

数值计算方法

陈鸿峥

2019.04*

目录

1	简介	2
1.1	误差	2
1.2	需要注意的问题	2
2	插值	2
2.1	拉格朗日插值	3
2.2	牛顿插值	3
2.3	埃尔米特插值	4
2.4	三次样条插值	5
3	线性方程组直接解法	5
3.1	高斯消元法	5
3.2	三角分解	5
3.3	LU分解	5
3.4	乔列斯基(Choleskey)分解	6
3.5	追赶法	6
3.6	分块三角分解	7
4	线性方程组迭代解法	7
4.1	范数与条件数	7
4.2	基本迭代法	8
5	函数逼近	9
5.1	内积与正交多项式	10

*Build 20190425

1 简介

1.1 误差

- 原始误差：模型误差
- 观测误差：测量数据产生的误差
- 方法误差：截断误差
- 计算误差：舍入误差

1.2 需要注意的问题

- 避免相近的数相减，如 $\sqrt{1001} - \sqrt{1000}$ 有效数字会损失，分子有理化可使误差减小。数学上等价的公式在计算上是不等价的！
- 避免数量级相差太大的两数相除，容易溢出
- 避免大数和小数相加减，浮点数计算要对阶
- 简化计算步骤

2 插值

定理 1 (唯一性). n 次插值多项式存在且唯一

分析. 设 n 次多项式 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 上的插值多项式，则求 $p(x)$ 的系数 a_i 相当于解线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

其系数行列式为范德蒙特行列式 $V = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j)$ ，因为 x_i 互不相同，故 $V \neq 0$ 。进而由克莱姆法则， a_i 解存在且唯一。

由于 $p(x)$ 为线性空间 $P_n(x)$ ¹的一个点，因而其基底/插值基函数 $\phi(x)$ 不唯一，有多种表示方法（不同的线性组合）

$$p(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

¹次数小于等于 n 的代数多项式的集合

2.1 拉格朗日插值

定义 1 (拉格朗日插值基函数). 节点 x_k 上的插值基函数 $l_k(x)$ 满足

$$l_k(x_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

由定义知 $l_k(x)$ 的零点为 $x_i, i \neq k$, 待定系数 A_k

$$l_k(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

可求得 A_k , 进而得到插值基函数

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{x_k - x_i}$$

因此拉格朗日插值函数为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{x_k - x_i}$$

其中 $L_1(x)$ 称为线性插值, $L_2(x)$ 称为抛物线插值

误差估计

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \xi = \xi(x) \in (a, b)$$

2.2 牛顿插值

定义 2 (牛顿插值基函数).

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i), \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

进而牛顿插值函数为

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

实际上就是将 x_i 之后的项全部为0消掉了。

由 $f(x_k) = N_n(x_k)$, 对比系数可得

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ a_2 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

定义 3 (差商). 一阶差商 $f[x_i, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_i)}{x_k - x_i}$, 二阶差商 $f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_j, x_k]}{x_k - x_j}$, 高阶差商为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

由差商定义可得以下差商表 (注: 下面 $f_i := f(x_i)$)

x_k	y_k	一阶	二阶	三阶
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

并且有

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f[x_0, x_1] \\ a_2 &= f[x_0, x_1, x_2] \\ &\vdots \\ a_n &= f[x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

由误差估计的计算可得差商与导数之间的关系

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

可以看出, 当增加一个节点时, 牛顿插值只需增加一项, 而拉格朗日插值需要全部重新算。

定义 4 (差分). 设已知函数 $f(x)$ 在等距节点 $x_i = x_0 + ih (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 上的函数值为 $f(x_i) = f_i$, 其中 $h > 0$ 为步长, 则称 $\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i$ 为 $f(x)$ 在 x_i 处步长为 h 的一阶向前差分。称 $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$ 为函数 $f(x)$ 在 x_i 处的二阶向前差分。一般地 $\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_i 处的 n 阶向前差分。并规定, $\Delta^0 f_i = f_i$ 为零阶差分。

差分与差商的关系为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则牛顿插值公式的向前差分形式为

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0, \quad t \in [0, 1]$$

类似于泰勒展开。

2.3 埃尔米特插值

不仅要求插值点的函数值 $H(x_i)$ 与原函数的值 $f(x_i)$ 相同, 还要求它们有公切线, 即 $H'(x_i) = f'(x_i)$ 。若所有插值点都要满足上述条件, 则埃尔米特(Hermite)插值多项式为 $2n + 1$ 次的。

