

Chương 5: Thiết kế bộ lọc FIR

Xử lý tín hiệu số

Tín Vũ

tinvu1309@gmail.com

Mục lục

- 1 Giới thiệu playlist
- 2 Tài liệu tham khảo
- 3 Quy trình xử lý tín hiệu số
- 4 Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR
- 5 Thiết kế bộ lọc FIR
 - Thiết kế bộ lọc LP
 - Thiết kế bộ lọc HP
 - Thiết kế bộ lọc BP
- 6 Thực hành

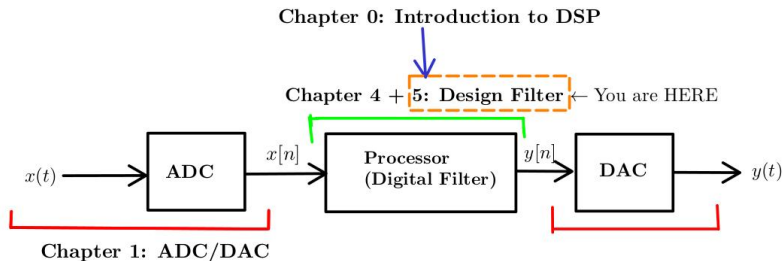
Giới thiệu playlist

- Mình là Tín Vũ, hiện đang là sinh viên học tại Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội. Mình tạo playlist video này để hỗ trợ các bạn học môn **Xử lý tín hiệu số**.
- Khác với môn học tiên quyết **Tín hiệu hệ thống** trước đó, bài giảng môn học này **hoàn toàn bám sát với đề cương và giáo trình nội bộ** của trường mình, nên các bạn trường khác cần phải lưu ý rất kĩ điều này.
- Không chỉ dừng lại ở lý thuyết, playlist này **có bổ sung hướng dẫn lập trình cơ bản bằng GNU Octave/Matlab** để vẽ phổ tín hiệu, đáp ứng tần số và thiết kế bộ lọc.
- Môn học này bao gồm **6 chương**, các chương đều liên quan rất chặt chẽ với nhau nên hãy học cẩn thận ngay từ **Chương 0** để ôn thi cuối kì đỡ vất vả.

Tài liệu tham khảo

- Tài liệu tham khảo chính: Giáo trình Xử lý tín hiệu số (Nguyễn Linh Trung, Trần Đức Tân, Huỳnh Hữu Tuệ, ĐHCN, 2012).
- Tài liệu tham khảo phụ: Discrete-time Signal Processing (Alan V.Oppenheim, 2nd edition).

Quy trình xử lý tín hiệu số



Chapter 2: System Structure

Chapter 3: FFT algorithm

are not shown on the block-diagram
but they play a crucial role in Filter Design.

Hình: DSP Learning Process

Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR

Nhược điểm lớn nhất của bộ lọc IIR đó là **méo pha phi tuyến**, nên ta cần phải thiết kế họ bộ lọc khác có thể kiểm soát được độ méo pha. Từ phương trình hàm truyền tổng quát (đã được thảo luận rất kĩ ở **Chương 2**):

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Bộ lọc FIR là họ bộ lọc thỏa mãn $a_k = 0$ ($\forall k$), ta dễ dàng suy ra phương trình sai phân biểu diễn hệ thống FIR có dạng:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

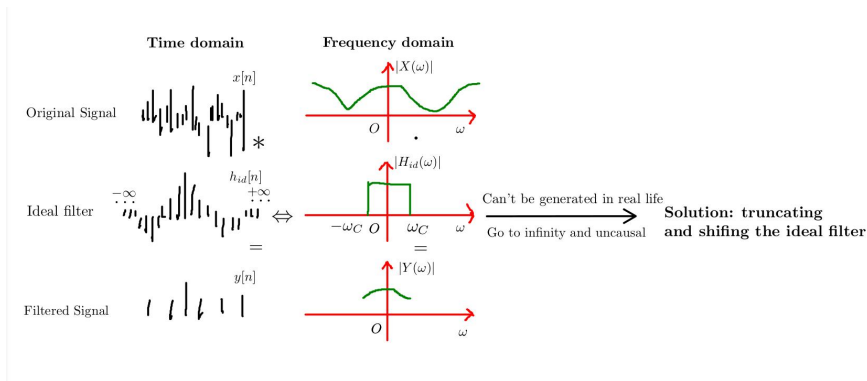
Lấy biến đổi \mathcal{Z} của hai vế, ta tìm được dạng đáp ứng xung của hệ thống:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

