

数学分析笔记整理V2.0

Reddie

2018.5*

目录

1	实数系基本定理	2
2	极限	3
2.1	数列极限与函数极限对比	3
2.2	极限的四则运算	4
2.3	几个重要极限	4
2.4	用定义证明极限	4
2.5	用其他方法证明极限	6
2.6	无穷小量与无穷大量	9
3	函数的一切	10
3.1	函数的基本性质	10
3.2	凸函数	11
3.3	反函数	12
3.4	复合函数极限法则与函数连续性的关系	13
3.5	关于函数的其他基本定理	13
4	微商与微分	14
4.1	微分	14
4.2	求导	15
4.3	微分中值定理	15
5	不定积分	20
5.1	三种基本积分方法	20
5.2	常见公式	20
5.3	不同类型积分的常见思路	21
5.4	例题	26

*Build 20180321

6	定积分	27
6.1	定积分的计算	30
6.2	定积分的近似计算	30
7	无穷级数	30
7.1	基本性质	30
7.2	正项级数	31
7.3	一般项级数	32
7.4	代数运算	32
8	函数项级数	32
8.1	一致收敛	32
8.2	判别法之比较总结	32

本文是笔者对数学分析这门数学基础课内容的一些整理, 基本涵盖了由极限到级数的全部内容, 但以列举重要定理、提供不同思考问题的角度、提供解题思路为主, 故不能当作教科书学习使用. 如果是众人皆知的事实, 本文将不会提及, 请读者自行翻书. 本文将基本微积分的知识进行了融合, 优化了章节安排, 将相似的内容放在一起, 也方便大家融会贯通、复习整理. 文中的例题基本出自《数学分析简明教程》, 部分练习出自《吉米多维奇习题集》, 但由于时间较紧, 习题没有择取很多, 且都没有附答案, 但思路都在本文中有所体现. 笔者数学水平有限, 文中难免出现疏漏, 如有不妥之处还请读者指出.

1 实数系基本定理

定义 1 (戴德金(Dedekind)连续性准则). 有大小顺序稠密的数系 S , 对于其任一分划 $A|B$, \exists 唯一 $c \in S$: $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$ (即要么 A 有最大值, 要么 B 有最小值), 则称 S 连续.

由此准则可以推出 \mathbb{Q} 不是连续的. 需要注意:

1. 分划的断点 c 不一定属于 S (正因 $c \notin S$, \mathbb{Q} 不连续)
2. 分划要保证不空、不漏、不乱

定理 1 (实数基本定理). 对 \mathbb{R} 的任一分划 $A|B$, \exists 唯一 $r \in S : \forall a \in A, b \in B : a \leq r \leq b$

定义 2 (区间套). 一组实数的闭区间序列 $[a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$, 满足

$$a. [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 构成一个区间套

定理 2 (区间套定理). $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套, 则存在唯一 $r \in \mathbb{R}, s.t. r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

连续函数介值定理、最值定理、康托定理均用到区间套定理来证明.

2 极限

2.1 数列极限与函数极限对比

定义 3 (数列极限). 数列 $\{x_n\}$ 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, s.t. n > N : |x_n - A| < \varepsilon,$$

则记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

定义 4 (函数极限). 设 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 上有定义, 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. x \in \dot{U}(x_0, \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon,$$

则记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

数列极限的基本性质

1. 有界性: 有极限必有界
2. 保号性: 必存在与极限同号的值, 即 $\exists N, s.t. n > N : |x_n| > \frac{|A|}{2} > 0$
3. 保序性: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \implies \exists N, s.t. n > N : x_n > y_n$
4. 唯一性: 极限存在必唯一
5. 夹迫性: 夹逼定理
6. 极限不等式: $\exists n, s.t. n > N, \in \mathbb{Z}^+, x_n \geq y_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

函数极限的基本性质

1. 局部有界性: 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 上有界
2. 局部保号性: 必存在与极限同号的值, 即 $\exists \delta > 0, s.t. x \in \dot{U}(x_0, \delta) : |f(x)| > \frac{|A|}{2} > 0$
3. 局部保序性: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \implies \exists \delta > 0, s.t. x \in \dot{U}(x_0, \delta) : f(x) > g(x)$
4. 唯一性: 极限存在必唯一
5. 夹迫性: 夹逼定理
6. 极限不等式: $\exists \delta > 0, s.t. x \in \dot{U}(x_0, \delta), f(x) \geq g(x) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$

极限的这些基本性质在各类证明题中应用相当广泛 (常用于放缩), 需要引起足够重视.

定理 3 (单调有界原理).

1. 单调上升 (下降) 有上 (下) 界的数列必有极限存在

2. 单调上升(下降)有上(下)界的函数必有右端点的左极限存在

3. 单调上升(下降)有下(上)界的函数必有左端点的右极限存在

定理 4 (海涅(Heine)定理).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0 (n = 1, 2, \dots) \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

注: 常用来证明函数极限不存在或作逼近用 (见例1)

例 1. 若连续函数 $f(x)$ 在有理点的函数值为0, 则 $f(x) \equiv 0$

分析. 用反证法, 若不然, 至少存在一个无理点 x_0 使得 $f(x_0) \neq 0$, 设

$$x_0 = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots \quad (\text{十分经典的用小数表示无理数, 同Dedekind分割})$$

取数列 $x_n = a_0.a_1a_2 \cdots a_n$, 由此构造知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq f(x_0)$, 由海涅定理的逆否命题知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续矛盾, 因此 $f(x) \equiv 0$

2.2 极限的四则运算

需要注意:

1. 极限的四则运算仅对有限项且项数固定的数列适用, 如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \neq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. 加减有限量对趋于无穷的量没有影响, 如

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x+3})^{x+1} = e$$

2.3 几个重要极限

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 令 $n = (1 + h_n)^n$ 展开至二次项

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\sin x < x < \tan x$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 由离散推连续

2.4 用定义证明极限

1. 最后一步不等式 $|g(n) - A| < \varepsilon$, 小心左侧变负

2. 几种常见类型

- (a) 幂函数: $\frac{x^m}{x^n}(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{x^{n-m}} \rightarrow 0$
- (b) 幂指型: $\frac{x^k}{a^x}(a > 1, x \rightarrow \infty) = \frac{x^k}{(1+b)^x} < \frac{x^k}{C_x^{k+1} x^{k+1}} \rightarrow 0$
- (c) 指阶型: $\frac{a^n}{n!}(n \rightarrow \infty) = \frac{a}{n} \underbrace{\frac{a}{n-1} \cdots \frac{a}{a+1}}_{<1} \frac{a^a}{a!} < \frac{a}{n} \frac{a^n}{a!} \rightarrow 0$
- (d) 阶炸型: $\frac{n!}{n^n}(n \rightarrow \infty) = \frac{n}{n} \underbrace{\frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n} \frac{1}{n}}_{<1} < \frac{1}{n} \rightarrow 0$

