概率论与数理逻辑笔记整理V1.0

陈鸿峥

2018.10 *

目录

*Build 20181031

1 基本概念

1.1 事件与概率

命题 1. 事件的基本运算

1. 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. 德摩根律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

注意概率是对一个集合的函数，有如下定义.

定义 1 (概率)**.** 随机试验E的所有可能结果构成E的样本空间Ω，Ω的子集称为事件，Ω的幂集构成E的事件空间$\mathcal{F}$，记概率函数$\mathbb{P}(\cdot) : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$满足：

1. 非负性：$\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2. 规范性：$\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. 可列可加性：$A_1, A_2, \ldots$为两两不相容的事件，$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

由定义可得一些基本性质：

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(A) \leq 1$
2. 有限可加性：$A_1, A_2, \ldots$两两不相容，$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
3. 若$A \subset B$，则$\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$
4. 逆事件概率：$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$
5. 容斥原理：$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right)$

定理 1 (实际推断原理)**.** 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的

1.2 条件概率

定义 2 (条件概率)**.** 设A, B为两个事件，且$\mathbb{P}(A) > 0$，则称

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$$

为在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率

定理 2 (乘法公式)**.** 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个事件，$n \geq 2$，且$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \mathbb{P}(A_{n-1} \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \mathbb{P}(A_1)$$

定义 3 (划分)**.** 两两交为空，所有并为全集

定理 3 (全概率公式)**.** 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为S的一个划分，且$\mathbb{P}(B_i) > 0$，则

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB_1) + \mathbb{P}(AB_2) + \cdots + \mathbb{P}(AB_n) = \mathbb{P}(A \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \mid B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \mid B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

定理 4 (贝叶斯(Bayes)公式)**.** 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为S的一个划分，且$\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B_i) > 0$，则

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_i A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

特别地，当$n = 2$时有

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)}$$

定义 4 (独立性)**.** 对于事件$A_1, \ldots, A_n$，

- 若$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j), \forall i, j$，则称$\{A_1, \ldots, A_n\}$两两(pairwise)独立
- 若$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) = \prod_{j \in I} \mathbb{P}(A_j), \forall I \in 2^{[n]}$，其中$2^{[n]}$为$\{A_i\}_{i=1}^{n}$的所有子集，则称$\{A_1, \ldots, A_n\}$相互(mutually)独立

区分以下两个概念

1. A, B对立(exclusive) $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$，即不相交(disjoint)
2. A, B独立(independent) $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$，即不相关(unrelated)

2 随机变量及其分布

2.1 基本概念

定义 5. *对于离散随机变量X，其概率质量函数(PMF)为$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$，分布函数为$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k \leq x} f_X(k)$*

定义 6. *对于连续随机变量X，其累积密度函数(CDF)为$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\ \mathrm{d}z \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}x$，其中$f_X(x)$为$X$的概率密度函数(PDF)，也即$f_X(x) = \dfrac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$. 一定要注意，$f_X(x) \neq \mathbb{P}(X = x)$!*

注意积分区间!

定义 7 (期望)**.**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x f_X(x) \qquad \mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x) f_X(x)$$
$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\ \mathrm{d}x \qquad \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\ \mathrm{d}x$$

期望具有线性性，即

$$\mathbb{E}\left(X+Y\right)=\mathbb{E}\left(X\right)+\mathbb{E}\left(Y\right),\mathbb{E}\left(cX\right)=c\mathbb{E}\left(X\right)$$

定义 8 (方差)**.**

$$\mathrm{Var}\left(X\right)=\sigma^2=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\right)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}\left(X\right)^2\geq 0$$

由方差定义和期望的线性性有

$$\mathrm{Var}\left(aX+b\right)=a^2\mathrm{Var}\left(X\right)$$

注意方差并不是线性的

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(X+Y\right)&=\mathbb{E}\left(\left(X+Y\right)^2\right)-\left(\mathbb{E}\left(X\right)+\mathbb{E}\left(Y\right)\right)^2\\&=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}\left(X\right)^2+\mathbb{E}\left(Y^2\right)-\mathbb{E}\left(Y\right)^2+2(\mathbb{E}\left(XY\right)-\mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right))\\&=\mathrm{Var}\left(X\right)+\mathrm{Var}\left(Y\right)+2\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)\end{aligned}$$

2.2 常见的离散分布

1. 伯努利分布 **Bernoulli(p)**（二项分布的特殊情形）

$$\begin{aligned}f_X(k)&=\begin{cases}1-p & k=0\\ p & k=1\end{cases}\\ \mathbb{E}(X)&=p\end{aligned}$$

