Progettazione funzionale di sistemi meccanici

Ruote dentate

prof. Paolo Righettini
paolo.righettini@unibg.it

Università degli Studi di Bergamo
Mechatronics And Mechanical Dynamics Labs

January 10, 2012

Parte I

Introduzione alle ruote dentate

Caratteristiche delle trasmissioni a denti diritti

Criteri di scelta delle correzioni

Criteri di scelta delle correzioni

Part I

Introduzione

- considerando trasmissione fra assi paralleli
- Si può arrivare al concetto di trasmissione ad ingranaggi considerando dapprima una semplice trasmissione a ruote di frizione, nella quale le due ruote cilindriche si trasmettono il **moto per attrito**, rotolando l'una contro l'altra.
- il limite delle trasmissioni a ruote di trasmissione è dovuto al coefficiente d'attrito fra le superfici in contatto
- la necessità di trasmettere carichi significativi senza alcuna possibilità di slittamento ha portato a dotare di opportune dentature le originali superfici cilindriche, in modo che il moto sia trasmesso per accoppiamento fra le superfici delle dentature
- si hanno quindi trasmissioni con ruote dentate, il cui funzionamento può ancora essere schematizzato, **dal solo punto di vista cinematico**, col rotolamento di due superfici cilindriche ideali, che vengono denominate

  superfici "primitive" della coppia .

- come possono essere realizzate le dentature per un regolare funzionamento della trasmissione con rapporto di trasmissione costante per ogni posizione relativa della coppia di ruote?
- quali sono le caratteristiche geometriche delle dentature comunemente utilizzate?
- come sono fatti gli utensili per la realizzazione delle dentature?
- è possibile modificarne alcune caratteristiche geometriche per il miglioramento delle prestazioni?

Part II

Caratteristiche delle trasmissioni a denti diritti

- I denti degli ingranaggi cilindrici a denti diritti vengono realizzati con profili ad evolvente di cerchio
- la dentatura viene realizzata per mezzo di un utensile che, per motivi realizzativi e di vita, viene generalmente scelto con profilo rettilineo
- il fianco del dente è realizzato dall'utensile, rappresentato da una retta, nel suo moto relativo al pezzo

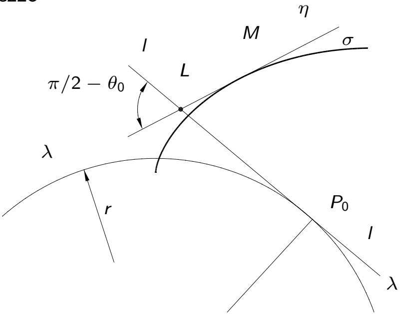
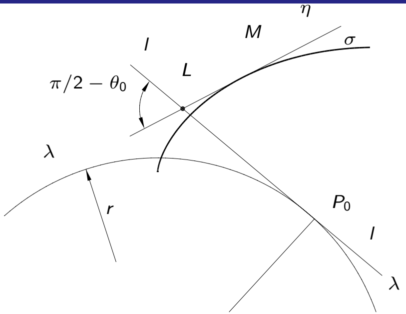
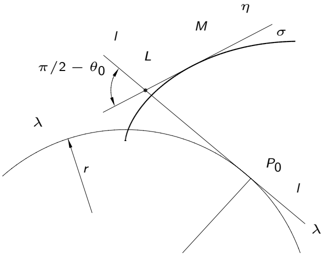


Figure: Profilo ad evolvente di cerchio.



- l'evolvente di cerchio σ è la linea inviluppo di una curva generatrice rettilinea η nel moto definito dal puro rotolamento della polare mobile l sulla polare fissa circolare λ di raggio r che costituiscono le *primitive* del moto.
- La curva η è una retta solidale nel punto L alla polare l, ed è inclinata rispetto ad essa dell'angolo $\pi/2 - \theta_0$, dove θ_0 è un angolo che con il raggio r della polare λ definisce il cerchio δ di cui la σ è l'evolvente.
- La l è una retta che rotola senza strisciare sulla circonferenza λ di raggio r.



- Nel punto di contatto M della σ con la η la velocità w del moto relativo è, per definizione di inviluppo, tangente alle due curve, quindi la normale ai profili nel punto M deve passare per il centro di istantanea rotazione P_0, punto di contatto delle polari l e λ
- L'angolo fra la normale P_0M e la polare l è perciò θ_0 per ogni punto M di contatto.

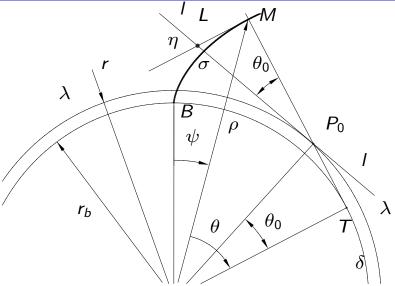
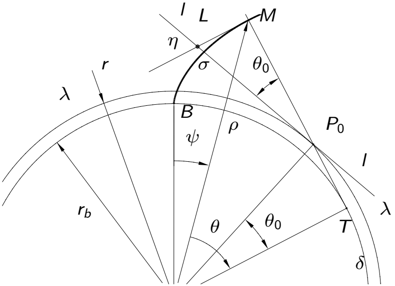


Figure: Profilo ad evolvente di cerchio, metodo degli epicicli

- L'angolo fra la normale P_0M e la polare l è perciò θ_0 per ogni punto M di contatto.
- Per questa ragione la normale al punto di contatto M è inoltre sempre tangente al cerchio δ di raggio $r_b = r\cos\theta_0$ detto "*cerchio fondamentale*" o di "*base*" di cui la σ ne è l'evolvente.
- **L'evolvente σ può perciò essere ottenuta come traiettoria di un punto di una retta normale alla η, la quale rotola senza strisciare sul cerchio fondamentale δ**



- La linea *l* rappresenta in figura prende anche il nome di *epiciclo*.
- Le coordinate polari ρ e ψ del profilo dell'evolvente possono essere ottenute eguagliando l'arco di circonferenza *TB* al segmento *TM* della retta generatrice dell'evolvente σ, e risultano:

$$\rho = r_b / \cos\theta \, , \qquad \psi = \tan\theta - \theta \tag{1}$$

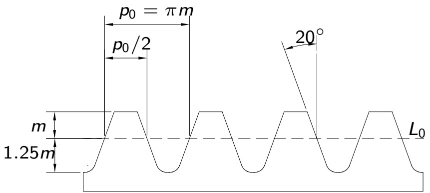
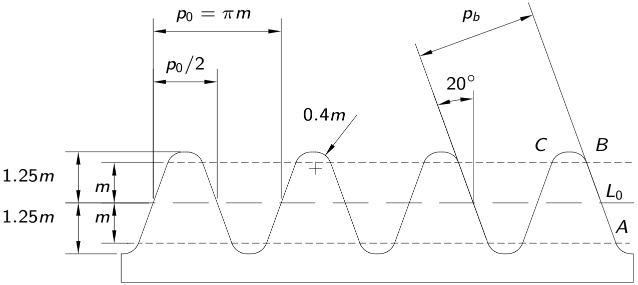


Figure: Dentiera di riferimento

- Quindi i profili ad evolvente dei denti si ottengono come inviluppo di una dentiera a fianchi diritti, quando il moto relativo tra ruota e dentiera è definito dal rotolamento della primitiva circolare della ruota sulla primitiva rettilinea della dentiera
- la figura rappresenta una dentiera normalizzata, caratterizzata dall'angolo di pressione $\theta_0 = 20^\circ$ e dal modulo m.
- Tutte le altre grandezze geometriche sono riferite al modulo. I valori possibili di m sono standardizzati.



- Per il taglio degli ingranaggi con il procedimento Maag si utilizza un utensile-dentiera (pettine) avente la forma della dentiera normalizzata
- il fianco è composto dal tratto rettilineo AB che scava l'evolvente e dalla sporgenza BC che scava la base del dente in modo da creare un gioco di fondo di $m/4$;
- i fianchi rettilinei distano fra loro del passo di base $p_b = p_0 \cos \theta_0$.
- Sulla linea L_0 (primitiva dell'utensile nel taglio di ingranaggi non corretti) lo spessore del dente coincide con il vano lasciato fra due denti consecutivi.