3. 常用放缩

- (a) $x^a(a > 0) < a^x(a > 1) < x!$
- (b) $n < (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} < n! < n^n$ 取对数可证
- (c) $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$
- (d) $(1+x)^n > 1+nx$ 伯努利(Bernoulli)不等式
- (e) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ 绝对值三角不等式
- (f) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
- (g) $[x] \leq x < [x] + 1$ 高斯函数性质

4. 有界量直接取界, 如 $\sin x, (-1)^n$ 均直接取 ± 1

5. 分子有理化, 如证 $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2+5} = 3$

6. 上一点常结合因式分解, 如求 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ (当然用洛必达也是可以的)

常用 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

7. 通过配凑 (加一项减一项) 凑出题设形式, 后用绝对值三角不等式 (常见于证明题)

8. 拆分为有穷项和无穷项部分讨论 (见例2)

9. 用定义证函数极限时经常要先限制变量范围, 常令 $0 < |x - x_0| < 1$

例 2. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$
- 若 $a_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$

分析. 1. $\because \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \therefore \forall \varepsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+, s.t. n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon_1$

要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$, 即证 $\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{Z}^+, s.t. n > N : \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < \varepsilon$

又

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\
 &\leq \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n} \right| + \left| \frac{(a_{N_1+1} - a)}{n} \right| \\
 &\quad + \left| \frac{(a_{N_1+2} - a)}{n} \right| + \cdots + \left| \frac{(a_n - a)}{n} \right| \quad \text{拆分有穷项与无穷项} \\
 &< \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n} \right| + \frac{\varepsilon_1(n - N_1)}{n} \\
 &< \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n} \right| + \varepsilon_1 \quad (*)
 \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n} \right| = 0$

即 $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+, s.t. n > N_2 : \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n} \right| < \varepsilon_1$

因此(*)式 $< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 = \varepsilon$, 取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, N = \max(N_1, N_2)$ 即可

2. 当 $a = 0$ 单独讨论

当 $a > 0$ 时, 由均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \text{由(1)有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{a}$$

注: 本题的结论还是有一定用处的, 可以记住

练习 1. $x_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = a$

练习 2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

2.5 用其他方法证明极限

1. 化归重要极限证明

2. 根式型升指数: 如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n}$ (函数连续性) $= 1$

3. 数列的单调有界原理: 用于根式递推、分式递推

例 3. $x_0 = 1, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}, n = 1, 2, \cdots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

分析. 先证明 $\{x_n\}$ 单调增, 即证 $x_{n+1} > x_n$, 由 $1 + x_n > 0$ 知显然成立

再证明其有界, 观察猜想 $x_n < 2$ (写多几项就可以估计出大致的界), 用第一数学归纳法易证进而由单调有界原理知 $\{x_n\}$ 有极限, 不妨设为 A

对 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两侧求极限 ($n \rightarrow \infty$)

得 $A = 1 + \frac{A}{1+A}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (已舍去负根)

练习 3. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

另, 本题的结论可用来求练习 14.

4. 夹逼

(a) 取两头, 全部换成同一项 (例4) 或者就只剩下一项 (例5)

例 4. $S = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S$

分析.

$$\frac{2n+1}{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} < S < \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n+1}{n} \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty)$$

例 5. $S = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \cos^2 k}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S$

分析.

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} < S < \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n 1} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

类似地, 可证明下面习题

练习 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^m a_i^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i$

(b) 不等式放缩

例 6. $S = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S$

分析.

$$2k = \frac{2k-1+2k+1}{2} \geq \sqrt{(2k-1)(2k+1)}$$

均值放缩以得到相同项, 达到相消目的

$$0 < S \leq \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

练习 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i}}$

5. 洛必达(L'Hospital)法则

(a) 一定要先判断是否是未定型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty$

(b) 求导后极限不存在不能说原极限不存在, 如

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x + 1}{1}$$

(c) 函数摆在分子还是分母需要考虑

(d) 一些奇怪的东西只要符合未定型也是可以用洛必达的, 如下面的练习6

练习 6. 设 $f(x)$ 在任一有限区间上可以积分, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l$$

6. 证明极限不存在: 通过找两种不同的趋近方式, 得出结果不同

练习 7. 证明狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 不可积.

定理 5 (O'Stolz 定理¹). 若

(a) $y_{n+1} > y_n, n = 1, 2, \dots$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ 存在

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$

注: 本定理算是洛必达法则的离散版本.

练习 8. 用 O'Stolz 定理证明极限

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0$

2. 例 2 的题 1

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} = 1$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p + 1} = \frac{1}{p+1}$

¹本定理可跳过, 详细内容请见 https://en.wikipedia.org/wiki/Stolz%E2%80%93Ces%C3%A0ro_theorem

练习 9. 求下列极限，不限方法

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-1} i}{n}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$

2.6 无穷小量与无穷大量

2.6.1 渐近符号定义²

1. $f(n) = O(g(n))$ 类似于 $a \leq b$

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0, s.t. 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0\}$$

2. $f(n) = \Omega(g(n))$ 类似于 $a \geq b$

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0, s.t. 0 \leq cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$$

3. $f(n) = \Theta(g(n))$ 类似于 $a = b$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0, s.t. 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0\}$$

4. $f(n) = o(g(n))$ 类似于 $a < b$ 可推出 $f(n) = O(g(n))$

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0, s.t. 0 \leq f(n) < cg(n), \forall n \geq n_0\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

5. $f(n) = \omega(g(n))$ 类似于 $a > b$ 可推出 $f(n) = \Omega(g(n))$

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0, s.t. 0 \leq cg(n) < f(n), \forall n \geq n_0\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

2.6.2 无穷小量定义

1. 同阶无穷小: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$
2. k 阶无穷小: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g^k(x)} = c \neq 0, k > 0$
3. 等价无穷小: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 也可记为 $f(x) \sim g(x)$

注意: 无穷小量不是一个数

²摘自《算法导论》，可跳过

2.6.3 等价无穷小量

以下列举的是比较常用的等价无穷小量($x \rightarrow 0$)³, 在极限乘除运算⁴中可以相互替代

1. $\arcsin x \sim \sin x \sim x$
2. $\arctan x \sim \tan x \sim x$
3. $\ln(1+x) \sim x$
4. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
5. $e^x - 1 \sim x$
6. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

练习 10. 求下列极限 (尝试用等价无穷小量代换)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \ln(1+x)}{\sin x^2}$

3 函数的一切

定义 5 ((基本)初等函数). 常函数加上反对幂三指称为基本初等函数. 基本初等函数经过有限次四则运算或复合的函数称为初等函数.

