

Kết quả nghiên cứu tuần 1  
Phòng thí nghiệm Thông tin Vô tuyến

Tín Vũ

tinvu1309@gmail.com

## 1 Tài liệu tham khảo

## 2 Các kết quả cơ bản

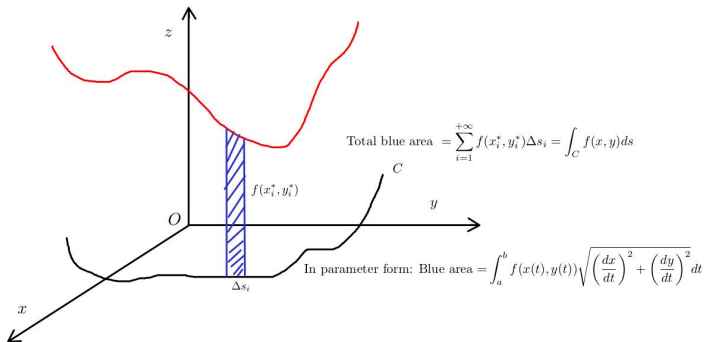
- Tích phân đường
  - Tích phân đường vô hướng
  - Tích phân đường có hướng
- Tích phân mặt
  - Diện tích mặt
  - Tích phân mặt vô hướng

## Tài liệu tham khảo

Tài liệu tham khảo được sử dụng để nghiên cứu gồm: Calculus 7E (James Stewart), Antenna Theory (Balanis).

# Các kết quả cơ bản

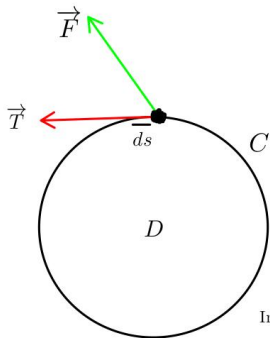
- Tích phân đường
- Tích phân đường vô hướng



Hình: Scalar line integral

# Các kết quả cơ bản

- Tích phân đường có hướng



$$\begin{aligned}\text{We define Flow} &= \oint_C \vec{F} \vec{T} ds = \oint_C \vec{F} \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} |\vec{r}'(t)| dt = \oint_C \vec{F} d\vec{r} \\ &= \oint_C (P\hat{i} + Q\hat{j})(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \oint_C Pdx + Qdy\end{aligned}$$

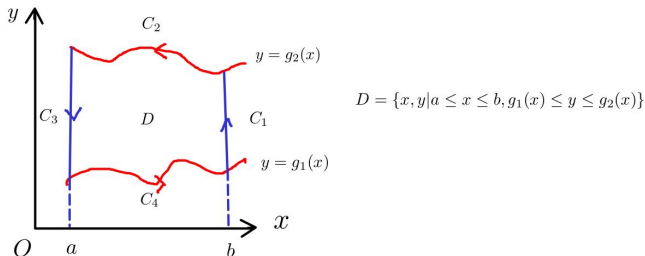
Instead of calculating directly, we use **Green theorem for Flow**:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

**Hình:** Green's theorem for Flow

## Các kết quả cơ bản

Chúng ta sẽ chứng minh lại định lý Green cho trường hợp đơn giản nhất, xét đường đơn liên kín  $C$  như hình vẽ sau:



Hình: Proof of Green's theorem for Flow

Để cho đơn giản, ta chỉ chứng minh đẳng thức:

$$\oint_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

## Các kết quả cơ bản

$$\begin{aligned}\oint_C Pdx &= \int_a^b P(x, g_1(x))dx + \int_b^a P(x, g_2(x))dx = \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx \\ \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, g_2(x))dx - \int_a^b P(x, g_1(x))dx \\ &\Rightarrow \oint_C Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA\end{aligned}$$

