BÀI TẬP GIẢI TÍCH 1

Ngày 29 tháng 2 năm 2024

Mục lục

Chương 1

Giới hạn

1.1 Giới hạn dãy số

1.1.1 Lý thuyết

Định nghĩa dãy số

Dãy số u_n được định nghĩa thông qua ánh xạ:

$$u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Ta có thể hiểu đơn giản dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số $x \to f(x)$ khi x là một số nguyên $n \in \mathbb{N}$ thay vì là một số thực bất kì thuộc $\mathbb{R}$. Chính vì thế nên **không được nhầm lẫn** giữa hai khái niệm dãy số và hàm số với nhau.

Tính chất

1. Nguyên lý kẹp:
Giả sử các dãy số x_n, y_n, z_n thỏa mãn bất đẳng thức $x_n \leq y_n \leq z_n$, đồng thời các dãy số x_n và z_n cùng hội tụ đến L. Khi đó ta có:

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = L \tag{1.1}$$

2. Định nghĩa của số e:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{1.2}$$

1.1.2 Bài tập

Bài tập chỉ cần dùng kiến thức THPT để giải

Tính các giới hạn dãy số sau:

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}(|a|<1,|b|<1)$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}...\sqrt[2^n]{2}$$

3. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$$

4. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$$

5. $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

6. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt{n^2-n+1}}{n}$$

7. $$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

Bài tập sử dụng nguyên lý kẹp (1.1)

Bài tập mẫu 1: Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{8\cos\frac{n\pi}{2}}{n+4}$$

Lời giải: Ta có bất phương trình sau:

$$\frac{-8}{n+4} \leq \frac{8\cos\frac{n\pi}{2}}{n+4} \leq \frac{8}{n+4}$$

Do
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-8}{n+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n+4}=0$$
nên từ nguyên lý kẹp ta suy ra:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{8\cos\frac{n\pi}{2}}{n+4}=0$$

Bài tập mẫu 2: Tìm giới hạn của dãy số sau:
$$u_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Lời giải: Ta có bất phương trình sau:
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Do
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$
nên từ nguyên lý kẹp ta suy ra:
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$$

Bài tập: Tính giới hạn các dãy số sau, dùng nguyên lý kẹp:

1. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n.n}{n+1}$$
2. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+(-1)^n}{n}$$
3. $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$$

Bài tập sử dụng định nghĩa số e (1.2)

Bài tập mẫu: Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{5n+2}$$

Lời giải: Ý tưởng chung của các bài tập dạng này là chú ý đến dạng của biểu thức (1.2) và tách đúng theo dạng đó.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{5n+2} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{3n-2}\right)^{5n+2}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{3n-2}\right)^{\frac{3n-2}{3}\frac{3}{3n-2}(5n+2)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{3.(5n+2)}{3n-2}} = e^5\end{aligned}$$

Bài tập: Tính giới hạn của các dãy số sau:

1. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+2n-1}{5n^2-2n+1}\right)^{n}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+2n-1}{5n^2-2n+1}\right)^{n^2+1}$$

3. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$$

4. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n+4}\right)^{n}$$

1.2 Giới hạn hàm số

1.2.1 Lý thuyết

Định nghĩa hàm số

Tương tự như định nghĩa dãy số u_n, hàm số $f(x)$ được định nghĩa thông qua ánh xạ:

$$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Tính chất

1. Nguyên lý kẹp (1.1)
Giống với giới hạn dãy số, ta cũng có nguyên lý kẹp cho giới hạn hàm số được phát biểu như sau:
Cho 3 hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ và

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

Khi đó ta có:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \tag{1.3}$$

2. Các giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.4}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1.5}$$

1.2.2 Bài tập

Lưu ý quan trọng: Tất cả các bài tập trước chương 3 (Đạo hàm và ứng dụng) đều **TUYỆT ĐỐI KHÔNG ĐƯỢC DÙNG QUY TẮC L'HOSPITAL ĐỂ TÍNH GIỚI HẠN.**

Bài tập chỉ cần dùng kiến thức THPT để giải

Tính giới hạn các hàm số sau, biết $n \in \mathbb{N}$:

1.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$$

2.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$$

4.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$$

5.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$$

6.
$$\lim_{x\to \infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

7.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

8.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$$

9.
$$\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$$

10.
$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$

11.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

Tính giới hạn các hàm số lượng giác sau (gợi ý: đối với các bài tập $x\to a$ với $a\neq 0$ hay a không tiến ra vô cực ta có thể đặt ẩn phụ $t=x-a$, khi đó $t\to 0$):

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

2.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$$

3.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right)$$

4.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$$

Bài tập sử dụng nguyên lý kẹp (1.3)

Tính giới hạn hàm số sau:
$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

Bài tập sử dụng các giới hạn đặc biệt (1.4)(1.5)

Bài tập mẫu 1: Tính giới hạn hàm số:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-1-(\sqrt{\cos x}-1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x\sin x}+1}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\cos x}+1}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+x\sin x}+1}+\frac{2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\cos x}+1}}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{2}}{2}}\\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Bài tập mẫu 2: Tính giới hạn hàm số:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{5x+2} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{5x+2}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{3}\frac{3}{3x-2}(5x+2)}\\
&= e^5
\end{aligned}$$

Bài tập mẫu 3: Tính giới hạn hàm số:

$$\lim_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$$

Lời giải: Đặt $t = x+2$, ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} &= \lim_{t\to0}\frac{\arcsin t}{(t-2)^2+2(t-2)}\\
&= \lim_{t\to0}\frac{\arcsin t}{t^2-2t}
\end{aligned}$$

Đặt $\arcsin t = u$, ta có:

$$\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin^2 u - 2\sin u} = \lim_{u\to0}\frac{u}{\sin u}\frac{1}{\sin u - 2} = \frac{-1}{2}$$

Điều quan trọng nhất để làm được các bài tập dạng này đó là nắm chắc được hai giới hạn đặc biệt (1.4) và (1.5), đồng thời phải vận dụng linh hoạt các phép đặt ẩn phụ như các bài tập mẫu.

Bài tập: Sử dụng giới hạn đặc biệt (1.4) để tính các giới hạn sau:

1. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$$

2. $$\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$$

3. $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$$

Bài tập: Sử dụng giới hạn đặc biệt (1.5) để tính các giới hạn sau:

1.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$$

2.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x-1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$$

Bài tập: Kết hợp các phương pháp đã học để tính giới hạn sau:

1.
$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$$

2.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

4.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Chương 2

Liên tục

2.1 Lý thuyết

2.1.1 Định nghĩa hàm số liên tục

Hàm số liên tục tại một điểm

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) liên tục tại điểm $x_0 \in (a, b)$ khi và chỉ khi:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0) \tag{2.1}$$

Hàm số liên tục trên khoảng

Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại tất cả các điểm thuộc khoảng (a, b).
Định lý: Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trên miền xác định của nó.

2.1.2 Phân loại các điểm gián đoạn

Điểm gián đoạn loại 1

Giả sử $x_0 \in (a, b)$. Nếu **tồn tại đồng thời** cả hai giới hạn $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ và <u>ít nhất một trong hai giới hạn</u> khác $f(x_0)$ thì ta gọi x_0 là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

Điểm gián đoạn loại 2

Điểm gián đoạn không phải là loại 1 thì được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

2.2 Bài tập

Bài tập mẫu: Xét tính liên tục và biện luận điểm gián đoạn của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

Lời giải: Xét giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

Nếu

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A = \frac{1}{2}$$

thì $f(x)$ liên tục tại điểm 0. Do cả giới hạn trái và giới hạn phải tại 0 đều tồn tại nên nếu $A \neq \frac{1}{2}$ thì 0 là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.
Bài tập: Xét tính liên tục và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số sau:

1. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & (|x| \leq 1) \\ |x| - 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(6x+1)}{x} & (x > 0) \\ x + 100 & (x \leq 0) \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{4x} - \cos x}{x} & (x \neq 0) \\ x + 100 & (x = 0) \end{cases}$$

Chương 3

Đạo hàm và ứng dụng

3.1 Khái niệm đạo hàm

3.1.1 Lý thuyết

Hàm số $f(x)$ khả vi (tồn tại đạo hàm) tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi giới hạn sau tồn tại:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1}$$

Nếu đặt hiệu số $x - x_0 = \Delta x$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.2}$$

Ta gọi giá trị $f'(x_0)$ là giá trị đạo hàm cấp 1 của $f(x)$ tại điểm x_0. Đối với các bài toán cho hàm rẽ nhánh thì ta cần phải khảo sát cả giới hạn trái và giới hạn phải của hàm số đã cho tại các điểm cần xét tương ứng để xét tính khả vi của nó.

