

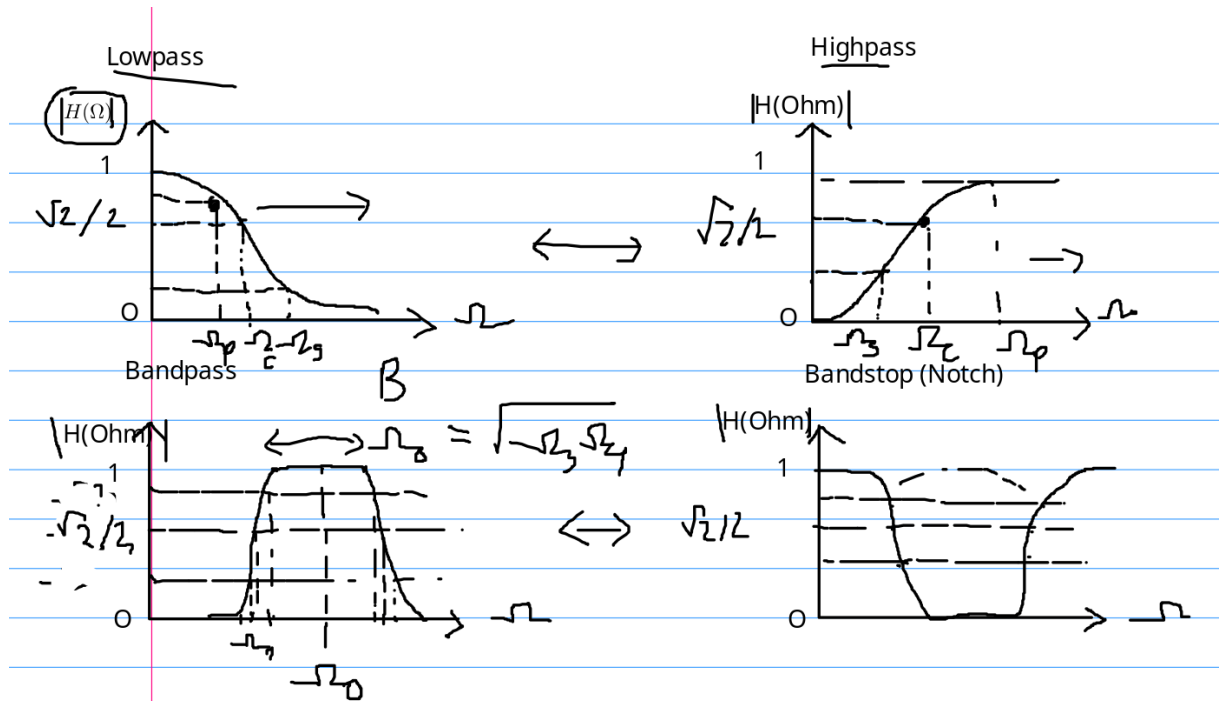
# Thiết kế bộ lọc IIR

## 1 Các bước thiết kế bộ lọc digital IIR

1. "Wrapping frequency", tức là phải chuyển tần số digital  $\omega$  về tần số analog  $\Omega$ .
2. Thiết kế bộ lọc analog theo các giá trị  $\Omega$  tìm được ở bước trên.
  - (a) Thiết kế bộ lọc lowpass prototype analog với  $\Omega_c = 1$  (c là cutoff frequency).
  - (b) Sử dụng "frequency transformation method" để chuyển bộ lọc lowpass prototype về bộ lọc analog mong muốn.
  - (c) Cuối cùng, ta sẽ thu được một hàm  $H(s)$  của bộ lọc mong muốn.
3. Sử dụng các phép biến đổi như là "impulse invariance" hay biến đổi xung bậc thang hoặc thông dụng nhất là "bilinear transform" (biến đổi song tuyến tính) để chuyển hàm  $H(s) \rightarrow H(z)$  tương ứng.

## 2 Thiết kế bộ lọc analog

### 2.1 Khái niệm và các họ mạch lọc LP, HP, BP và BS



## 2.2 Các loại mạch lọc

### 2.2.1 Mạch lọc Butterworth

1. Khái niệm mạch lọc Butterworth: mạch lọc Butterworth là một mạch lọc không có gợn sóng và phẳng trên toàn bộ dải tần.
2. Đáp ứng biên độ của các họ mạch lọc Butterworth:

(a) Bộ lọc LP:

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}}$$

(b) Bộ lọc HP:

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)^{2n}}}$$

(c) Bộ lọc BP:

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_c}\right)^{2n}}}$$

(d) Bộ lọc BS:

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{\Omega - \Omega_0}\right)^{2n}}}$$

3. Thiết kế bộ lọc LP Butterworth prototype (tức là  $\Omega_c = 1$ )

(a) Biến đổi  $|H(\Omega)|$  như sau:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega)^{2n}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = H(s)H(-s)$$

Để tìm các điểm cực  $s$ , ta phải giải phương trình

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = -1 \Leftrightarrow s_k = e^{\frac{j\pi}{2n}(2k+n-1)}$$

- (b) Chọn các nghiệm cực  $s_k$  để thỏa mãn hệ thống nhân quả và ổn định, tức là chọn sao cho  $\Re(s) < 0$ .
- (c) Viết lại phương trình hệ thống:

$$H(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)\dots} = \frac{1}{B_N(s)}$$

Mẫu số thu được gọi là đa thức Butterworth với bậc  $N$ .