要关注: 反三角函数的值域及图像

3.1 函数的基本性质

1. 定义域 D 、值域 V
2. 奇偶性
3. 周期性
4. 有界性: 注意是有上界且有下界, 如二次函数就不能算有界
5. 连续性: 见定义7, 以下是间断点的分类
 - (a) 可去间断点: 可通过修改定义使其连续
 - (b) 第一类间断点: 左右极限都存在但不相等 (跳跃间断点)
 - (c) 第二类间断点: 左右极限至少有一不存在
6. 单调性: 若有一阶导, 用一阶导判断; 否则, 用定义
7. 凹凸性: 详见章节3.2
8. 零点: 代数基本定理
9. 极值点: 稳定点或不可导点, 通过 $f'(x)$ 的变化情况或 $f''(x_0)$ 的正负性判断

³实际上是一阶麦克劳林公式

⁴求极限什么情况下可以在加减式中使用等价 (无穷小) 替换? -@撒欢猪宝的回答<https://zhifu.com/question/49541771/answer/118408666>

10. 拐点⁵: 凹凸分界点

11. 渐近线: 水平、垂直、斜

以下是两组比较有用的函数表示方法, 可以记住

1. 最大值最小值函数

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

2. 定义域为 \mathbb{R} 的函数 $f(x)$ 表示为奇偶函数之和

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{奇函数}$$

$$h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{偶函数}$$

3.2 凸函数

由于凸函数在计算机科学和数学领域都应用广泛, 所以这里单独开一小节讲述几条关于凸函数的性质. 在本节中全部采用数学界常用的说法, 即凸(convex)函数指课本上的下凸函数, 凹(concave)函数指上凸函数.

定义 6 (凸函数). $f(x)$ 在 (a, b) 有定义,

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), \lambda \in (0, 1), f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸函数

注意到这个定义中, 凸函数并不是用二阶导大于0来定义的, 甚至于连一阶导都没有用到, 也就是说这个定义的适用范围更广了, 无论函数是否可导, 都可以说它是凸函数或者凹函数. 由定义可直接推出定理6

定理 6 (琴生(Jensen)不等式). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为凸函数, 则 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

分析. 令凸函数定义中 $\lambda = \frac{1}{2}$ 即得证, 端点情况用极限考虑

定理 7. $f(x)$ 在 (a, b) 为凸函数, 当且仅当

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in (a, b), x_1 < x_2 < x_3 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

⁵注意: 稳定点是使 $f'(x) = 0$ 的 $x = x_0$, 而拐点是函数凹凸性发生改变的点 $(x_0, f(x_0))$

分析. 不等式两边乘开化简即得定义式

定理 8. $f(x)$ 在 (a, b) 可微, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 为凸函数, 当且仅当 $f'(x)$ 在 (a, b) 单调上升. 进而 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续可微.

分析. 前者结合拉格朗日中值定理和定理 7 可得, 后者由定理 25 可知.

推论. $f(x)$ 在 (a, b) 二阶可导, 则当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 (a, b) 为凸函数

定理 9. $f(x)$ 在 (a, b) 可微, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 为凸函数, 当且仅当 $f(x)$ 在所有点的切线上, 即

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$

分析. 不妨设 $x_1 < y < x$, 则由定理 7 有

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

左侧令 $x_1 \rightarrow y$, 得 $f'(y)$, 展开即得.

定理 10. $f(x)$ 在 (a, b) 为严格凸函数, 若 $c \in (a, b)$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 则 $x = c$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 的唯一极小值点

分析. 反证法, 假设存在另一极小值点 c' , 不妨设 $c < c'$.

由函数极值的定义, $\exists 0 < \delta < \frac{c' - c}{2}$, 当 $x \in U(c, \delta)$, $f(x) \geq f(c)$; 当 $x \in U(c', \delta)$, $f(x) \geq f(c')$

现任取 $x_1 \in U^+(c, \delta)$, $x_2 \in U^-(c', \delta)$, 则 $f(x_1) \geq f(c)$, $f(x_2) \geq f(c')$, 进而

$$\frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} \geq 0, \frac{f(c') - f(x_2)}{c' - x_2} \leq 0$$

注意到 $c < x_1 < x_2 < c'$, 由定理 7, 有

$$0 \leq \frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} < \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} < \frac{f(c') - f(x_2)}{c' - x_2} \leq 0 \quad (\text{严格凸, 原不等式不能取等})$$

产生矛盾.

3.3 反函数

定理 11. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且严格单调增, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则反函数 $f^{-1}(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续且严格单调增

定理 12. 若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 附近连续且严格单调, 又 $f'(x_0) \neq 0$, 则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在点 $y_0 = f(x_0)$ 可导, 且 $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

其实反函数只是变换了一下视角, 将函数沿着 $y = x$ 做了个对称, 因此在题目中将视角变换回来反函数也就没什么特别的了. 练习 11 有一定难度, 但是直观图像是很漂亮的.

练习 11. 设 $y = \varphi(x), x \geq 0$ 是严格单调增的连续函数, $\varphi(0) = 0, x = \psi(y)$ 是它的反函数, 证明

$$(a) \int_0^a \varphi(x) dx + \int_0^{\varphi(a)} \psi(y) dy = a\varphi(a)$$

$$(b) \int_0^a \varphi(x) dx + \int_0^b \psi(y) dy \geq ab \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

3.4 复合函数极限法则与函数连续性的关系

⁶已知 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 欲得 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$

$$\text{考察定义} \begin{cases} i. & u \rightarrow u_0, u \neq u_0 \implies f(u) \rightarrow A \\ ii. & x \rightarrow x_0, x \neq x_0 \implies u = g(x) \rightarrow u_0 \end{cases} \implies x \rightarrow x_0, x \neq x_0 \implies f(g(x)) = A$$

知有以下两种途径,

1. 通过“强化”条件, 增加条件 $u \neq u_0$ 以实现, 对应海涅定理及复合函数极限法则

$$x \rightarrow x_0, x \neq x_0 \implies u \rightarrow u_0, \boxed{u \neq u_0} \implies f(u) \rightarrow A$$

2. 通过“弱化”条件, 忽视条件 $u \neq u_0$ 以实现, 对应函数的连续性

$$x \rightarrow x_0, x \neq x_0 \implies u \rightarrow u_0, \overline{u \neq u_0} \implies f(u) \rightarrow A$$

进而有以下定理.

定理 13 (复合函数极限法则).

$u = g(x)$ 在 $\dot{U}(x_0)$ 有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 而 $f(u)$ 在 $\dot{U}(u_0)$ 有定义, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且 $g(x) \neq u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$

定义 7 (函数连续性). 若 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内 (包含 x_0) 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 连续

定理 14 (函数连续性推论).

$u = g(x)$ 在 $\dot{U}(x_0)$ 有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 而 $f(u)$ 在 $\dot{U}(u_0)$ 有定义, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且 $f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = A$

总结来说, 要么 $u = g(x)$ 恒不为 u_0 , 要么 $f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续, 二者任选其一可以推得以上结论.⁷

通过以上分析也就不难理解为什么在证明复合函数求导法则时不能直接用复合函数极限法则了.