Nếu $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, dễ thấy:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^M b_k e^{j\omega_0(n-k)} = \sum_{k=0}^M b_k e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega_0 k}$$

Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR

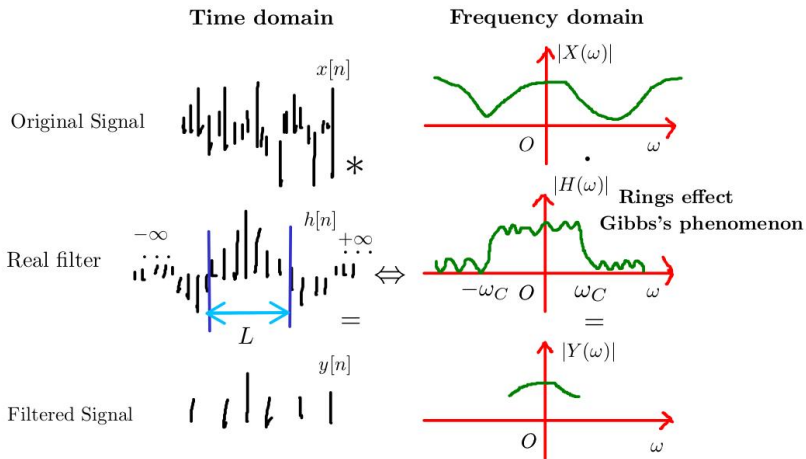


Hình: Ideal filter

Từ công thức IDTFT, ta dễ dàng xác định được $h_{id}[n]$:

$$h_{id}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_{id}(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_C}^{+\omega_C} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_C n}{\pi n}$$

Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR



Hình: Real filter

Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR

Từ biểu thức DTFT, ta có thể giải thích hiện tượng Gibbs như sau:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^{+M} h[n]e^{-j\omega n} = h[0] + \sum_{n=1}^M h[n](e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}) \\ &= h[0] + \sum_{n=1}^M 2h[n] \cos(\omega n) \end{aligned}$$

Ta có thể thấy rất rõ hệ quả của việc cắt cụt $h_{id}[n]$ thành $h[n]$ là **tạo gợn sóng mạnh** và **độ suy hao giảm nhanh** ($A_{id} = +\infty \rightarrow A \approx 23\text{dB}$).

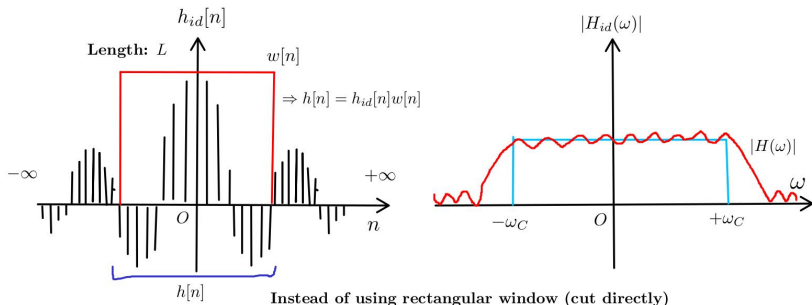
Hiển nhiên nếu $L \rightarrow +\infty$ (tức là tăng L càng lớn càng tốt) thì $h[n] \rightarrow h_{id}[n]$, chất lượng bộ lọc được cải thiện rõ rệt.

Thế nhưng, trong nhiều trường hợp thực tiễn, việc tăng L trở nên khó khăn, các nhà toán học đã phát triển các phương pháp "cắt" bộ lọc lý tưởng khác tối ưu hơn "cắt" trực tiếp như trên.

Phương pháp cắt cụt này được gọi là **phương pháp cửa sổ (windowing method)**, được mô tả qua biểu thức sau:

$$h[n] = h_{id}[n] \cdot w[n]$$

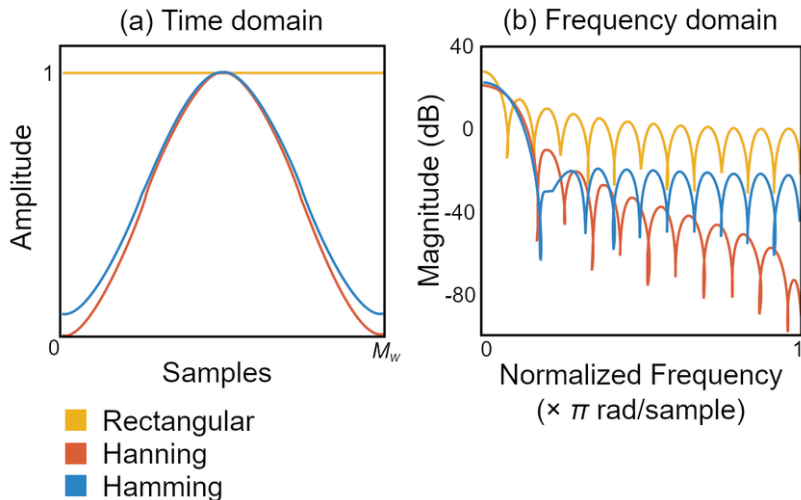
Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR



We can use other windows like Hamming, Hanning,.. to utilize the attenuation

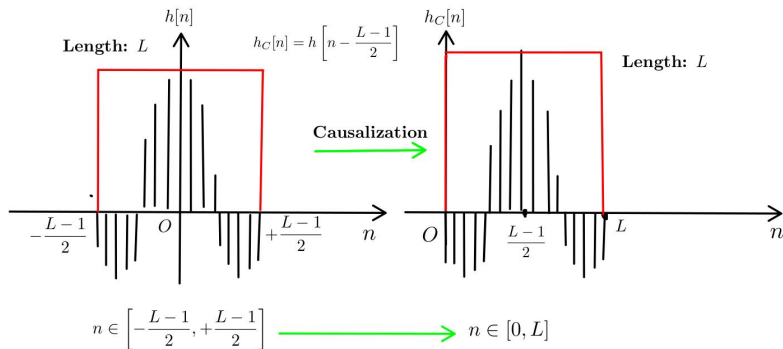
Hình: Windowing method to truncate the ideal filter

Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR



Hình: Comparing windows in time and frequency domain

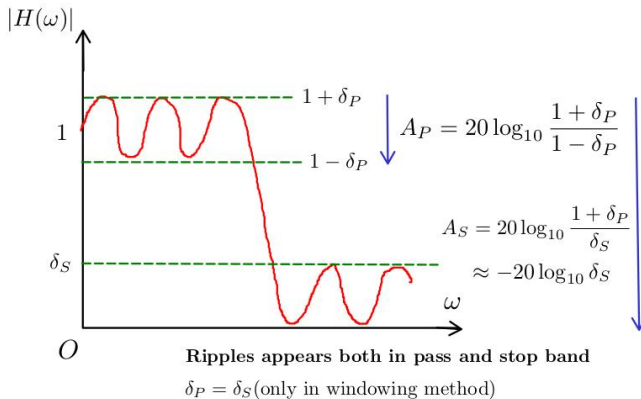
Ý tưởng thiết kế bộ lọc FIR



Hình: "Causalization" step

Thiết kế bộ lọc FIR

- Thiết kế bộ lọc LP



Hình: Frequency response in dB scale

Thiết kế bộ lọc FIR

Ta định nghĩa khái niệm **tần số số** mới như sau:

$$v = \frac{F}{F_{sam}}$$

Lưu ý: khái niệm **tần số số** (digital frequency) này khác với quy ước của Matlab đã được trình bày rất kĩ ở **Chương 4**.

Ta viết lại công thức $h_{id}[n]$ như sau:

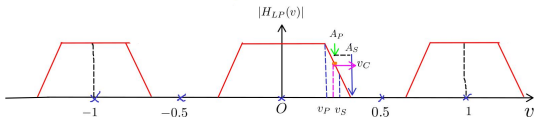
$$h_{id}[n] = \frac{\sin(\omega_C n)}{n\pi} = 2v \frac{\sin(2\pi v n)}{2\pi v n} = 2v \text{sinc}(2vn)$$

Với:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Hiển nhiên từ đáp ứng biên độ trên ta thấy Δv và L tỉ lệ **ngược** với nhau, tức là:

$$\Delta v = \frac{C}{L}$$



Hình: Designing FIR LP filter

Thiết kế bộ lọc FIR

Thuật toán thiết kế bộ lọc FIR LP

- 1 Quy đổi tần số về **tần số số** (theo quy chuẩn thường):

$$\nu = \frac{F}{F_{sam}}$$

- 2 Xác định tần số số cắt:

$$\nu_C = \frac{\nu_P + \nu_S}{2}$$

- 3 Chọn cửa sổ $w[n]$ có $A_{w,S} \geq A_S$.