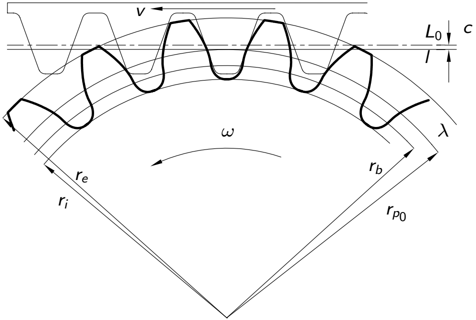
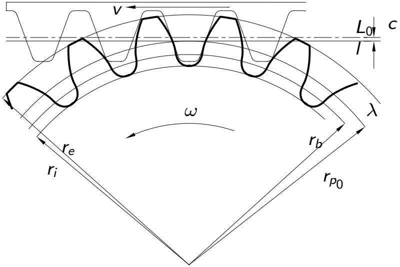


Figure: Taglio ruota con dentiera

- la figura mostra l'utensile-dentiera in una posizione di taglio della ruota
- Si parte da una ruota di diametro esterno d_e opportunamente calcolato.
- La macchina dentatrice funziona come una stozzatrice, cioè asporta il materiale con un moto alternativo normale al piano della figura. Tale moto di taglio si alterna a quello di inviluppo.

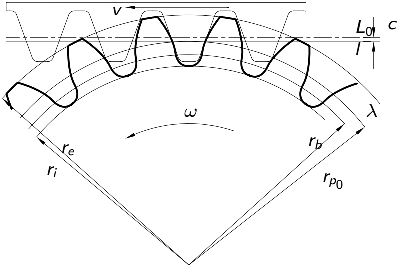


- Il movimento di inviluppo può essere ottenuto animando l'utensile con velocità v e la ruota con velocità ω, legate dalla relazione $v = \omega d_{p_0}/2$.
- Il diametro d_{p_0} della primitiva di taglio λ dipende dal modulo m e dal numero di denti z che si vogliono realizzare; esso si determina imponendo l'uguaglianza $nz = 60v/p$ tra i numeri di denti della ruota e dell'utensile transitanti al minuto per la zona di taglio

$$d_{p_0} = \frac{2v}{\omega} = \frac{2v}{(2\pi n/60)} = \frac{pz}{\pi}$$

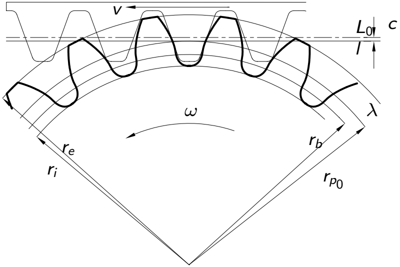
- per definizione di modulo $p = \pi m$ si ottiene la nota espressione

$$d_{p_0} = mz \quad . \qquad (2)$$



- A causa del moto di inviluppo i fianchi dei denti della ruota tagliata non risultano diritti ma, almeno nel tratto efficace (quello inviluppato dal segmento AB) hanno la forma dell'evolvente di un cerchio δ, detto fondamentale, tangente alla retta inclinata di θ_0 rispetto alla primitiva di taglio, avente quindi il diametro

$$d_b = d_{p_0} \cos\theta_0 \quad . \tag{3}$$



- Il moto relativo di inviluppo può vedersi come il rotolamento della primitiva λ su una primitiva rettilinea l solidale all'utensile e **parallela o coincidente** con la L_0
- La forma della dentatura ottenuta dipende dalla posizione data all'utensile per il taglio, e precisamente dalla distanza c della primitiva l (tangente alla λ) dalla linea di riferimento L_0.
- Se la dentiera è stata disposta con la linea di riferimento L_0 coincidente con la l ($c = 0$) si ottengono dentature non corrette; se la dentiera è stata disposta più in fuori, si hanno dentature con correzione **positiva** ($c > 0$), se è stata disposta più in dentro si hanno dentature con correzione **negativa** ($c < 0$).
- Il rapporto $x = c/m$ rappresenta il valore **adimensionale della correzione**.

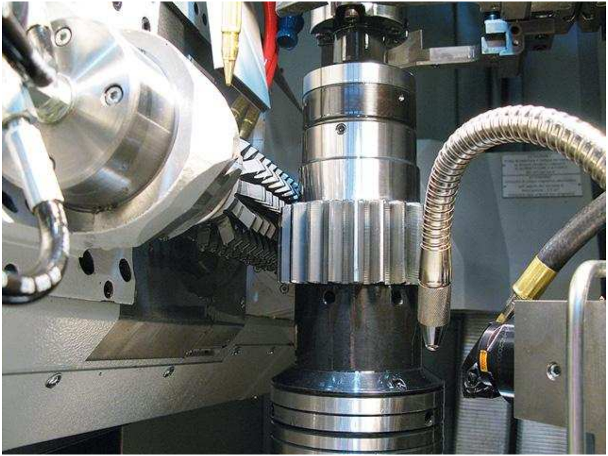
Utensile dentiera

Dentatrici MAAG

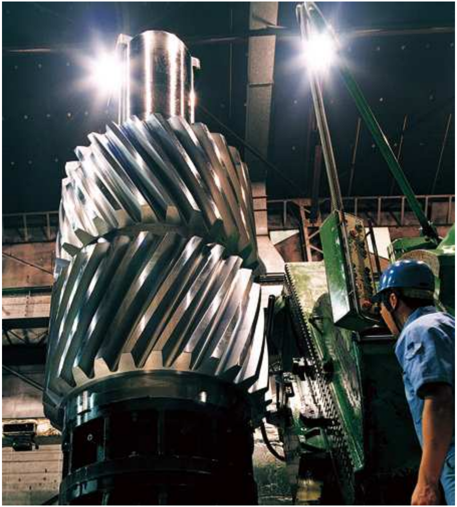
Dentatrici MAAG

Dentatrici MAAG

Utensile Creatore



Grandi Dimensioni



Grandi Dimensioni

Grandi Dimensioni

Rettifica

- Poichè la dentiera viene spostata di c anche i raggi di troncatura della ruota vengono aumentati (o diminuiti) di c;
- il diametro di troncatura esterna, che nelle dentature non corrette vale $d_e = d_{p_0} + 2m$, viene preso uguale a

$$d_e = d_{p_0} + 2m + 2c = m(z + 2 + 2x) \quad , \tag{4}$$

- mentre il diametro di troncatura interna, scavato dalla parte dell'utensile tratteggiata in figura 5, risulta uguale a

$$d_i = d_{p_0} - 2.5m + 2c = m(z - 2.5 + 2x) \; . \tag{5}$$

- L'altezza del dente risulta quindi uguale ad

$$h = (d_e - d_i)/2 = 2.25m$$

come per le dentature non corrette, ma suddivisa nell'addendum

$$a = (d_e - d_{p_0})/2 = m + c = m(1 + x)$$

e nel dedendum

$$b = (d_{p_0} - d_i)/2 = 1.25m - c = m(1.25 - x) \quad .$$

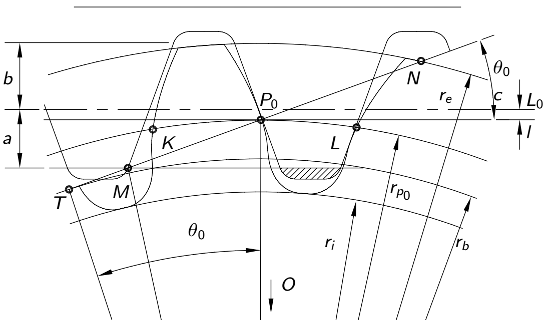


Figure: Punti di contatto tra utensile e ruota

- Il passo dei denti sulla primitiva λ di taglio (KL in figura) è uguale a quello della dentiera, cioè vale $p_0 = \pi m$;

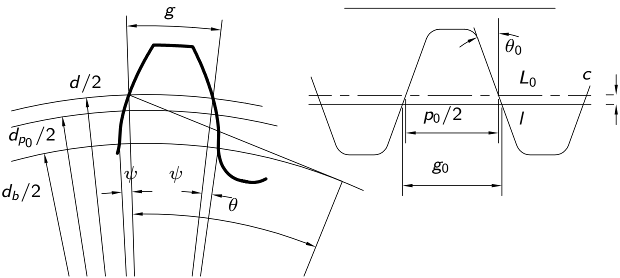
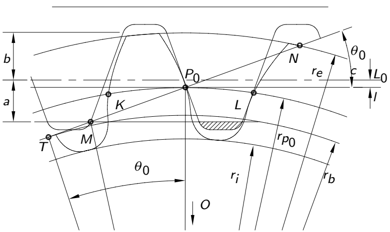