2.4 三次样条插值

分多段，每段用三次函数逼近

三次样条条件

- 插值条件: $s_k(x_j) = y_j, \quad j = k-1, k, \quad k = 1, 2, \dots, n$, 共 $2n$ 个条件
- 端点导数条件: $\lim_{x \rightarrow x_k^-} s^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} s^{(p)}(x), \quad p = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n-1$, 共 $2n-2$ 个条件
- 边界条件:
 - 第一类边界条件: $s'(x_0) = f'_0, s'(x_n) = f'_n$, 其中 f'_0, f'_n 为给定值
 - 第二类边界条件: $s''(x_0) = f''_0, s''(x_n) = f''_n$, 其中 f''_0, f''_n 为给定值, 若为0, 则为自然边界条件
 - 周期性条件: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} s^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow x_n^-} s^{(p)}(x), p = 1, 2$

三转角方法, 用一阶导数求解; 三弯矩方法, 用二阶导数求解。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

3 线性方程组直接解法

3.1 高斯消元法

即逐行做消元, 变为上三角矩阵后回代

但由于浮点误差, 高斯消元容易产生“大数吃小数”的现象, 而达到错误的解 (不稳定), 如下式

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

- 列主元高斯消去法: 每次选择一列中最大的元素所在行, 然后与当前行交换
- 全主元消去法: 每次选择矩阵中最大元素所在行, 与当前行交换

3.2 三角分解

3.3 LU分解

- 杜利脱尔(Doolittle)分解: 由高斯消元法, $A = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U = LU$, 其中 L 为单位下三角矩阵, U 为上三角

- 克洛脱(Crout)分解: $A = LU$, 其中 L 为下三角, U 为**单位**上三角
- LDU分解: $A = LD\tilde{U}$, 其中 L 为**单位**下三角, $D = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$, $\tilde{U} = D^{-1}U$ 为**单位**上三角

杜利脱尔分解要求对 A 高斯消去时, 所有主元元素 $a_{ii}^{(i)}$ 不为零

定理 2. 主元元素 $a_{ii}^{(i)}$ 不为零的充要条件为 n 阶矩阵 A 的所有顺序主子式均不为0

定理 3. 若 A 的所有顺序主子式均不为0, 则矩阵 A 的 LU 分解都具有唯一性

3.4 乔列斯基(Choleskey)分解

当 A 为**对称正定**矩阵时, 所有顺序主子式都大于0, 因而存在唯一LU分解。用LDU分解, D 为非奇异的对角矩阵, 由 A 的对称性有

$$A = LDU = U^T D U^T$$

又由分解的唯一性, 有 $L = D^T$, 得 $A = LDL^T$

设 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_i \neq 0$, 则 D 的对角元素均为正数

记 $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$, 则

$$A = LDL^T = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = (LD^{1/2})(LD^{1/2})^T = GG^T$$

求解方法为平方根法。

3.5 追赶法

设 n 阶方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$, 其中 A 为三对角方程

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

对矩阵 A 做克洛脱分解, 有

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & & & & \\ v_2 & l_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & v_{n-1} & l_{n-1} & \\ & & & v_n & l_n \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

进而 $A = LU$ ，做两次回代即可

$$\begin{cases} Ly = d \\ Ux = y \end{cases}$$

3.6 分块三角分解

$$L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E & I \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

且满足 $A = LU$ ，经计算有

$$L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

其中 $S = D - CA^{-1}B$ 为 A 的舒尔(schur)补。

4 线性方程组迭代解法

4.1 范数与条件数

定义 5 (向量的范数). 对任意 n 维向量 x ，若对应非负实数 $\|x\|$ ，满足

1. $\|x\| \geq 0$ ，当且仅当 $x = 0$ 时等号成立
2. 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ ， $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. 对任意的 n 维向量 x 和 y ，满足三角不等式 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数，其中1-范数、2-范数、无穷范数定义如下

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

定义 6 (矩阵的范数). 对于 n 阶方阵 A ，若对应非负实数 $\|A\|$ ，满足

1. $\|A\| \geq 0$ ，当且仅当 $A = 0$ 时等号成立
2. 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ ， $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
3. 对任意两个 n 阶方阵 A 和 B ，满足三角不等式 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. 对任意两个 n 阶方阵 A 和 B ，满足矩阵乘法要求 $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

则称 $\|\mathbf{A}\|$ 为方阵 \mathbf{A} 的矩阵范数。记 $\rho(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ 为 \mathbf{A} 的谱半径，这里 λ_i 为 \mathbf{A} 的特征值，矩阵的1-范数、2-范数、无穷范数和F范数分别定义如下

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ \|\mathbf{A}\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}\end{aligned}$$

注意矩阵的F-范数才是向量2-范数的直接推广，而矩阵的2-范数是计算 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的谱半径，又被称为谱范数

