图的直接和的 Hamilton 圈研究

胡延忠[1] , 叶　波[1,2]
(1. 湖北工业大学 计算机学院 , 湖北 武汉 430068 ;2. 十堰职业技术学院 汽车系 ,湖北 十堰 442000)

[摘　要]　本文定义了图的直接和的概念 ,讨论了图的直接和中 Hamilton 圈的存在性。当图本身存在 Hamilton 圈时 ,它的直接和中的 Hamilton 圈也存在 ;设图 G 是 n 阶图 ,如果它的极大 Hamilton 子圈与 C_{n-1} 同构 ,那么它的直接和存在 Hamilton 圈 ;本文还研究了极大 Hamilton 子圈同构于 C_{n-2} 的 n 阶图并得到了三个充分条件。本文最后用超立方体 Q_4 为例展示了这些命题的应用。

[关键词]　Hamilton 圈 ;直接和 ;同构图 ;超立方体
[中图分类号]　O157　[文献标识码]　A　[文章编号]　1008-4738(2010)03-0103-04

0　导论

无向图中 Hamilton 圈是遍历图中每个顶点恰好一次又返回起点的圈。确定一个图中这样的圈是否存在就是 Hamilton 圈问题 ,它是一个 NP 完全问题。实际应用(特别是计算机网络中的应用) 和计算复杂性的研究推动了 Hamilton 圈问题的研究[1][2][3][4]。Hamilton 圈问题的研究由来已久。Dirac 于 1952 就证明了 :如果 G 是至少有三个顶点的简单图且每个顶点的度数大于等于 n/ 2 存在 Hamilton 圈 ;Bondy - Chv áal1972 年给出了定理 :一个图存在 Hamilton 圈的充要条件是它的闭包存在 Hamilton 圈 ; Tutte 也于 1956 年证明每一个 4 - 连通的平面图存在 Hamilton 圈[5]。宋玉梅在 1999 年证明 :一个简单图存在 Hamilton 圈的充要条件是其 Per GR 非零[6]。与此同时 ,对一些特殊图的 Hamilton 圈问题的研究也很活跃。例如 , Fleischner 研究了图的平方中 Hamilton 圈问题 ,并于 1974 年证明了 :如果 G 是一个 2 - 连通的图 ,那么 G^2 存在 Hamilton 圈[5] ; Chv áal 于 1985 年研究了旅行商问题中 Hamilton 圈[7] ;Jackson1980 年证明了度数至少为 n (G) / 3 的任意简单正则图存在 Hamilton 圈[8] ,这一结论由 Zhu Y. J. 、Z. H. Liu 和 Z. G. Yu 等人进行了改进[9]。本文讨论图的直接和的 Hamilton 圈问题。

1　基础知识

集合 V1 = {1 , 2 , 3}和集合 V2 = {a , b}的笛卡尔积是一个集合 ,记为 $V_1 \times V_2$ = {<1 , a>, <1 , b>, <2 , a>, <2 , b>, <3 , a>, <3 , b>}。$V_1 \times V_2$ 的任意子集合称为一个二元关系 ,例如 ,f = {<1 , a>, <1 , b>, <2 , b>, <3 , a>}就是一个二元关系。映射是一种特殊的二元关系。

本文只考虑简单连通图。

定义 1.1　两个图称为是同构的 ,记为 $G \overset{\alpha}{\cong} H$,如果存在一个双射 $\alpha : V(G) \to V(H)$ 使得 $xy \in E(G)$ 的充要条件是 $\alpha(x)\,\alpha(y) \in E(H)$ 对所有的 x , y $\in G$ 成立。

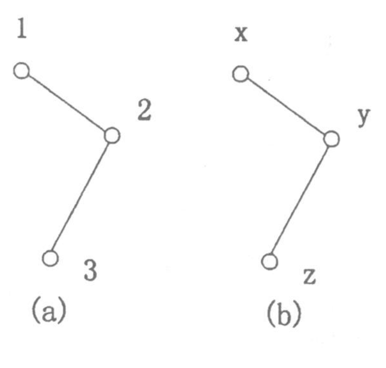

图 1　图 G 和它的同构图

---

* [收稿日期]　2010-05-10
[作者简介]　胡延忠(1963 -) ,男 ,湖北工业大学计算机学院教授 ,研究方向 :数字图像处理 ,算法设计 ,软件工程 ; 叶　波(1970 -) ,男 ,湖北工业大学计算机学院在读硕士 ,十堰职业技术学院汽车系副教授。