3.1.2 Bài tập

Khảo sát tính khả vi của tất cả các hàm rẽ nhánh đã cho tại các điểm tương ứng trong phần bài tập chương 2 (Liên tục).

3.2 Công thức đạo hàm cơ bản

3.2.1 Lý thuyết

Ta có công thức về đạo hàm của hàm ngược như sau:

$$y'_x x'_y = 1$$

Đây là một công thức nên nhớ để có thể tính được đạo hàm của các hàm ngược như $\arcsin x$, $\arccos x$,... Ở đây chúng ta sẽ tính đạo hàm của hàm $y = \arcsin x$ từ công thức trên, các hàm ngược khác làm tương tự và có thể coi như bài tập vận dụng nên làm.
Từ hàm số $y = \arcsin x$, ta có thể suy ra $x = \sin y$, từ công thức trên ta có:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Vậy ta đã tìm được đạo hàm của hàm số $y_x = \arcsin x$ một cách dễ dàng và tránh nhớ công thức quá máy móc. Chứng minh tương tự với các hàm ngược khác, ta có bảng công thức đạo hàm sau:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.3}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.4}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.5}$$

$$(arccotx)' = \frac{-1}{1+x^2} \tag{3.6}$$

3.2.2 Bài tập

Bài tập mẫu: Tính đạo hàm cấp 1 của hàm số:

$$y = x^x$$

Lời giải: Đây là một bài toán quan trọng và kĩ năng lấy logarit tự nhiên cả 2 vế sẽ được áp dụng nhiều trong các bài toán sau này để tính đạo hàm các hàm số mũ (làm ý 7 phần bài tập tương tự):

$$y = x^x$$

$$\Leftrightarrow \ln y = x \ln x$$
$$\Leftrightarrow (\ln y)' = (x \ln x)'$$
$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1$$
$$\Leftrightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Bài tập: Tính đạo hàm cấp 1 của các hàm số sau:

1.
$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

2.
$$y = \tan(\ln x)$$

3.
$$y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$$

4.
$$y = \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$$

5.
$$y = |(x - 1)(x + 1)^2|$$

6.
$$y = \begin{cases} 1 - x & (x \in (-\infty, 1)) \\ (1 - x)(2 - x) & (x \in [1, 2]) \\ -(2 - x) & (x \in (2, +\infty)) \end{cases}$$

7.
$$y = \frac{(2x - 1)^3}{\sqrt{3x + 2}\sqrt[3]{3x - 1}}$$

3.3 Đạo hàm cấp cao

3.3.1 Lý thuyết

Đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 được định nghĩa là:

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x_0))'$$

với $f^{(n-1)}(x_0)$ là đạo hàm cấp $n-1$ của hàm số. Chúng ta xây dựng bảng công thức đạo hàm cấp cao của một số hàm số cơ bản.

$$\sin^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \tag{3.7}$$

$$\cos^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \tag{3.8}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \tag{3.9}$$

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{3.10}$$

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \tag{3.11}$$

Tất cả các công thức nêu trên đều có thể dễ dàng chứng minh bằng phép quy nạp. Một điều quan trọng khi học công thức là hãy cố gắng chứng minh lại các công thức để hiểu bản chất toán của chúng. Ta sẽ bắt đầu chứng minh từng công thức đã nêu:

Với $n = 1, 2$, dễ thấy tất cả các công thức đều đúng. Giả sử các công thức đều đúng với $n = k$ ($k \geq 2$), ta sẽ chứng minh chúng cũng đúng với $n = k+1$ như sau:

$$\sin^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = (\sin^{(k)}(x))'$$

$$\cos^{(k+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = (\cos^{(k)} x)'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}} = [(-1)^k k! x^{(-k-1)}]' = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}\right]'$$

$$
\begin{aligned}
(x^\alpha)^{(k+1)} &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k)x^{\alpha-(k+1)} \\
&= [\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}]' \\
&= [(x^\alpha)^{(k)}]'
\end{aligned}
$$