3.5 关于函数的其他基本定理

定理 15 (连续函数介值定理). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 记 $m = \min(f(a), f(b)), M = \max(f(a), f(b))$, 则 $\forall c \in [m, M], \exists \xi \in [a, b], s.t. f(\xi) = c$

定理 16 (闭区间连续函数最值定理). 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值

⁶本部分来自zzd@hkust的笔记

⁷当然也可以自己构造不满足这两者的函数, 请读者自己尝试

定义 8 (一致连续). $f(x)$ 在 D (开、闭或半开半闭) 有定义, $\forall \varepsilon > 0, s.t. /, \forall x_1, x_2 \in D$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 D 上一致连续

连续性只需考虑区间的每一点是否有适合连续定义的 δ , 这是函数的**局部性质**; 而一致连续性要考虑 $f(x)$ 在整个区间的情形, 在整个区间内来找适合一致连续定义的 δ , 这是函数的**整体性质**.

定理 17 (康托(Cantor)定理). $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上一致连续

例 7. 证明: 设 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的单调函数, 若 $x_0 \in (a, b)$ 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 必为 $f(x)$ 的第一类间断点

分析. 不妨设 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调上升, 否则取 $-f(x)$ 即可

由单调有界原理知, $f(x)$ 在区间 (a, x_0) 上单调上升有上界 $f(x_0)$, 必有 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$;

$f(x)$ 在区间 (x_0, b) 上单调上升有下界 $f(x_0)$, 必有 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$

进而 $\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$, 但 $\alpha \neq \beta$, 否则由夹迫性, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续

因此 x_0 必为 $f(x)$ 的第一类间断点.

4 微商与微分

4.1 微分

课本上关于微分和微商的定义只是能够让读者看懂, 但还不能让读者们理解到其背后深刻的内涵, 因此在这里我们尝试换个角度来理解.

定义 9. 对于函数 $f(x)$, 存在线性函数 $L(x)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - L(x)|}{x - x_0} = 0$$

则称 $L(x)$ 是 $f(x)$ 的线性逼近 (*linear approximation*). 对应地, 如果存在 $H(x)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - H(x)|}{(x - x_0)^n} = 0$$

则称 $H(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶 (n 阶) 逼近 (*high order approximation*).

定义 10 (可微性). 函数 $f(x)$ 在 x_0 可微, 当且仅当它在 $x = x_0$ 存在一个线性逼近

上述定义告诉我们, 若 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则其线性逼近 $L(x)$ 靠近 $f(x_0)$ 的速度比 x 靠近 x_0 的速度快; 而所谓的高阶逼近⁸, 则对应着我们之后要学习的泰勒展开; 更特殊地, 我们可以定义出 0 阶逼近, 那它代表的就是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续了. 因而我们也就能理解下面这条熟知的定理了

定理 18. 可导一定连续, 连续不一定可导

⁸高阶可微意味着存在高阶逼近, 但高阶可微不代表高阶可导

因为可导（存在线性/一阶逼近）是比连续（存在常数/0阶逼近）更加强的性质，故可导是蕴含着连续的。

更一般地，结合线性代数的知识，我们可以有以下定义

定义 11. 对于函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，如果存在线性变换 $T(\mathbf{x}_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

则称 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 可微，线性变换 $T(\mathbf{x}_0)$ 称为 f 在 \mathbf{x}_0 处的导数。

特殊地，取 $n = m = 1$ ， $f(x)$ 为一元函数；取 $m = 1$ ， $f(x)$ 为多元函数。

实际上这个定义也是采用逼近的思想，用一个 n 维的线性映射来逼近一个 n 元的函数。⁹

结合定义10我们可以得到，对于一元函数，可微与可导等价，因为 $f(x)$ 可微就存在一个线性逼近 $L(x) = T(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ，也就对应着这样一个线性变换 $T(x_0)$ ，即其导数，故可导；反过来， $f(x)$ 可导，即存在一个线性变换 $T(x_0)$ ，也就存在一个线性逼近 $L(x)$ 同上定义符合逼近性质，进而推出 $f(x)$ 可微。

但对于多元函数，可微（可以全微分）说明存在一个与曲面相切的（超）平面，那其各个方向的偏导数都应存在；而可导（可求偏导）只是存在某个方向的切线，不能推出可微。

至于高阶微分只需知道以下一些事实：

1. 一阶微分具有形式不变性（即 $dy = f'(u)du$, $dy = \varphi'(x)dx$ 形式相同），而高阶微分没有（即 $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ 不成立，乘法法则会多出几项），故高阶微分不可随意进行变量代换
2. 高阶微商的莱布尼茨公式

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

4.2 求导

链式法则、对数求导法、隐函数求导、参数方程微分法等等在这里均不作详细说明，将各种求导公式（特别是三角反三角）记熟即可。

4.3 微分中值定理

定理 19 (费马(Fermat)定理). $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0)$ 有定义，在 x_0 达到极值，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$

定理 20 (罗尔(Rolle)定理). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导， $f(a) = f(b)$ ，则 $\exists \xi \in (a, b)$ ， $f'(\xi) = 0$

定理 21 (拉格朗日(Lagrange)中值定理(微分中值定理)). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导，则 $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

或者

$$\theta = \frac{\xi - a}{b - a} \in (0, 1), \xi = a + \theta(b - a), f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$$

⁹多元函数中可微与可导的直观区别是什么？ - 冯白羽的回答 - 知乎 <https://www.zhihu.com/question/23468713/answer/26043048>

定理 22 (柯西(Cauchy)中值定理). $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $g'(x) \neq 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

定理 23. $f(x), g(x), h(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

需要理清以下几个关系: **连续可导(continuously differentiable)**¹⁰是指导函数连续, 不是指原函数连续并且可导, 因为可导已经蕴含了(可推出)连续, 所以没必要再强调; 也不是指二阶可导, 由于连续不一定可导; 但**二阶可导**蕴含了连续可导.

定义 12 (光滑函数). 若 $f(x)$ 连续, 则称其为 C^0 函数; 若 $f(x)$ 连续可导, 则称其为 C^1 函数; 若 $f(x)$ 满足 n 阶连续可导, 则称其为 C^n 函数. $\forall n, f(x) \in C^n$, 则称 $f(x)$ 光滑, 并称其为 C^∞ 函数

例 8.

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

分析. 1. $m \geq 1, f(x)$ 在 $x = 0$ 连续

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^m \sin \frac{1}{x} = f(0) = 0$$

要满足上式且在 $x < 0$ 部分有定义, 则 $m \geq 1$, 因 $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$, 夹逼得 $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$

2. $m \geq 2, f(x)$ 在 $x = 0$ 可导

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m-1} \sin \frac{1}{\Delta x}$$

要使上式极限存在, 则 $m - 1 \geq 1 \implies m \geq 2$

3. $m \geq 3, f(x)$ 在 $x = 0$ 连续可导

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (mx^{m-1} \sin \frac{1}{x} - x^{m-2} \cos \frac{1}{x}) = 0$$

同(2)理, $m - 1 \geq 1$ 且 $m - 2 \geq 1 \implies m \geq 3$

由例8可以看出这几个术语的区别, 如当 $m = 2$ 时, $f(x)$ 是病态的(pathological), 因其在 $x = 0$ 处可导但不连续可导.

下面这个补充的定理来自课本习题, 结论十分简单, 但相当有用.