Figure: Spessore del dente

- lo spessore del dente misurato **sulla primitiva l dell'utensile risulta uguale ai vani sulla dentiera**:

$$g_0 = \frac{p_0}{2} + 2c\tan\theta_0 = m(\frac{\pi}{2} + 2x\tan\theta_0) \quad . \tag{6}$$

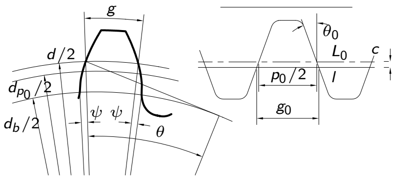
profilo efficace



- Il fianco del dente della ruota, o almeno la sua parte efficace (inviluppata dai fianchi diritti dell'utensile) è l'evolvente del cerchio fondamentale di diametro d_b
- l'evolvente è compresa tra il diametro di troncatura esterno d_e ed un diametro $d_i' = MO$, che risulta sempre maggiore o al massimo uguale al diametro d_b del cerchio fondamentale.
- d_i' potrebbe chiamarsi diametro di troncatura interna del profilo efficace
- $a = m - c = m(1 - x)$ è l'addendum apparente della dentiera (escludendo cioè la parte tratteggiata di figura), si può ricavare la formula

$$d_i' = 2MO = 2\sqrt{OT^2 + MT^2} \quad (7)$$

Spessore del dente



- Per determinare la forma del dente si possono ricavare i valori dell'angolo caratteristico θ e dello spessore circolare g in funzione del generico diametro d.
- per ogni punto sul profilo del dente intercettato dal diametro d, la proiezione di $d/2$ sul raggio di base è costante per la definizione di evolvente

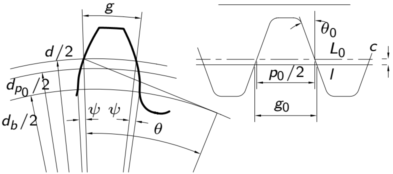
$$d \cos\theta = d_b = cost$$

- lo spessore del dente sull'arco di circonferenza intercettato dal diametro d vale

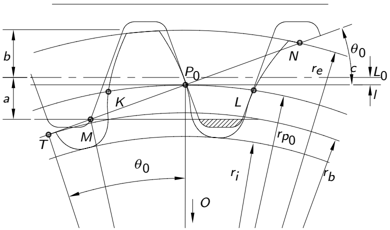
$$g = (\alpha_b - 2\psi)\,\frac{d}{2}$$

in cui α_b rappresenta il settore angolare sotteso dalla base del dente in corrispondenza del diametro di base d_b

Spessore del dente



- $$g = (\alpha_b - 2\psi)\,\frac{d}{2}$$
- risulta
$$\frac{g}{d} + \psi = \frac{\alpha_b}{2} = cost$$
- e quindi
$$\frac{g}{d} + \psi = \frac{g_b}{d_b} = cost \quad . \tag{8}$$
- ricordando che
$$\psi = \tan\theta - \theta = \operatorname{inv}\theta \; . \tag{9}$$



- I valori delle costanti si determinano tenendo presente che in corrispondenza della primitiva di taglio, cioè per $d = d_{p_0}$, deve essere $\theta = \theta_0$ e $g = g_0$

$$d \cos\theta = d_{p_0} \cos\theta_0 \;, \tag{10}$$

- d_{p_0} diametro primitivo di taglio
- fissato d si ricava θ, e

$$\boxed{\frac{g}{d} + \operatorname{inv}\theta = \frac{g_0}{d_{p_0}} + \operatorname{inv}\theta_0} \tag{11}$$

- da cui, noti g_0, d_{p_0}, d e θ, si ricava g.

- spessore del dente sulla primitiva di taglio, in funzione del modulo, dell'angolo di pressione e della correzione

$$g_0 = \frac{p_0}{2} + 2c \tan\theta_0 = m(\frac{\pi}{2} + 2x \tan\theta_0)$$

- relazione fra d e θ dalle proprietà dell'evolvente

$$d \cos\theta = d_{p_0} \cos\theta_0$$

- calcolo di ψ in funzione di θ

$$\psi = \tan\theta - \theta = \mathrm{inv}\,\theta$$

- calcolo di $g = g(d, \theta)$

$$\frac{g}{d} + \mathrm{inv}\,\theta = \frac{g_0}{d_{p_0}} + \mathrm{inv}\,\theta_0$$

Esempio

Calcolare lo spessore del dente sul cerchio di troncatura esterna di un ingranaggio corretto.

- sia z il numero di denti, m il modulo, θ_0 l'angolo di pressione della dentiera generatrice, $c = mx$ la correzione;
- il diametro del cerchio di troncatura esterna vale $d_e = d_{p_0} + 2m + 2c$, dove $d_{p_0} = mz$;
- l'angolo di pressione in corrispondenza del diametro d_e è dato dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{d_{p_0}}{d_e}\cos\theta_0 \ ;$$

- lo spessore g richiesto si ricava infine con la formula

$$\frac{g}{d_e} + \mathrm{inv}\,\theta = \frac{g_0}{d_{p_0}} + \mathrm{inv}\,\theta_0 \ ,$$

nella quale g_0, spessore del dente sulla primitiva di taglio, vale

$$g_0 = \frac{\pi m}{2} + 2c\tan\theta_0 \ .$$

Trasmissione del moto

Il profilo dei denti e la loro disposizione attorno alle primitive deve permettere di:

- garantire continuià del moto di rotazione delle ruote (numero intero di denti per ogni ruota, da cui $mz = d_{p_0}$)
- garantire ingranamento fra i denti delle ruote, dotata ciascuna di z_1 e di z_2 denti
- questo consente di definire a priori in rapporto di trasmissione "medio" valutato eguagliando il numero di denti $\omega_1 z_1$ e $\omega_2 z_2$ che transitano in un minuto nella zona di lavoro

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

- questo rapporto di trasmissione medio è garantito da **qualsiasi** tipologia di dente
- I profili dei denti sono **opportunamente realizzati** in modo che il rapporto di trasmissione istantaneo sia costante, coincidente al valore precedentemente calcolato

- I profili ad evolvente di cerchio tracciati con il medesimo procedimento (quindi con la stessa dentiera) su due ruote dentate costituenti un ingranaggio, risultano fra di loro coniugati (proprietà dei profili coniugati)
- Sono quindi in grado di trasmettere il moto come lo trasmetterebbero i diametri primitivi rotolando uno sull'altro senza strisciare (diametri primitivi di taglio su cui, durante la fase di lavorazione, nel moto relativo la dentiera rotolava senza strisciare sulla ruota)
- Nel moto assoluto **la velocità del punto di contatto delle primitive deve essere uguale per le due ruote** affinché non ci sia strisciamento

$$r_{p0\,1}\omega_1 = r_{p0\,2}\omega_2$$

  dove $r_{p0\,1}$ e $r_{p0\,2}$ sono rispettivamente il raggio della primitiva della ruota motrice e della ruota condotta.
- Definendo il rapporto di trasmissione istantaneo $\tau = \omega_2/\omega_1$ come il rapporto fra la velocità di rotazione della ruota condotta e la velocità di rotazione della ruota motrice, risulta

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_{p0\,1}}{r_{p0\,2}}\ .$$

- La lunghezza dell'arco di cerchio fra due punti omologhi della dentatura misurato sul diametro primitivo delle ruote, deve essere uguale per le due ruote

$$\frac{2\pi r_{p0\,1}}{z_1} = \frac{2\pi r_{p0\,2}}{z_2} \,,$$

$$\frac{r_{p0\,1}}{r_{p0\,2}} = \tau = \frac{z_1}{z_2} \,. \tag{12}$$

- Il rapporto di trasmissione istantaneo di un ingranaggio può quindi essere calcolato come il rapporto fra il numero di denti della ruota motrice ed il numero di denti della ruota condotta.

