Kết quả nghiên cứu tuần 1

Phòng thí nghiệm Thông tin Vô tuyến

Tín Vũ

tinvu1309@gmail.com

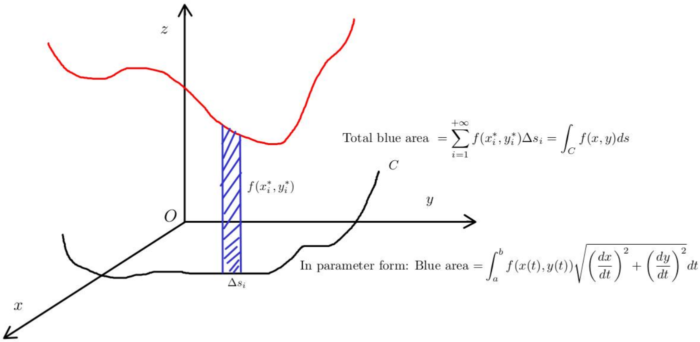
Mục lục

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tham khảo được sử dụng để nghiên cứu gồm: Calculus 7E (James Stewart), Antenna Theory (A.Balanis).

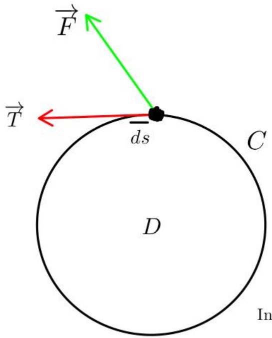
Các kết quả cơ bản

- Tích phân đường
- Tích phân đường vô hướng



Hình: Scalar line integral

- Tích phân đường có hướng



We define Flow $= \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{T}\,ds = \oint_C \overrightarrow{F}\,\frac{\overrightarrow{r'(t)}}{|\overrightarrow{r(t)}|}|\overrightarrow{r(t)}|dt = \oint_{\mathbf{C}} \overrightarrow{F}\,\mathbf{d}\overrightarrow{r}$

$$= \oint_C (P\hat{i} + Q\hat{j})(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{Pdx} + \mathbf{Qdy}$$

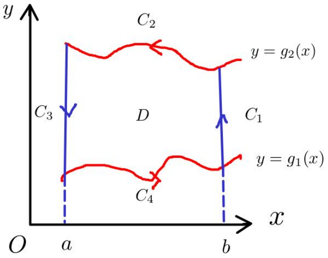
Instead of calculating directly, we use **Green theorem for Flow**:

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{Pdx} + \mathbf{Qdy} = \iint_{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{dA}$$

Hình: Green's theorem for Flow

Các kết quả cơ bản

Chúng ta sẽ chứng minh lại định lý Green cho trường hợp đơn giản nhất, xét đường đơn liên kín C như hình vẽ sau:



$$D = \{x, y | a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

Hình: Proof of Green's theorem for Flow

Để cho đơn giản, ta chỉ chứng minh đẳng thức:

$$\oint_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Các kết quả cơ bản

$$\oint_C Pdx = \int_a^b P(x, g_1(x)) + \int_b^a P(x, g_2(x))dx = \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dydx = \int_a^b P(x, g_2(x))dx - \int_a^b P(x, g_1(x))dx$$

$$\Rightarrow \oint_C Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

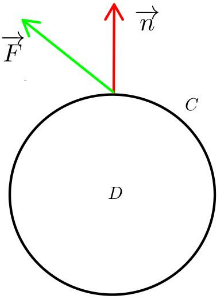
Chứng minh tương tự, ta cũng thu được

$$\oint_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \Rightarrow \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Ta viết lại công thức Green dạng **curl**:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \mathbf{curl} \overrightarrow{F} \hat{k} dA = \iint_D (\nabla \times \overrightarrow{F}) \hat{k} dA$$