2. 二项分布 **Binomial(n,p)**

$$\begin{aligned}f_X(k)&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^n-k,\ 0\leq k\leq n\\ \mathbb{E}(X)&=n\cdot p\end{aligned}$$

   e.g. 扔n次硬币扔到k次正面（做实验n次，记录成功的次数）

3. 几何分布 **Geometric(p)**（负二项分布的特殊情形）

$$\begin{aligned}f_X(k)&=(1-p)^k\cdot p,k\geq 0\\ \mathbb{E}(X)&=\frac{1-p}{p}\end{aligned}$$

   e.g. 扔k次反面直至扔到正面（做实验直到你成功，记录失败的次数）

4. 负二项分布 **NegetiveBinomial(t,p)**

$$f_X(k)=\binom{k+t-1}{t-1}p^t(1-p)^k,\, k\geq 0$$
$$\mathbb{E}(X)=t\cdot\frac{1-p}{p}$$

e.g. 扔k次反面直到有t个正面（做实验直到你获得t次成功，记录失败次数）

5. 超几何分布 **HyperGeometric(N,n,M)**

$$f_X(k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$\mathbb{E}(X)=n\frac{M}{N}$$

e.g. M个产品中有N个次品，检查n次得到k个次品

6. 泊松分布 **Poisson(λ)**,$\lambda>0$

$$f_X(k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$\mathbb{E}(X)=\lambda$$

$X\sim B(n,p)$，若$p=\dfrac{\lambda}{n}$，且n非常大，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X=k\right)&=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{n-k}\\&\approx\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\end{aligned}$$

注意泊松分布具有无记忆性(memoryless)，即

$$\mathbb{P}\left(X\geq a\mid X\geq b\right)=\mathbb{P}\left(X\geq a-b\right)$$

2.3 常见的连续分布

1. 均匀分布 **Uniform(a,b)**,$a<b$

$$f_X(x)=\frac{1}{b-a},\, a\leq x\leq b$$
$$\mathbb{E}\left(X\right)=\frac{a+b}{2}$$
$$\mathrm{Var}\left(X\right)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

2. 指数分布 **Exponential(λ),**$\lambda > 0$

$$f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x},\, x \geq 0$$
$$\mathbb{E}\left(X\right) = \frac{1}{\lambda}$$

与泊松分布类似，同样具有无记忆性

3. 正态分布 **Normal(**μ, σ^2**)**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$\mathbb{E}\left(X\right) = \mu$$

算平方

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} r\mathrm{e}^{\frac{-r^2}{2}}\,\mathrm{d}r\,\,\mathrm{d}\theta \\
=&\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\,\,\mathrm{d}\theta \\
=&\int_{0}^{2\pi} 1\,\,\mathrm{d}\theta \\
=&\,2\pi
\end{aligned}$$

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$标准正态分布

3 多维随机变量及其分布

3.1 边缘分布

定义 9. 二维随机变量(X,Y)的分布函数/联合*(joint)*分布函数定义如下

$$F(x,y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_i \leq y} p_{ij} = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\,\mathrm{d}v$$

其中，$f(x,y)$为X,Y的联合密度函数

进而，对于离散型随机变量变量有，

$$\mathbb{P}\left(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\right) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2)$$

离散型随机变量

$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in G\right) = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\,\mathrm{d}y$$

若$f(x,y)$在(x,y)连续，则$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

定义 10 (边缘(marginal)分布)**.**

$$
\begin{aligned}
F_X(x)&=\mathbb{P}\left(X\le x, Y<\infty\right)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=F(x,\infty)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

注意积分区间不一定是从负无穷到正无穷，而是概率有$(0,1)$之间值的区域

定义 11 (条件概率密度与分布函数)**.**

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x\mid y)&=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\\
F_{X|Y}(x\mid y)&=\mathbb{P}\left(X\le x\mid Y=y\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

定义 12 (相互独立)**.**

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

3.2 随机变量的函数的分布

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\ \mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\ \mathrm{d}x$$

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)\ \mathrm{d}x=f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x$$

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

3.3 数字特征

定义 13 (协方差)**.**

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}\left(X\right)][Y-\mathbb{E}\left(Y\right)]\right)=\mathbb{E}\left(XY\right)-\mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$$

协方差的性质：

$$\mathrm{Cov}\left(aX,bY\right)=ab\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$$

$$\mathrm{Cov}\left(X_1+X_2,Y\right)=\mathrm{Cov}\left(X_1,Y\right)+\mathrm{Cov}\left(X_2,Y\right)$$

定义 14 (相关系数).

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\mathrm{Var}\left(Y\right)}$$

$\rho_{XY} \leq 1$，取等的充要条件为$\exists a, b$使得$\mathbb{P}\left(Y = a + bX\right) = 1$

定义 15 (矩). 设X, Y为随机变量，若$\mathbb{E}\left(X^k\right)$存在，则称它为$X$的$k$阶*(原点)*矩，称$\mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}\left(X\right)]^k\right)$为$k$阶中心矩，称$\mathbb{E}\left(X^k Y^l\right)$为$k+l$阶混合矩，称$\mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}\left(X\right)]^k [Y - \mathbb{E}\left(Y\right)]^l\right)$为$k+l$阶混合中心矩