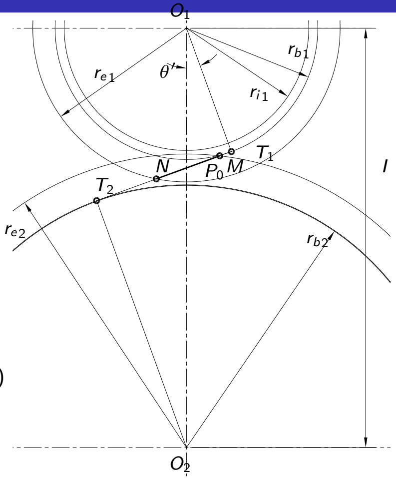
Ingranamento

- il movimento tra due ruote dentate tagliate con lo stesso utensile si trasmette in modo **cinematicamente corretto** purché esse siano disposte con un interasse I poco minore della somma dei raggi di troncatura esterna
- l'interasse

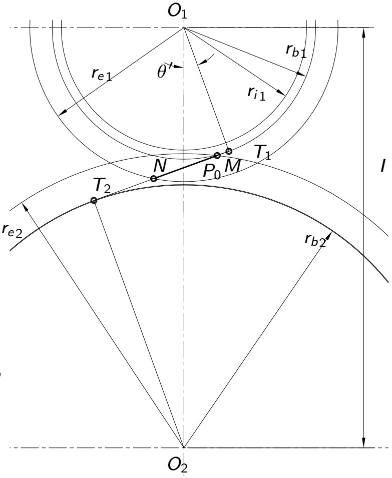
$$I_0 = \frac{d_{p0\,1} + d_{p0\,2}}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \tag{13}$$

è detto interasse "di taglio"

- i contatti fra i fianchi dei denti avvengono nella zona compresa tra i due cerchi di troncatura esterna comune alle due ruote dentate



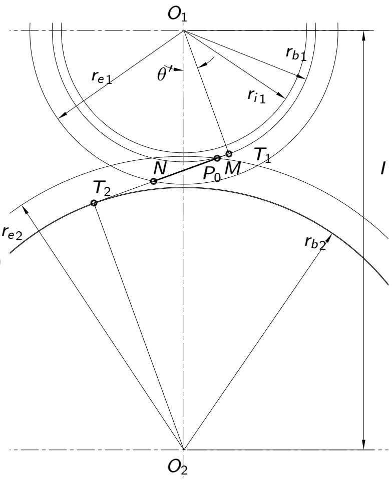
- Se P è un generico punto di contatto, per una ovvia proprietà dell'evolvente la normale ai profili nel punto di contatto, sarà tangente ai cerchi fondamentali delle due ruote
- tale tangente, la $T_1 T_2$ non dipende da P è ovvio che i contatti possono aversi solo su di essa nel tratto MN
- Su tale retta i profili dei denti si susseguono ad una distanza pari a quella fra i fianchi rettilinei dell'utensile dentiera, pari al passo p_b misurato sul cerchio fondamentale di ciascuna ruota, che vale $p_b = \pi m \cos\theta_0$ e che quindi è uguale per entrambe.



- Se $MN > p_b$ prima che due denti si separino (uscendo da N) altri due sono già entrati in presa (entrando da M) e il moto può proseguire indefinitamente con continuità.
- si definisce il fattore di ricoprimento

$$f_c = \frac{MN}{p_b} \tag{14}$$

  che deve risultare maggiore di 1 (normalmente compreso fra 1 e 2)
- Quando $1 < f_c < 2$ il segmento MN viene diviso in due zone: la zona centrale dei contatti singoli e la zona dei contatti doppi,



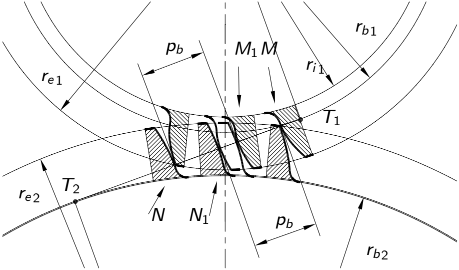


Figure: Zone con contatti singoli e doppi

- la zona centrale dei contatti singoli M_1N_1 e la zona dei contatti doppi, costituita dai restanti segmenti MM_1 ed NN_1, fra loro uguali
- Quando due denti sono a contatto in un punto di M_1M altri due denti sono a contatto in un punto di N_1N, e la **spinta sui denti viene suddivisa tra le due coppie**
- quando due denti sono a contatto in un punto di M_1N_1 non si hanno altri denti a contatto e quindi essi sopportano da soli tutto il carico.

- i due profili a contatto in un generico punto P della retta $T_1 T_2$ possono essere approssimati con i due cerchi osculatori di centri T_1 e T_2 (che per definizione di evolvente sono i centri di curvatura) e raggi $\rho_1 = PT_1$ e $\rho_2 = PT_2$
- Tutto avviene allora come se nell'istante considerato la trasmissione del moto fosse affidata a tali cerchi, incernierati rispettivamente in O_1 ed O_2.
- Tali cerchi si trasmettono il moto come il quadrilatero equivalente $O_1 T_1 T_2 O_2$: la biella $T_1 T_2$, tangente ai cerchi fondamentali, scorre lungo la retta dei contatti con velocità uguale a quella $\omega_1 r_{b1} = \omega_2 r_{b2}$ delle cerniere T_1 e T_2 cioè la retta $T_1 T_2$ rotola senza strisciare sui cerchi fondamentali
- come se si trattasse cioè di una fune inestensibile che si srotola da un cerchio arrotolandosi sull'altro

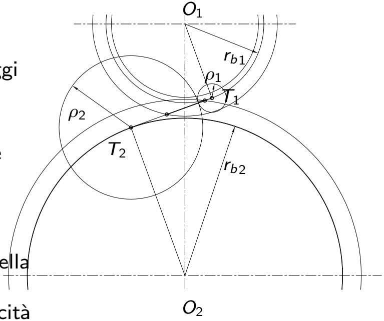
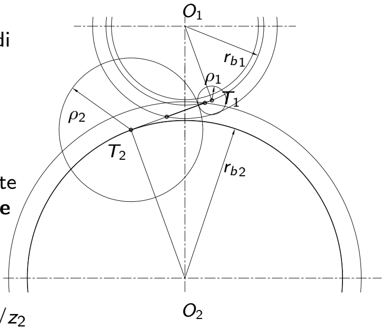


Figure: Raggi di curvatura dei denti nel punto di contatto

- le dimensioni del quadrilatero equivalente non dipendono dalla posizione del punto di contatto P
- da P non dipende nemmeno il valore del rapporto di trasmissione istantaneo $\tau = \omega_2/\omega_1$; risultando $\tau = cost$
- la trasmissione del moto è cinematicamente corretta, **indipendentemente dall'interasse adottato**
- Dal quadrilatero $O_1 T_1 T_2 O_2$ risulta $\tau = r_{b1}/r_{b2}$ ed essendo $r_{b1}/r_{b2} = d_{p0\,1}/d_{p0\,2} = z_1/z_2$ si ha $\tau = z_1/z_2$ come già visto



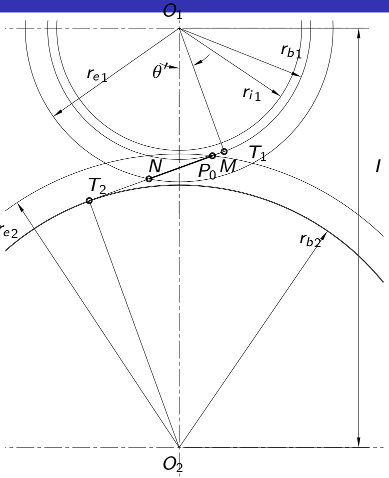
Primitive di funzionamento

- La condizione $\tau = cost$ può rappresentarsi come il rotolamento l'uno sull'altro di due cerchi primitivi di centri O_1 ed O_2 e diametri d_{p1} e d_{p2} tali che

$$\frac{d_{p1} + d_{p2}}{2} = I \qquad (15)$$

$$\frac{d_{p1}}{d_{p2}} = \tau \quad . \qquad (16)$$

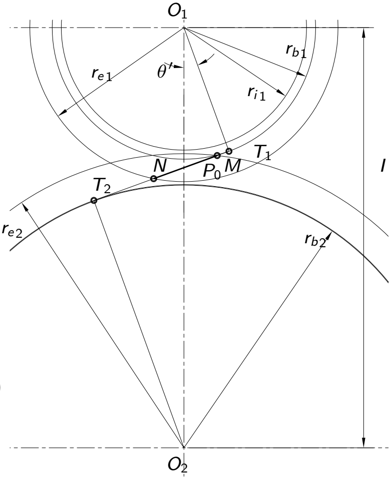
- le primitive " di funzionamento " coincidono con le primitive " di taglio " solo quando l'interasse di funzionamento I è uguale ad I_0.



