Kết quả nghiên cứu tuần 0

Phòng thí nghiệm Thông tin Vô tuyến

Tín Vũ

tinvu1309@gmail.com

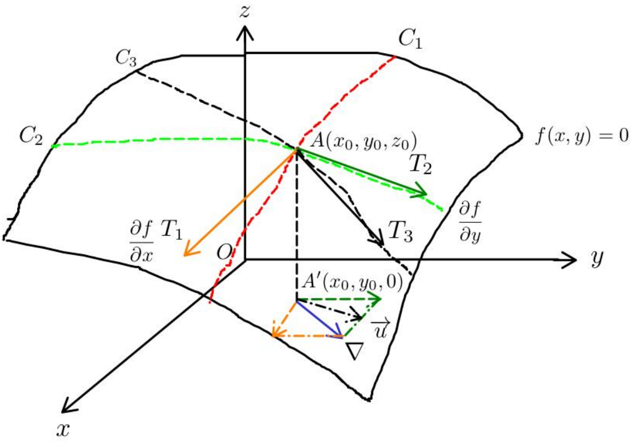
Mục lục

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tham khảo được sử dụng để nghiên cứu gồm: Calculus 7E (James Stewart), Fundamental of Physics (David Halliday, 10th)

- Toán tử ∇

Ý tưởng của toán tử ∇ bắt nguồn từ phép toán đạo hàm có hướng được mô tả như sau:



Hình: Directional derivative

Giới thiệu các toán tử trong Giải tích vector

Ta định nghĩa đạo hàm có hướng tại tại điểm $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ theo phương $\overrightarrow{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ với $\overrightarrow{u}$ là vector đơn vị như sau:

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} = a\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$= < a, b > \cdot \left\langle \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right\rangle$$

Về ý nghĩa hình học, giá trị đạo hàm vừa tính được ở trên chính là hệ số góc của tiếp tuyến T_3 của đường cong C_3. Nếu ta định nghĩa toán tử ∇:

$$\nabla = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\hat{j}$$

Ta có thể dễ dàng viết lại công thức đạo hàm có hướng như sau:

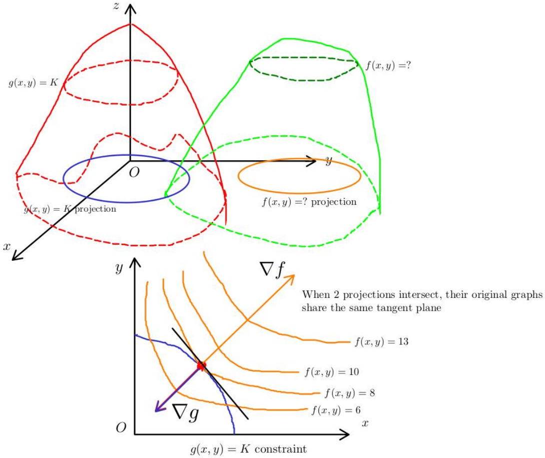
$$D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0) = \overrightarrow{u} \cdot \nabla$$

Từ kết quả trên, ta có thể thấy đường cong dốc nhất từ A có hình chiếu $\overrightarrow{u}$ của nó **cùng phương** với ∇, để đảm bảo $|D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0)|$ max.
Tổng quát hóa, ta định nghĩa toán tử ∇ cho 3 biến:

$$\nabla = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\hat{k}$$

Giới thiệu các toán tử trong Giải tích vector

Ta giới thiệu ứng dụng của toán tử ∇ trong bài toán tìm cực trị có điều kiện (phương pháp nhân tử Lagrange) như sau: tìm cực trị của hàm số $f(x, y)$ với ràng buộc $g(x, y) = K$.



Hình: How to find Lagrange multiplier ?

Vậy ta cần giải hệ để tìm cực trị của hàm $f(x, y)$:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = K \end{cases}$$

Tổng quát hóa, trong trường hợp ta muốn tìm cực trị của hàm 3 hoặc nhiều biến hơn nữa:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = K \end{cases}$$

Nếu có nhiều hơn 1 ràng buộc, ta lần lượt thêm các nhân tử Lagrange μ vào phương trình Lagrange.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = K \\ h(x, y, z) = L \end{cases}$$

Đây là một kết quả cực mạnh dùng để tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của các hàm số đa biến rất dễ dàng mà không cần phải dùng bất đẳng thức sơ cấp.

