Giải thích tính chất ổn định của hệ thống

0.1 Chứng minh công thức

Hệ thống $h[n]$ ổn định khi và chỉ khi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

Xét hệ thống LTI bất kì, điều kiện BIBO (bounded input bounded output) được thể hiện như sau:

$$|y[n]| = |x[n] * h[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \right| \tag{1}$$

$$< \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]h[k]| < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B|h[k]| \tag{2}$$

Vậy để $y[n] < +\infty$ thì

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

0.2 Giải thích bài toán hôm qua

$$h[n] = 2\sin\left(\frac{\pi}{100}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(\frac{51\pi n}{100}\right) + \sin\left(\frac{49\pi n}{100}\right)$$

Vậy suy ra

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{51\pi n}{100}\right) + \sin\left(\frac{49\pi n}{100}\right) \right|$$

Ta sẽ phải chỉ ra đây không phải là một hệ thống BIBO do tổng trên phân kỳ, do đó ta sẽ chứng minh:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| \to +\infty$$

Ý tưởng chứng minh: nhận thấy $h[n]$ là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $N_0 = 200$ (cách tìm chu kì cơ sở ra sao thì tự xem lại chương 1 Tín hiệu hệ thống), và ta chỉ cần chỉ ra tổng trị tuyệt đối của $h[n]$ lớn hơn 0 trên 1 chu kì cơ sở thì tổng trị tuyệt đối của $h[n]$ hiển nhiên sẽ tiến ra dương vô cùng trên miền n vô cùng. Chọn một khoảng $N_0 = 200$ bất kì, ta thấy:

$$\sum_{n=<N_0>} \left| \sin\left(\frac{51\pi n}{100}\right) + \sin\left(\frac{49\pi n}{100}\right) \right| = \sum_{n=0}^{200} \left| \sin\left(\frac{51\pi n}{100}\right) + \sin\left(\frac{49\pi n}{100}\right) \right| > 0$$

Kết thúc bài toán.