

Chương 4: Biến đổi Laplace

Tín hiệu và hệ thống

Tín Vũ

tinvu1309@gmail.com

- ➊ Giới thiệu playlist
- ➋ Tài liệu tham khảo
- ➌ Khái niệm biến đổi Laplace
- ➍ Tính chất của biến đổi Laplace
- ➎ Phân tích hệ thống LTI liên tục
 - Phân tích tính chất của hệ thống
 - Phân tích đáp ứng lỗi ra của hệ thống

Giới thiệu playlist

- Mình là Tín Vũ, hiện tại đang là sinh viên học tại Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội. Mình tạo playlist video này để hỗ trợ các bạn học môn Tín hiệu và hệ thống trong các trường đại học kỹ thuật theo hướng **trực quan hóa** nhất có thể.
- Do đó, mục tiêu của mình khi thực hiện playlist này không chỉ giúp các bạn ôn thi được điểm cao mà còn **hiểu sâu công thức để làm nền tảng cho các môn học sau**.
- Để đạt được hai mục tiêu trên, các bạn nên xem **toàn bộ** video của mình, còn nếu chỉ cần ôn thi cấp tốc và đạt điểm cao thì hãy **bỏ qua** các video "optional".
- Nội dung playlist này chủ yếu bám sát nội dung môn học Tín hiệu và hệ thống tại trường của mình; nếu các bạn học trường khác, hãy tham khảo kỹ đề cương hay đề thi của trường bạn để đối chiếu sao cho ôn tập đúng trọng tâm và hợp lý.
- Môn học này bao gồm **6** chương, các chương đều liên quan rất chặt chẽ và logic với nhau nên hãy học cẩn thận ngay từ **chương 0** để ôn thi cuối kì đỡ vất vả.

- Tài liệu tham khảo chính: Signals and Systems (2nd edition) Alan V. Oppenheim and Alan S. Willsky.
- Tài liệu tham khảo phụ: Bài tập của mình học khóa trước, đề thi các năm cũ,...
- Tài liệu tham khảo phụ: Nếu bạn là sinh viên trường mình và muốn học "tủ" nhiều bài thì nên đọc Signals and Systems (2nd edition) Simon Haykin vì các thầy cô chủ yếu dạy và ra đề trong cuốn này, thế nhưng mình đánh giá cuốn này không đầy đủ và chi tiết như sách của Alan V. Oppenheim.

Biến đổi Laplace

- Khái niệm biến đổi Laplace

Trong **Chương 3**, chúng ta đã khảo sát rất kĩ bài toán chuỗi Fourier (CTFS) và biến đổi Fourier liên tục (CTFT) cho các tín hiệu **năng lượng**. Ta rất dễ kiểm chứng với một vài dạng tín hiệu **công suất** đơn giản, **biến đổi Fourier không hội tụ**. Để "ép" tín hiệu công suất về dạng tín hiệu năng lượng sao cho có thể sử dụng được biến đổi Fourier, ta đặt một tham số phụ $s = \sigma + j\omega$ và biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} e^{-\sigma t} dt \\ &= \mathcal{F}(x(t)e^{-\sigma t}) \end{aligned}$$

Phần nhân tử $e^{-\sigma t}$ có tác dụng "ép" $x(t)$ về dạng tín hiệu có năng lượng hữu hạn cơ bản, chúng ta mong muốn tìm tập giá trị của $\sigma = \Re(s)$ sao cho $\mathcal{F}(x(t)e^{-\sigma t})$ **tồn tại**. Ví dụ: tìm biến đổi Laplace và tập giá trị $\Re(s)$ sao cho biến đổi Fourier $\mathcal{F}(x(t)e^{-\sigma t})$ tồn tại.

$$x(t) = e^t u(t)$$

Ta có:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^t e^{-st} dt = \left. \frac{e^{(1-s)t}}{1-s} \right|_0^{+\infty} = \left. \frac{e^{(1-\sigma-j\omega)t} - 1}{1-\sigma-j\omega} \right|_0^{+\infty}$$