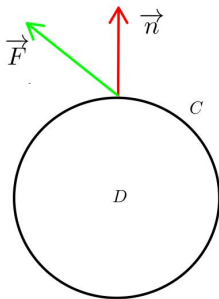
Chúng minh tương tự, ta cũng thu được

$$\oint_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \Rightarrow \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Ta viết lại công thức Green dạng **curl**:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \text{curl } \vec{F} \hat{k} dA = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \hat{k} dA$$

## Các kết quả cơ bản



Similarly, we define **Flux**  $= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \oint_C \vec{F} \cdot (\vec{T} \times \hat{k}) ds$

$$\begin{aligned} \vec{T} \times \hat{k} &= \frac{r'_x(t)\hat{i} + r'_y(t)\hat{j} + 0\hat{k}}{|\vec{r}'(t)|} \times (0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k}) \\ &= \frac{r'_y(t)\hat{i} - r'_x(t)\hat{j}}{|\vec{r}'(t)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{We have } \mathbf{Flux} &= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \oint_C (P\hat{i} + Q\hat{j}) \cdot \frac{(r'_y(t)\hat{i} - r'_x(t)\hat{j})}{|\vec{r}'(t)|} |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \oint_C P dy - Q dx = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \mathbf{div} F(x, y) dA \end{aligned}$$

**Hình:** Green's theorem for Flux



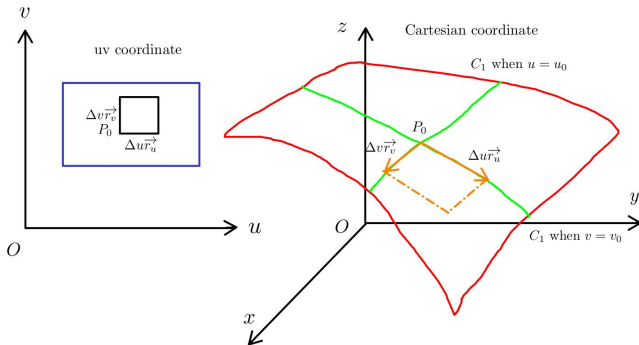
# Các kết quả cơ bản

- Diện tích mặt

Mọi mặt phẳng bất kì đều có thể được biểu diễn rất dễ dàng qua hàm vector

$$\overrightarrow{r(u, v)} = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$$

Ta xét một mặt bất kì được biểu diễn bởi hàm vector trên, với  $(u, v) \in D$ , ta muốn tìm diện tích mặt này.



Hình: Surface Area

## Các kết quả cơ bản

Như đã thảo luận ở slide trước, ta có thể dễ dàng thấy rằng  $\vec{r}_u$ ,  $\vec{r}_v$  chính là 2 vector đạo hàm riêng lần lượt của biến  $u$  và  $v$ . Đây chính là cặp vector tiếp tuyến của các đường cong  $C_1$  và  $C_2$  (đã chứng minh ở slide trước), với:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \hat{k}$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \hat{k}$$

Ta có thể ước lượng xấp xỉ vi phân diện tích một mặt chữ nhật rất nhỏ:

$$dA(S) = |(\vec{r}_u du) \times (\vec{r}_v dv)| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

Vậy ta thu được diện tích toàn bộ mặt phẳng có thể được biểu diễn bằng tổng Riemann trực tiếp, ta viết lại đơn giản hơn như sau:

$$A(S) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

Đây là kết quả cực kì quan trọng, sẽ liên tục được sử dụng trong phần tích phân mặt.

- Tích phân mặt vô hướng

Like triple integral, it's impossible to visualize scalar surface integral (4 dimensions needed)

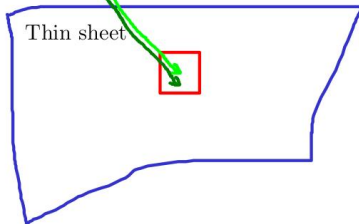
Using same idea to shape its formula from line integral

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij} = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

Density

Area

Thin sheet



We can calculate its mass

Hình: Scalar surface integral