# 数列极限与函数极限

Week 1

陈鸿峥

https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math/blob/master/Mathematical_analysis/main.pdf

December, 2018

# 1

# 课程简介

# 课程简介

- 不会重新将课本内容讲一遍

# 课程简介

- 不会重新将课本内容讲一遍
- 相关知识点的归纳整合，高于课本的观点

# 课程简介

- 不会重新将课本内容讲一遍
- 相关知识点的归纳整合，高于课本的观点
- 主要讲解题思路，例题均来自课本或考试真题

# 课程简介

- 不会重新将课本内容讲一遍
- 相关知识点的归纳整合，高于课本的观点
- 主要讲解题思路，例题均来自课本或考试真题
- 两周一次课，至多4次的样子

# 课程简介

- 不会重新将课本内容讲一遍
- 相关知识点的归纳整合，高于课本的观点
- 主要讲解题思路，例题均来自课本或考试真题
- 两周一次课，至多4次的样子
- 课件和笔记都可以在我的Github上找到

  `https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math`

# 课程简介

- 不会重新将课本内容讲一遍
- 相关知识点的归纳整合，高于课本的观点
- 主要讲解题思路，例题均来自课本或考试真题
- 两周一次课，至多4次的样子
- 课件和笔记都可以在我的Github上找到

  `https://github.com/chhzh123/Notes-of-Math`
- 课程调查

2

# 课程安排

# 课程安排

大概是以下几个专题：

- **数列极限与函数极限**
  对应课本第3章，笔记第2章
- **函数的一切**
  对应课本第2章、第3章第4节、第5章，笔记第3章、第4章
- **不定积分与定积分**
  对应课本第6章、第7章，笔记第5章、第6章
- **待定**

3

# 极限的概念

# 极限的定义

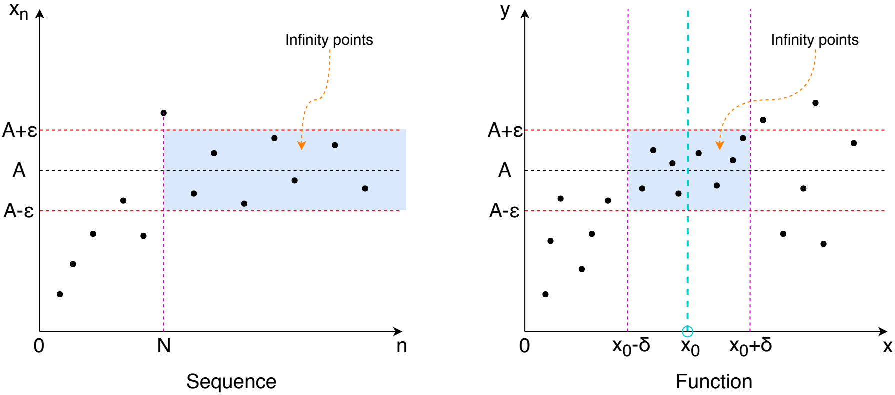
- 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, s.t.\, n > N : |x_n - A| < \varepsilon$$

- 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, s.t.\, x \in \mathring{U}(x_0, \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

# 极限的定义



$x_n$
Infinity points
A+ε
A
A-ε
0
N
n
Sequence
y
Infinity points
A+ε
A
A-ε
0
$x_0$-δ
$x_0$
$x_0$+δ
x
Function

# 极限的几个重要性质

对于数列极限和函数极限都有：

1. （局部）有界性：有极限必有界 $\rightarrow$ 单调有界原理

# 极限的几个重要性质

对于数列极限和函数极限都有：

1. （局部）有界性：有极限必有界 $\rightarrow$ 单调有界原理
2. **（局部）保号性：必存在与极限同号的值**

# 极限的几个重要性质

对于数列极限和函数极限都有：

1. （局部）有界性：有极限必有界 $\rightarrow$ 单调有界原理
2. **（局部）保号性**：必存在与极限同号的值
3. （局部）保序性：极限序关系成立，原式序关系也成立

# 极限的几个重要性质

对于数列极限和函数极限都有:

1. （局部）有界性：有极限必有界 $\rightarrow$ 单调有界原理
2. **（局部）保号性**：必存在与极限同号的值
3. （局部）保序性：极限序关系成立，原式序关系也成立
4. 唯一性：极限存在必唯一

# 极限的几个重要性质

对于数列极限和函数极限都有:

1. (局部)有界性:有极限必有界 $\rightarrow$ 单调有界原理
2. **(局部)保号性:** 必存在与极限同号的值
3. (局部)保序性:极限序关系成立,原式序关系也成立
4. 唯一性:极限存在必唯一
5. 夹迫性:夹逼定理

# 极限的几个重要性质

对于数列极限和函数极限都有：

1. （局部）有界性：有极限必有界 $\rightarrow$ 单调有界原理
2. **（局部）保号性：**必存在与极限同号的值
3. （局部）保序性：极限序关系成立，原式序关系也成立
4. 唯一性：极限存在必唯一
5. 夹迫性：夹逼定理
6. 极限不等式：原式序关系成立，极限序关系成立

# 沟通两种极限的桥梁

**定理 (海涅定理)**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

等价于

$$\forall\{x_n\}, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0(n = 1, 2, \cdots) \ : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

注：常用来证明函数极限不存在或作逼近用

**例 (§3.3/11)**

$$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$$

# 补充习题：海涅定理

**练习 (§3.3/12)**

证明$\lim_{x\to x_0} D(x)$不存在，其中

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Tips: 分为有理数和无理数讨论，并将无理数小数形式设出来
其他习题：§3.3/8,18

4

# 极限的证明与计算

# 4.1

# 常见的极限计算方法

# 1. 直接代入

即极限的四则运算，一定要先对极限式化简（分子/分母有理化、因式分解），然后将趋于极限的值代入看是否是未定型，若不是则可直接得到答案

**例 (§3.3/2(5))**

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$$

**例 (17数分期中)**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

# 补充习题：直接代入

**练习 (§3.2/7(2))**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$$

其他习题：§3.2/7(1)(4),§3.3/2,6

# 补充习题：化简（求和积）

**练习 (§3.3/13)**

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

**练习 (§3.2/8(7))**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$$

其他习题：§3.2/8(1)(4),§3.3/13

# 2. 化归重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

关注形式，重点在于配凑

**例 (§3.3/10(9))**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$$

**例 (17数分期中)**

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$$

# 补充习题：化归重要极限

**练习 (§3.3/10(20))**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

其他习题：§3.3/10

# 3. 洛必达

- 一定要先判断是否为未定型!
- 最没有技术含量的求极限，暴算就好了
- 求导后极限不存在不能说原极限不存在
- 一些奇怪的东西只要符合未定型也是可以用洛必达的

**例 (§5.2/3)**

设$f(x)$二阶可导，求证：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x)$$

其他习题：§5.2/1

# 4.1 夹逼（取两头）

取两头，全部换成同一项，或者就只剩下一项

**例 (17复旦高数)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$

**例 (17数分期中)**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n}$$

## 4.2 夹逼（不等式放缩）

均值不等式:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

配凑形式+消元

**例 (§3.2/8(9))**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

# 补充习题：夹逼

## 练习 (§3.2/11)

设$a_1, a_2, \ldots, a_m$为$m$个正数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

## 练习 (§3.2/8(10))

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}$$

其他习题：§3.2/8(2)(3)(5)(12)

# 5. 无穷小量替换

实际上是一阶泰勒公式，有适用范围：一般极限乘除才可用

- $\arcsin x \sim \sin x \sim x$
- $\arctan x \sim \tan x \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$
- $e^x \sim 1 + x$
- $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

**例**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos \sin x}{2\ln(1+x^2)}$$

# 补充习题：无穷小量替换

**练习 (17数分期末)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+x}}{\sin^3 x}$$

**练习 (17数分期末)**

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arcsin\frac{\pi}{4n}-\arcsin\frac{\pi}{4n+1}\right)$$