假设 $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$,那么 $\alpha=\{<v_1, \alpha(v_1)>, <v_2, \alpha(v_2)>, <v_3, \alpha(v_3)>, \cdots, <v_n, \alpha(v_n)>\}$。

如图 1 所示,存在一个从图 G 到图 H 的同构 :$\alpha=\{<1, x>, <2, y>, <3, z>\}$。图 1(a) 和图 1(b) 分别表示图 G 和它的同构图 H。

定义 1.2　假设 $G_1 \overset{f}{\cong} G_2$,那么 G_1 到 G_2 的直接和是一个图。记为: $G=G_1 \overset{f}{\oplus} G_2$,其中,$V(G)=V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G_1)=E(G_2) \cup E(G) \cup f$。

图 2 是 Petersen 图,它是 3 - 连通的,但是没有 Hamilton 圈。

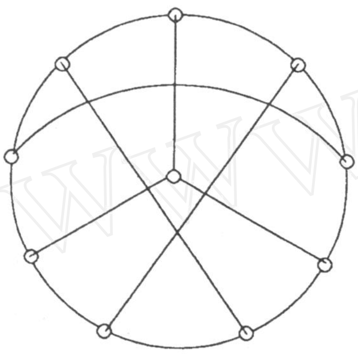

图 2　Petersen 图

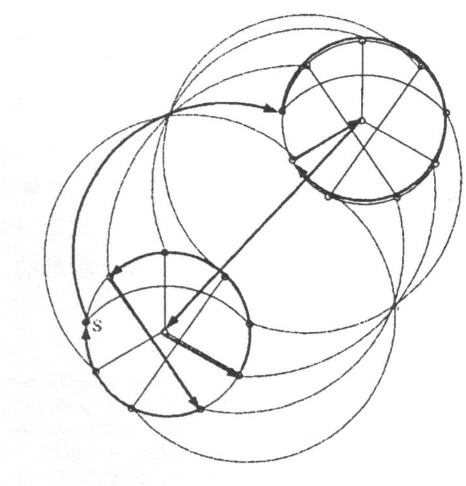

图 3　Petersen 图到自身的直接和

Petersen 图到它自身的直接和如图 3 所示。

显然,一个图到自身的直接和是 3 - 联通的,而这正好是一个图存在 Hamilton 圈的必要条件。

2　主要定理

定理 2.1　如果 G 存在 Hamilton 圈,那么直接和 $G \overset{f}{\oplus} f(G)$ 也存在 Hamilton 圈。

证明:为方便起见,设图 G 的阶为 n,它的 Hamilton 圈为 C_n。讨论 $C_n \overset{f}{\oplus} f(C_n)$,如图 4 所示。显然,路径:$123 \cdots n\, f(n)\, f(n-1)\, f(n-2) \cdots f(2)\, f(1)\, 1$ 是一条 $C_n \overset{f}{\oplus} f(C_n)$ 的 Hamilton 圈,当然也是一条 $G \overset{f}{\oplus} f(G)$ 的 Hamilton 圈。