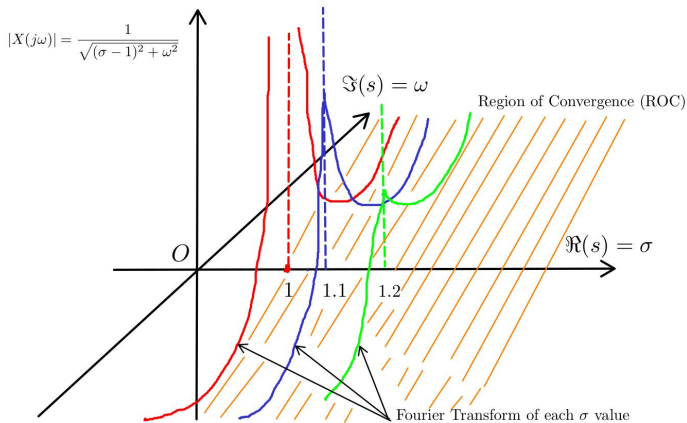
Hiển nhiên $X(s)$ hội tụ khi và chỉ khi $1 - \sigma < 0$ ($e^{j\omega t}$ không liên quan do đây chỉ là thành phần điều hòa). Vậy ta tìm được **vùng hội tụ** (Region of convergence - ROC) của tín hiệu $x(t)$ là $\sigma > -1$, hay $\Re(s) > -1$.

Biến đổi Laplace

Khi đó:

$$X(s) = \frac{-1}{1 - \sigma - j\omega} = \frac{1}{s - 1} \quad (\text{ROC} : \Re(s) > 1)$$

Ta có thể minh họa kết quả này qua phác họa đơn giản sau:



Hình: Laplace Transform Visualization

Biến đổi Laplace

- Tính chất của biến đổi Laplace

Laplace transform pair

If $x(t)$ is an arbitrary signal, we define Laplace transform formula:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

Nếu các bạn đã học cẩn thận **Chương 3** thì **Chương 4** gần như hoàn toàn tương tự, điểm khác biệt duy nhất là **phải chỉ ra vùng hội tụ ROC trên s-plane**. Công thức (2) hoàn toàn không bao giờ được sử dụng trong môn học này, mà ta chỉ sử dụng công thức (1) kết hợp với bảng "Common Laplace transform pair" cùng với **phép toán tách phân thức** để biến đổi Laplace ngược.

Ví dụ: tìm biến đổi Laplace của cặp tín hiệu (với $a > 0$)

$$x_1(t) = e^{-at}u(t)$$

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Biến đổi Laplace

Ta dùng trực tiếp công thức:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} \text{ (ROC : } \Re(s) > -a \text{)}$$

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} \text{ (ROC : } \Re(s) < -a \text{)}$$

Vậy hiển nhiên ta thấy cùng một biến đổi trong miền s có thể cho ra 2 tín hiệu khác nhau trong miền thời gian **hoàn toàn phụ thuộc vào vùng ROC**.

Ta định nghĩa phép toán \mathcal{L} như sau:

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = x(t)$$

Từ phép toán trên cùng với định nghĩa hai tín hiệu $x(t)$, $y(t)$ có biến đổi Laplace:

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = x(t)$$

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t)$$

Biến đổi Laplace

Ta liệt kê một vài tính chất quan trọng của biến đổi Laplace gồm:

1 Tính tuyến tính:

$$\mathcal{L}(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha \mathcal{L}(x(t)) + \beta \mathcal{L}(y(t))$$

2 Dịch thời gian:

$$\mathcal{L}(x(t - t_0)) = X(s)e^{-js t_0}$$

3 Dịch trong miền s:

$$\mathcal{L}(x(t)e^{s_0 t}) = X(s - s_0)$$

4 Co giãn thời gian:

$$\mathcal{L}(x(at)) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

5 Tích chập thời gian:

$$\mathcal{L}(x(t) * y(t)) = X(s)Y(s)$$

6 Đạo hàm miền thời gian:

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s)$$

7 Đạo hàm miền tần số:

$$\mathcal{L}(-tx(t)) = \frac{dX(s)}{ds}$$

8 Tích phân miền thời gian:

$$\mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right) = \frac{X(s)}{s}$$

Biến đổi Laplace

Suy ngẫm: chứng minh lại 8 tính chất trên. Gợi ý có thể tham khảo slide **Chương 3**.
Từ các tính chất trên ta cũng có bảng "Common Laplace Transform Pairs" như sau:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	$1 \quad (ROC : \forall \Re(s))$
$u(t)$	$\frac{1}{s} \quad (ROC : \Re(s) > 0)$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s} \quad (ROC : \Re(s) < 0)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a} \quad (ROC : \Re(s) > -a)$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a} \quad (ROC : \Re(s) < -a)$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad (ROC : \Re(s) > -a)$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad (ROC : \Re(s) > -a)$

Suy ngẫm: sử dụng các tính chất biến đổi Laplace, hãy tự chứng minh lại toàn bộ bảng công thức này.