Một trường vector (vector field) $\overrightarrow{F}$ được gọi là một **trường thế** (conservative vector field) khi và chỉ khi tồn tại vector thế f (potential vector) thỏa mãn:

$$\overrightarrow{F} = \nabla f$$

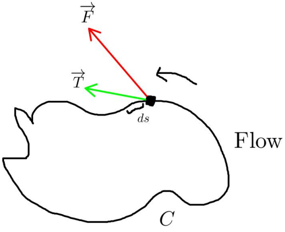
Trường thế còn được gọi là **trường gradient**. Từ nguyên lý cơ sở của Giải tích vector: cho một đường cong C bất kì có phương trình $\overrightarrow{r(t)}$ với $a \leq t \leq b$, giá trị tích phân đường của nó dọc theo đường cong trong trường gradient chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối, hoàn toàn không phụ thuộc vào dạng đường cong C:

$$\int_C \nabla f \cdot d\overrightarrow{r} = f(\overrightarrow{r(b)}) - f(\overrightarrow{r(a)})$$

Trong tự nhiên có 2 trường thế quan trọng là trường trọng lực (gravitational field) và điện trường (electric field).

- Toán tử curl

Xét một trường vector $\overrightarrow{F} = P(x(t), y(t))\hat{i} + Q(x(t), y(t))\hat{j}$ và môt miền đơn liên kín C có phương trình $\overrightarrow{r(t)}$ $(a \leq t \leq b)$ được biểu diễn như sau:



Hình: Example of flow

$$\textbf{Flow} = \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{T}\,ds = \oint_C \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r} = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Từ kết quả của định lý Green, nếu ta kí hiệu R (region bounded by curve C), ta có:

$$\textbf{Flow} = \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{T}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dA$$

Đại lượng trên chính là một trường hợp riêng của curl trong không gian 2 chiều. Tổng quát hóa, nếu ta có trường vector $F(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$, ta xây dựng công thức của curl như sau (ta tạm thời thay kí hiệu $P(x, y, z)$ thành P):

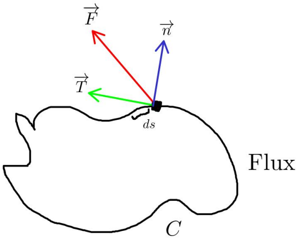
$$\operatorname{curl}\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k} = \nabla \times \overrightarrow{F}$$

Ta viết lại định lý Green dưới dạng vector:

$$\textbf{Flow} = \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{T}\,ds = \iint_R (\operatorname{curl}\overrightarrow{F}) \cdot \hat{k}\,dA$$

- Toán tử div

Xét một trường vector $\overrightarrow{F} = P(x(t), y(t))\hat{i} + Q(x(t), y(t))\hat{j}$ và môt miền đơn liên kín C có phương trình $\overrightarrow{r(t)}$ $(a \leq t \leq b)$ được biểu diễn như sau:



Hình: Example of flux

$$\textbf{Flux} = \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,ds = \oint_C \overrightarrow{F}(\overrightarrow{T} \times \hat{k})ds = \oint_C \overrightarrow{F}\left(\frac{dy}{ds}\hat{i} - \frac{dx}{ds}\hat{j}\right)ds$$
$$= \int_C P(x,y)dy - Q(x,y)dx$$

Từ kết quả của định lý Green, nếu ta kí hiệu R (region bounded by curve C), ta có:

$$\textbf{Flux} = \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \right) dA$$

Đại lượng trên chính là một trường hợp riêng của div trong không gian 2 chiều. Tổng quát hóa, nếu ta có trường vector $F(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + R(x,y,z)\hat{k}$, ta xây dựng công thức của div như sau (ta tạm thời thay kí hiệu $P(x,y,z)$ thành P):

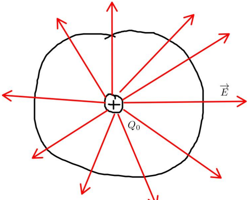
$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

