- 牛頓法在 Jacobian matrix 為 singular (不能做 inverse)：
  J(R) is singular: < quadratic
  J(x) is singular and x is not root R: 可能會找不到解，也可能只是找解的速度變慢 (< quadratic)

- 證明一般牛頓法是二次收斂：
  $Newton\ \ method\colon\ x = x - J^{-1}(x)F(x)$
  $Fixed\ \ point\ \ method\colon\ x = G(x)$
  先假設牛頓法的 *J(x)*的 inverse 存在，並定義會用到的符號：

$$J^{-1}(x) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

由牛頓法公式可推出:

$$g_i(x) = x_i - [row\ \ i\ \ of\ \ J^{-1}(x)] * F(x) = x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * f_j(x)$$

在 Fixed point method 中辨認是否為二次收斂：$J_G(R) = 0$

$J_G(R)$: 把$G(x)$做微分，即每個$g(x)$對向量x中的元素做偏微分

$$J_G(x) = \begin{bmatrix} \partial g_1/x_1 & \cdots & \partial g_1/x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g_n/x_1 & \cdots & \partial g_n/x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * f_j(x)\right)$$

$$= \frac{\partial x_i}{\partial x_k} - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} b_{ij} * f_j(x) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * \frac{\partial}{\partial x_k} f_j(x)\right)$$

已知 $\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = 0\ \ when\ \ i \neq k, and\ \ \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = 1\ \ when\ \ i = k$

$f_j(R) = 0$，故計算$J_G(R)$時可省略$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} b_{ij} * f_j(x)$

又$\frac{\partial}{\partial x_k} f_j(x)$為一開始的$J(x)$*的*元素，

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} * \frac{\partial}{\partial x_k} f_j(x) \text{ 可視為} \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} \partial f_1/x_k \\ \partial f_2/x_k \\ \vdots \\ \partial f_n/x_k \end{bmatrix},$$

即$J^{-1}(x)$的$row\ \ i$與$J(x)$的$col\ \ k$相乘。

已知$J^{-1}J = I$，故當$i = k$時，相乘結果為 1；$i \neq k$時，相乘結果為 0。

綜合以上，

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 - (0 + 1) = 0 \ \ when \ \ i = k \\ 0 - (0 + 0) = 0 \ \ when \ \ i \neq k \end{cases}, \ J_G(x) = 0$$

得知當 J(x)的 inverse 存在時，牛頓法可以二次收斂。

**注意：$J(x)$和$J_G(x)$定義不同，不是同一個矩陣

- 參考連結: http://www.math.usm.edu/lambers/mat461/spr10/lecture23.pdf