- Le primitive di funzionamento sono a contatto nel punto P_0
- la retta $T_1 T_2$ risulta inclinata rispetto alla normale al telaio dell'angolo θ', detto angolo di **pressione di funzionamento**, il quale è uguale a θ_0 solo per $I = I_0$.
- è possibile dimostrare che

$$\boxed{\frac{I}{I_0} = \frac{d_{p1}}{d_{p01}} = \frac{d_{p2}}{d_{p02}} = \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta'} = \frac{p'}{p_0}} \quad (17)$$

- dove p' è il passo sulle primitive di funzionamento e p_0 è il passo sulle primitive di taglio



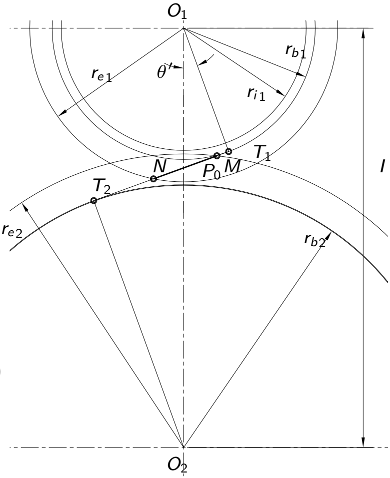
Al variare dell'interasse di funzionamento

- il rapporto di trasmissione rimane costante (solo per dentature con profili ad evolvente)
- varia il gioco fra i denti delle ruote
- varia l'angolo di pressione
- varia il fattore di ricoprimento
- il legame fra le grandezze di taglio e quelle di funzionamento è espresso dalla

$$\frac{I}{I_0} = \frac{d_{p1}}{d_{p01}} = \frac{d_{p2}}{d_{p02}} = \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta'} = \frac{p'}{p_0} \tag{18}$$

- Indicando con B_v la variazione percentuale di interasse,

$$B_v = \frac{I - I_0}{I_0}\ , \tag{19}$$



Esercizio

Calcolare le correzioni da apportare ad una coppia di ingranaggi che saranno montati con un interasse uguale a quello di taglio in modo che sulle primitive le dentature presentino il piccolo gioco laterale δ necessario per una buona lubrificazione.

- l'interasse di funzionamento coincide con quello di taglio
- coincidono anche le primitive di funzionamento con quelle di taglio
- spessore dente sulla primitiva di taglio

$$g_0 = \frac{\pi m}{2} + 2c \tan\theta_0 = \frac{p_0}{2} + 2c \tan\theta_0$$

- la somma degli spessori dei denti sulle primitive vale

$$g_{01} + g_{02} = p_0 + 2(c_1 + c_2)\tan\theta_0 \ ;$$

- imponendo che tale somma sia uguale al passo p_0 meno il gioco δ, si ottiene

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{2}\delta \cot\theta_0 \ .$$

Esercizio

Calcolare come varia al variare di I il gioco laterale sulle primitive di una coppia di ingranaggi non corretti.

- per $I = I_0$ si ha $\delta = 0$;
- ricordando

$$\frac{I}{I_0} = \frac{d_{p_1}}{d_{p01}} = \frac{d_{p_2}}{d_{p02}} = \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta'} = \frac{p'}{p_0} = 1 + B_v \tag{21}$$

- aumentando l'interasse della quantità $B_v I_0$, il nuovo interasse sarà

$$I = I_0(1 + B_v)$$

- le nuove primitive avranno diametri $d_{p_1} = d_{p_0\,1}(1 + B_v)$ e $d_{p_2} = d_{p_0\,2}(1 + B_v)$ ed il nuovo angolo di pressione sarà dato dalla relazione $\cos\theta = \cos\theta_0/(1 + B_v)$
- ricordando che

$$\frac{g}{d} + \mathrm{inv}\,\theta = \frac{g_0}{d_{p_0}} + \mathrm{inv}\,\theta_0$$

- detto $g_0 = \pi m/2$ lo spessore dei denti sulle primitive di taglio, gli spessori sulle **primitive di funzionamento** saranno

$$g_1 = g_0(1 + B_v) - (\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0)d_{p_1}$$

$$g_2 = g_0(1 + B_v) - (\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0)d_{p_2}$$

- da

$$g_1 = g_0(1 + B_v) - (\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0)d_{p1}$$
$$g_2 = g_0(1 + B_v) - (\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0)d_{p2}$$

- sommando si ottiene

$$g_1 + g_2 = 2g_0(1 + B_v) - 2I(\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0)$$

- poiché il passo sulle primitive di funzionamento vale

$$p' = p_0(1 + B_v) = 2g_0(1 + B_v)$$

- il gioco delle dentature al variare dell'interasse e dell'angolo di pressione è

$$\delta = p' - (g_1 + g_2) = 2I(\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0) \quad .$$

Part III

Ingranaggi Corretti

Introduzione

- Per evitare forti strisciamenti tra i denti, le dentature vengono poste a cavallo delle "**primitive**", ma mentre, nelle ruote "normali", la sporgenza e la rientranza dei denti rispetto alle "primitive" (addendum e dedendum) hanno valori normalizzati, nelle ruote "a cerchi spostati" tali quantità debbono essere stabilite volta per volta dal progettista.
- La realizzazione di ingranaggi con dentature "a cerchi spostati" o, come più brevemente si suol dire, "corrette" , è una prassi molto in uso nella costruzione delle ruote dentate perché consente di migliorarne notevolmente le condizioni di funzionamento senza una significativa complicazione del processo di fabbricazione.
- Infatti la correzione della dentatura semplicemente si ottiene imponendo un diverso posizionamento dell'utensile sulla macchina dentatrice.

- Inizialmente la correzione fu adottata solo nei casi in cui era indispensabile, e cioè in pratica quando si dovevano realizzare ruote dentate con numeri di denti così bassi da comportare un pericoloso “sottotaglio” della dentatura durante la fabbricazione.
- Successivamente ci si rese conto che con la correzione si può comunque migliorare il funzionamento degli ingranaggi, sostanzialmente perché essa consente di spostare alquanto la zona di ingranamento delle dentature collocandola in modo opportuno, sicché oggi quasi tutti gli ingranaggi “di potenza” vengono realizzati con spostamento dei cerchi, mentre gli ingranaggi “normali” vengono impiegati nelle applicazioni in cui debbono assolvere solamente una funzione cinematica.
- Di conseguenza la conoscenza del meccanismo delle “correzioni” non ha più il carattere specialistico di una volta, ma è diventata parte integrante delle nozioni necessarie per procedere nella normale progettazione degli ingranaggi.

- È importante osservare che le "correzioni" consentono anche di modificare il valore dell'interasse fra le ruote, rispetto a quello che risulterebbe con un proporzionamento normalizzato.
- Ciò permette di risolvere semplici problemi costruttivi, quali quelli che si hanno nei cambi di velocità, dove l'interasse è il medesimo per tutti gli ingranaggi, senza dover ricorrere ad ingranaggi elicoidali con angoli d'elica di valore inconsueto.
- La "correzione" viene anche utilizzata nella realizzazione di ingranaggi a dentatura interna quando si deve modificarne l'interasse: per questi ingranaggi non si hanno invece indicazioni quantitative che permettano anche di migliorarne le condizioni di funzionamento.

Calcolo Interasse di Funzionamento

- il rapporto di trasmissione in una coppia di ruote NON dipende da I solo per dentature con profili ad evolvente
- la possibilità di scegliere interassi diverse consente di adattare la trasmissione a specifiche esigenze
- Il valore effettivo dell'interasse viene determinato in sede di progetto imponendo che non vi siano giochi laterali tra i denti in presa (carichi dinamici), in modo cioè da evitare sbattimenti nel caso di inversione del senso del movimento (o della coppia trasmessa)
- in alcune applicazioni il gioco laterale viene imposto per compensare ed evitare grippaggio per disallineamenti degli alberi di trasmissione
- L'assenza di giochi è molto importante nel caso di meccanismi di posizionamento, ma anche nel caso più generale, dove un piccolo gioco laterale risulta utile per ragioni di lubrificazione, il valore dell'interasse viene stabilito con detta condizione, ottenendo poi in realtà il piccolo gioco richiesto con una opportuna scelta delle tolleranze di lavorazione.
- Per calcolare l'interasse di funzionamento col quale non si hanno giochi laterali si impone che sulle primitive di funzionamento la somma dello spessore del dente di una ruota con lo spessore del dente dell'altra risulti eguale al passo misurato sulle primitive di funzionamento.