¹⁰<https://math.stackexchange.com/questions/1117323/the-definition-of-continuously-differentiable-functions>

定理 24 (达布(Darboux)定理). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且 $f'(a) \neq f'(b)$, k 为介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意实数, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = k$

分析. 法一:

由上面的讨论知此题不能直接用连续函数介值定理做, 因为题设只给了 $f(x)$ 可导, 但其导函数不一定连续, 故我们需要另辟蹊径.

构造函数 $F(x) = f(x) - kx$, 因为 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 由闭区间连续函数最值定理, 在 $[a, b]$ 上必存在 $f(x)$ 的最值点, 记 $\xi = \arg \max f(x)$. 若 $\xi \in (a, b)$, 由费马定理立得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = k$.

下证 $\xi \neq a, b$.

显然 $F(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且

$$F'(a) = f'(a) - k, F'(b) = f'(b) - k$$

由题设知 $F'(a), F'(b)$ 一正一负, 不妨设 $F'(a) > 0, F'(b) < 0$, 由导数的定义我们有

$$F'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} > 0$$

$$F'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} < 0$$

再由函数极限的局部保号性, 存在 δ_1 , 使得 $x \in (a, a + \delta_1)$ 有

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} > \frac{F'(a)}{2} > 0$$

存在 δ_2 , 使得 $x \in (b - \delta_2, b)$ 有

$$\frac{F(x) - F(b)}{x - b} < \frac{F'(b)}{2} < 0$$

则

$$F(a + \frac{\delta_1}{2}) > F(a), F(b - \frac{\delta_2}{2}) > F(b)$$

故我们找到两个点 $a + \frac{\delta_1}{2}$ 和 $b - \frac{\delta_2}{2}$, 它们的函数值分别大于 a, b 两点的函数值, 因此最大值点不会落在 a, b 上.

分析. 法二:

不妨设 $f'(b) < k < f'(a)$ (类似于增函数), 考虑 k 与 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的关系, 不外乎三种可能

1. $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 则直接利用微分中值定理即得证

2. $k > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 令

$$g(x) = \begin{cases} f'(a), & x = a \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & a < x \leq b \end{cases}$$

有 $g(a) = f'(a) > k > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g(b)$ (假设), 由于 $g(x)$ 为连续函数, 则由介值定理,

$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ s.t. } g(x_0) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = k$$

进而由微分中值定理,

$$\exists \xi \in (a, x_0) \text{ s.t. } f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = k$$

3. $k < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 令

$$g(x) = \begin{cases} f'(b), & x = b \\ \frac{f(b) - f(x)}{b - x}, & a \leq x < b \end{cases}$$

同理可证.

注: 这种方法的思想即先找到一条割线, 再通过拉格朗日中值定理找切线.

我们把导函数 $f'(x)$ 可以取 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间任意值的这种性质称为介值性(intermediate value property). 由这个证明可以看出, 达布定理只需要可导, 而不需要导函数连续, 这是比连续函数介值定理更强的性质.

推论 1. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可能有第一类间断点

分析. 若不然, $\exists c \in [a, b]$ 是 $f'(x)$ 的一个第一类间断点.

若 $c \in (a, b)$, 不妨设 $f'(c^-) < f'(c^+)$, 任取 $r, s \in \mathbb{R}$ 使得 $f'(c^-) < r < s < f'(c^+)$ 且 $f'(c) \neq [r, s]$. (通过 $\text{sgn}(x)$ 的图像脑补这种构造) 由函数极限的局部保序性, $\exists \delta > 0$ s.t. $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$, 且当 $x \in (c - \delta, c)$ 时, $f'(x) < r$; 当 $x \in (c, c + \delta)$ 时, $f'(x) > s$.

于是当 $x \in \dot{U}(c, \delta)$ 时, $f'(x) \notin [r, s]$, 这与达布定理的介值性矛盾.

同理可证得 $c = a$ 或 $c = b$ 的情况, 进而 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可能有第一类间断点.

注: 本题也可用拉格朗日中值定理来求解.

定理 25. $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且 $f'(x)$ 单调, 证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 连续

分析. 由例 7 知, 若 $f'(x)$ 有间断点, 则必为第一类间断点; 但推论 1 又告诉我们 $f'(x)$ 不可能有第一类间断点, 两者相矛盾. 故 $f'(x)$ 在 (a, b) 上没有间断点, 即 $f'(x)$ 在 (a, b) 连续

同时推论 1 也说明了: 存在这样的函数, 如 $\text{sgn}(x)$, 在区间上是黎曼可积的, 但不存在原函数.

推论 2. $f(x)$ 在 (a, b) 上可微, 若在 $[a, b]$ 上 $f'(x) \neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上保持同号 (恒正或恒负)

下面的练习是中值定理和达布定理的综合应用, 请读者自行尝试. (当然也有其他方法)

练习 12. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明 $\forall x_0 \in (0, 1), \exists \xi \in (0, 1)$ s.t. $f'(\xi) = f(x_0)$

关于一般题目中值定理的运用请见例 9, 常规思路即构造函数 (具体怎么构造见例 10), 目的是:

1. 补充定义保证函数在整个区间上连续
2. 通过代数变换使趋于无限的极限过程变为在有限区间上讨论
3. 若用罗尔定理函数能够保证端点值相等

例 9. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明: 存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

分析. 令 $b > a$, 构造

$$F(t) = \begin{cases} f(\frac{a-b}{t-b}a) & t \in (a, b) \\ A & t = a, b \end{cases} \quad \text{补充定义}$$

则易知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 且 $F(a) = F(b) = A$

由罗尔定理, $\exists \xi_0 \in (a, b)$ 使得

$$F'(\xi) = -\frac{(a-b)a}{(\xi_0-b)^2} f'(\frac{a-b}{\xi_0-b}a) = 0$$

$$\because b > a, \xi_0 \in (a, b) \quad \therefore f'(\frac{a-b}{\xi_0-b}a) = 0$$

故取 $\xi = \frac{a-b}{\xi_0-b}a \in (a, +\infty)$, 即有 $f'(\xi) = 0$

例 10. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上取到它的最小值

分析. 根据构造函数的目的, 我们希望找到这样一个函数 $x \rightarrow +\infty (t \rightarrow a), x \rightarrow -\infty (t \rightarrow b)$, 那 $u(t) = \tan t$ 不失为一个好函数.

同样我们希望 $v(t) \rightarrow c (f(x) \rightarrow +\infty)$, 不假思索地, 用 $v(t) = \arctan t$ 即可满足条件.

则我们构造出

$$g(t) = \begin{cases} \arctan f(\tan t), & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\pi}{2}, & t = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

虽然函数长得比较难看, 但它是符合题设条件的, 即 $g(t) \rightarrow \frac{\pi}{2}, f(x) \rightarrow +\infty (t \rightarrow \frac{\pm\pi}{2}, x \rightarrow \pm\infty)$.

又 $g(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 由连续函数最值定理知存在最小值, 又由极限的保号性, 知最小值一定不会在端点处取到, 进而得证.

