概率论与数理统计笔记整理V2.0

陈鸿峥

2019.01 *

目录

*Build 20190117

1 基本概念

1.1 事件与概率

命题 1. 事件的基本运算

1. 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
2. 德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

注意概率是对一个集合的函数，有如下定义.

定义 1 (概率)**.** 随机试验E的所有可能结果构成E的样本空间Ω，Ω的子集称为事件，Ω的幂集构成E的事件空间$\mathcal{F}$，记概率函数$\mathbb{P}(\cdot):\mathcal{F}\mapsto\mathbb{R}$满足：

1. 非负性：$\mathbb{P}(A)\geq 0,\forall A\in\mathcal{F}$
2. 规范性：$\mathbb{P}(\Omega)=1$
3. 可列可加性：$A_1,A_2,\ldots$为两两不相容的事件，$\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$

由定义可得概率一些基本性质：

1. $\mathbb{P}(\varnothing)=0,\mathbb{P}(A)\leq 1$
2. 有限可加性：$A_1,A_2,\ldots$两两不相容，$\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$
3. 若$A\subset B$，则$\mathbb{P}(B-A)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)\geq\mathbb{P}(A)$
4. 逆事件概率：$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathbb{P}(A)$
5. 容斥原理：

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\right)$$

本章的重点在于组合计数，正确计算事件数目并套用相应的公式即可.

1.2 条件概率

定义 2 (条件概率). 设A, B为两个事件，且$\mathbb{P}(A) > 0$，则称

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$$

为在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率

进而有

$$\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$$

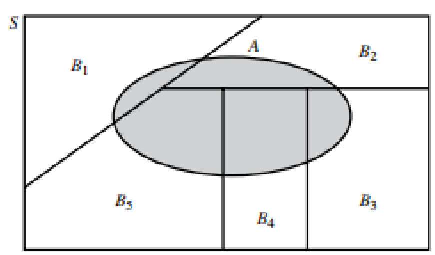
定理 1 (乘法公式). 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个事件，$n \geq 2$，且$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n-1} \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

定义 3 (划分). 两两交为空，所有并为全集

定理 2 (全概率公式). 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为S的一个划分，且$\mathbb{P}(B_i) > 0$，则

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB_1) + \mathbb{P}(AB_2) + \cdots + \mathbb{P}(AB_n) = \mathbb{P}(A \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \mid B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \mid B_n)\mathbb{P}(B_n)$$



定理 3 (贝叶斯(Bayes)公式). 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为S的一个划分，且$\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B_i) > 0$，则

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_i A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

特别地，当$n = 2$时有

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)}$$

注意贝叶斯公式是用**先验概率**推**后验概率**.

在计算条件概率时一定要注意前提条件是什么，并将题设进行转换.

定义 4 (独立性). 对于事件$A_1, \ldots, A_n$，

- 若$\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right)=\mathbb{P}\left(A_i\right) \mathbb{P}\left(A_j\right), \forall i, j$，则称$\{A_1, \ldots, A_n\}$两两(pairwise)独立
- 若$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right)=\prod_{j \in I} \mathbb{P}\left(A_j\right), \forall I \in 2^{[n]}$，其中$2^{[n]}$为$\{A_i\}_{i=1}^n$的所有子集，则称$\{A_1, \ldots, A_n\}$相互(mutually)独立

区分以下两个概念

1. A, B对立(exclusive)/不相容 $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B)=0$，即不相交(disjoint)
2. A, B独立(independent) $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B)=\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$，即不相关(unrelated)

2 随机变量及其分布

2.1 基本概念

定义 5. *对于离散随机变量X，其概率质量函数(PMF)为$f_X(k)=\mathbb{P}(X=k)$，分布函数为$F_X(x)=\mathbb{P}(X \leq x)=\sum_{k \leq x} f_X(k)$*

定义 6. *对于连续随机变量X，其累积密度函数(CDF)为$F_X(x)=\mathbb{P}(X \leq x)=\int_{-\infty}^x f_X(z)\ \mathrm{d} z \int_{-\infty}^x f(t)\ \mathrm{d} x$，其中$f_X(x)$为$X$的概率密度函数(PDF)，也即$f_X(x)=\frac{\mathrm{d} F_X(x)}{\mathrm{d} x}$. 一定要注意，$f_X(x) \neq \mathbb{P}(X=x)$!*

注意积分区间！注意要写变量范围！

对于离散型随机变量还需对**组合恒等式**十分熟悉.