- ricordando che:

$$\frac{g}{d} + \operatorname{inv}\theta = \frac{g_0}{d_{p_0}} + \operatorname{inv}\theta_0$$

$$g_0 = \frac{p_0}{2} + 2c\tan\theta_0$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{d_{p_1}}{d_{p01}} = \frac{d_{p_2}}{d_{p02}} = \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta'} = \frac{p'}{p_0} = 1 + B_v$$

- gli spessori dei denti sulla primitiva di funzionamento sono

$$g_1 = g_{0_1}\frac{d_{p\,1}}{d_{p_0\,1}} - (\operatorname{inv}\theta - \operatorname{inv}\theta_0)d_{p\,1} = g_{0_1}\frac{I}{I_0} - (\operatorname{inv}\theta - \operatorname{inv}\theta_0)d_{p\,1}$$

$$g_2 = g_{0_2}\frac{d_{p\,2}}{d_{p_0\,2}} - (\operatorname{inv}\theta - \operatorname{inv}\theta_0)d_{p\,2} = g_{0_2}\frac{I}{I_0} - (\operatorname{inv}\theta - \operatorname{inv}\theta_0)d_{p\,2}$$

- in corrispondenza del diametro primitivo di funzionamento risulta

$$p' - \delta = g_1 + g_2 \quad \rightarrow \quad p_0\frac{I}{I_0} - \delta = g_1 + g_2$$

in cui δ è il gioco fra i denti

- in caso di gioco nullo risulta

$$p_0 \frac{I}{I_0} = p_0 \frac{I}{I_0} + 2(c_1 + c_2) \tan \theta_0 \frac{I}{I_0} - (\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0)(d_{p_1} + d_{p_2})$$

- $$2(c_1 + c_2) \tan \theta_0 \frac{I}{I_0} - (\mathrm{inv}\,\theta - \mathrm{inv}\,\theta_0) 2I = 0$$

- infine la relazione che lega le correzioni all'angolo di pressione di funzionamento in condizioni di gioco nullo

$$\boxed{\mathrm{inv}\,\theta = \mathrm{inv}\,\theta_0 + \frac{c_1 + c_2}{I_0} \tan \theta_0 = \mathrm{inv}\,\theta_0 + B \tan \theta_0}$$

- l'angolo di pressione di funzionamento può essere determinato a partire dall'interasse di funzionamento

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{inv}\theta = \operatorname{inv}\theta_0 + \frac{c_1 + c_2}{l_0}\tan\theta_0$$

- si osservi che il valore dell'interasse non dipende dai singoli valori delle correzioni c_1 e c_2, ma solo dalla loro somma.
- Quando $c_1 + c_2 = 0$ risulta $I = I_0$: si hanno cioè le correzioni **senza cambiamento d'interasse**, dette correzioni $V.O.$, per le quali le correzioni c_1 e c_2 sono uguali e contrarie, e le primitive di funzionamento coincidono con le primitive di taglio.
- Quando $c_1 + c_2 \neq 0$ risulta $I \neq I_0$: si hanno cioè le correzioni **con cambiamento d'interasse**, dette correzioni V, per le quali I e θ' aumentano o diminuiscono all'aumentare o al diminuire di $c_1 + c_2$.

Riduzione del diametro di troncatura esterno

- per effetto delle correzioni c_1 e c_2, l'interasse non aumenta della quantità $c_1 + c_2$, ma di una quantità inferiore.
- Ciò comporta una diminuzione del gioco di fondo tra le dentature
- infatti per mantenere un gioco di fondo pari ad 1/4 del modulo bisognerebbe aumentare l'interasse della stessa quantità di cui aumentano i raggi dei cerchi di troncatura esterna ed interna, cioè di $c_1 + c_2$.
- Per mantenere il gioco di fondo pari ad 1/4 del modulo con l'interasse di funzionamento I, bisogna quindi ridurre alquanto i cerchi di troncatura esterna degli ingranaggi: per valutare l'entità di questa riduzione, supponiamo di montare i due ingranaggi con l'interasse $I_1 = I_0 + c_1 + c_2 = (1 + B)I_0$.
- Si avrà un gioco di fondo pari ad 1/4 del modulo, ma si avrà anche un gioco laterale: diminuiamo quindi l'interasse fino a portarlo al valore di funzionamento $I = (1 + B_v)I_0$ per il quale non si hanno più giochi laterali.

- Il gioco di fondo sarà diminuito della quantità

$$km = l_1 - l = (B - B_v) l_0 \ , \tag{22}$$

- per riportarlo al valore originale basterà quindi ridurre i raggi dei cerchi di troncatura esterna della quantità km.
- Ne consegue che nel caso di dentatura corretta, per conservare il gioco di fondo

$$d_e = m(z + 2 + 2x - 2k) \tag{23}$$

- poiché i diametri dei cerchi di troncatura interna restano invariati, l'altezza totale dei denti viene ridotta al valore $h = (2.25 - k)m$.

Limitazione alla correzione

Nella scelta delle correzioni x_1 ed x_2 da dare ad una coppia di ingranaggi si hanno delle limitazioni dovute:

- alla necessità di avere un fattore di ricoprimento perlomeno maggiore di 1,
- evitare l'appuntimento dei denti in testa
- evitare il sottotaglio alla base del dente.

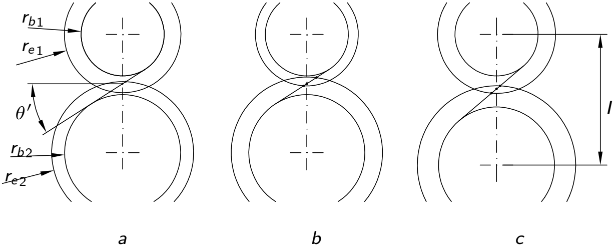


Figure: Influenza delle correzioni sulla lunghezza e posizione del tratto di ingranamento MN compreso fra i diametri esterni delle ruote

- le correzioni influenzano il fattore di ricoprimento, cioè la lunghezza NM della linea dei contatti
- nel caso delle figure a e b si hanno due diverse correzioni, ma sempre con la stessa somma $x_1 + x_2$, cioè con lo stesso interasse, mentre nella
- la figura c si ha una somma $x_1 + x_2$ diversa, e quindi un diverso interasse.
- si osserva che *il fattore di ricoprimento dipende sostanzialmente dalla somma* $x_1 + x_2$ e diminuisce al crescere di questa, mentre risulta *poco sensibile al modo con cui questa somma è ripartita* sui due ingranaggi.

- Nel caso di ingranaggi non corretti il fattore di ricoprimento risulta sempre compreso tra 1.4 e 2, se ne conclude che:
  - nel caso di ingranaggi corretti senza variazione di interasse, cioè con $x_1 + x_2 = 0$, il fattore di ricoprimento è ancora compreso all'incirca nel medesimo campo;
  - forti valori del fattore di ricoprimento possono ottenersi con correzione con variazione di interasse, imponendo $x_1 + x_2 < 0$;
  - per $x_1 + x_2 > 0$ il fattore di ricoprimento diminuisce, compromettendo la continuità della trasmissione: pertanto nelle correzioni con aumento dell'interasse bisogna sempre verificarne il valore.
- In genere si sconsiglia di scendere oltre il valore 1.4, tuttavia risultano accettabili anche valori inferiori, purché maggiori di 1.2. A tale scopo, le norme indicano di non superare mai il valore $x_1 + x_2 = 1.2$.
- È chiaro che al crescere del fattore di ricoprimento diminuisce la zona di dente destinata a sopportare l'intera spinta tra i denti, perché aumenta la frazione di tempo durante la quale vi è più di una coppia di denti in presa.