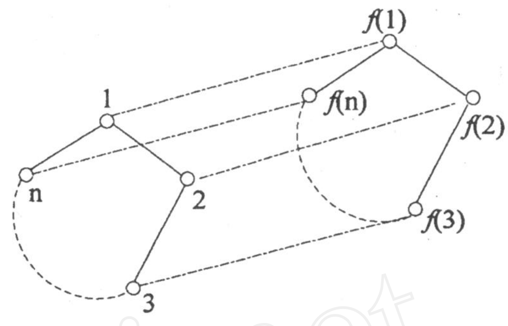

图 4　C_n 的直接和存在 Hamilton 圈

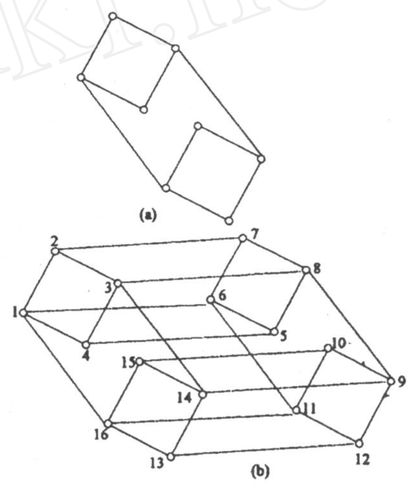

图 5　非 Hamilton 图的直接和存在 Hamilton 圈

当图 G 没有 Hamilton 圈时,结果将会怎么样?

例题 2.2　Petersen 图没有 Hamilton 圈,然而它的直接和却存在 Hamilton 圈,如图 2 所示。

例题 2.3　图 5(a) 是一个非 Hamilton 图,它的直接和存在 Hamilton 圈,如图 5(b) 所示,其中表示同构映射(下同)。

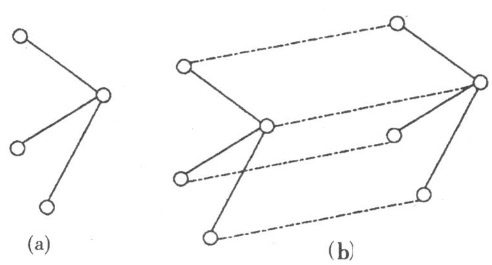

图6　非 Hamilton 图的直接和不存在 Hamilton 圈

例题 2.4　图 6(a) 是一个非 Hamilton 图,它的直接和没有 Hamilton 圈,如图 6(b) 所示。

问题 2.5　一个图满足什么条件时,它的直接

和存在 Hamilton 圈呢？充分必要条件也许难以发现，但是下列结论有很重要的意义。

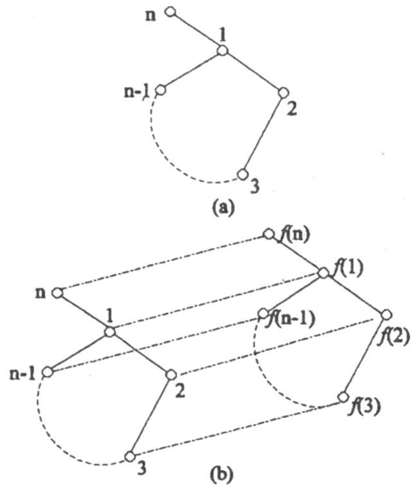

图 7　极大 Hamilton 子圈的阶数为 n - 1

定理 2.6　设 G 是一个 n 阶图，如果它的极大 Hamilton 子圈的阶数为 n - 1，那么直接和 $G\overset{f}{\oplus}f(G)$ 存在 Hamilton 圈。

证明：为了方便起见，假设图 G 的极大 Hamilton 子圈为 C_{n-1} 且 $V(G)=\{1,2,\cdots,n\}$。因为图 G 是连通图，所以不在 C_{n-1} 上的顶点 n 必和 C_{n-1} 某一顶点邻接，如图 7(a) 所示。图 7(b) 是包含 G 的所有顶点子图的直接和，路径：$1nf(n)f(1)f(n-1)\cdots f(3)f(2)23\cdots(n-1)1$ 是一条 Hamilton 圈。因此图 G 的直接和存在 Hamilton 圈。

定理 2.7　设 G 是一个 n 阶图，如果它的极大 Hamilton 子圈的阶数为 n - 2，那么，只要满足下列条件之一，直接和 $G\overset{f}{\oplus}f(G)$ 就存在 Hamilton 圈。