定义 7 (期望). *设Y是随机变量X的**连续**函数$Y=g(X)$*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_x x f_X(x) & \mathbb{E}(g(X)) &= \sum_x g(x) f_X(x) \\ \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\ \mathrm{d} x & \mathbb{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\ \mathrm{d} x \end{aligned}$$

期望具有线性性，即

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(c X)=c \mathbb{E}(X)$$

若X, Y相互独立，则

$$\mathbb{E}(X Y)=\mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$$

但反过来不能推相互独立，上式说明了协方差为0，不相关

定理 4 (柯西(Cauchy)不等式).

$$\mathbb{E}\left((X Y)\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(X^2\right) \mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

分析. *构造函数$q(t)=\mathbb{E}\left((X+t Y)^2\right)$，二次判别法*

定义 8 (方差).

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}[x_k - \mathbb{E}(X)]^2 p_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}[X-\mathbb{E}(X)]^2 f(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

标准差或均方差则是σ

一般通过求$\mathbb{E}(X)$和$\mathbb{E}(X^2)$来求方差，也可反解出$\mathbb{E}(X^2)$

由方差定义和期望的线性性有

$$\mathbb{D}(aX+b) = a^2\mathbb{D}(X)$$

注意方差并不是线性的

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X+Y) &= \mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) - (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

定义 9 (上α分位点).

$$\mathbb{P}(X > z_\alpha) = \alpha,\ \alpha \in (0,1)$$

特别地，$\alpha = 0.5$的点称为中位数

2.2 随机变量的函数的分布

定理 5. 若X为连续型随机变量，g为单调递增函数（反函数存在且单调递增），且$Y=g(X)$，那么

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)|$$

特别地，对于$Y = X^2$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})],\ y > 0$$

一般情况，若$Y = g(X)$，则先求X的分布函数$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$，然后求出$Y$的分布函数$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X(g^{-1}(y))$，最后对$F_Y(y)$求导. 同时注意概率函数有无定义域，如有求出来之后要分段写.

例 1. $X \sim N(0,1)$，求$Y = |X|$概率密度

分析.

- X的分布函数$F_X(x) = \Phi(x)$
- Y的分布函数

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = \Phi(y) - \Phi(-y) = 2\Phi(y) - 1$$

- Y的概率密度

$$f_Y(y) = F'_y(y) = 2\phi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

2.3 常见的离散分布

1. 伯努利/两点/0-1分布 **Bernoulli(p)**（二项分布的特殊情形）

$$\begin{aligned} f_X(k) &= \begin{cases} 1-p & k=0 \\ p & k=1 \end{cases} \\ \mathbb{E}(X) &= p \\ \mathbb{D}(X) &= p(1-p) \end{aligned}$$

2. 二项分布 **Binomial(n,p)**

$$\begin{aligned} f_X(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ 0 \le k \le n \\ \mathbb{E}(X) &= n \cdot p \\ \mathbb{D}(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

   e.g. 扔n次硬币扔到k次正面（做实验n次，记录成功的次数）

3. 几何分布 **Geometric(p)**（负二项分布的特殊情形）

$$\begin{aligned} f_X(k) &= (1-p)^k \cdot p, k \ge 0 \\ \mathbb{E}(X) &= \frac{1-p}{p} \\ \mathbb{D}(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

   e.g. 扔k次反面直至扔到正面（做实验直到你成功，记录失败的次数）

4. 帕斯卡/负二项分布 **NegetiveBinomial(r,p)**

$$\begin{aligned} f_X(k) &= \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k,\ k \ge 0 \\ \mathbb{E}(X) &= r \cdot \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r\left(\binom{k+r}{r}-\binom{k+r-1}{r-1}\right)p^r(1-p)^k \qquad k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}\text{的变形} \\
&= rp^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r}{r}(1-p)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k\right) \\
&= rp^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r}{k}(1-p)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k\right) \\
&= rp^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-r-1}{k}(1-p)^k-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-r}{k}(1-p)^k\right) \\
&\quad \text{这步是关键，将变化的}(k+r)\text{转成}(-r-1)\text{，使得可以正常使用二项式定理} \\
&= rp^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r-1}{k}1^{-r-1-k}(p-1)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}1^{-r-k}(p-1)^k\right) \\
&= rp^r\left((1+(p-1))^{-r-1}-(1+(p-1))^{-r}\right) \qquad \text{牛顿二项式} \\
&= r(p^{-1}-1) \\
&= r\frac{1-p}{p}
\end{aligned}
$$