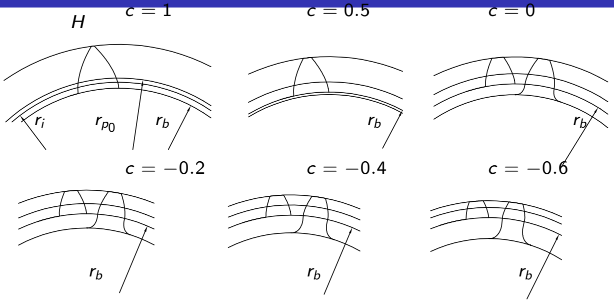
- Molto spesso la somma $x_1 + x_2$ è prefissata dal progettista prima ancora di aver scelto i singoli valori di x_1 e x_2.
- Il caso più comune è quello in cui si presceglie la correzione $V.O$, cioè con $x_1 + x_2 = 0$, ottenendosi una grande semplicità di calcolo, un buon fattore di ricoprimento, un interasse uguale a quello di ingranaggi non corretti (e quindi possibilità di sostituire ingranaggi non corretti con altri aventi maggiore capacità di carico senza spostare i supporti) senza variare nè la direzione ed i valori delle spinte in gioco ne le dimensioni principali dei denti.
- Tale correzione limita fortemente il campo di scelta dei singoli valori di x e di conseguenza non permette grandi miglioramenti di capacità di carico: essa può essere adottata solo se la somma dei numeri di denti dei due ingranaggi è maggiore di 34 e può incominciare a dare qualche lieve miglioramento solo se la somma dei numeri di denti dei due ingranaggi è maggiore di 60.

- In altri casi e prefissato il valore dell'interasse di funzionamento I e questo può essere ottenuto mediante ingranaggi corretti.
- Se si vuole che una coppia di ingranaggi abbia un certo rapporto di trasmissione con un certo interasse I prefissato si scelgono i numeri di denti ed il modulo in modo che l'interasse $I_0 = m(z_1 + z_2)/2$ sia vicino (e preferibilmente minore) ad I; si calcola $B_v = (I - I_0)/I_0$
- per mezzo della

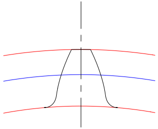
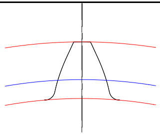
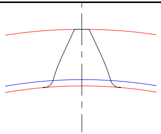
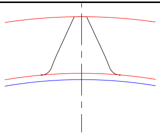
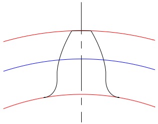
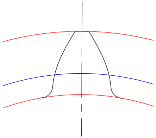
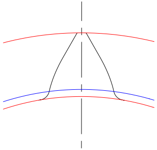
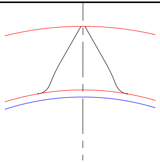
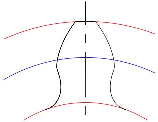
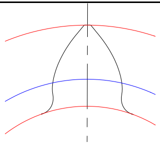
$$\boxed{\mathrm{inv}\,\theta = \mathrm{inv}\,\theta_0 + \frac{c_1 + c_2}{I_0}\tan\theta_0 = \mathrm{inv}\,\theta_0 + B\tan\theta_0}$$

si calcola la somma delle correzioni $c_1 + c_2$

Limitazione delle singole correzioni



- Per quanto riguarda i singoli valori delle correzioni, osserviamo che la x ha un limite inferiore ed uno superiore, in dipendenza dal numero di denti z.
- si deve evitare un eccessivo assottigliamento della punta del dente in corrispondenza del diametro di troncatura esterna ed una diminuzione della sezione della base del dente

z	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1$	$x = 1.5$
36				
18				
9				

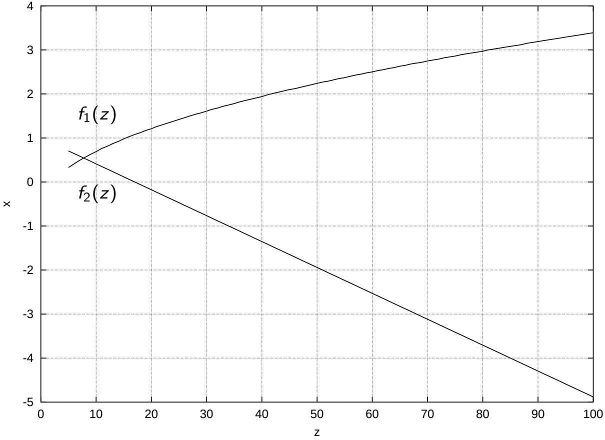
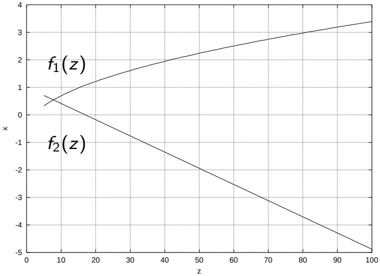


Figure: Limiti delle correzioni in funzione del numero di denti, assumendo $k = 0$, $\vartheta_0 = 20^\circ$ e spessore del dente nullo all'estremità. Il campo delle correzioni possibili è compreso fra le due curve



- Trascurando il ribassamento eventuale km del dente, imponendo la condizione $\boxed{g > 0}$ discende la condizione $x < f_1(z)$
- In pratica la limitazione è più restrittiva in quanto per ragioni di resistenza dovrà essere almeno $g > 0.3m$, e quindi la curva limite pratica è un pò più bassa di quella indicata in figura

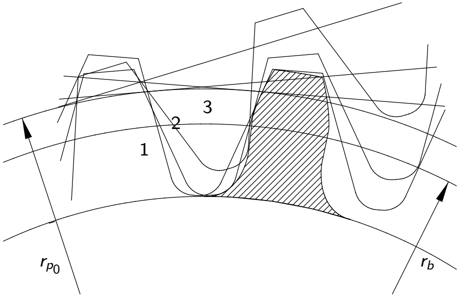
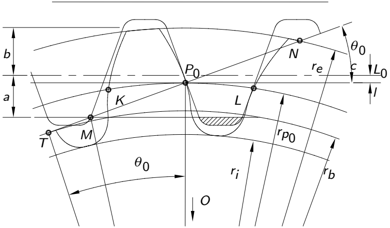


Figure: Sottotaglio per una ruota con $z = 30$, $x = -0.6$

- Correzioni troppo piccole o correzioni negative troppo grandi comportano pericolo d'interferenza.
- L'evolvente che viene a costruirsi termina però sul cerchio fondamentale: quando l'utensile prosegue nel suo moto di inviluppo, il punto di tangenza si porta sul ramo opposto (teorico) di evolvente (punto 3); in queste condizioni si vedechiaramente che se l'addendum dell'utensile è troppo grande, il dente della ruota risulta sottotagliato, e quindi indebolito notevolmente alla base



- La condizione per evitare sottotaglio è che il punto M non oltrepassi il punto T: detto $a = m(1-x)$ l'addendum apparente della dentiera, si può facilmente ricavare la condizione

$$a < \frac{1}{2} mz \sin^2 \theta_0$$

$$z_{min} = 2/\sin^2 \theta_0 \quad , \tag{24}$$

la condizione

$$x > 1 - \frac{z}{z_{min}} \quad , \tag{25}$$

Per $\theta_0 = 20^\circ$ risulta $z_{min} \simeq 17$.

- che può brevemente scriversi $x > f_2(z)$;

Esercizio

Calcolare l'interasse di funzionamento di una coppia di ingranaggi, il primo dei quali è corretto e il secondo no.

- essendo $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ si calcola $B = c_1/I_0$ e poi θ' con la formula $\mathrm{inv}\,\theta' = \mathrm{inv}\,\theta_0 + B \tan\theta_0$;
- si ottiene infine $I = I_0 \cos\theta_0 / \cos\theta'$.

Esercizio

Calcolare la somma delle correzioni da assegnare ad una coppia di ingranaggi di modulo m in modo che l'interasse abbia un valore prestabilito I diverso da $I_0 = m(z_1 + z_2)/2$.

- conoscendo I, si ricava θ' con la formula

$$\cos\theta' = (I_0/I)\cos\theta_0$$

- quindi B con la formula $B = (\mathrm{inv}\,\theta' - \mathrm{inv}\,\theta_0)/\tan\theta_0$
- si ottiene infine

$$c_1 + c_2 = BI_0 = Bm\frac{z_1 + z_2}{2}$$

.