定义 16 (协方差矩阵). 设n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的二阶混合中心距

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathbb{E}\left([X_i - \mathbb{E}\left(X_i\right)][X_j - \mathbb{E}\left(X_j\right)]\right)$$

都存在，则协方差矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

又$c_{ij} = c_{ji}$，故上述矩阵是个对称矩阵

定理 5. 若$X_1, \ldots, X_n$独立，则

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right)$$

$$\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = 0,\ i \neq j$$

$Y = g(X)$的随机变量分布一般通过求分布函数后求导得到其概率密度函数

4 大数定律

4.1 大数定律

定理 6 (切比雪夫(Chebyshev)不等式). 设随机变量X的数学期望$\mathbb{E}\left(X\right) = \mu$，方差$\mathrm{Var}\left(X\right) = \sigma^2$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon}$$

定理 7 (弱大数定律(辛钦)). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布*(iid)*，$\mathbb{E}\left(X_i\right) = \mu, \mathrm{Var}\left(X_i\right) = \sigma^2$，则

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0, \forall \varepsilon > 0$$

或

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1, \forall \varepsilon > 0$$

可记成$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$

定理 8 (强大数定律). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布，$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$，则

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu\right) = 1$$

4.2 中心极限定理

定理 9 (独立同分布的中心极限定理). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布，且$\mathbb{E}(X_k) = \mu$，$\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2 > 0$，则随机变量之和的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

的分布函数$F_n(x)$对任意x满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t = \Phi(x)$$

也即，近似地

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

定理 10 (李雅普诺夫(Lyapunov)定理). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布，且$\mathbb{E}(X_k) = \mu$，$\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2 > 0$，记$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ 若存在$\delta > 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(|X_k - \mu|^{2+\delta}\right) = 0$$

则随机变量之和的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n}$$

定理 11 (棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理). 设随机变量$\eta_1, \eta_2, \ldots$服从参数为$n, p(0 < p < 1)$的二项分布，则对于任意x，有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \Phi(x)$$

5 统计

5.1 样本与抽样

定义 17 (简单随机样本). 在相同的条件下对总体X进行n次重复的、独立的观察，将n次观察结果按照实验的次序记为$X_1, X_2, \ldots, X_n$，则这些变量都相互独立且与X有相同分布

5.2 抽样分布

5.2.1 基本概念

定义 18 (统计量). 样本平均

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

经验分布函数

$$F_n(x)=\frac{1}{n}S(x)$$

其中$S(x)$是$X_1,X_2,\ldots,X_n$中不大于x的随机变量的个数

定理 12. 设总体X（不管服从什么分布），均值为μ，方差为σ^2，$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自X的一个样本，$\bar{X}$为样本均值，S^2为样本方差，则

$$\mathbb{E}\left(\bar{X}\right)=\mu,\ \mathrm{Var}\left(\bar{X}\right)=\sigma^2/n$$

定理 13. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，则

1. $\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$
2. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
3. $\bar{X}$与S^2相互独立

5.2.2 常见的抽样分布

1. χ^2分布

   设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本，则统计量

   $$\chi^2=X_1^2+X_2+\cdots+X_n^2$$

   服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$

   $$f(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{n/2-1}\mathrm{e}^{-x/2},\ x>0$$
   $$\mathbb{E}\left(\chi^2\right)=n$$
   $$\mathrm{Var}\left(\chi^2\right)=2n$$

   χ^2具有可加性，因Gamma分布有可加性

   $$\chi_1^2(n_1)+\chi_2^2(n_2)\sim\chi^2(n_1+n_2)$$

2. t分布/Student分布

   设$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X,Y相互独立，则

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

   服从自由度为n的t分布，记为$t \sim t(n)$

$$h(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}(1+\frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2}\, t \in (-\infty, +\infty)$$

3. F分布

   设$U \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，且U,V相互独立，则

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$$

   服从自由度(n_1,n_2)的F分布，记为$F \sim F(n_1,n_2)$

$$\phi(x) = \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}x^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)[1+(n_1x/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}}, x > 0$$

5.3 参数估计

定义 19 (估计). $X_1, X_2, \ldots, X_n$为独立随机变量，从有参数$\mu, \sigma, \theta, \ldots$的分布$f$中得到，对参数$\theta$的估计是函数$T(X_1,\ldots,X_n)$，称$T$是期望*(expected)*估计，若

$$\mathbb{E}\left(T(X_1,\ldots,X_n)\right) = \theta$$

合适*(probable)*的估计，若

$$\mathbb{P}\left(|T(X_1,\ldots,X_n) - \theta| > \varepsilon\right) \to 0,\, n \to \infty$$

5.4 可视化

1. 直方图：矩形宽度$\frac{f_i}{n}\Big/\Delta$，Δ为组距
2. 箱线图：最小值min，第一四分位数Q_1，中位数M，第三四分位数Q_2，最大值max

$$q\text{分位数} \quad x_p = \begin{cases} x_{[np]+1} & np \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}[x_{np} + x_{np+1}] & np \in \mathbb{Z} \end{cases}$$