补充证明：

$$
\begin{aligned}
\binom{k+r}{k} &= \frac{(k+r)(k+r-1)\cdots(r+1)}{k(k-1)\cdots 1} \\
&= (-1)^k\frac{(-k-r)(-k-r-1)\cdots(-r-1)}{k(k-1)\cdots 1} \\
&= (-1)^k\frac{(-r-1)(-r-2)\cdots(-r-1-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \qquad \text{把分子各项逆过来} \\
&= (-1)^k\binom{-r-1}{k}
\end{aligned}
$$

e.g. 扔k次反面直到有r个正面（做实验直到你获得r次成功，记录失败次数）

5. 超几何分布 **HyperGeometric(N,n,M)**

$$
\begin{aligned}
f_X(k) &= \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
\mathbb{E}(X) &= n\frac{M}{N}
\end{aligned}
$$

e.g. M个产品中有N个次品，检查n次得到k个次品

6. 泊松分布 **Poisson(λ)或$\pi(\lambda)$,**$\lambda > 0$

$$
\begin{aligned}
f_X(k) &= \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ \lambda > 0, k \geq 0 \\
\mathbb{E}(X) &= \lambda \\
\mathbb{D}(X) &= \lambda
\end{aligned}
$$

$X \sim B(n,p)$，若$p = \dfrac{\lambda}{n}$（即均值相同），且n非常大，则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&\approx \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

一般$n \geq 20, p \leq 0.05$时，即可用近似（泊松定理）

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}
$$

注意泊松分布具有无记忆性(memoryless)，即

$$
\mathbb{P}(X \geq a \mid X \geq b) = \mathbb{P}(X \geq a - b)
$$

2.4 常见的连续分布

1. 均匀分布 **Uniform(a,b),**$a < b$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{b-a},\ a \leq x \leq b \\
\mathbb{E}(X) &= \frac{a+b}{2} \\
\mathbb{D}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

2. 指数分布 **Exponential(θ),**$\theta > 0$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},\ x > 0 \\
\mathbb{E}(X) &= \theta = \frac{1}{\lambda} \\
\mathbb{D}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

与泊松分布类似，同样具有无记忆性

3. 正态分布 **Normal**(μ, σ^2)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

标准正态分布$N(0,1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}\,\mathrm{d}^{-x^2/2}$$
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

算平方

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-y^2}{2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty}r\mathrm{e}^{\frac{-r^2}{2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&\quad \text{重积分极坐标变量代换 } \mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\frac{-r^2}{2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\int_{0}^{2\pi}(0-1)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{0}^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta = 2\pi
\end{aligned}$$

也即概率积分$I = \sqrt{2\pi}$（在其他概率题中也经常会遇见，需要记住），同时利用$\Phi(x)$的值也可快速求到其近似值

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$，特别地，

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$相互独立，则它们的和

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

若$X \sim N(0,1)$，且$Y = X^2$，则

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y/2} \implies Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2)$$

二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

边缘分布X,Y都为一维正态分布

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$
$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

进而$\mathbb{E}\left(X\right)=\mu_1,\mathbb{E}\left(Y\right)=\mu_2,\mathbb{D}\left(X\right)=\sigma_1,\mathbb{D}\left(Y\right)=\sigma_2,\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=\rho$
对于二维正态分布的X,Y来说，不相关与相互独立等价
n维正态分布中变量的线性组合都是正态分布

例 2. 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且有$\mathbb{D}\left(X\right)=\sigma_X^2,\mathbb{D}\left(Y\right)=\sigma_Y^2$，证明当$a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$时，随机变量$W=X-aY$与$V=X+aY$相互独立

分析.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(W,V\right)&=\mathrm{Cov}\left(X-aY,X+aY\right)\\&=\mathrm{Cov}\left(X-aY,X\right)+\mathrm{Cov}\left(X-aY,aY\right)\\&=\mathrm{Cov}\left(X,X\right)-a\mathrm{Cov}\left(Y,X\right)+a\mathrm{Cov}\left(Y,X\right)-a^2\mathrm{Cov}\left(Y,Y\right)\\&=\sigma_X^2-a^2\sigma_Y^2=0\qquad\text{由题设}\end{aligned}$$