Khi cần tính đạo hàm cấp cao của tích hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$, ta có thể dùng công thức Leibniz:

$$[f(x).g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \tag{3.12}$$

3.3.2 Bài tập

Bài tập sử dụng các công thức đạo hàm cấp cao

1. Chứng minh lại tất cả các công thức đạo hàm cấp cao.

2. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây:

$$y = \frac{x^2}{1-x}$$

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$$

$$y = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

$$y = \sin^2 x$$

$$y = \frac{1}{2x+3}$$

Bài tập sử dụng công thức Leibniz (3.12)

Bài tập mẫu: Tính đạo hàm cấp 20 của hàm số $f(x) = x^2e^{2x}$:
Lời giải: Áp dụng công thức Leibniz cho đạo hàm cấp cao, ta có:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = (x^2e^{2x})^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)} \\
&= C_n^0(x^2)^{(0)}(e^{2x})^{(n)} + C_n^1(x^2)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)} + C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)} \\
&+ C_n^3(x^2)^(3)(e^{2x})^{(n-3)} + ... \\
&= 2^n x^2 e^{2x} + 2^{n-1}n2xe^{2x} + 2C_n^2 2^{n-2}e^{2x} \\
&= e^{2x}(2^n x^2 + 2^n nx + 2^{n-1}C_n^2) \\
&= 2^n e^{2x}\left(x^2 + nx + \frac{C_n^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Thay $n = 20$ vào phương trình trên, ta thu được kết quả $2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$
Bài tập:

1. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = x\cos 2x$
2. Tính giá trị $f^{(20)}(\pi)$ của hàm số $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\sin 2x$
3. Tính giá trị $f^{(10)}(0)$ của hàm số $f(x) = x^2(\sin^4 x + \cos^4 x)$
4. Tính giá trị $f^{(10)}(-1)$ của hàm số $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\ln(x + 2)$

3.4 Khai triển Taylor và Maclaurin

3.4.1 Lý thuyết

Khai triển Taylor được sử dụng để tính xấp xỉ giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 như sau:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + 0((x - x_0)^n) \tag{3.13}$$

Trong trường hợp đặc biệt $x_0 = 0$, ta gọi công thức (3.13) là khai triển Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + 0(x^n) \tag{3.14}$$

Chúng ta sẽ xây dựng các công thức khai triển Maclaurin của một số hàm số cơ bản. Điều kiện tiên quyết để làm được các bài tập phần khai triển Taylor và Maclaurin này là kĩ năng tính toán phải tốt và nắm rất vững **công thức đạo hàm cấp cao**. Tại điểm $x_0 = 0$, ta khai triển các hàm số như sau:

- $$f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos \frac{k\pi}{2}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + 0(x^{2n})$$

- $$f(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + 0(x^{2k+1})$$

- $$f(x) = \frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{(x_0+1)^k k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + 0(x^n)$$

- $$\begin{aligned} f(x) = \ln(x+1) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!(x_0+1)^k} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + 0(x^n) \end{aligned}$$

- $$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + 0(x^n)$$

- $$\begin{aligned} f(x) = (x+1)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(x+1)^{\alpha-k}}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + 0(x^n) \end{aligned}$$

3.4.2 Bài tập sử dụng khai triển Taylor

Bài tập mẫu 1: Khai triển hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ theo lũy thừa của $x + 1$.

Lời giải: Từ công thức của khai triển Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + 0((x - x_0)^n)$$

Ta tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = -9$ như sau:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(-1) = 17$$

$$f''(x) = 12x - 6 \Rightarrow f''(-1) = -18$$

$$f'''(x) = 12 \Rightarrow f'''(-1) = 12$$

Vậy ta tìm được khai triển của hàm số $f(x)$ như sau:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-9}{0!} + \frac{17}{1!}(x+1) + \frac{-18}{2!}(x+1)^2 + \frac{12}{3!}(x+1)^3 \\ &= 2(x+1)^3 - 9(x+1)^2 + 17(x+1) - 9 \end{aligned}$$

Bài tập mẫu 2: Khai triển hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ theo công thức Taylor tại điểm $x_0 = 1$

Lời giải: Chúng ta có thể tiếp cận bài toán này theo hai hướng, hướng thứ nhất là khai triển trực tiếp bằng công thức Taylor (3.13) hoặc đặt ẩn phụ rồi khai triển gián tiếp bằng công thức Maclaurin (3.14).