4. Thiết kế các họ bộ lọc khác từ bộ lọc LP Butterworth prototype:

(a) Bộ lọc LP có  $\Omega_c$  bất kì:

$$s \rightarrow \frac{s}{\Omega_c}$$

(b) Bộ lọc HP có  $\Omega_c$  bất kì:

$$s \rightarrow \frac{\Omega_c}{s}$$

(c) Bộ lọc BP có  $\Omega_0$  (tần trung bình hình học) và  $B$  (bandpass) bất kì:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}$$

(d) Bộ lọc BS có  $\Omega_0$  (tần trung bình hình học) và  $B$  (bandstop) bất kì:

$$s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \Omega_0^2}$$

### 2.2.2 Mạch lọc Chebyshev

1. Khái niệm mạch lọc Chebyshev: là loại mạch lọc có gợn sóng trên 1 dải (passband hoặc stopband), ưu điểm so với mạch lọc Butterworth là transtion band, ở đây ta chỉ quan tâm đến Chebyshev type 1 (gợn sóng ở dải thông).

2. Đáp ứng biên độ của các họ mạch lọc Chebyshev:

(a) Bộ lọc LP: (ở đây sẽ dùng  $|H(\Omega)|^2$  thay cho  $|H(\Omega)|$  cho thuận quy ước các đại lượng khớp với slide cô Thịnh):

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\alpha}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

(b) Bộ lọc HP:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\alpha}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)}$$

(c) Bộ lọc BP và BS không xét ở đây do được thiết kế gián tiếp thông qua bộ lọc LP prototype.

3. Thiết kế bộ lọc LP Chebyshev prototype:

(a) Tìm bậc  $N$  của bộ lọc (bước này không dễ lắm và đôi lúc cũng hơi không chặt chẽ cho lắm), có nhiều cách để tìm bậc  $N$ , trong đó có cách dùng hàm cosh() (cân nhắc), nhưng mà nếu theo anh thì làm theo cách cô Thịnh, tức là nhìn đồ thị và đoán là ok.

(b) Tìm  $\epsilon^2$ ,  $\alpha$ , cố gắng để xây dựng được hàm  $|H(\Omega)|^2$ , sau đó giải và tìm các cực  $s_k$  như bước 3 của mục thiết kế bộ lọc LP prototype Butterworth.

(c) Xây dựng hàm  $H(s)$  như mục 3(c) phần Butterworth ở trên, nhưng lưu ý tử số có thể khác 1 và phải điều chỉnh giá trị tử số thỏa mãn  $|H(0)| = 1$ .

(d) Thiết kế các họ bộ lọc từ bộ lọc LP Chebyshev prototype: chuyển như ở trên.

## 2.3 Bài tập áp dụng

**2.3.1 Một bộ lọc thông thấp có đáp ứng biên độ không quá 3dB trong khoảng tần số 0 – 5kHz. Độ suy hao trên 23dB với tần số trên 10kHz. Xác định bậc của bộ lọc Butterworth cần thiết kế. Nếu sử dụng Chebychev với độ gợn sóng 2.5dB thì bậc bằng bao nhiêu?**

- Thiết kế bộ lọc Butterworth:

$$\begin{cases} 0 < |\Omega| < 10^4\pi \text{ (rad/s)} & (A > -3dB) \\ |\Omega| > 2 \cdot 10^4\pi \text{ (rad/s)} & (A < -23dB) \end{cases}$$

Từ phương trình của hàm đáp ứng biên độ Butterworth, ta có:

$$A = 20 \log_{10} |H(\Omega)| = 10 \log_{10} |H(\Omega)|^2 = 10 \log_{10} \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}} = -10 \log_{10} \left[ 1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n} \right]$$

Ta đã có từ dữ liệu của đề bài, dễ thấy  $\Omega_p = \Omega_c = 10^4 \pi \text{ (rad/s)}$  và  $\Omega_s = 2 \cdot 10^4 \pi \text{ (rad/s)}$ , ta sẽ tìm được bậc  $N$  từ phương trình sau:

$$A_s = -10 \log_{10} \left[ 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2n} \right]$$

Bấm máy ra  $N = 3.81$  thì ta lấy bậc của bộ lọc Butterworth là  $N = 4$ .

- Thiết kế bộ lọc Chebyshev: nhìn đồ thị xác định được  $N = 3$  với gợn sóng  $r = 2.5dB$ , làm tương tự như trên.