- 4 Từ cửa sổ đã chọn, xác định chiều dài cửa sổ:

$$\Delta\nu = \frac{C}{L}$$

- 5 Thiết kế bộ lọc FIR:

$$h[n] = h_{id}[n]w[n] = 2\nu_C \text{sinc}(2\nu_C n)w[n] \quad \left(|n| \leq \frac{L-1}{2}\right)$$

- 6 Dịch nhân quả:

$$h_C[n] = h\left[n - \frac{L-1}{2}\right] \quad (0 \leq n \leq L-1)$$

Bảng: Bảng tra giá trị của các cửa sổ thông dụng

| Cửa sổ | A_p (dB) | A_s (dB) | $\delta_p = \delta_s$ | C |
|----------|------------|------------|-----------------------|------|
| Chữ nhật | 0,742 | 21 | 0,0819 | 0,60 |
| Hanning | 0,055 | 44 | 0,0063 | 3,21 |
| Hamming | 0,019 | 53 | 0,0022 | 3,47 |
| Blackman | 0,0015 | 75,3 | 0,00017 | 5,71 |

Hình: Windows table

Thiết kế bộ lọc FIR

Bảng 6.1: Các hàm cửa sổ thông dụng

| Tên của số | $w_0(n), -(L-1)/2 \leq n \leq (L-1)/2$ | $w(n) = w_0\left(n - \frac{L-1}{2}\right), 0 \leq n \leq L-1$ |
|------------|---|---|
| Chữ nhật | 1 | 1 |
| Tam giác | $1 - \frac{2 n }{L-1}$ | $\begin{cases} \frac{2n}{L-1}, & \text{với } 0 \leq n \leq \frac{L-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{L-1}, & \text{với } \frac{L-1}{2} < n \leq (L-1) \end{cases}$ |
| Cosine | $\cos\left(\frac{\pi n}{L-1}\right)$ | $\cos\left(\frac{\pi n}{L-1} - \frac{\pi}{2}\right)$ |
| Reimann | $\text{sinc}^L\left(\frac{2n}{L-1}\right)$ | $\text{sinc}^L\left(\frac{2n}{L-1} - 1\right)$ |
| Hanning | $0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)$ | $0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)$ |
| Hamming | $0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$ | $0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$ |
| Blackman | $0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)$ | $0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)$ |
| Kaiser | $\frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{L-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$ | $\frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{L-1} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$ |

Hình: Windows table

Thiết kế bộ lọc FIR

Ví dụ: thiết kế bộ lọc FIR LP có đặc tả $F_P = 100\text{Hz}$, $F_S = 200\text{Hz}$, $F_{\text{sam}} = 500\text{Hz}$, $A_P = 2\text{dB}$, $A_S = 50\text{dB}$.

Từ quy trình thiết kế đã được trình bày rất kĩ ở trên, trước tiên ta đổi toàn bộ tần số sang tần số số:

$$v = \frac{F}{F_{\text{sam}}} \Rightarrow v_P = 0.2, v_S = 0.4$$

Dễ dàng suy ra:

$$v_C = \frac{v_P + v_S}{2} = 0.3$$

Do $A_S = 50\text{dB}$, nên ta chọn cửa sổ **Hamming** thỏa mãn $A_{w,S} > 50\text{dB}$ (phương án chọn cửa sổ Blackman có $A_{w,S} = 75.3\text{dB}$ hoàn toàn hợp lý). Tra bảng, ta thấy $C = 3.47$.

Ta tìm được chiều dài cửa sổ $w_{\text{Hamming}}[n]$ như sau:

$$\Delta v = \frac{C}{L} \Rightarrow L = \frac{3.47}{0.4 - 0.2} = 17.35$$

Ta chọn chiều dài cửa sổ $L = 19$ để thỏa mãn đặc tả thiết kế.

Vậy ta dễ dàng suy ra phương trình bộ lọc:

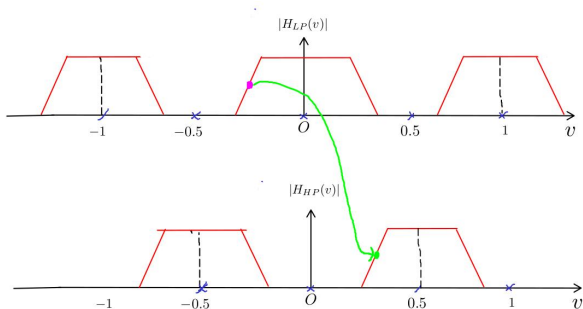
$$\begin{aligned} h[n] &= w_{\text{Hamming}}[n] h_{\text{id}}[n] = w_{\text{Hamming}}[n] 2v_C \text{sinc}(2v_C n) \\ &= 0.6 w_{\text{Hamming}}[n] \text{sinc}(0.6n) \quad (|n| \leq 9) \end{aligned}$$