Các kết quả cơ bản



Similarly, we define **Flux** $= \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,ds = \oint_C \overrightarrow{F}(\overrightarrow{T} \times \hat{k})ds$

$$\overrightarrow{T} \times \hat{k} = \frac{r'_x(t)\hat{i} + r'_y(t)\hat{j} + 0\hat{k}}{|\overrightarrow{r'(t)}|} \times (0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k})$$

$$= \frac{r'_y(t)\hat{i} - r'_x(t)\hat{j}}{|\overrightarrow{r'(t)}|}$$

We have **Flux** $= \oint_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,ds = \oint_C (P\hat{i} + Q\hat{j}) \frac{(r'_y(t)\hat{i} - r'_x(t)\hat{j})}{|\overrightarrow{r'(t)}|} |\overrightarrow{r'(t)}| dt$

$$= \oint_C Pdy - Qdx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \mathbf{div} F(x, y) dA$$

Hình: Green's theorem for Flux

Các kết quả cơ bản

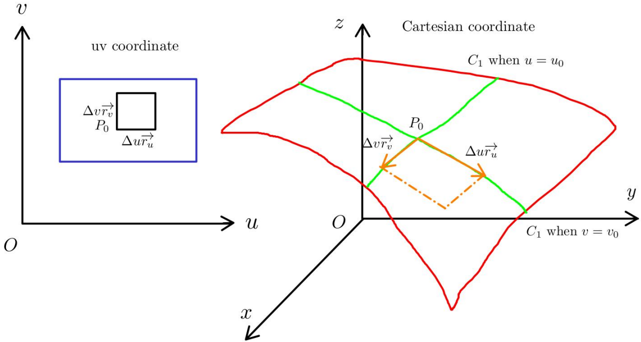
- Tích phân mặt

- Diện tích mặt

Mọi mặt phẳng bất kì đều có thể được biểu diễn rất dễ dàng qua hàm vector

$$\overrightarrow{r(u,v)} = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$$

Ta xét một mặt bất kì được biểu diễn bởi hàm vector trên, với $(u,v) \in D$, ta muốn tìm diện tích mặt này.



Hình: Surface Area

Các kết quả cơ bản

Như đã thảo luận ở slide trước, ta có thể dễ dàng thấy rằng $\overrightarrow{r_u}$, $\overrightarrow{r_v}$ chính là 2 vector đạo hàm riêng lần lượt của biến u và v. Đây chính là cặp vector tiếp tuyến của các đường cong C_1 và C_2 (đã chứng minh ở slide trước), với:

$$\overrightarrow{r_u} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\hat{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{r_v} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\hat{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\hat{k}$$

Ta có thể ước lượng xấp xỉ vi phân diện tích một mặt chữ nhật rất nhỏ:

$$dA(S) = |(\overrightarrow{r_u du}) \times (\overrightarrow{r_v} dv)| = |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|dA$$

Vậy ta thu được diện tích toàn bộ mặt phẳng có thể được biểu diễn bằng tổng Riemann trực tiếp, ta viết lại đơn giản hơn như sau:

$$A(S) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}| = \iint_D |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|dA$$

Đây là kết quả cực kì quan trọng, sẽ liên tục được sử dụng trong phần tích phân mặt.

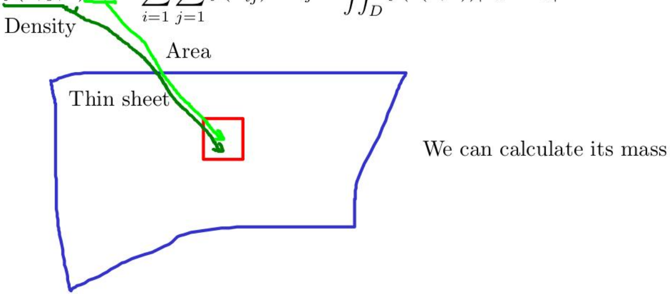
Các kết quả cơ bản

- Tích phân mặt vô hướng

Like triple integral, it's impossible to visualize scalar surface integral (4 dimensions needed)

