Kết quả nghiên cứu tuần 1

Phòng thí nghiệm Thông tin Vô tuyến

Tín Vũ

tinvu1309@gmail.com

Mục lục

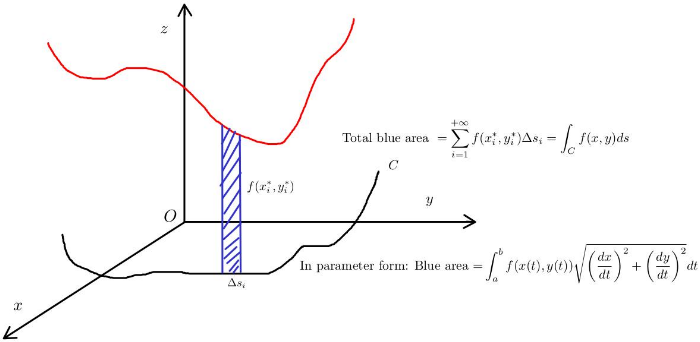
1. Tài liệu tham khảo

2. Các kết quả cơ bản
   - Tích phân đường
     - Tích phân đường vô hướng
     - Tích phân đường có hướng
   - Tích phân mặt
     - Diện tích mặt
     - Tích phân mặt vô hướng
     - Tích phân mặt có hướng

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tham khảo được sử dụng để nghiên cứu gồm: Calculus 7E (James Stewart), Antenna Theory (A.Balanis).

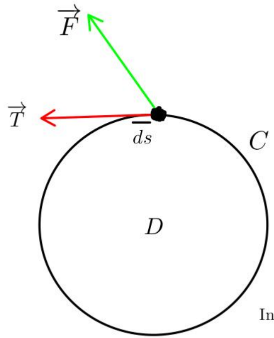
- Tích phân đường
- Tích phân đường vô hướng



Hình: Scalar line integral

Các kết quả cơ bản

- Tích phân đường có hướng



We define Flow $= \oint_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{T}ds = \oint_C \overrightarrow{F}\dfrac{\overrightarrow{r'(t)}}{|\overrightarrow{r(t)}|}|\overrightarrow{r(t)}|dt = \oint_{\mathbf{C}} \overrightarrow{F}\mathbf{d}\overrightarrow{r}$

$$= \oint_C (P\hat{i} + Q\hat{j})(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{Pdx + Qdy}$$

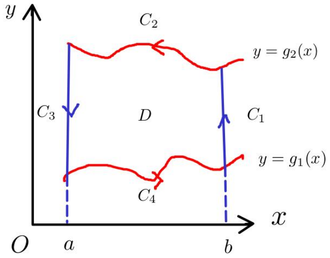
Instead of calculating directly, we use **Green theorem for Flow**:

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{Pdx + Qdy} = \iint_{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{dA}$$

Hình: Green's theorem for Flow

Các kết quả cơ bản

Chúng ta sẽ chứng minh lại định lý Green cho trường hợp đơn giản nhất, xét đường đơn liên kín C như hình vẽ sau:



$$D = \{x, y | a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

Hình: Proof of Green's theorem for Flow

Để cho đơn giản, ta chỉ chứng minh đẳng thức:

$$\oint_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

$$\oint_C Pdx = \int_a^b P(x, g_1(x)) + \int_b^a P(x, g_2(x))dx = \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dydx = \int_a^b P(x, g_2(x))dx - \int_a^b P(x, g_1(x))dx$$

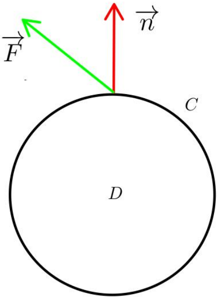
$$\Rightarrow \oint_C Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Chứng minh tương tự, ta cũng thu được

$$\oint_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \Rightarrow \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Ta viết lại công thức Green dạng **curl**:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \mathbf{curl} \overrightarrow{F} \hat{k} dA = \iint_D (\nabla \times \overrightarrow{F}) \hat{k} dA$$



Similarly, we define **Flux** $= \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,ds = \oint_C \overrightarrow{F}(\overrightarrow{T} \times \hat{k})ds$

$$\overrightarrow{T} \times \hat{k} = \frac{r'_x(t)\hat{i} + r'_y(t)\hat{j} + 0\hat{k}}{|\overrightarrow{r'(t)}|} \times (0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k})$$

$$= \frac{r'_y(t)\hat{i} - r'_x(t)\hat{j}}{|\overrightarrow{r'(t)}|}$$

We have **Flux** $= \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,ds = \oint_C (P\hat{i} + Q\hat{j})\dfrac{(r'_y(t)\hat{i} - r'_x(t)\hat{j})}{|\overrightarrow{r'(t)}|}|\overrightarrow{r'(t)}|dt$

$$= \oint_C Pdy - Qdx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \mathbf{div}F(x,y)dA$$