### 3 Thiết kế bộ lọc Digital

#### 3.1 Biến đổi theo đáp ứng xung

Chỉ cần nhớ các công thức sau là sống:

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s} = \omega \cdot f_s$$

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s}$$

Biến đổi theo đáp ứng xung, tức là biến đổi từ hàm  $H(s)$  về  $H(z)$  như sau:

$$H(s) = \sum \frac{c_i}{s - \lambda} \rightarrow H(z) = \sum \frac{c_i T z}{z - e^{\lambda T}}$$

#### 3.2 Biến đổi theo đáp ứng bậc thang

Phần biến đổi tần số tương tự như đáp ứng xung, nhưng phần biến đổi  $H(s) \rightarrow H(z)$  thì khác:

$$H(s) = \sum \frac{c_i}{s - p_k} \rightarrow H(z) = \sum \frac{1}{p_k} \left( \frac{e^{p_k T_s} - 1}{z - e^{p_k T_s}} \right)$$

#### 3.3 Biến đổi theo phương pháp song tuyến tính

Lưu ý lúc này phần biến đổi tần số sẽ khác:

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan \left( \frac{\omega}{2} \right)$$

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

### 3.4 Bài tập áp dụng

#### 3.4.1 Thiết kế bộ lọc Chebyshev thông cao IIR dùng phương pháp song tuyến tính và thỏa mãn các đặc điểm sau:

- Độ gợn sóng ở dải thông từ  $10kHz$  không lớn hơn  $2.5dB$
- Độ suy hao lớn hơn  $20dB$  ở các tần số nhỏ hơn  $5kHz$
- Tần số lấy mẫu là  $50kHz$

1. Chuyển đổi tần số số  $\omega$  sang tần số tương tự  $\Omega$  theo công thức song tuyến tính:

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2} = 2f_s \tan \frac{2\pi f}{2f_s} = 2f_s \tan \frac{\pi f}{f_s}$$

Nhớ công thức để chuyển đổi từ  $f \rightarrow \omega$  là  $\omega = \frac{2\pi f}{f_s}$  chứ không phải là  $\omega = 2\pi f$

2. Sau khi tính được  $\Omega_s$  và  $\Omega_p$  theo công thức trên, tìm tỉ số:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$

Trong trường hợp bài trên là  $k \approx 2.233 \Rightarrow$  chọn bộ lọc có bậc  $N = 3$ ,  $r = 2.5dB$  (cách nhìn hình chọn bậc thì tự đọc lại slide cô Thịnh)

3. Thiết kế bộ lọc chuẩn hóa thông thấp ( $\Omega_c = 1$ ) với bậc  $N = 3$  và  $r = 2.5dB$  dựa vào phương trình đáp ứng biên độ của bộ lọc Chebyshev:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon^2 C_3^2(\Omega)}$$

4. Do  $|H(\Omega)|^2 = H(s)H(-s)$  và

$$\Omega = \frac{s}{j}$$

nên thay tất cả vào lại  $|H(\Omega)|^2$  viết lại nó dưới dạng hàm  $H(s)$ :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon^2 (4\Omega^3 - 3\Omega)^2} = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon^2 \left( 4\left(\frac{s}{j}\right)^3 - 3\left(\frac{s}{j}\right) \right)^2} = \dots$$

5. Giải phương trình nghiệm cực ở mẫu để tìm ra các nghiệm cực, trong trường hợp này có tổng cộng 6 nghiệm với một phương trình bậc 6. Chỉ lấy 3 nghiệm cực có phần thực âm.

6. Viết lại hàm truyền của bộ lọc chuẩn hóa thông thấp dưới dạng:

$$H(s) = \frac{\beta}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}$$

với  $\beta$  là một hằng số được chọn sao cho thỏa mãn  $H(0) = 1$ .

7. Thay  $s \rightarrow \frac{\Omega_c}{s}$  (trong trường hợp này  $\Omega_c = \Omega_s$ ) để chuyển đổi từ bộ lọc thông thấp chuẩn hóa thành bộ lọc thông cao bình thường theo như các đặc tả ở 1.

8. Áp dụng công thức song tuyến tính thay vào hàm  $H(s)$  để chuyển đổi từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Cách giải phương trình bậc 6 ở trên, đầu tiên đặt  $s^2$  là ẩn phụ, sau đó bấm máy tính ra được 3 nghiệm, các nghiệm đều có dạng  $a + jb$  với  $a, b$  khoảng một vài tỷ. Ta phải chuyển số phức về dạng mũ để tính căn bằng máy tính Casio:

$$a + jb \rightarrow r\angle\theta = re^{j\theta}$$

Khi đó

$$\sqrt{re^{j\theta}} = \sqrt{r}(\pm e^{j\frac{\theta}{2}})^2$$

, chuyển lại căn bậc 2 này về dạng số phức, xong.