注: 连续不一定可导, 故本题不可用罗尔定理

例 11. $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, $f'(x)$ 存在, 证明 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

分析. 使用反证法, 不妨设 $A > 0$, 则由极限的保号性知 $\exists x_0, x > x_0 : f'(x) > \frac{A}{2} > 0$

对区间 $[x_0, x]$ 用拉格朗日中值定理有 $\exists \xi \in (x_0, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, 进而 $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + \frac{A}{2}(x - x_0)$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 与 $f(x)$ 有界矛盾.

5 不定积分

5.1 三种基本积分方法

1. 凑微分法

2. 第二换元法（记得换元时 dx 也要换）

3. 分部积分法

- 先写成 $\int u(x)dv(x)$ 的形式，然后直接交换 $u(x), v(x)$ 即可
- 选取 $u(x)$ 顺序：对反幂三指，如求 $\int x^2 \cos x dx$ ，取 $u(x) = x^2$ ，化为 $\int x^2 d \sin x$

5.2 常见公式

比较基础的公式在此不再列举，以下积分是在题目中比较常见，均需熟练掌握推导

1. 对数

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C \quad \text{分部积分}$$

2. （反）三角函数

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C \quad \text{分部积分, 小心 - 号}$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C \quad \text{分部积分}$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad \text{乘} \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad \text{乘} \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad \text{分部积分}$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\tan x \sec x + \ln |\tan x + \sec x|) + C \quad \text{分部积分}$$

3. 根式/分式

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{分子分母除以} a^2$$

$$\int \frac{dx}{\pm(x^2 - a^2)} = \pm \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad \text{裂项可得}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \text{将} a^2 \text{提出来}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad \text{三角换元}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad \text{分子有理化+分部积分}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + C \quad \text{分子有理化+分部积分}$$

注意：

1. 不要忘记加 C
2. 对 $\frac{1}{x}$ 求积分出来是 $\ln|x| + C$ ，有绝对值

5.3 不同类型积分的常见思路

1. 有理分式

- 假分式先除下来变为真分式，然后用部分分式
- 若非纯有理分式（如各种基本初等函数的组合，见例13），或分母次数太高（见例14），则将分子配凑成分母形式或分母导数形式以便分拆相加（这两种方式都十分常用）
- 分母一定要先分解为一次乘二次的形式（虚数的情况请看例12），也即分解为

$$\prod_{i=1}^k (x - a_i)^{j_i} \prod_{i=1}^s (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$$

结合分子，也就有部分分式的两种基本形式

$$\frac{A}{(x - a)^n}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

- 前者直接积，后者配平方（见例15）
- 小技巧：通过倒代换 $x = \frac{1}{t}$ 降低分母次数（见例20法二），有 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ 等部分的可以考虑，如 $\int \frac{dx}{x^{100} + x}$ 也可使用

例 12. $\int \frac{dx}{1 + x^4}$

分析. 先对分母进行分解， $1 + x^4 = (x + \sqrt{i})(x - \sqrt{i})(x + \sqrt{-i})(x - \sqrt{-i})$

之所以是这4个根，是因为我们知道 $1 + (x^2)^2 = 0$ 的解为 $x^2 = \pm i$ ，故上式也就理所当然了¹¹

由于复根不好看，所以合并一下就变成 $1 + x^4 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ ，然后就可以用部分分式那一套去算了

¹¹实际上这样写是不严谨的，具体有关复数根的细节等之后有空再讲吧

例 13.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2} dx && \text{分子配凑为分母形式} \\
 &= \int \frac{e^x}{x+1} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx && \text{分拆} \\
 &= \frac{e^x}{x+1} - \int e^x d\frac{1}{x+1} - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx && \text{分部积分} \\
 &= \frac{e^x}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx && \text{刚好消掉} \\
 &= \frac{e^x}{x+1} + C
 \end{aligned}$$

例 14.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 3}{(x+1)^3} dx && \text{分子几次就配几次式} \\
 &= \int \frac{d(x+1)}{x+1} - 2 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + 3 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3} && \text{分拆} \\
 &= \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + C
 \end{aligned}$$

例 15.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1} dx && \text{分子配凑为分母导数形式} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} && \text{分拆} \\
 &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C
 \end{aligned}$$

2. 三角函数

- 可以三角恒等变换的要先变换，熟悉半角、倍角（降幂升角）、积化和差和差化积（不同角）、辅助角（相同角）等等的使用，对以下公式的正用反用要相当敏感，懂得灵活转换

$$* 1 + \sin kx = \left(\sin \frac{kx}{2} + \cos \frac{kx}{2} \right)^2, \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$* \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad (\tan x)' = \sec^2 x, \quad (\sec x)' = \tan x \sec x$$

- 第一步最终目的是结合凑微分法努力化为同名函数（见例16），或是有一定关系的式子（见例17）
- 没有好方法，最后才采用万能公式（见例18），别一上来就太暴力
- 最终很大几率会化为分式型积分
- 小技巧1：通过分子分母同乘的方法强行凑平方，如求 $\sec x$ 积分，分子分母同乘 $\cos x$
- 小技巧2：配对偶式，如 $\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx$

例 16.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \cos^2) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx && \text{恒等变换} \\
 &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} d \cos x && \text{凑微分, 化同名} \\
 &\stackrel{t=\cos x}{=} \int (-1 + \frac{2}{1+t^2}) dt && \text{化为分式型} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

例 17.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} &= \int \sec x d \cot x && \text{凑微分, 熟悉偏门三角函导数} \\
 &= \sec x \cot x - \int \cot x \sec x \tan x dx && \text{分部积分会将 } \cot x \text{ 消去, 故才有上一步的凑微分} \\
 &= \sec x \cot x - \int \sec x dx \\
 &= \sec x \cot x - \ln |\sec x + \tan x| + C
 \end{aligned}$$

注; 本题也可分子分母同乘 $\cos x$, 化为分式解决, 但较为麻烦

例 18.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{2 + \sin^2 x} &= \int \frac{dx}{2 + \frac{1 - \cos 2x}{2}} && \text{降幂升角} \\
 &= 2 \int \frac{dx}{5 - \cos 2x} \\
 &= 2 \int \frac{1 + \tan^2 x}{5(1 + \tan^2 x) - (1 - \tan^2 x)} dx && \text{万能公式} \\
 &\stackrel{t=\tan x}{=} 2 \int \frac{1+t^2}{6t^2+4} \frac{1}{1+t^2} dt && \text{换元, 记得微分也要变} \\
 &= \int \frac{dt}{3t^2+2} && \text{化为分式型} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

