习 (§6.2/1(15))

$$\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$$

化关系式

化为有关系的式子

例

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos x}$$

万能公式

和洛必达一样，到迫不得已才使用

例

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}$$

练习 (§6.2/6(12))

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

总结

- 第一步依然是化简/变换，目的是结合凑微分法努力化为同名函数，或是有一定关系的式子
- 迫不得已才采用万能公式，别一上来就太暴力
- 最终很大几率会化为分式积分
- 小技巧1：通过分子分母同乘的方法强行凑平方，如求$\sec x$积分，分子分母同乘$\cos x$
- 小技巧2：配对偶式，如$\displaystyle\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$

3.3

根式

根式

对于二次根式，采用**整块换元**或**根式内配方**后三角代换或直接用常用公式的方法

* 整块换元的形式

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x,\ n > 1, ad - bc \neq 0$$

* 配方的形式

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x,\ a > 0, b^2 - 4ac \neq 0, \text{或} a < 0, b^2 - 4ac > 0$$

根式

整块换元

例

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

配方

练习

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

根式

高次复杂根式

例 (§6.2/7(9))

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$$

练习 (§6.2/7(3))

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$$

根式

分式结合复杂根式

例

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

总结

- 同样，先化简至最简根式，如$\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$就不算最简根式
- 对于二次根式，采用**整块换元**；也可**根式内配方**后三角代换或直接用常用公式
- 对于简单高次根式的加减，用**最小公倍数**法消根号，如$\sqrt{x}$与$\sqrt[3]{x}$同时存在，令$x=t^{lcm(2,3)}=t^6$
- 对于复杂高次根式，凑微分不断换元使根式内多项式次数**降至一次**，再进行**整块换元**转化成有理分式
- 分式与根式结合，先用分式的配凑拆分等化简