其他习题：§3.5/6

# 6.1 其他方法（无穷小量乘有界量）

无穷小量乘有界量极限值为0，常见于三角函数（要熟悉三角和差化积、积化和差公式）

**例 (17数分期中)**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$$

**练习 (0x高数)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n^2}{n+1}$$

# 6.2 其他方法（升指数）

对幂函数取对数后取指数

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$$

**例 (§3.2例13)**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

# 6.3 其他方法（分式递推）

先证明单调(数学归纳法)有界，后利用单调有界定理证明极限存在，将极限值设出来，代入解方程

**例** (§3.2/13(4))

$$x_0 = 1, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}，求 \lim_{n\to\infty} x_n$$

其他习题：§3.2/13

4.2

# 用定义证明极限

# 1. 几种基本类型

1. 幂函数：$\dfrac{x^m}{x^n}(x\to\infty)=\dfrac{1}{x^{n-m}}\to 0$
2. 幂指型：$\dfrac{x^k}{a^x}(a>1,x\to\infty)=\dfrac{x^k}{(1+b)^x}<\dfrac{x^k}{C_x^{k+1}x^{k+1}}\to 0$
3. 指阶型：$\dfrac{a^n}{n!}(n\to\infty)=\dfrac{a}{n}\underbrace{\dfrac{a}{n-1}\cdots\dfrac{a}{a+1}}_{<1}\dfrac{a^a}{a!}<\dfrac{a}{n}\dfrac{a^n}{a!}\to 0$
4. 阶炸型：$\dfrac{n!}{n^n}(n\to\infty)=\dfrac{n}{n}\underbrace{\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{2}{n}}_{<1}\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}\to 0$

# 2. 常见放缩

1. $x^a(a>0) < a^x(a>1) < x!$
2. $n < \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} < n! < n^n$ 取对数可证
3. $\frac{x}{x+1} \le \ln(x+1) \le x$
4. $(1+x)^n > 1+nx$ 伯努利(Bernoulli)不等式
5. $\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$ 绝对值三角不等式
6. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 均值不等式
7. $[x] \le x < [x]+1$ 高斯函数性质

其他习题：§3.2/1,2,12(1),§3.3/1

# 3. 有界量直接取界

$\sin x, (-1)^n$等均直接取$\pm 1$

**例 (§3.2/1(2))**

用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$$

**例 (§3.2/1(4))**

用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$$

# 4. 配凑+绝对值三角不等式

在证明题中非常非常非常常见，之后各种关于极限的证明（包括微分积分）也都会用到，常常通过加一项减一项实现，关键在于**将结论往条件靠！**

**例 (§3.2/16)**

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

# 补充习题：配凑绝对值三角

## 练习 (§3.3/4)

设$f(x)>0$，证明：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)|=|A|$$

其他习题：§3.2/3(2),6

# 极限计算方法 – 总结

1. 不要着急一上来就洛必达，先试下简单方法是否可行

# 极限计算方法 – 总结

1. 不要着急一上来就洛必达，先试下简单方法是否可行
2. 注意四则运算只能对**有限项且项数固定**的数列使用

# 极限计算方法 – 总结

1. 不要着急一上来就洛必达，先试下简单方法是否可行
2. 注意四则运算只能对**有限项且项数固定**的数列使用
3. **化简**很重要，化简的形式也有很多种（除了有理化和因式分解，还有先求和求积等）

# 极限计算方法 – 总结

1. 不要着急一上来就洛必达，先试下简单方法是否可行
2. 注意四则运算只能对**有限项且项数固定**的数列使用
3. 化简很重要，化简的形式也有很多种（除了有理化和因式分解，还有先求和求积等）
4. 用定义证明数列极限放缩即可，注意不要变负；函数极限通常要先限制变量范围，如令$0 < |x - x_0| < 1$

# 极限计算方法 – 总结

1. 不要着急一上来就洛必达，先试下简单方法是否可行
2. 注意四则运算只能对**有限项且项数固定**的数列使用
3. 化简很重要，化简的形式也有很多种（除了有理化和因式分解，还有先求和求积等）
4. 用定义证明数列极限放缩即可，注意不要变负；函数极限通常要先限制变量范围，如令$0 < |x - x_0| < 1$
5. 计算题来来去去都是那几种方法，证明题也一定是**放缩配凑绝对值**