又W,V分别为正态变量X,Y的线性组合，故(W,V)也为二维正态变量，而$\rho=0$，故W,V不相关，W,V相互独立

4. 伽马分布 $\mathbf{Gamma}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma(\alpha,\beta)\equiv\Gamma(k,\theta)\,,k=\alpha,\theta=1/\beta$

$$\begin{aligned}f_X(x;\alpha,\beta)&=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x},\ x,\alpha,\beta>0\\f_X(x;k,\theta)&=\frac{1}{\Gamma(k)\theta^k}x^{k-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},\ x,k,\theta>0\\F(x;k,\theta)&=\int_0^x f(u;k,\theta)\,\mathrm{d}u=\frac{\gamma\left(k,\frac{x}{\theta}\right)}{\Gamma(k)}\\\mathbb{E}\left(X\right)&=\frac{\alpha}{\beta}=k\theta\\\mathbb{D}\left(X\right)&=\frac{\alpha}{\beta^2}=k\theta^2\end{aligned}$$

若$X_i\sim\Gamma(k_i,\theta)$相互独立，则它们的和

$$Z=\sum_{i=1}^N X_i\sim\Gamma\left(\sum_{i=1}^n k_i,\theta\right)$$

注：通过$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$证明 [1]

3　多维随机变量及其分布

3.1　边缘分布

定义 10. *二维随机变量(X,Y)的分布函数/联合(joint)分布函数定义如下*

$$F(x,y)=\mathbb{P}\left(X\le x,Y\le y\right)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_i\le y}p_{ij}=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

其中，$f(x,y)$为X,Y的联合密度函数

进而，对于离散型随机变量变量有，

$$\mathbb{P}\left(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\right)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$$

连续型随机变量有，

$$\mathbb{P}\left((X,Y)\in G\right)=\iint_G f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

如$\mathbb{P}\left(X\le Y\right)$，则$G=\{(x,y)|x\le y\}$

若$f(x,y)$在(x,y)连续，则$\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

定义 11 (边缘(marginal)分布)**.**

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\mathbb{P}\left(X\le x,Y<\infty\right)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=F(x,\infty)\\&=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\ \mathrm{d}x\\f_X(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

注意积分区间要分段，实际积分区域不一定是从负无穷到正无穷，而是概率有$(0,1)$之间值的区域. 相当于是对**特定**的x，将y积起来，得到x的边缘密度

例 3. *二维随机变量(X,Y)的概率密度为*

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y} & 0<x<y\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

求边缘概率密度

[1]Gamma函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\alpha>0$，其中$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\Gamma(1)=1,\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，若$\alpha$为正整数，$\Gamma(n)=(n-1)!$

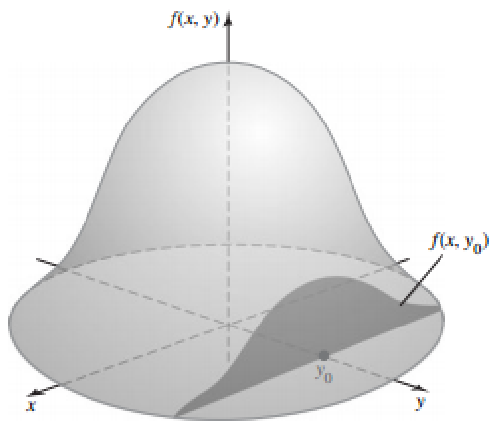
分析. 对于x的边缘密度来说，y的积分区间为$x \to \infty$；而对于y的边缘密度来说，x的积分区间为$0 \to y$

对于二元随机变量的概率密度和概率分布函数有如下关系

$$
\begin{tikzcd}
f(x,y) \arrow[r, "\text{Int } y"] \arrow[d, "\text{Int } x"] \arrow[ddrr, "\text{Int } x\ y"] & f_X(x) \arrow[r, "\text{Int } x"] & F_X(x) \\
f_Y(y) \arrow[d, "\text{Int } y"] & & \\
F_Y(y) & & F(x,y) \arrow[ll, "x\to\infty"'] \arrow[uu, "y\to\infty"']
\end{tikzcd}
$$

定义 12 (条件概率密度与分布函数)**.**

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\
F_{X|Y}(x \mid y) &= \mathbb{P}\left(X \leq x \mid Y = y\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$



定义 13 (相互独立)**.**

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= F_X(x)F_Y(y) \\
f(x,y) &= f_X(x)f_Y(y)
\end{aligned}
$$

3.2 随机变量的函数的分布

均通过求$F_Z(z) = \mathbb{P}\left(z \leq Z\right)$交换积分次序得到

3.2.1 $Z = X + Y$

$$
f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\ \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\ \mathrm{d}x
$$