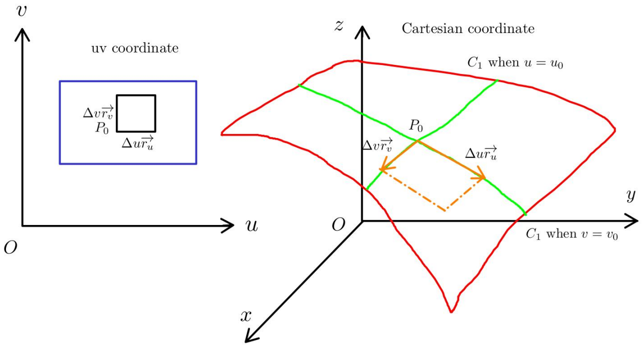
Hình: Green's theorem for Flux

- Diện tích mặt

Mọi mặt phẳng bất kì đều có thể được biểu diễn rất dễ dàng qua hàm vector

$$\overrightarrow{r(u,v)} = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$$

Ta xét một mặt bất kì được biểu diễn bởi hàm vector trên, với $(u,v) \in D$, ta muốn tìm diện tích mặt này.



Hình: Surface Area

Các kết quả cơ bản

Như đã thảo luận ở slide trước, ta có thể dễ dàng thấy rằng $\overrightarrow{r_u}$, $\overrightarrow{r_v}$ chính là 2 vector đạo hàm riêng lần lượt của biến u và v. Đây chính là cặp vector tiếp tuyến của các đường cong C_1 và C_2 (đã chứng minh ở slide trước), với:

$$\overrightarrow{r_u} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\hat{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{r_v} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\hat{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\hat{k}$$

Ta có thể ước lượng xấp xỉ vi phân diện tích một mặt chữ nhật rất nhỏ:

$$dA(S) = |\overrightarrow{(r_u du)} \times (\overrightarrow{r_v} dv)| = |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|dA$$

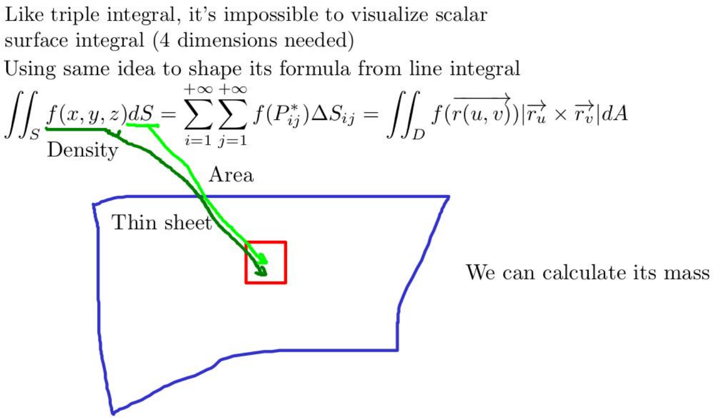
Vậy ta thu được diện tích toàn bộ mặt phẳng có thể được biểu diễn bằng tổng Riemann trực tiếp, ta viết lại đơn giản hơn như sau:

$$A(S) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}| = \iint_D |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|dA$$

Đây là kết quả cực kì quan trọng, sẽ liên tục được sử dụng trong phần tích phân mặt.

Các kết quả cơ bản

- Tích phân mặt vô hướng



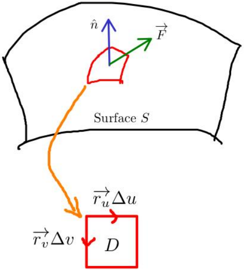
Hình: Scalar surface integral

Các kết quả cơ bản

- Tích phân mặt có hướng

We don't define **Flow** for surface integral

The same idea of calculating **Flux** in line integral can be applied here



We define $\hat{n} = \dfrac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$

$$\textbf{Flux} = \iint_S \vec{F}\hat{n}dS = \iint_S \vec{F}d\vec{S}$$
$$= \iint_D \vec{F}\frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|dA$$
$$= \iint_D \vec{F}(\vec{r_u} \times \vec{r_v})dA$$

Convert surface S equation from Cartesian coordiante to uv coordinate

$$\textbf{Flux} = \iint_S \vec{F}\hat{n}dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r_u} \times \vec{r_v})dA$$

Hình: Flux in surface integral

Chúng ta tổng quát hóa định lý Green cho **Flux** và **Flow** trong không gian 3 chiều:

Định lý Green trong không gian 2 chiều

$$\textbf{Flux} = \oint_C \vec{F}\,\vec{n}\,ds = \iint_D \textbf{div}\,\vec{F}\,dA = \iint_D \nabla \cdot \vec{F}\,dA$$

$$\textbf{Flow} = \oint_C \vec{F}\,\vec{T}\,ds = \iint_D \textbf{curl}\,\vec{F}\,\hat{k}\,dA = \iint_D (\nabla \times \vec{F})\hat{k}\,dA$$

Định lý Green trong không gian 3 chiều

- Định lý phân kỳ (divergence theorem):

$$\textbf{Flux} = \iint_S \vec{F}\,\hat{n}\,dS = \iint_S \vec{F}\,d\,\vec{S} = \iiint_E \textbf{div}\,\vec{F}\,dV$$

- Định lý Stoke:

$$\textbf{Flow} = \int_C \vec{F}\,\vec{T}\,dS = \iint_S \textbf{curl}\,\vec{F}\,d\,\vec{S}$$