注; 本题分母若变为 $3 - \cos^2 x$ 没什么作用, 故应先考虑倍角公式, 实现降幂

例 19. 三角函数相乘怎么玩，请见此题分解

$$\begin{aligned}
 \int \tan(x+a) \tan(x+b) dx &= \int \frac{\sin(x+a) \sin(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} dx && \text{切化弦} \\
 &= \int \left(\frac{\sin(x+a) \sin(x+b) + \cos(x+a) \cos(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1 \right) dx \\
 &&& \text{加一项减一项，目标消} x \\
 &= \int \left(\frac{\cos(a-b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1 \right) dx && \text{用和差角公式进行合并} \\
 &= -x + \cos(a-b) \int \frac{\sin((a+x) - (b+x)) dx}{\sin(a-b) \cos(x+a) \cos(x+b)} && \text{同乘 } \sin(a-b) \\
 &= -x + \cot(a-b) \int \frac{\sin(x+a) \cos(x+b) - \cos(x+a) \sin(x+b) dx}{\cos(x+a) \cos(x+b)} && \text{拆开} \\
 &= -x + \cot(a-b) - \int (\tan(x+a) - \tan(x+b)) dx \\
 &= -x + \cot(a-b) - \ln \left| \frac{\cos(x+a)}{\cos(x+b)} \right| + C
 \end{aligned}$$

注：同乘的部分我们采用了 $\sin(a-b)$ 而不是 $\cos(a-b)$ ，因 $\sin(x+y)$ 拆分后有交叉的 $\sin x \cos y$ 项，可以与分母相消。同样的方法可计算 $\int \frac{dx}{\sin(x+a) \sin(x+b)}$ ， $\int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos(x+b)}$ 等等，留给读者做练习

3. 根式

- 对于二次根式，采用整块换元（见例20法一）；也可根式内配方后三角代换或直接用常用公式（见例20法二）

* 整块换元的形式

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx, \text{ 其中 } n > 1, ad - bc \neq 0$$

* 配方的形式

$$\int R \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx, \text{ 其中 } a > 0, b^2 - 4ac \neq 0, \text{ 或 } a < 0, b^2 - 4ac > 0$$

- 对于简单高次根式的加减，用最小公倍数法消根号，如 \sqrt{x} 与 $\sqrt[3]{x}$ 同时存在，令 $x = t^{lcm(2,3)} = t^6$
- 对于复杂高次根式，凑微分不断换元使根式内多项式次数降至一次，再进行整块换元转化成有理分式（见例22）
- 当然以上的讨论都是针对化简至没法再化简的根式而言，如 $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$ 就不算最简根式
- 分式与根式结合，先用分式的配凑拆分等化简（见例21）

例 20. 法一:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2} & \stackrel{t^2=\frac{1-x}{1+x}}{=} \int t \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2} dt \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ 直接将整块根式换掉} \\
 & = -4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt \\
 & = -4 \left(\frac{1}{2} \right) \int t d \frac{1}{1-t^2} \quad \text{很有技巧的凑微分} \\
 & = -2 \left(\frac{t}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1-t^2} \right) \quad \text{分部积分} \\
 & = -2 \frac{t}{1-t^2} - \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \\
 & = -\frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{x} - \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + C \quad \text{将 } t \text{ 回代}
 \end{aligned}$$

法二:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2} & = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{x^2} \quad \text{分子有理化} \\
 & = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} \quad \text{分拆} \\
 & \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2-1}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \quad \text{倒代换} \\
 & = -\sqrt{t^2-1} + \ln |t + \sqrt{t^2-1}| + C \\
 & = -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} + \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \right| + C \quad \text{将 } t \text{ 回代}
 \end{aligned}$$

例 21.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} & = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad \text{分子配凑分母形式, 小技巧: 留下常数 } a^2 \\
 & = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a^2} \int x d \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 & \quad \text{技巧是直接后面那一项放入微分中, 求导看差什么再补} \\
 & = \frac{1}{a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} + C \quad \text{分部积分, 刚好消去}
 \end{aligned}$$

例 22.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}} &= \int \frac{xdx}{x^2\sqrt[4]{1+x^4}} && \text{分子分母同乘 } x \text{ 凑微分} \\
 &\stackrel{t=x^2}{=} \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t\sqrt[4]{1+t^2}} && \text{换元降次} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{tdt}{t^2\sqrt[4]{1+t^2}} && \text{分子分母同乘 } t \text{ 凑微分, 与第一步相同} \\
 &\stackrel{u=t^2}{=} \frac{1}{4} \int \frac{du}{u\sqrt[4]{1+u}} && \text{换元降次} \\
 &\stackrel{v^4=1+u}{=} \int \frac{v^2 dv}{v^4-1} && \text{整块换元} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v+1} && \text{部分分式} \\
 &= \frac{1}{2} \arctan \sqrt[4]{1+x^4} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1} \right| + C && \text{回代}
 \end{aligned}$$

这题如果用倒代换 $t = \frac{1}{x}$ 变成求 $-\int \frac{dt}{\sqrt[4]{1+t^4}}$ 反而不这么做, 因为这题与之前的题刚好相反, 得先升幂, 凑微分后才可以进行降幂; 否则直接降幂会把根式前的 x 消掉, 次数反而不齐了, 请读者自行体会这其中的区别.

5.4 例题

1. $\int \frac{3x^2}{1+x^2} dx$
2. $\int \tan^3 x dx$ 凑微分
3. $\int \frac{dx}{A \sin^2 x + B \cos^2 x}$ 配对偶
4. $\int \cos^5 x dx$ 不用分部积分
5. $\int \sin 3x \cos 2x dx$ 积化和差
6. $\int \frac{\sec x}{(1+\sec x)^2} dx$ 恒等变换
7. $I_n = \int \tan^n x dx$ 用 I_{n-2} 递推
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$ 倒代换
9. $\int x\sqrt{x^2-2x+2} dx$ 配方配凑
10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$ 配分母形式

6 定积分

定义 13 (Riemann积分). $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

将区间任意分成 n 个小区间, 每个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n$$

记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 在每个小区间上任取一点 $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, 作和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) dx$$

积分基本性质

1. 有界性: 可积函数必有界
2. 线性性: 相同积分区间两函数
3. 可加性: 同一函数连续积分区间
4. 单调性: $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
5. 绝对值不等式: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

定理 26 (闭区间连续函数可积定理). 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积

定理 27 (积分第一中值定理). 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 不变号, 则在 $[a, b]$ 中存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

特别地, $g(x) \equiv 1$ 时, 有

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

定理 28. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 则变上限定积分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数

定理 29 (微积分基本定理). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的任一原函数, $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

定理 30 (柯西不等式(积分形式)). $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则

$$\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$$

等号成立当且仅当 $f(x), g(x)$ 线性相关

分析. 可通过构造二次函数, 令 $\Delta \geq 0$ 证明;

也可利用线性代数的知识, 定义内积¹² $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x) dx$, 通过 $\|u\|\|v\| \geq |\langle u, v \rangle|$ 得证

定理 31 (三角不等式(积分形式)). $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx} \geq \sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx}$$

等号成立当且仅当 $g(x) = \lambda f(x), \lambda \geq 0$

分析. 对应线性代数中 $\|u\| + \|v\| \geq \|u + v\|$

例 23. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 其积分为 I , 改变 $[a, b]$ 内有限个点的 $f(x)$ 值, 使其变成另一函数 $f^*(x)$, 证明 $f^*(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积, 且积分仍为 I

分析. 设改变了 k 个点的函数值, 这些点为 c_1, c_2, \dots, c_k

构造

$$F(x) = f(x) - f^*(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \{c_1, c_2, \dots, c_k\} \\ f(x) - f^*(x), & x \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\} \end{cases}$$

用分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ 将区间任意分成 n 个小区间, 每个小区间的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$, 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$

在每个小区间上任取一点 $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, 作和式 $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 则

$$k\lambda \min_{x \in [a, b]} F(x) \leq \sigma \leq k\lambda \max_{x \in [a, b]} F(x)$$

当 $\lambda \rightarrow 0$, 由极限的夹迫性知 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = 0$

故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b [f(x) - f^*(x)] dx = 0$$

由定积分的线性性,

$$\int_a^b f^*(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b F(x) dx = I - 0 = I$$

因此 $f^*(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且积分仍为 I .