(1) 不在极大 Hamilton 子圈上的两顶点是邻接的。

(2) 不在极大 Hamilton 子圈上的两顶点是不邻接的，但满足下列条件之一。设 1 和 2 分别是极大 Hamilton 子圈上的两顶点，x 和 y 是不在极大 Hamilton 子圈上的两顶点，且分别和 1 和 2 邻接。

a. 在顶点 1 和顶点 2 之间（顺时针方向）没有其他顶点。

b. 在顶点 1 和顶点 2 之间（顺时针方向）具有一个（或奇数个）顶点，且在顶点 2 和顶点 1 之间（顺时针方向）也具有一个（或奇数个）顶点。

c. 在顶点 1 和顶点 2 之间（顺时针方向）具有两个（或偶数个）顶点，且在顶点 2 和顶点 1 之间（顺时针方向）也具有两个（或偶数个）顶点。

证明：1) 为了方便起见，假设 1，2，3 是极大 Hamilton 子圈上彼此连接的三个顶点，假设 x 和 y 不在极大 Hamilton 子圈上且和顶点 1 邻接，如图 8 所示。路径：$1xyf(y)f(x)f(1)\cdots f(3)f(2)23\cdots1$ 是直接和的一条 Hamilton 圈。

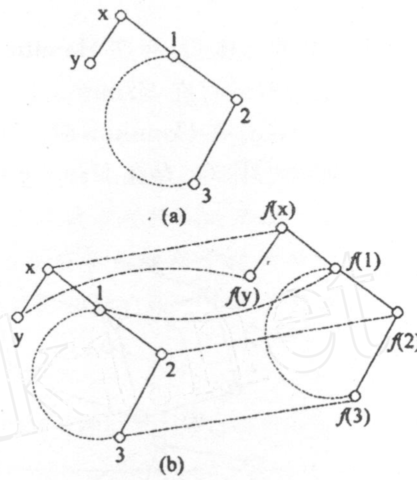

图 8　两顶点是邻接的

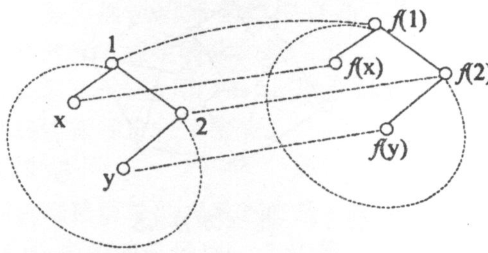

图 9　顶点 1 和顶点 2 之间(顺时针方向)没有其他顶点

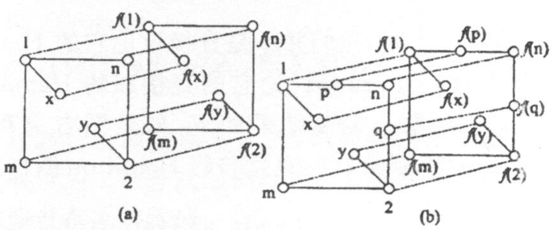

图 10　顶点 1 和顶点 2 之间有奇数个顶点

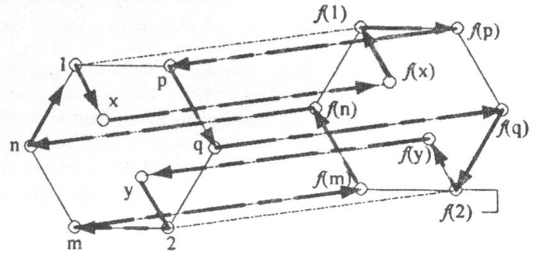

图 11　顶点 1 和顶点 2 之间有偶数个顶点

2) a) 路径：$1xf(x)f(1)\cdots f(2)f(y)y2\cdots1$ 是一条 Hamilton 圈，如图 9 所示。

2) b) 路径：$1xf(x)f(1)f(n)n2yf(y)f(2)f(m)m1$ 是一条 Hamilton 圈，如图 10(a) 所示，路

径:xf(x) f(1) f(p)pn$f$(n) f(q)q2yf(y) f(2) f(m)m1 是一条 Hamilton 圈,如图 10(b)所示。

2)c) 箭头所示的路径是一条 Hamilton 圈,如图 11 所示。

3　应用举例

例题 3.1　超立方体 Q_4 存在 Hamilton 圈。

证明:因为图 12(a)存在 Hamilton 圈,因此,由定理 2.1,图 12(b)也存在 Hamilton 圈。因此,利用定理 2.1,可知超立方体 Q_4 存在 Hamilton 圈,如图 12(c)所示。