分析. 先求分布函数$F_Z(z)$

$$\begin{aligned}F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) &= \iint_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u\end{aligned}$$

若X和Y相互独立，则有卷积公式

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y,y) f_Y(y)\ \mathrm{d}y$$

离散情形则有

$$f_{X+Y}(z) = \sum_{k=0}^{z} p(k)q(z-k),\ z = 0,1,2,\ldots$$

例 4. 若X,Y相互独立，且$X \sim b(n_1,p), Y \sim b(n_2,p)$，证明$Z = X+Y \sim b(n_1+n_2,p)$

分析.

$$\begin{aligned}p(k) &= \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \\ q(k) &= \binom{n_2}{k} p^k (1-p)^{n_2-k} \\ f(z) &= \sum_{k=0}^{z} \binom{n_1}{z} p^z (1-p)^{n_1-z} \binom{n_2}{z-k} p^{z-k}(1-p)^{z-n_2+k} \\ &= p^z (1-p)^{n_1+n_2-z} \sum_{k=0}^{z} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{z-k} \\ &= p^z (1-p)^{n_1+n_2-z} \binom{n_1+n_2}{z} \qquad \textit{Vandermonde}\text{恒等式}^2\end{aligned}$$

更一般地，$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + b(a_1 \neq 0)$，则$Y$有连续分布函数

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-b-a_2x_2}{a_1}, x_2\right)\frac{1}{|a_1|}\,\mathrm{d}x_2$$

3.2.2 $Z = Y/X$

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x,xz)\ \mathrm{d}x$$

3.2.3 $Z = XY$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x,\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x$$

3.2.4 $Z=\max\{X_1,\dots,X_n\}$

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

3.2.5 $Z=\min\{X_1,\dots,X_n\}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

例 5. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

分别求$Z=X+Y$，$Z=XY$的概率密度

分析. 关键在于求出相应的f在什么区间内有非零值!

1. 由随机变量函数的分布有

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

进而有范围，注意要确定积分限，关键看积分变量的范围

$$\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases}\implies\begin{cases}0<x<1\\ z-1<x<z\end{cases}$$

右式实际上是两个区间取交集，故分类讨论z的大小，得

$$\begin{cases}z\in(0,1) & x\in(0,z)\\ z\in[1,2) & x\in(z-1,1)\\ z\notin(0,2) & x\in\varnothing\end{cases}$$

在上述区间内$f(x,z-x)=z$，其余区间$f(x,z-x)=0$，故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z z\,\mathrm{d}x=z^2 & z\in(0,1)\\ \int_z^1 z\,\mathrm{d}x=2z-z^2 & z\in[1,2)\\ 0 & z\notin(0,2)\end{cases}$$

2. 由随机变量函数的分布有

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

求积分限，注意这里x与z的正负关系，可将第一条式子作为前提，得到$z > 0$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < \frac{z}{x} < 1 \end{cases} \implies \begin{cases} z \in (0,1) & x \in (z,1) \\ z \notin (0,1) & x \in \varnothing \end{cases}$$

故

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_z^1 \left(1 + \frac{z}{x^2}\right) \mathrm{d}x = 2(1-z) & z \in (0,1) \\ 0 & z \notin (0,1) \end{cases}$$

3.2.6 函数分布

若Z是随机变量X, Y的连续函数$Z = g(X, Y)$，则

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

根据这条式子，方差、协方差等等均可以直接通过积分计算

特别地，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x \\ \mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \, \mathrm{d}y \\ \mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

3.3 数字特征

定义 14 (协方差).

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

协方差为0称为**不相关**

协方差的性质：

$$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$$

定义 15 (相关系数). 用来表征X, Y线性关系的量

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}\sqrt{\mathbb{D}(Y)}}$$

$|\rho_{XY}|$较大，均方误差小，线性关系强；$\rho_{XY} \le 1$，取等的充要条件为$\exists a, b$使得$\mathbb{P}(Y = a + bX) = 1$

相关性与独立性没有必然联系：相关性是对线性关系来说的，而独立性是对一般关系来说的

定义 16 (矩(moment)). 设X, Y为随机变量，若$\mathbb{E}\left(X^k\right)$存在，则称它为$X$的$k$阶*(原点)*矩，称$\mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)]^k\right)$为$k$阶中心矩，称$\mathbb{E}\left(X^kY^l\right)$为$k+l$阶混合矩，称$\mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)]^k[Y-\mathbb{E}(Y)]^l\right)$为$k+l$阶混合中心矩