Using same idea to shape its formula from line integral

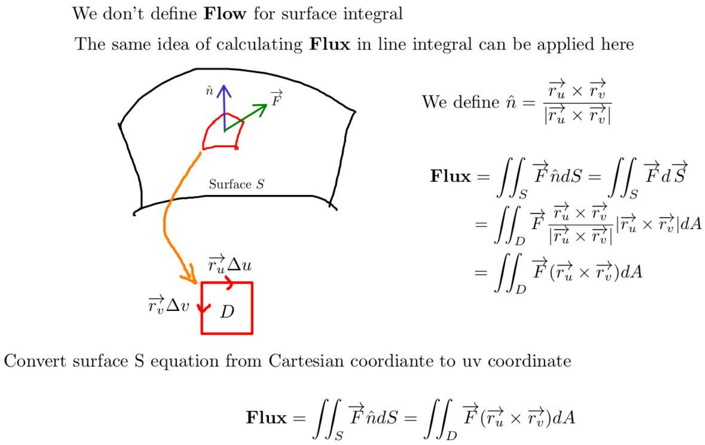
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij} = \iint_D f(\overrightarrow{r(u,v)})|\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}|\,dA$$



Hình: Scalar surface integral

Các kết quả cơ bản

- Tích phân mặt có hướng



Hình: Flux in surface integral

Các kết quả cơ bản

Chúng ta tổng quát hóa định lý Green cho **Flux** và **Flow** trong không gian 3 chiều:

Định lý Green trong không gian 2 chiều

$$\textbf{Flux} = \oint_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{n}\,ds = \iint_D \textbf{div}\overrightarrow{F}\,dA = \iint_D \nabla \cdot \overrightarrow{F}\,dA$$

$$\textbf{Flow} = \oint_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{T}\,ds = \iint_D \textbf{curl}\overrightarrow{F}\,\hat{k}\,dA = \iint_D (\nabla \times \overrightarrow{F})\hat{k}\,dA$$

Định lý Green trong không gian 3 chiều

- Định lý phân kỳ (divergence theorem):

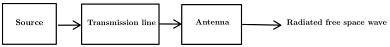
$$\textbf{Flux} = \iint_S \overrightarrow{F}\,\hat{n}\,dS = \iint_S \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{S} = \iiint_E \textbf{div}\overrightarrow{F}\,dV$$

- Định lý Stoke:

$$\textbf{Flow} = \int_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{T}\,dS = \iint_S \textbf{curl}\overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{S}$$

- Giới thiệu về Antenna
  - Khái niệm Antenna

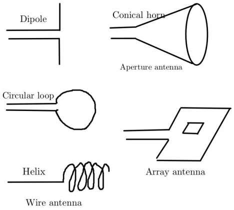
Khái niệm về Antenna có thể được hiểu theo cách đơn giản nhất là vật kim loại (có thể ở dạng thanh cứng hay dây dẫn) được sử dụng để bức xạ và thu sóng điện từ.



Hình: EM transmitter block diagram

  - Các dạng Antenna cơ bản

Ta giới thiệu 3 dạng antenna cơ bản gồm: antenna dây (wire), antenna hở (apeture), antenna mảng (array antenna):



Hình: Some types of antenna

- Cơ chế bức xạ

Xét một đoạn dây dẫn thẳng dài có dòng điện I chạy qua, với J là mật độ dòng (A/m^2), q_v là mật độ điện khối (C/m^3) và v_d (drift velocity) là tốc độ trôi dạt của điện tích dương, ta cần chứng minh: $J = q_v v_d$.

$$Q_{total} = (q_v AL)$$
$$\Rightarrow I = \frac{Q_{total}}{t} = \frac{(q_v AL)}{L/v_d} = q_v A v_d$$
$$\Rightarrow J = \frac{I}{A} = q_v v_d$$

Trong trường hợp dây dẫy có diện tích mặt cắt (cross-section area) cực nhỏ (hay $r \approx 0$) thì ta có thể thay J thành I, suy ra:

$$I = q_v v_d \Rightarrow \frac{dI}{dt} = q_v \frac{dv_d}{dt} = q_v a_d$$

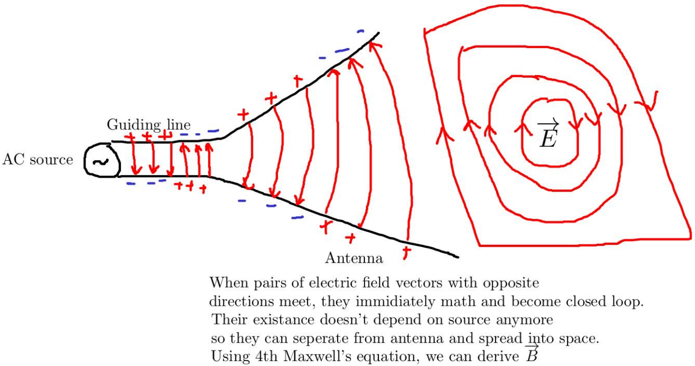
Ta viết lại phương trình trên dưới dạng vector:

$$\frac{d\overrightarrow{I}}{dt} = q_v \overrightarrow{a_d}$$

Từ phương trình trên ta có thể kết luận:

1. Nếu điện tích không chuyển động thì hiện tượng bức xạ không xảy ra.
2. Nếu điện tích chuyển động đều thì:
    - Trong trường hợp dây dẫn thẳng dài vô hạn, hiện tượng bức xạ không xảy ra.
    - Trong trường hợp dây dẫn bị uốn cong, hiện tượng bức xạ **có xảy ra do vector gia tốc đổi chiều liên tục.**
3. Nếu điện tích chuyển động với gia tốc khác 0 thì hiện tượng bức xạ có xảy ra.

Ta xét một horn antenna được minh họa như sau:



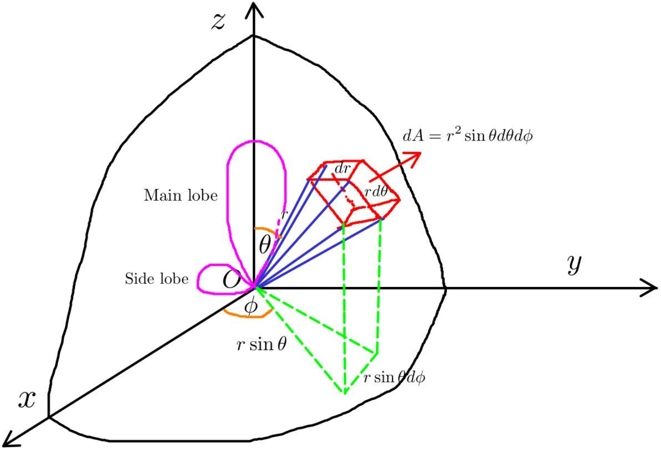
Hình: Radiation mechanism

- Các tham số cơ bản của Antenna
- Giới thiệu các tham số cơ bản

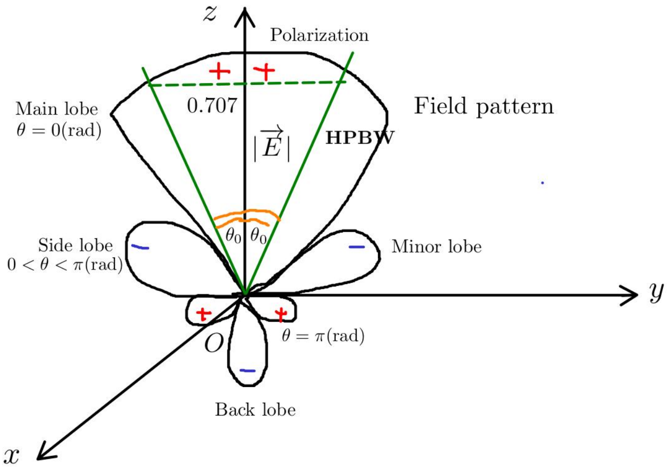
Trước khi phân tích, ta định nghĩa đại lượng H đặc trưng cho cường độ từ trường như sau:

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

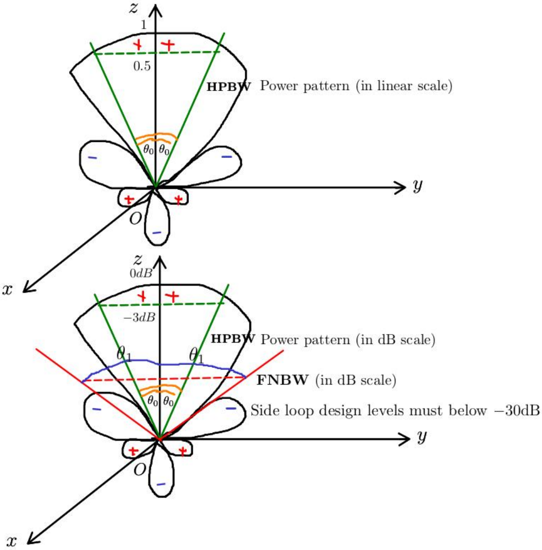
B đặc trưng cho phân bố của các vector cảm ứng điện từ, còn H đặc trưng cho cường độ từ trường, đây là 2 đại lượng vật lý dễ nhầm và có ý nghĩa hoàn toàn khác nhau.
Ta đổi kí hiệu góc trong phép biến đổi tọa độ cầu (sphere coordinate) từ (r, θ, ϕ) thành (r, ϕ, θ) để hợp với cách quy ước của giáo trình.
Mẫu bức xạ antenna (antenna radiation pattern) được định nghĩa là một hàm số hay đồ thị biểu diễn các tính chất của bức xạ antenna được xác định tại **trường xa** (far-field region).
Các tính chất tiêu biểu của bức xạ bao gồm công suất, cường độ bức xạ hay độ lớn, hướng, phân cực của trường. Ta sử dụng **hệ tọa độ cầu** để khảo sát các tính chất của bức xạ.



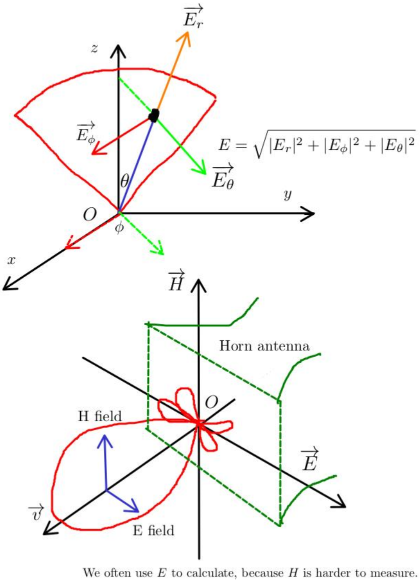
Hình: Sphere coordinate to analyze antenna radiation



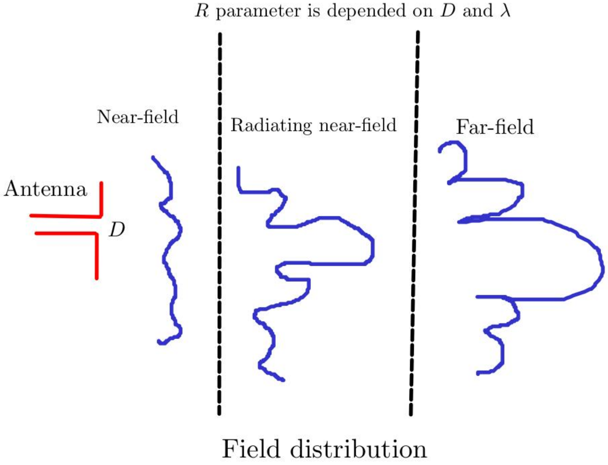
Hình: Field pattern (in linear scale)



Hình: Power pattern (in dB scale)

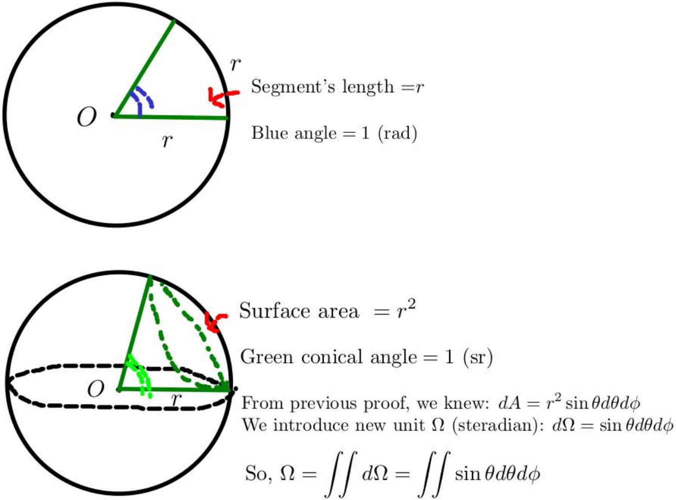


Hình: Principal $E-$ and $H-$ plane patterns



Hình: Types of field

Lý thuyết Antenna



Hình: Radian and Sterian

Ví dụ: hãy tính Ω (solid angle) của một mặt S kín bị giới hạn bởi:

$$S = \{(r, \phi, \theta)|\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\}$$