Ví dụ: hãy xác định tín hiệu gốc $x(t)$ biết $ROC : -1 < \Re(s) < 2$

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

Ta không dùng trực tiếp công thức Laplace ngược mà thay vào đó ta sử dụng phương pháp **tách phân thức** và bảng trên:

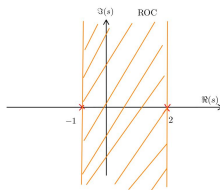
$$X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

Biến đổi Laplace

Đồng nhất hệ số, ta thu được:

$$X(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

Quan sát vùng ROC được biểu diễn trên mặt phẳng s:



Hình: Region of convergence

Ta tra bảng và kết luận:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2} \right) = \frac{2}{3} e^{-t} u(t) - \frac{1}{3} e^{2t} u(-t)$$

Khi xét biến đổi Laplace ngược, ta phải **đặc biệt chú ý đến điều kiện vùng ROC của tín hiệu cũng như hệ thống.**

Biến đổi Laplace

- Phân tích hệ thống LTI liên tục
 - Phân tích tính chất của hệ thống

Xét một hệ thống có đáp ứng xung $h(t)$ với tín hiệu lỗi vào $x(t)$ và đáp ứng lỗi ra $y(t)$. Hiển nhiên từ tính chất tích chập đã phân tích ở trên, ta có:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots}$$

Ta gọi $H(s)$ là hàm truyền (transfer function) của hệ thống. Sau khi biến đổi Laplace hàm truyền $H(s)$ luôn có thể được viết dưới dạng phân thức $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, ta định nghĩa hai khái niệm mới:

- ① **Điểm cực (poles)** của hệ thống: là tập nghiệm của phương trình $D(s) = 0$
- ② **Điểm không (zeros)** của hệ thống: là tập nghiệm của phương trình $N(s) = 0$

Tính chất của hệ thống **hoàn toàn phụ thuộc vào vị trí của các điểm cực và điểm không trên mặt phẳng s.**

Ví dụ: chỉ ra điểm cực và điểm không của hệ thống có hàm truyền

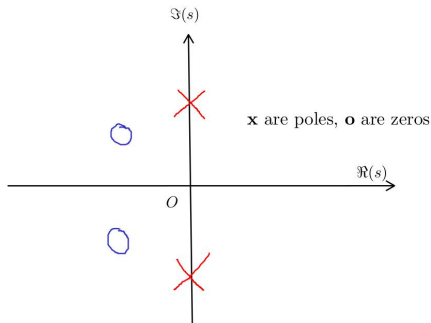
$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^2 + 4}$$

Từ định nghĩa, ta giải phương trình $N(s) = 0$ và $D(s) = 0$, thu được các nghiệm cực và không như sau:

$$\begin{cases} z_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2} \\ p_{1,2} = \pm 2j \end{cases}$$

Biến đổi Laplace

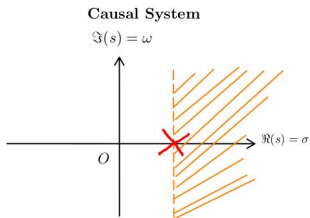
Ta có thể rất dễ dàng biểu diễn các điểm cực và không trên mặt phẳng s



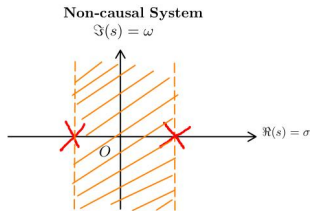
Hình: Representing zeros and poles in s -plane

Khi xét đến tính chất đơn giản của hệ thống sử dụng biến đổi Laplace (trong giới hạn môn học này), ta chỉ xét đến **điểm cực** của hệ thống mà thôi, tạm thời chưa cần quan tâm đến điểm không.