定义 17 (协方差矩阵). 设n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的二阶混合中心距

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathbb{E}\left([X_i - \mathbb{E}(X_i)][X_j - \mathbb{E}(X_j)]\right)$$

都存在，则协方差矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

又$c_{ij} = c_{ji}$，故上述矩阵是个对称矩阵

定理 6. 若$X_1, \ldots, X_n$独立，则

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$
$$\mathbb{D}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}(X_i)$$
$$\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = 0,\ i \neq j$$

$Y = g(X)$的随机变量分布一般通过求分布函数后求导得到其概率密度函数

4 大数定律

4.1 大数定律

定理 7 (切比雪夫(Chebyshev)不等式). 设随机变量X的数学期望$\mathbb{E}(X) = \mu$，方差$\mathbb{D}(X) = \sigma^2$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

或

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| < \varepsilon\right) \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

定理 8 (弱大数定律(辛钦)). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布*(iid)*，$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \mathbb{D}(X_i) = \sigma^2$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0,\ \forall\varepsilon > 0$$

或

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1,\ \forall\varepsilon > 0$$

可记成$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$

定理 9 (实际推断原理). 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的

定理 10 (强大数定律). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布，$\mathbb{E}\left(X_i\right) = \mu, \mathbb{D}\left(X_i\right) = \sigma^2$，则

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu\right) = 1$$

4.2 中心极限定理

定义 18 (标准化变量). 若随机变量X的均值为μ，方差为σ^2，则X的标准化变量为

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

有$\mathbb{E}\left(Z\right) = 0$，$\mathbb{D}\left(Z\right) = 1$

定理 11 (独立同分布的中心极限定理). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布，且$\mathbb{E}\left(X_k\right) = \mu$，$\mathbb{D}\left(X_k\right) = \sigma^2 > 0$，则随机变量之和的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

的分布函数$F_n(x)$对任意x满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_n \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t = \Phi(x)$$

也即，近似地

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad 或 \qquad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

努力将原变量转化为标准化变量形式，以使用标准正态分布解题

推论 (棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理). 设随机变量$\eta_1, \eta_2, \ldots$服从参数为$n, p (0 < p < 1)$的二项分布，则对于任意x，有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\eta - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \Phi(x)$$

注：化为n个*0-1*分布可证

涉及到**数目**的，可以采用上述推论计算.

定理 12 (李雅普诺夫(Lyapunov)定理). 若$X_1, X_2, \ldots$为独立随机变量且同等分布，且$\mathbb{E}\left(X_k\right) = \mu$，$\mathbb{D}\left(X_k\right) = \sigma^2 > 0$，记$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ 若存在$\delta > 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(|X_k - \mu|^{2+\delta}\right) = 0$$

则随机变量之和的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}$$

例 6. 一食品店有三种蛋糕出售，售出一只蛋糕的价格是一个随机变量，取1元、1.2元、1.5元各个值的概率分别为0.3、0.2、0.5，若售出300只蛋糕

(a) 求收入至少400元的概率

(b) 求售出价格为1.2元的蛋糕多于60只的概率

分析. (a) 设$X_k, k = 1, 2, \ldots, 300$为第$k$个蛋糕的售价

X_k	1	1.2	1.5
p_k	0.3	0.2	0.5

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = 1.29 \qquad \mathbb{D}\left(X_k\right) = 0.0489$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{300} X_k \geq 400\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{300} X_k < 400\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{300\bar{X} - 1.29 \cdot 300}{\sqrt{300}0.0489} < \frac{400 - 1.29 \cdot 300}{\sqrt{300}0.0489}\right) \\ &= 1 - \Phi(3.39) = 0.0003\end{aligned}$$

(b) 记Y为售价为1.2元的蛋糕数目，则$Y \sim b(300, 0.2)$，由*Laplace*定理，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y > 60\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(Y \leq 60\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y - 300 \cdot 0.2}{\sqrt{300 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \leq \frac{60 - 300 \cdot 0.2}{\sqrt{300 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0) = 0.5\end{aligned}$$

5 参数估计

5.1 样本与抽样

定义 19 (简单随机样本)**.** 在相同的条件下对总体X进行n次重复的、独立的观察，将n次观察结果按照实验的次序记为$X_1, X_2, \ldots, X_n$，则这些变量都**相互独立**且与X有**相同分布**