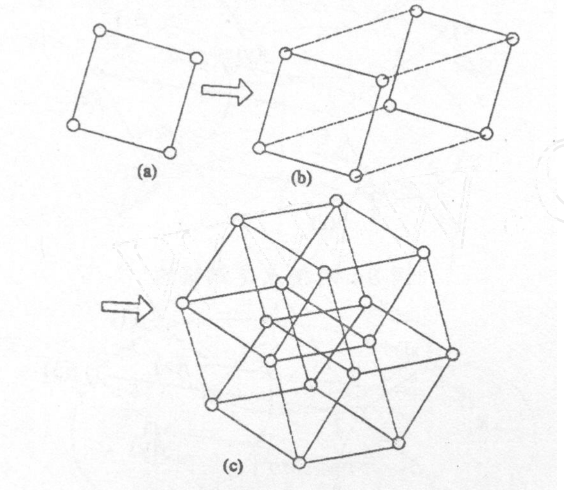

图 11　超立方体 Q_4

4　结论

给定一个图,我们并不是直接讨论它的 Hamilton 圈的存在性,而是讨论它的直接和的 Hamilton 圈的存在问题。主要结果如下:如果图自身存在 Hamilton 圈,那么它的直接和的 Hamilton 圈肯定存在;如果 n 阶图 G 的极大 Hamilton 子圈是 C_{n-1},那么它的直接和存在 Hamilton 圈;我们还研究了 n 阶图的极大 Hamilton 子圈是 C_{n-2} 的情况,并得到了三个充分条件。这种思路有助于我们研究图自身的 Hamilton 圈问题,然而图的直接和中是否存在 Hamilton 圈的充分必要条件却难以找到,它值得我们进一步研究。

[参考文献]

[1] Lih-Hsing Hsu, Cheng-Kuan Lin. Graph Theory and Intrerconnection Networks[J]. CRC Press, 2008(9):171-221.

[2] Gary Chartrand, Ping Zhang(美). 图论导引[M]. 北京:人民邮电出版社,2007:122-132.

[3] J Douglas B West(美). 图论导引[M]. 北京:机械工业出版社,2006:229-231.

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. Macmillan Press Ltd. , 1976:3-5.

[5] Reinhard Diestel. Graph Theory 3rd ed[M]. 北京:世界图书出版公司北京公司,2008:275-278.

[6] 宋玉梅. 关于 Hamilton 图的充分必要条件[J]. 长春大学学报,1999(3):15-16.

[7] Chvátal V, Hamilton cycles. In the Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization [M]. Wiley,1985:403-429.

[8] Jackson B. Hamilton cycles in regular 2-connected graphs[M]. J. Comb. Th. (B) 29(1980):27-46.

[9] Zhu YJ, Z H Liu, Z G Yu. An improvement of Jackson's result on Hamilton cycles in regular 2-connected graphs[M]. Proc. Burnaby North-Holland,1985,:237-247.

A Study of Hamilton Cycles in the Direct Sum of a Graph

HU Y-an zhong[1], YE Bo[1,2]
(1. Computer College, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China;
2. Dept. of Automotive Eng., Shiyan Technical Institute, Shiyan 442000, China)

Abstract: This paper defines the direct sum of a graph, and discusses the existence of the Hamilton cycles in the direct sum of a graph. When the graph itself has a Hamilton cycle, the Hamilton cycle also exists in the direct sum of the graph. Let G be a graph of order n, if the maximum Hamilton sub-cycle is isomorphic to the C_{n-1}, then its direct sum has a Hamilton cycle; it was also studied that the maximum Hamilton sub-cycle is isomorphic to the C_{n-2}, for a graph of order n, and obtained three sufficient conditions. Finally, the application of these propositions is illustrated with the hypercube Q4 as an example.

Key words: Hamilton cycle; direct sum; isomorphic graph; hypercube