Ta viết lại định lý Green dưới dạng vector:

$$\textbf{Flux} = \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,ds = \iint_R \textbf{div}\,\overrightarrow{F}(x,y)dA$$

Phương trình Maxwell và sóng điện từ

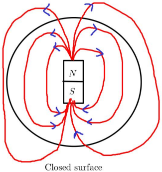
- Phương trình Maxwell
  - Định luật Gauss cho điện trường



$$\Phi_E = \oint_C \vec{E}\,d\vec{A} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$

Hình: Gauss's Law for Electric field

  - Định luật Gauss cho từ trường



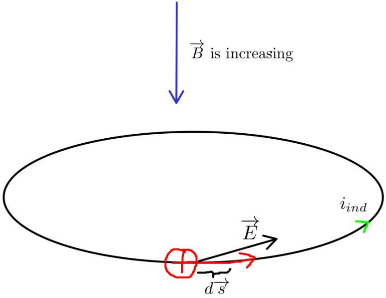
$$\Phi_B = \oint_C \vec{B}\,d\vec{A} = \mathbf{0}$$

Monopole magnetic doesnt't exist

Hình: Gauss's Law for Magnetic field

Phương trình Maxwell và sóng điện từ

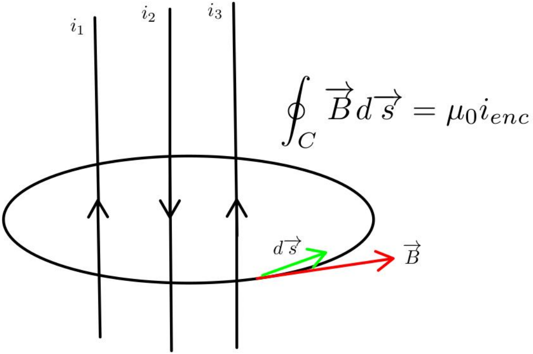
- Định luật Faraday



$$\mathbf{E} = \oint_C \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{s} = \frac{-d\Phi_B}{dt}$$

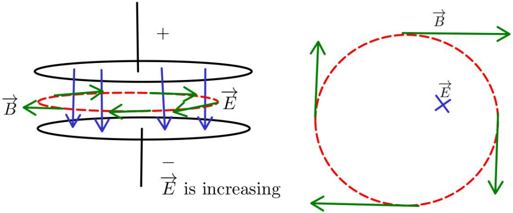
Hình: Faraday's Law

- Định luật Ampere



Hình: Ampere's Law

Maxwell đã phát triển định luật Ampere thành định luật Maxwell-Ampere dựa trên hiện tượng giữa 2 bản tụ điện phẳng, thay đổi điện thông Φ_E và quan sát từ trường $\overrightarrow{B}$ xuất hiện như sau:



Hình: Ampere's Law

Ta có thể thấy rằng, giữa hai mặt phẳng tụ có một dòng điện ảo (displacement current), không phải dòng điện vật lý thực, được hình thành bởi sự biến thiên lượng điện tích trong quá trình sạc tụ, ta gọi dòng điện này là i_{dis}. Vậy với tác nhân 2 dòng điện gây ra từ trường $\overrightarrow{B}$, ta có phương trình Ampere dạng mở rộng (Ampere-Maxwell equation) như sau:

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 i_{enc} + \mu_0 i_{dis} = \mu_0 i_{enc} + \mu_0 \frac{dq}{dt} = \mu_0 i_{enc} + \mu_0 \frac{\varepsilon_0 d\Phi_E}{dt}$$

Vậy tổng hợp lại, ta thu được 4 phương trình Maxwell ở dạng tích phân:

Phương trình Maxwell ở dạng tích phân

1. $$\Phi_E = \oint_C \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$
2. $$\Phi_B = \oint_C \vec{B}\, d\vec{A} = 0$$
3. $$\mathscr{E} = \oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{-d\Phi_B}{dt}$$
4. $$\oint_C \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 i_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ta cũng thu được phương trình Maxwell ở dạng vi phân với các toán tử đã giới thiệu ở trên:

Phương trình Maxwell ở dạng vi phân

1. $$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. $$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

3. $$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

4. $$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$