5.2 抽样分布

5.2.1 基本概念

定义 20 (统计量)**.** 样本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

样本方差（期望估计量$\mathbb{E}\left(S^2\right)=\sigma^2$）

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

样本k阶中心矩

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$$

经验分布函数

$$F_n(x)=\frac{1}{n}S(x)$$

其中$S(x)$是$X_1,X_2,\ldots,X_n$中不大于x的随机变量的个数

定理 13. 设总体X（不管服从什么分布），均值为μ，方差为σ^2，$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自X的一个样本，$\bar{X}$为样本均值，S^2为样本方差，则

$$\mathbb{E}\left(\bar{X}\right)=\mu,\ \mathbb{D}\left(\bar{X}\right)=\sigma^2/n=(\sigma/\sqrt{n})^2$$

定理 14. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，则

1. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$或$\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$（中心极限定理）
2. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
4. $\bar{X}$与S^2相互独立

定理 15. 对于两个正态总体的样本X和Y有

1. $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$
2. 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中，

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},\ S_w=\sqrt{S_w^2}$$

S_w为σ^2的无偏估计量

5.2.2 常见的抽样分布

1. χ^2分布

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本，则统计量

$$\chi^2=X_1^2+X_2+\cdots+X_n^2\sim\Gamma\left(\frac{n}{2},2\right)$$

服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1}\mathrm{e}^{-x/2},\ x>0 \\
\mathbb{E}\left(\chi^2\right) &= n \\
\mathbb{D}\left(\chi^2\right) &= 2n
\end{aligned}
$$

χ^2具有可加性，因Gamma分布有可加性

$$\chi_1^2(n_1)+\chi_2^2(n_2) \sim \chi^2(n_1+n_2)$$

当n充分大时，

$$\chi_\alpha^2 \approx \frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$$

2. t分布/Student分布

   设$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X,Y相互独立，则

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

   服从自由度为n的t分布，记为$t \sim t(n)$

$$h(t)=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},t\in(-\infty,+\infty)$$

   上分位点满足$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$，当$n$充分大时$t_\alpha(n)\approx z_\alpha$

3. F分布

   设$U \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，且U,V相互独立，则

$$F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$$

   服从自由度(n_1,n_2)的F分布，记为$F \sim F(n_1,n_2)$

$$\psi(x)=\frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}x^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)[1+(n_1x/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}},x>0$$

   若$F \sim F(n_1,n_2)$，则$\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$
   上分位点$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

5.3 参数估计

5.3.1 估计量

定义 21 (估计)**.** $X_1, X_2, \ldots, X_n$为独立随机变量，从有参数$\mu, \sigma, \theta, \ldots$的分布$f$中得到，参数$\theta$的估计量为$\hat{\theta}$，若

$$\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

则称T是期望*(expected)*估计/无偏估计量. 若

$$\mathbb{D}\left(\hat{\theta}_1\right) \leq \mathbb{D}\left(\hat{\theta}_2\right)$$

则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效. 若

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon\right) \to 0,\, n \to \infty$$

则称$\hat{\theta}$为相合*(probable)*的估计.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S^2\right) &= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1^n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^2\right) - n\mathbb{E}\left(\bar{X}^2\right) \qquad \text{由}\sigma^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mu^2 \\
&= \frac{1}{n-1}n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \qquad \text{由}\mathbb{D}\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} = \mathbb{E}\left(\bar{X}^2\right) - \mu^2 \\
&= \sigma^2 = \mathbb{D}\left(X\right)
\end{aligned}$$

5.3.2 矩估计

设X为随机变量，概率密度为$f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$，则$X$的前$k$阶矩

$$\mu_l(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)\,\mathrm{d}x,\, l = 1, 2\ldots, k$$

k个方程组便可解得k个估计量$\hat{\theta}_l$

总体均值与方差的矩估计量不因不同总体分布而异

$$\hat{\mu} = \bar{X} \qquad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

5.3.3 最大似然估计法

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta),\, \theta \in \Theta$$

求解对数似然方程组可得估计值

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

但最大似然函数不一定可导，或最大值不一定在驻点取到，则一般地，

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

最大似然估计具有**不变性**：若θ的函数$u = u(\theta)$有单值反函数$\theta = \theta(u)$，且$\hat{\theta}$为θ的最大似然估计，则$\hat{u} = u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的最大似然估计