Hướng 1: Từ dạng khai triển của công thức Taylor (3.13), ta sẽ tìm giá trị $f^{(k)}(1)$:

$$f^{(k)}(x) = (x^{\frac{1}{2}})^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)...\left(\frac{1}{2} - k + 1\right)x^{\frac{1}{2}-k} = k!\binom{\frac{1}{2}}{k}x^{\frac{1}{2}-k}$$

Thay $x = 1$, ta thu được

$$f^{(k)}(1) = k!\binom{\frac{1}{2}}{k}$$

Thay vào công thức khai triển Taylor tại $x_0 = 1$, ta có:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k}(x-1)^k + 0((x-1)^n)$$

Hướng 2: Đặt ẩn phụ rồi khai triển gián tiếp bằng công thức Maclaurin (3.14)
Đặt $t = x - 1$, ta biến đổi từ khai triển công thức Maclaurin cơ bản như sau:

$$\sqrt{x} = (t+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} t^k + 0(t^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k}(x-1)^k + 0((x-1)^n)$$

Dễ thấy cả 2 hướng giải trên tương đương với nhau, với mỗi bài toán ta cần chọn hướng đi hợp lý để giải quyết.
Bài tập mẫu 3: Khai triển hàm số $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 12)$ tại điểm $x_0 = 1$
Lời giải: Đối với bài tập này, ta thấy nếu chọn hướng 1 sẽ rất khó giải quyết nên ta sẽ xử lý theo hướng 2 như sau:
Đặt $t = x - 1$, ta biến đổi:

$$\ln(x^2 - 7x + 12) = \ln(t^2 - 5t + 6) = \ln(t-2) + \ln(t-3)$$

Dễ thấy chúng ta không thể đi tiếp theo hướng này do $t \to 0$ nên $\ln(t-2)$ và $\ln(t-3)$ không xác định. Thay vào đó, ta sẽ đặt $t = 1 - x$ rồi biến đổi:

$$\begin{aligned}
\ln(x^2 - 7x + 12) &= \ln(t^2 + 5t + 6) = \ln(t+2) + \ln(t+3) \\
&= \ln 2\left(t + \frac{1}{2}\right) + \ln 3\left(t + \frac{1}{3}\right) \\
&= \ln 6 + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right) \\
&= \ln 6 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{t}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{t}{3}\right)^k \\
&= \ln 6 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(3^{-k} + 2^{-k})(1-x)^k \\
&= \ln 6 - \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{-k} + 2^{-k}}{k}(x-1)^k
\end{aligned}$$

Bài tập: Thực hiện các yêu cầu sau:

1. Khai triển hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ theo lũy thừa của $x + 1$.

2. Khai triển hàm số $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$ tại điểm $x_0 = -1$

3. Khai triển hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$:

$$f(x) = \ln \frac{(x-1)^{(x-2)}}{3-x}$$

4. Khai triển hàm số sau tại điểm $x_0 = 3$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$$

5. Khai triển hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 10x + 25}$$

3.4.3 Bài tập sử dụng khai triển Maclaurin

Bài tập mẫu 1: Khai triển Maclaurin của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x}}$$

Lời giải: Ta biến đổi tương đương như sau:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} = (1+4x)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{-1}{2}}{k} (4x)^k$$

Thế nhưng, do phép toán $\binom{\frac{-1}{2}}{k}$ không tồn tại nên ta phải tìm một cách biểu diễn khác. Ta có:

$$\begin{aligned}
(1+4x)^{\frac{-1}{2}} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)...(\frac{-1}{2}-k+1)}{k!} \right) 4^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}...\frac{1-2k}{2}}{k!} \right) 4^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!} \right) 4^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k(2k-1)!!}{k!} x^k + o(x^n)
\end{aligned}$$

Bài tập: Khai triển Maclaurin của các hàm số sau:

1. $$f(x) = \ln \frac{2-3x}{2+3x}$$

2. $$f(x) = \ln(2+x-x^2)$$

3. $$f(x) = \frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$$

4. $$f(x) = \frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$$

5. $$f(x) = \cos^3 x$$

3.5 Ứng dụng của đạo hàm trong một số bài toán