Dịch nhân quả, ta thu được:

$$h_C[n] = h[n - 9] = 0.6 w_{\text{Hamming}}[n - 9] \text{sinc}[0.6(n - 9)] \quad (0 \leq n \leq 18)$$

Thiết kế bộ lọc FIR

- Thiết kế bộ lọc HP



Hình: Designing HP filter

Một cách xấp xỉ gần đúng, ta có thể thấy:

$$|H_{HP}(v)| = |H_{LP}(v - 0.5)|$$

$$|H_{HP}(v)| = 1 - |H_{LP}(v)|$$

2 công thức xấp xỉ này gọi cho ta 2 hướng thiết kế bộ lọc FIR HP từ bộ lọc FIR LP cho trước.

Thiết kế bộ lọc FIR

Từ phương trình dịch phổ:

$$|H_{HP}(v)| = |H_{LP}(v - 0.5)| \Rightarrow h_{HP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n]$$

Ta ánh xạ tần số từ bộ lọc LP sang bộ lọc HP, để thấy:

$$v_C = 0.5 - \frac{v_P + v_S}{2}$$

Ta xây dựng thuật toán thiết kế bộ lọc FIR HP như sau:

Thuật toán thiết kế bộ lọc FIR HP

- 1 Quy đổi tần số về tần số số (theo quy chuẩn thường):

$$v = \frac{F}{F_{sam}}$$

- 2 Xác định tần số cắt:

$$v_C = 0.5 - \frac{v_P + v_S}{2}$$

- 3 Thiết kế bộ lọc FIR LP với các thông số trên.
- 4 Chuyển phương trình đáp ứng xung bộ lọc LP thành HP:

$$h_{HP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n]$$

- 5 Dịch nhân quả.

Thiết kế bộ lọc FIR

Từ phương trình phần bù:

$$|H_{HP}(v)| = 1 - |H_{LP}(v)| \Rightarrow h_{HP}[n] = \delta[n] - h_{LP}[n]$$

Tương tự như trên, ta cũng xây dựng một thuật toán khác thiết kế bộ lọc FIR HP như sau:

Thuật toán thiết kế bộ lọc FIR HP

- 1 Quy đổi tần số về tần số số (theo quy chuẩn thường):

$$v = \frac{F}{F_{sam}}$$

- 2 Xác định tần số cắt:

$$v_C = \frac{v_P + v_S}{2}$$

- 3 Thiết kế bộ lọc FIR LP với các thông số trên.
- 4 Chuyển phương trình đáp ứng xung bộ lọc LP thành HP:

$$h_{HP}[n] = \delta[n] - h_{LP}[n]$$

- 5 Dịch nhân quả.

Thiết kế bộ lọc FIR

Ví dụ: thiết kế bộ lọc FIR HP có đặc tả $F_P = 200\text{Hz}$, $F_S = 100\text{Hz}$, $F_{sam} = 500\text{Hz}$, $A_P = 2\text{dB}$, $A_S = 50\text{dB}$.

Sử dụng kết quả thiết kế bộ lọc FIR LP trên, ta thu được bộ lọc HP thiết kế bằng phương pháp phần bù:

$$h_{LP}[n] = 0.6w_{Hamming}[n]\text{sinc}(0.6n) \quad (|n| \leq 9)$$

$$\Rightarrow h_{HP}[n] = \delta[n] - h_{LP}[n] = \delta[n] - 0.6w_{Hamming}[n]\text{sinc}(0.6n) \quad (|n| \leq 9)$$

Dịch nhân quả:

$$h_C[n] = h_{HP}[n - 9] = \dots \quad (0 \leq n \leq 18)$$

Sử dụng phương pháp dịch phổ, ta phải xác định lại tần số số cắt:

$$v_C = 0.5 - \frac{v_P + v_S}{2} = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

Với cách làm hoàn toàn tương tự, ta thiết kế được bộ lọc FIR LP có đáp ứng xung:

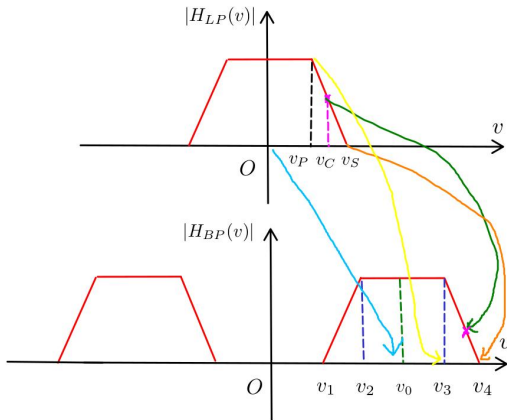
$$h_{LP}[n] = 0.4w_{Hamming}[n]\text{sinc}(0.4n) \quad (|n| \leq 9)$$

$$\Rightarrow h_{HP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n] \quad (|n| \leq 9)$$

Dịch nhân quả, ta thu được bộ lọc cần tìm.