进而标准差的最大似然估计为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

常见的最大似然估计

- (a, b)上的均匀分布：$\hat{a} = \min_i X_i, \hat{b} = \max_i X_i$
- 泊松分布：$\hat{\lambda} = \bar{X}$

5.3.4 区间估计

定义 22 (置信区间)**.**

$$\mathbb{P}\left(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\right) \geq 1 - \alpha$$

正态总体的区间估计

待估参数	其他参数	枢轴量	置信区间
μ	σ^2已知	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2未知	$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2已知	$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知	$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1, μ_2未知	$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right)$

* 单侧的估计量α不需除以2

对于0-1分布的估计

$$\frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1) \implies \mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

解出p的$1-\alpha$置信区间为

$$\left(\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})\right)$$

其中$a=n+z^2_{\alpha/2}, b=-(2n\bar{X}+z^2_{\alpha/2}), c=n\bar{X}^2$

5.4 可视化

1. 直方图：矩形宽度$\dfrac{f_i}{n}\Big/\Delta$，$\Delta$为组距
2. 箱线图：最小值min，第一四分位数Q_1，中位数M，第三四分位数Q_2，最大值max

$$q分位数\quad x_p=\begin{cases}x_{[np]+1} & np\notin\mathbb{Z}\\ \frac{1}{2}(x_{np}+x_{np+1}) & np\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

6 假设检验

6.1 假设检验

定义 23 (显著性检验). 在显著性水平α下，检验假设

$$H_0:\mu=\mu_0,\ H_1:\mu\neq\mu_0$$

其中H_0称为原假设或零假设，H_1称为备择假设

正态总体的假设检验与区间估计类似

原假设H_0	检验统计量	拒绝域
$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z\ge z_\alpha$ $z\le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\ge z_{\alpha/2}$
$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t\ge t_\alpha(n-1)$ $t\le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2未知)	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F\ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

* 成对数据的假设检验即作差，检验均值是否为0；注意假设和拒绝域符号方向

定义 24 (p值). 假设检验问题的p值*(probability value)*是由检验统计量的样本观察值得出的原假设可被拒绝的最小显著性水平

6.2 分布拟合检验

定理 16 (分布拟合检验). 设总体X分布未知，假设检验

$$H_0: \text{总体}X\text{的分布函数为}F(x)$$
$$H_1: \text{总体}X\text{的分布函数不是}F(x)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}\left(\frac{f_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i^2}{np_i} - n \sim \chi^2(k-1)$$

需满足H_0为真，$n \geq 50$，$np_i \geq 5$，否则进行并组

定理 17 (分布族的拟合检验).

$$H_0: \text{总体}X\text{的分布函数为}F(x;\theta_1,\ldots,\theta_r)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i^2}{n\hat{p}_i} - n \sim \chi^2(k-r-1)$$

其中，k为组数，r为参数数目. 需要先用最大似然估计对参数值进行估计.

7 方差分析及回归分析

7.1 单因素方差分析

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	$S_A = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2$	$s-1$	$\bar{S}_A = \frac{S_A}{s-1}$	$F = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_B}$
误差	$S_E = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2$	$n-s$	$\bar{S}_E = \frac{S_E}{n-s}$	
总和	$S_T = S_E + S_A = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{\cdot j} - \bar{X})^2$	$n-1$		

7.2 一元线性回归

$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$
$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

1. $\hat{b} = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} \qquad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

2. 误差ε的方差$D(\varepsilon) = \sigma^2$的无偏估计

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{Q_e}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2}{n-2} = \frac{S_{yy} - \hat{b}S_{xy}}{n-2}$$

3. 线性假设：$H_0 : b = 0, H_1 : b \neq 0$的显著性检验，$H_0$的拒绝域为

$$|t| = \frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}} \geq t_{\alpha/2}(n-2)$$

   若拒绝H_0则回归效果显著

4. 回归系数b的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\hat{b} \pm t_{\alpha/2}(n-2)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}}\right)$$

5. 回归函数$\mu(x)$在点$x = x_0$处函数值置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$(\hat{a} + \hat{b}x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1/n + (x_0 - \bar{x})^2/S_{xx}})$$

6. 以x_0处的回归值$\hat{y}_0 = \hat{a} + \hat{b}x_0$作为$Y$在$x_0$处观察值$Y_0 = a + bx_0 + \varepsilon_0$的预测值，则$Y_0$的置信水平为$1-\alpha$的预测区间为

$$(\hat{a} + \hat{b}x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1 + 1/n + (x_0 - \bar{x})^2/S_{xx}})$$