相容的向量范数和矩阵范数，满足

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

一些相容的范数如下

- 矩阵1-范数与向量1-范数
- 矩阵2-范数与向量2-范数
- 矩阵无穷范数与向量无穷范数
- 矩阵F范数与向量2-范数

定义 7 (条件数). 设 \mathbf{A} 为 n 阶非奇异矩阵，称数 $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ 为线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 或矩阵 \mathbf{A} 的条件数。其对方程组的解的相对误差起到关键的控制作用

4.2 基本迭代法

给定线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，设 $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ ，其中 \mathbf{M} 为非奇异矩阵，则原式变为

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

左右乘上 \mathbf{M}^{-1} ，有

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{g}$$

给定初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$ ，按照下式迭代

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{g}$$

最终若收敛至 \mathbf{x}^* ，则原方程得出解。实际迭代还是用

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

将 \mathbf{A} 拆分成三个矩阵之和（只是将矩阵 \mathbf{A} 元素分块而已）

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

对角线阵 \mathbf{D} 、负的严格下三角阵 \mathbf{L} 和严格上三角阵 \mathbf{U}

4.2.1 雅可比迭代法

取 $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ 和 $\mathbf{N} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$ ，即得雅可比迭代法

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

4.2.2 高斯-赛德尔迭代法

如果在雅可比迭代算法的第三步，将算出来的 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 的分量立即投入到下一个迭代方程，则得到Gauss-Seidel迭代法

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

4.2.3 超松弛(SOR)迭代法

将GS迭代改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b})\end{aligned}$$

等号右侧第二项为修正量，为获得更快的收敛速度，在其前面乘系数 ω ，即得到逐次超松弛(SOR)迭代法，其中 ω 为松弛因子

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{U}]\mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

此时迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_{SOR} = (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{U}]$$

5 函数逼近

用函数 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的最大误差

$$\|p - f\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)|$$

作为度量逼近函数 $p(x)$ 对被逼近函数 $f(x)$ 的逼近程度。若存在一个函数序列满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n(x) - f(x)\|_{\infty} = 0$ ，则意味着序列 $\{p_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛至 $f(x)$ 。序列 $\{p_n(x)\}$ 对 $f(x)$ 的逼近称为一致逼近。

也可用积分 $\|p - f\|_2 = \left(\int_a^b (p(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ 作为度量函数。若存在一个函数序列满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n(x) - f(x)\|_2 = 0$ ，则意味着序列 $\{p_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上平方收敛至 $f(x)$ 。序列 $\{p_n(x)\}$ 对 $f(x)$ 的逼近称为平方逼近。

5.1 内积与正交多项式

定义 8 (权函数). 设 $[a, b]$ 为有限或无限区间， $\rho(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的非负函数， $\int_a^b x^k \rho(x) dx$ 对 $k = 0, 1, \dots$ 都存在，且对非负的 $f(x) \in C[a, b]^2$ ，若 $\int_a^b f(x) \rho(x) dx = 0$ ，则 $f(x) \equiv 0$ ，称 $\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上的权函数，其刻画了点 x 在 $[a, b]$ 上的重要性

定义 9 (内积). 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$ ， $\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上的权函数，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积为

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

定义了内积的线性空间称为内积空间。内积需满足

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle c_1 f + c_2 g, h \rangle = c_1 \langle f, h \rangle + c_2 \langle g, h \rangle$, c_1, c_2 为常数
3. $\langle f, f \rangle \geq 0 \iff f \equiv 0, \langle f, f \rangle = 0$

定义 10 (范数). 对内积空间 $C[a, b]$ 中的每一个函数 $f(x)$ ，都赋予一个数值

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x) [f(x)]^2 dx}$$

范数需满足

1. $\|f\| \geq 0$ ，当且仅当 $f \equiv 0$ 时， $\|f\| = 0$
2. $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ ， c 是常数
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

正交函数系

定义 11 (正交). 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$ ， $\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上的权函数，若内积

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交

5.1.1 勒让德多项式

勒让德 (Legendre) 多项式是区间 $[-1, 1]$ 上权函数 $\rho(x) = 1$ 的正交多项式

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

² $C[a, b]$ 表示区间 $[a, b]$ 上连续函数的全体

勒让德多项式有许多重要的性质

1. 正交性

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

2. 递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

5.1.2 切比雪夫多项式

切比雪夫(Chebyshev)多项式为区间 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

1. 正交性

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

2. 递推公式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

3. 奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

4. $T_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内的 n 个零点为 $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, 在 $[-1, 1]$ 上有 $n+1$ 个极值点 $y_k = \cos \frac{k}{n} \pi$

5. $T_n(x)$ 的最高次幂 x^n 的系数为 $2^{n-1}, n \geq 1$

5.1.3 其他正交多项式

1. 拉盖尔(Laguerre)多项式

2. 埃尔米特(Hermite)多项式