

Bài tập về nhà: Phương trình sai phân tuyến tính

Nhiệm vụ:

a. Giải tìm đáp ứng tổng quát của hệ thống $y[n]$ dưới dạng tổng đáp ứng các đầu vào.

Ta sẽ tiếp cận câu hỏi này theo hai cách, cách thứ nhất sử dụng phương trình đặc trưng và cách thứ hai sử dụng biến đổi $\mathcal{U}\mathcal{Z}$ (Unilateral Z transform).

Cách thứ nhất:

Xét phương trình sai phân

$$y[n] - 0.5y[n-1] - 0.06y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$$

Đối với đáp ứng đầu vào triệt tiêu $y_{zi}[n]$ là đáp ứng **tự nhiên** của hệ thống, ta cần phải giải phương trình sai phân thuần nhất với điều kiện khởi tạo của hệ thống như sau:

$$\begin{cases} y[n] - 0.5y[n-1] - 0.06y[n-2] = 0 \\ y[-1] = 1, y[-2] = -2 \end{cases}$$

Đầu tiên, ta cần phải giải phương trình sai phân thuần nhất:

$$1 - 0.5\lambda^{-1} - 0.06\lambda^{-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = -0.1$$

Vậy ta có nghiệm $y_{zi}[n]$ có dạng như sau:

$$y_{zi}[n] = K_1(0.6)^n + K_2(-0.1)^n$$

Thay điều kiện khởi tạo của hệ thống (initial condition) $y[-1] = 1, y[-2] = -2$, ta giải ra được K_1 và K_2 tương ứng:

$$\begin{cases} K_1 = \frac{72}{175} \\ K_2 = -\frac{11}{350} \end{cases}$$

Vậy ta có nghiệm đáp ứng đầu vào triệt tiêu:

$$y_{zi}[n] = \frac{72}{175}(0.6)^n - \frac{11}{350}(-0.1)^n$$

Tiếp theo ta sẽ tìm $y_{zs}[n]$ (đáp ứng khởi động từ gốc với $n \geq 0$), tức là đáp ứng **lực** của hệ thống như sau:

$$\begin{aligned} y[n] - 0.5y[n-1] - 0.06y[n-2] &= 2x[n] + x[n-1] \\ \Leftrightarrow y[n] - 0.5y[n-1] - 0.06y[n-2] &= 2u[n] - 2u[n-3] + u[n-1] - u[n-4] \end{aligned}$$