¹²线性代数没学好的请自行翻书

学完微分积分后会涌现出很多不等式证明题，但其实很多时候不需要太多的代数技巧，直接求导即可解决（对于单变量函数）。见例24法一其实就是高考题做法。

例 24. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，且 $f(a) = 0$ ，证明

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

分析. 法一:

为方便计算，不妨将 $f(x)$ 平移至 $[0, t], t > 0$ ，则 $f(0) = 0$ ，即证

$$\left| \int_0^t f(x) dx \right| \leq \frac{t^2}{2} \max_{0 \leq x \leq t} |f'(x)|$$

构造

$$g(t) = \frac{t^2}{2} \max_{0 \leq x \leq t} |f'(x)| - \left| \int_0^t f(x) dx \right| \quad (\text{注意是关于 } t \text{ 的函数})$$

则 $g(0) = 0$ ， $g'(t) = t \max_{0 \leq x \leq t} |f'(x)|$

要令 $g'(t) \geq 0$ ，即令 $\max_{0 \leq x \leq t} |f'(x)| \geq \left| \frac{f(t)}{t} \right| \quad (*)$

由拉格朗日中值定理，在 $(0, t)$ 上必 $\exists \xi > 0$ s.t. $f'(\xi) = \frac{f(t) - 0}{t - 0}$

故最大值必然大于等于区间内某一点的值 $|f'(\xi)|$ ，即 $(*)$ 式成立

进而 $g'(t) \geq 0, g(t) \geq 0$ ，原不等式成立。

分析. 法二:

先证明

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f'(x)(x-b) dx \quad (*)$$

因为

$$\begin{aligned} - \int_a^b f'(x)(x-b) dx &= - \int_a^b (x-b) df(x) \\ &= - \left[f(x)(x-b) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx \right] \quad \text{分部积分} \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

即证得 $(*)$ 式. 则原式

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f'(x)(x-b) dx \right| \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \left| \int_a^b (x-b) dx \right| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \end{aligned}$$

同理可证

练习 13. 设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$(1) \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

$$(2) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

6.1 定积分的计算

关键掌握不定积分的求法, 定积分就能迎刃而解了, 最大不同只在于定积分换元时需要把上下限一起改变(出现上限小于下限的情况也是正常的).

用定义计算的题则要懂得配凑出黎曼和的形式

练习 14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$

6.2 定积分的近似计算

定义 14 (定积分梯形公式).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \right)$$

若 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $|f''(x)| \leq M, x \in [a, b]$, 则梯形公式误差可作如下估计

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$$

定义 15 (抛物线公式/辛普森(Simpson)公式).

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{6n} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})] \\ &= \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})] \end{aligned}$$

若 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $|f^{(4)}(x)| \leq M, x \in [a, b]$, 则

$$|R_{2n}| \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M$$

7 无穷级数

7.1 基本性质

定义 16 (无穷级数). $\{u_n\}$ 为数列, 称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和, 称其收敛到 S .

可由极限直接推导出来的定理在此不再赘述.

例 25. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx, |r| < 1$

分析. 用三角函数的复数形式, 即 $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ 求和, 其中 $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(r e^{ix} \frac{1 - (r e^{ix})^n}{1 - r e^{ix}} - r e^{-ix} \frac{1 - (r e^{-ix})^n}{1 - r e^{-ix}} \right) \quad \text{等比数列求和} \\ &\stackrel{z=re^{ix}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} - \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) \quad \text{因 } |z| < 1 \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{z - \bar{z}}{1 - (z + \bar{z}) + r^2} \quad z\bar{z} = r^2, \text{ 通分} \\ &= \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \end{aligned}$$

7.2 正项级数

定义 17 (正项级数). 级数的每一项都非负, 则称其为正项级数. 由此知正项级数一定为实级数.

对于正项级数, 有以下判定敛散性的方法:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是 $\{S_n\}$ 有上界

分析. 必要性: 极限有界性; 充分性: 单调有界原理

2. 比较判别法

- 一般形式: $u_n \leq cu_n$

分析. 大收敛小收敛, 小发散大发散. 证明: 收敛推有界, 有界推收敛

- 极限形式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$

分析. $l \in (0, +\infty)$ 敛散性相同, $l = 0, l = +\infty$ 判定方法同比较判别法一般形式

常用 $1/n$ 或 $1/n^2$ 卡, 多项式分式函数

- 另一形式: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

分析. $\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N}$ 裂项递推

3. 达朗贝尔(D'Alembert)判别法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

分析. $l < 1$ 收敛, $l > 1$ 发散. 证明: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon_0 = r = \frac{r^{(n+1)}}{r_n}$. 幂级数、阶乘

4. 柯西(Cauchy)判别法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

分析. $l < 1$ 收敛, $l > 1$ 发散. 实质是等比数列

5. 拉阿比(Raabe)判别法: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = S$

分析. $S > 1$ 收敛, $S < 1$ 发散. 注意符号反. 引理: $\forall r > p > 1, \exists N, n > N, 1 + \frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$

6. 柯西积分判别法: $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且单调下降, $u_n = f(n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛充要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t)dt$ 存在

方法总结:

1. 用收敛必要条件判断 $u_n \rightarrow 0$ 是否成立, 即是否发散¹³
2. 尝试用数列求和方法, 如裂项、错位相消等对数列求部分和
3. 按照上面给出的判定敛散性的方法, 依次判定

7.3 一般项级数

交错级数莱布尼茨判别法

7.4 代数运算

1. 结合律: 条件/绝对收敛级数任意加括号, 和不变; 但不能随意去括号
2. 交换律: 绝对收敛成立; 条件收敛适当重排, 可使新级数发散或收敛到某一特定值(Riemman)
3. 分配律: 绝对收敛成立(Cauchy)

8 函数项级数

8.1 一致收敛

8.2 判别法之比较总结

¹³注: 不是充分条件

判别法	数项级数	广义积分	函数项级数
比较判别法			
达朗贝尔判别法			
柯西判别法	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 等价 于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N, \forall p \in \mathbb{Z}^+$ 有 $ u_{n+1} + \dots + u_{n+p} < \varepsilon$		
拉阿比判别法			
狄利克雷判别法			
阿贝尔判别法			