Numerical Method Assignment 2 Solution

有問題可聯絡助教

1. (10%)

forward substitution 各 1 分

$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{T}$ 各 1 分

(a.) 5%

$\boldsymbol{LP}x = b$

Let $\boldsymbol{P}x = y$, solve $\boldsymbol{L}y = b$ by forward substitution

$x = \boldsymbol{P}^{-1}y$, since $\boldsymbol{P}$ is an orthogonal matrix, $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{T}$

obtain x by computing $x = \boldsymbol{P}^{T}y$

(b.) 5%

$\boldsymbol{PL}x = b$

$\boldsymbol{L}x = \boldsymbol{P}^{-1}b = \boldsymbol{P}^{T}b$

Let $\boldsymbol{P}^{T}b = b'$

obtain x by solve $\boldsymbol{L}x = b'$ by forward substitution

p.s.

$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{T}$ 如果沒有寫會扣分是因為，希望同學能夠了解學習數值方法的目的不是算數學，而是以程式運算的角度去思考。在程式運算時，反矩陣(inverse)是難算的，但 substitution 和轉置矩陣(transpose)是簡單快速的。所以有些人的過程中出現$\boldsymbol{L}^{-1}$其實也是不太好的表示方法。

有人會沒有寫 forward substitution，這樣不準確，畢竟他一定是可以 solve，但要說明是何種方法，也有人會寫成用高斯消去，雖然也是可以求出解沒錯，但是就忽略了題目的 lower triangular matrix 了，且運算速度也會比較慢。

lower triangular -> forward substitution

upper -> backward

2. (20%)

(a) 8 分 (4 分給正確答案 2)(4 分給過程 or 解釋)

(b) 5 分 (3 分給過程)(2 分給解)

(c) 5 分 (3 分給過程)(2 分給解)

2 分: (結論 不相同) bc 解完全沒差別會扣分

a. 2 row interchanges, row1<->row2, row2<->row3

正確答案(-6/53, 4/54, 83/53)’ or (-0.1132, 0.0755, 1.5660)’

b. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 8 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ -> $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ -> $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1.63 & 3.75 & 5.75 \\ 0 & 9.63 & 2.25 & 4.25 \end{bmatrix}$ ->

$\begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 9.63 & 2.25 & 4.25 \\ 0 & -1.63 & 3.75 & 5.75 \end{bmatrix}$ -> $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 9.63 & 2.25 & 4.25 \\ 0 & 0 & 4.13 & 6.47 \end{bmatrix}$

get the solution by backward substitution: [-0.1134, 0.0753, 1.5666]’

p.s. 有人會用手算，因為先得出 z，再依序算 y，x，所以誤差 z<y<x(誤差越來越大)，但其實只要每一輪的 matrix 算完後捨去不必要的位數就好。

c. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 8 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ -> $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 13 & -30 & -46 \\ 0 & 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ -> $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 13 & -30 & -46 \\ 0 & 0 & 24.5 & 38.3 \end{bmatrix}$

get the solution by backward substitution: [-0.1149, 0.0691, 1.5633]’

results are not the same.

p.s.這題主要是想說明 partial pivoting 的影響。

在位數不夠的情況下，如果有做 row interchange 可以讓答案誤差減小。

->(b 的答案優於 c)。

但因為大家保留位數的做法不同，不見得 b 結果會優於 c，只要過程正確，答案不相差太多，都會算對。

如果 row interchange 的過程正確，但做出來 bc 答案一樣，會扣一分。

3. (20%)

L 5%(一格 0.5)

U 5%

過程 10%

題目 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_1 A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3/2 & -7/2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 5/2 & -2 \end{bmatrix}$

$M_2 = [\text{略}]$, $M_2 M_1 A = [\text{略}]$

$M_3 = [\text{略}]$, $M_3 M_2 M_1 A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13/3 \end{bmatrix} = U$

$A = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{L} = (M_3 M_2 M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 7/6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

為了符合要求，$\boldsymbol{L}' = 2\,\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{U}' = (1/2)\,\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7/3 & -6 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13/6 \end{bmatrix}$

p.s.有人用設未知數的方法去求解，這次沒有扣分，因為題目沒有說要使用 LU factorization，但如果考試出現類似題目，再使用同樣方法就要扣分了!

4. (20%) **A,B 各 10 分(3 個公式各 2 分，6 個答案各 2 分)**

1-norm: $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |aij|$

2-norm: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$

∞-norm: $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |aij|$

(a) 21/ 14.4721/ 20
(b) 18/ 14.7774/ 21.1
矩陣 2-norm 部分有些同學會跟向量的 2-norm 搞混，$\|A\|_e$才是平方和開根號。

5. (25%)

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = LDU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a.) **5 個結果各 2 分**
有寫出公式做出 J 但最後做錯給 2 分

$$J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

The Jacobi Method starting at (1, 1), converges in one iteration to (1, 1);

starting at (1, -1) or (-1, 1), it alternates between (1, -1) and (-1, 1);
starting at (2, 5) or (5, 2), it alternates between (5, 2) and (2, 5)

(b.) **5 個結果各 1 分**
有寫出公式做出 J 但最後做錯給 1 分

$$J = -(L+D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The Gauss-Seidel Method starting at (1, 1) converges in one iteration to (1, 1);
starting at (1, -1), it converges to (-1, -1);
starting at (-1, 1), it converges to (1, 1);
starting at (2, 5), it converges to (5, 5);
starting at (5, 2), it converges to (2, 2);

(c.) **Repeat(a) and (b) 5 個 start point 分別做(a)和(b)，各 1 分**
要寫出逼近收斂結果(0,0) or 有列出越來越小的 pattern
逼近收斂結果寫成逼近近似解的扣 2 分
Since the matrix is nonsingular, the unique solution is (0, 0). After 180 iteration, it appears that both methods were converging very slowly to that value. Gauss-Seidel was converging slightly faster

6. (Bonus)(25%) **Choleskey Factorization**

$$\mathrm{A} = \mathrm{L}L^T = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

公式不只一種(可參考 wiki)，以 code 能跑出答案為準。
從 L 矩陣的左上角開始每個 row 執行以下等式可求出解答:

$$L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2}$$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right) \quad (if \quad i > j)$$

$$L_{ij} = 0 \quad (if \quad i < j)$$