Dễ thấy

$$\Omega = \iint \sin\theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\theta d\theta d\phi = 0.8417$$

- Công suất bức xạ

Từ khái niệm vector Poynting đã được thảo luận ở slide trước, ta định nghĩa kí hiệu mới $\mathscr{W}$ có thứ nguyên (W/m^2) như sau:

$$\overrightarrow{\mathscr{W}} = \overrightarrow{\mathscr{E}} \times \overrightarrow{\mathscr{H}}$$

với các kí hiệu viết hoa biểu thị cho giá trị tức thời. Vậy ta dễ dàng suy ra độ lớn công suất tức thời trên búp sóng (được biểu diễn bởi mặt S) là:

$$\mathscr{P} = \iint_S \overrightarrow{\mathscr{W}} \hat{n} dA = \iint_S \overrightarrow{\mathscr{W}} d\overrightarrow{S}$$

với $\hat{n}$ biểu diễn phương truyền sóng. Ta muốn xây dựng công thức để tìm công suất trung bình (hay công suất bức xạ) $P_{avg} = P_{rad}$ của búp sóng.

Điện trường hay từ trường của sóng EM lan truyền trong không gian và thời gian, về bản chất là hàm vector có thể được biểu diễn bằng hàm 4 biến (x, y, z, t):

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E(x, y, z)}e^{j\omega t}$$

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H(x, y, z)}e^{j\omega t}$$

Ta định nghĩa độ lớn tức thời của các giá trị cường độ điện trường và từ trường:

$$\overrightarrow{\mathscr{E}} = \Re(\overrightarrow{E})$$

$$\overrightarrow{\mathscr{H}} = \Re(\overrightarrow{H})$$

Biến đổi một chút, ta thu được:

$$\overrightarrow{\mathscr{H}} = \frac{1}{2}\Re(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{H^*}) \Rightarrow \overrightarrow{\mathscr{W}} = \frac{1}{2}\Re(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}) + \frac{1}{2}\Re(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H^*})$$

Giữ lại thành phần không phụ thuộc vào biến thời gian, ta thu được W_{avg}:

$$\overrightarrow{W_{avg}} = \frac{1}{2}\Re(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H^*})$$

Dùng định nghĩa tích phân mặt, ta có:

$$P_{avg} = P_{rad} = \iint_S \overrightarrow{W_{avg}} d\overrightarrow{S} = \iint_S \frac{1}{2}\Re(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H^*})dS$$

Ví dụ: tính công suất bức xạ trung bình của một bức xạ lý tưởng đẳng hướng (bức xạ đều ra tất cả các hướng với độ lớn vector Poyting là hằng số).

$$P_{avg} = \iint_S W_0 \hat{n}_r dA = \iint_S (W_0 \hat{n}_r) \hat{n}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} W_0 r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$
$$= 4\pi W_0 r^2$$

- Cường độ bức xạ

Cường độ bức xạ U là đại lượng vô hướng, được định nghĩa là công suất bức xạ từ antenna trên một đơn vị solid angle.

$$U = r^2 W_{rad}$$

Ta suy ra công thức tìm P_{rad} khác:

$$P_{rad} = \iint_\Omega U d\Omega = \iint_\Omega U \sin\theta d\theta d\phi$$

với công thức tìm vi phân solid angle theo steradian đã được chứng minh ở trên.
Ví dụ: tính cường độ bức xạ U_0 của một nguồn bức xạ đẳng hướng có công suất trung bình P_{rad}.

$$P_{rad} = \iint_\Omega U_0 d\Omega = \iint_\Omega U_0 \sin\theta d\theta d\phi = U_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi \Rightarrow U_0 = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

Hướng nghiên cứu tiếp theo

Học nốt chapter 2 + 3 của textbook Antenna Theory.