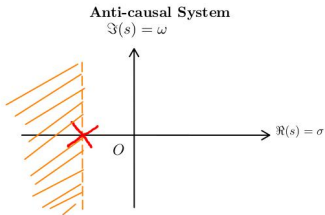
Biến đổi Laplace



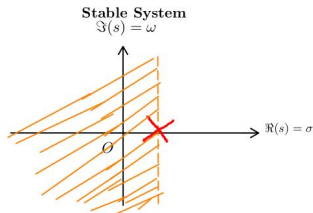
ROC region is in **Right-half Plane**



ROC region is squeezed between 2 poles



ROC region is in **Left-half Plane**



ROC region contains **Imaginary Axis**

Hình: Determine system properties using poles

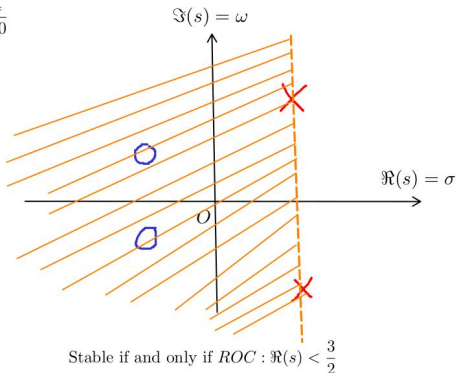
Biến đổi Laplace

General transfer function:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{j=1}^m (s - p_j)}$$

Example: given a transfer function, determine whenever it's stable

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s^2 - 3s + 10}$$



Hình: An example of stable system

Biến đổi Laplace

Suy ngẫm: liệu có thể tồn tại trường hợp $ROC : \Re(s) \leq \frac{3}{2}$ hay không? Từ đó đưa ra kết luận nếu hệ thống có cặp cực nằm trên trục ảo thì có thể ổn định không?

- Phân tích đáp ứng lỗi ra của hệ thống

Với các bài toán **không có hệ điều kiện khởi tạo**, ta rất dễ dàng sử dụng biến đổi Laplace để phân tích đáp ứng lỗi ra của hệ thống tương tự bài tập **Chương 3**. Phân tích đáp ứng hệ thống bằng biến đổi Laplace tiện hơn rất nhiều so với biến đổi Fourier vì biến đổi Laplace luôn tồn tại với tất cả các dạng tín hiệu.

Trong mục này, ta sẽ tập trung khảo sát các bài toán phân tích đáp ứng lỗi ra của hệ thống **có hệ điều kiện khởi tạo** bằng **biến đổi Laplace một phía (unilateral Laplace transform)**. Để phân biệt với biến đổi Laplace hai phía thông thường phân tích ở trên (bilateral Laplace transform), ta sử dụng ký tự như sau:

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \mathcal{U}\mathcal{L}(x(t))$$

Khác với biến đổi Laplace hai phía, biến đổi Laplace một phía có tính chất rất đặc biệt sau:

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) = s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

Biến đổi Laplace

Ví dụ: một hệ thống có quan hệ đầu vào-ra được biểu diễn bằng phương trình ODE sau

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

Với điều kiện khởi tạo $y(0^-) = 5$ và $x(t) = 3tu(t)$, hãy xác định đáp ứng lỗi ra của hệ thống.

Sử dụng phép biến đổi Laplace một phía (unilateral Laplace transform) cho cả hai vế, ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t)\right) &= \mathcal{U}\mathcal{L}(x(t)) \\ \Rightarrow s\mathcal{Y}(s) - y(0^-) + 4\mathcal{Y}(s) &= \mathcal{X}(s) \\ \Rightarrow \mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s+4} + \frac{y'(0^-)}{s+4} &= \left(\frac{3}{s^2(s+4)}\right) + \left(\frac{5}{s+4}\right) \\ &= \left(\frac{-3}{16} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{s+4}\right) + \left(\frac{5}{s+4}\right)\end{aligned}$$

Suy ra:

$$y(t) = \mathcal{U}\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{Y}(s)) = \left(\frac{-3}{16} + \frac{3}{4}t + \frac{83}{16}e^{-4t}\right)u(t)$$

Dễ dàng thấy rằng đáp ứng lỗi ra $\mathcal{Y}(s)$ gồm hai thành phần rời rạc nhau, thành phần phụ thuộc tín hiệu đầu vào $\mathcal{X}(s)$ chính là **đáp ứng cưỡng bức**, còn thành phần còn lại không phụ thuộc tín hiệu đầu vào chính là **đáp ứng tự nhiên** của hệ thống.