Thiết kế bộ lọc FIR

- Thiết kế bộ lọc BP



Hình: Designing BP filter

Thiết kế bộ lọc FIR

Ta ánh xạ lần lượt các tần số như hình trên, rất dễ nhìn ra các mối quan hệ hình học:

$$v_0 = \frac{v_1 + v_4}{2} = \frac{v_2 + v_3}{2}$$

$$v_C = \frac{v_3 + v_4}{2} - v_0$$

$$v_P = v_3 - v_0$$

$$v_S = v_4 - v_0$$

Hiển nhiên từ dạng phổ ta thấy:

$$|H_{BP}(v)| = |H_{LP}(v - v_0)| + |H_{LP}(v + v_0)| \Rightarrow h_{BP}[n] = 2 \cos(2v_0 n) h_{LP}[n]$$

Vậy ta xây dựng thuật toán thiết kế bộ lọc FIR BP như sau:

Thiết kế bộ lọc FIR

Thuật toán thiết kế bộ lọc FIR BP

- 1 Quy đổi tần số F về tần số số v theo quy chuẩn thường.
- 2 Xác định các thông số cần thiết của bộ lọc LP bằng công thức sau:

$$v_0 = \frac{v_1 + v_4}{2} = \frac{v_2 + v_3}{2}$$

$$v_C = \frac{v_3 + v_4}{2} - v_0$$

$$v_P = v_3 - v_0$$

$$v_S = v_4 - v_0$$

- 3 Thiết kế bộ lọc LP theo thông số trên.
- 4 Chuyển phương trình đáp ứng xung bộ lọc LP thành BP:

$$h_{BP}[n] = 2 \cos(2v_0 n) h_{LP}[n]$$

- 5 Dịch nhân quả và thu được bộ lọc cần tìm.

Thiết kế bộ lọc FIR

Ví dụ: thiết kế bộ lọc FIR BP có đặc tả sau với $F_{sam} = 25\text{kHz}$:

$$4\text{kHz} < F < 8\text{kHz}, A_P < 3\text{dB}$$

$$F < 2\text{kHz}, F > 10\text{kHz}, A_S > 45\text{dB}$$

Quy đổi ra tần số số, ta có:

$$v_1 = 0.08, v_2 = 0.16, v_3 = 0.32, v_4 = 0.4 \Rightarrow v_0 = 0.24, v_C = 0.12$$

Ta chọn cửa sổ Hamming với $C = 3.47$, suy ra $L = 45$.

Ta rất dễ dàng xác định được:

$$h_{LP}[n] = w_{Hamming}[n]h_{id}[n] = w_{Hamming}[n]0.24\text{sinc}(0.24n)$$

Vậy ta suy ra:

$$h_{BP}[n] = 2\cos(0.48n)w_{Hamming}[n]0.24\text{sinc}(0.24n) = 0.48\cos(0.48n)\text{sinc}(0.24n)$$

Dịch nhân quả, ta thu được bộ lọc FIR BP cần tìm.

Thực hành

Ta thử phác họa đáp ứng biên độ và khảo sát ảnh hưởng của hiện tượng Gibbs với cửa sổ chữ nhật.

```
pkg load signal;
graphics_toolkit("qt");
M=50; % Adjust window length
n=-M:1:M;
F=10;Fs=100;v=F/Fs;
xn=[sin(2*pi*v*n)./(2*v*n*pi)].*(2*v);
xn(n==0)=2*v;
subplot(3,1,1);
stem(n,xn);
title('Rectangular window in time domain');
subplot(3,1,2);
L=length(n);
Xn=fftshift(fft(xn));
Mag_Xn=abs(Xn)/L;
v=linspace(-0.5,0.5,L);
plot(v,Mag_Xn);
title("Rectangular window in frequency domain");
subplot(3,1,3);
plot(v,20*log(Mag_Xn));
title("Rectangular window in dB scale");
pause;
```