Ripartizione delle correzioni

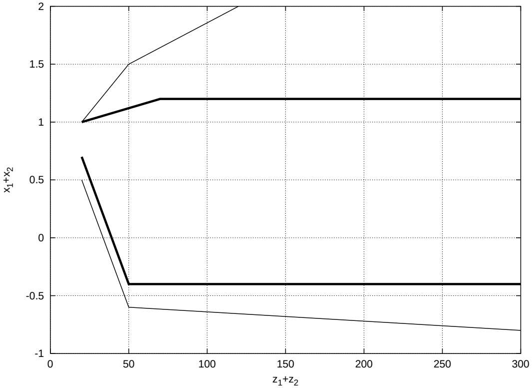


Figure: Ripartizione della somma delle correzioni in funzione della somma del numero di denti. La zona centrale, compresa tra le due linee continue è da intendersi di buon progetto. Verso l'alto ingranaggi con elevata capacità di carico (elevata curvatura del profilo del dente), verso il basso con elevata silenziosità (elevato fattore di ricoprimento)

- La figura riporta le limitazioni per la scelta della somma $x_1 + x_2$ in funzione della somma $z_1 + z_2$ quando l'interasse I non è imposto, e quindi non è imposta la somma $x_1 + x_2$.
- Si consiglia di scegliere tale somma $x_1 + x_2$ nella zona indicata come di buon progetto, spostandosi in essa verso l'alto quando si desidera aumentare la capacità di carico degli ingranaggi e spostandosi verso il basso quando si desidera un buon fattore di ricoprimento, e quindi un funzionamento silenzioso.

Esercizio

Determinare le correzioni da assegnare a due ingranaggi con $z_1 = 10$ e $z_2 = 40$ denti per evitare interferenza.

- poiché negli ingranaggi non corretti non si ha interferenza solo se $z > z_{min} \simeq 17$ (per angolo di pressione di 20°), si deve correggere l'ingranaggio con z_1 denti.
- Dovrà essere almeno $x_1 >= 1 - z_1/z_{min} = 1 - 10/17 = 0.41$;
- assumendo $x_1 = 0,41$ si può fare una correzione senza cambiamento d'interasse in quanto il valore di $x_2 = -0.41$ è maggiore di $1 - z_2/z_{min} = 1 - 40/17 = -1.35$

Part IV

Criteri di scelta delle correzioni

Introduzione

Le correzioni sono realizzate per il raggiungimento dei seguenti obiettivi

- evitare sottotaglio (interferenza). Il criterio normalmente seguito è quello di assegnare al pignone la minima correzione necessaria ad evitare l'interferenza, e alla ruota una correzione uguale e contraria, almeno finché questo è possibile senza provocare interferenza sulla ruota.
- migliorare le condizioni di accoppiamento delle rute costituenti l'ingranaggio. La tendenza di evitare ove possibile la correzione o comunque di allontanarsi il meno possibile dalla condizione di correzione nulla è sbagliata in quanto sembra presumere che le condizioni ottimali di funzionamento di un ingranaggio siano quelle corrispondenti al proporzionamento normale.
- Invece il proporzionamento normale non corrisponde in genere a condizioni di funzionamento ottimali perché con esso le proporzioni di ciascuna ruota dentata non dipendono da quelle della ruota dentata con cui essa si accoppia, mentre ovviamente il proporzionamento ottimale dipende da entrambe le ruote in presa.

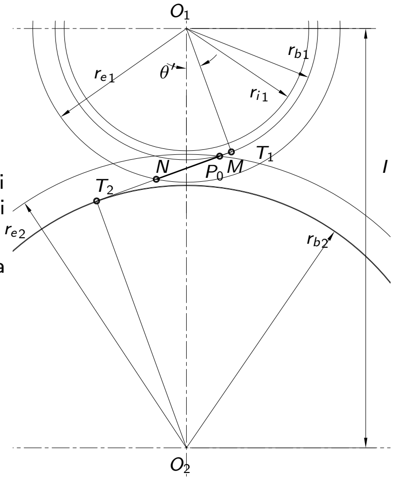
Realizzando coppie di ingranaggi corretti è possibile raggiungere i seguenti obiettivi:

a. aumento della capacità di carico senza sensibile aumento degli ingombri: questo è senza dubbio l'obiettivo principale a cui, a seconda dei casi, si possono sommare i seguenti;
b. trasmissione della potenza con ridotto numero di denti, e quindi minori ingombri;
c. miglioramento dei surmoltiplicatori di velocità, che altrimenti funzionerebbero in condizioni assai gravose;
d. possibilità di ottenere interassi qualsiasi;
e. trasmissione con la minima potenza perduta.

Assegnati i valori del modulo e dei numeri di denti, le incognite da determinare sono le correzioni $c_1 = mx_1$ ed $c_2 = mx_2$

- Per determinare queste incognite occorrono due condizioni da assegnare: in genere una condizione riguarda il valore da attribuire alla somma $x_1 + x_2$, e l'altra permette di decidere come ripartire tale somma sui due ingranaggi.
- Quando è prefissato il valore dell'interasse di funzionamento, risulta stabilito il valore di $x_1 + x_2$ e quindi resta da decidere soltanto come ripartire tale somma sui due ingranaggi.

- In questo caso risulta praticamente fissata la lunghezza della linea dei contatti MN (e quindi il valore del fattore di ricoprimento)
- a seconda di come si ripartisce la somma $x_1 + x_2$ varia la posizione del segmento MN rispetto a P_0, e quindi variano le lunghezze MP_0 ed NP_0 dei tratti di accesso e di recesso.
- La linea dei contatti si allontana dalla ruota cui è attribuita la correzione maggiore in senso algebrico e si avvicina alla ruota cui è attribuita la correzione minore in senso algebrico.
- Allontanando da una ruota la linea dei contatti, le condizioni di funzionamento della sua dentatura divengono in generale meno gravose, mentre peggiorano avvicinando ad essa la linea dei contatti.



- È innanzitutto da osservare che per quanto riguarda i fenomeni di fatica ed usura stanno peggio i denti della ruota più piccola dato che essi a pari durata della coppia debbono attraversare la zona dei contatti un numero maggiore di volte.
- Per attenuare questa pregiudiziale differenza i denti della ruota più piccola vanno progettati con una durezza maggiore di quella dei denti della ruota più grande. Nel seguito non considereremo più detta differenza ritenendola per semplicità di discorso compensata dalla diversa **durezza** delle dentature.
- Ne segue che nei riduttori di velocità, dove il pignone, cioè la ruota più piccola, è anche ruota motrice, tutto concorda nel ritenere il pignone in peggiori condizioni di funzionamento di quelle della ruota, e quindi è consigliabile distribuire le correzioni in modo da allontanare la linea dei contatti dal pignone.

Riduzione arco di accesso

- Una prima ragione è che così facendo si viene a ridurre il valore della velocità relativa W con cui i denti iniziano il reciproco contatto, cioè della velocità relativa all'inizio del tratto di accesso.
- Tale velocità relativa è data dal prodotto della velocità angolare relativa $\omega_1 - (-\omega_2) = \omega_1 + \omega_2$ dei due ingranaggi per la distanza del punto di inizio del tratto di accesso dal centro P_0 del moto relativo, cioè dal prodotto della velocità angolare relativa per la lunghezza del tratto di accesso.
- Se la velocità relativa fosse diretta esattamente secondo la tangente ai profili dei denti e quindi, così come vuole la teoria degli inviluppi, fosse una velocità di strisciamento, una sua riduzione non sarebbe necessaria: in pratica invece all'inizio del contatto si ha un urto fra i denti, in quanto essi non si trovano esattamente nella posizione che dovrebbero avere in teoria perchè la coppia di denti già in presa, che determina tale posizione, si inflette per azione del carico da trasmettere, mettendo fuori asse i denti non ancora a contatto.

- Gli urti tra le dentature producono dei sovraccarichi dinamici che crescono al crescere della velocità di rotazione, del carico trasmesso e delle imprecisioni costruttive delle dentature, e che si manifestano sotto forma di rumore durante il funzionamento.
- Di tali sovraccarichi dinamici si suole tener conto attraverso un "*coefficiente di velocità*" $K_V > 1$ posto a moltiplicare il carico trasmesso in assenza di urti.
- Ovviamente una riduzione della lunghezza del tratto di accesso fa diminuire l'intesità dei sovraccarichi dinamici di questo tipo, permettendo di ottenere per K_V dei valori più bassi di quelli che andrebbero adottati per ingranaggi non corretti.
- In generale K_V tiene conto dei carichi dinamici dovuti a vibrazioni e a errori geometrici di ingranamento derivanti, come visto, da inflessioni del dente o da tolleranze di lavorazione. Prescindendo dagli effetti imputabili alle vibrazioni, il coefficiente K_V può essere dedotto da tabelle in funzione della velocità tangenziale e della precisione di lavorazione espressa dal un parametro C (vedi figura 14). Questo parametro dipende del numero di denti, del modulo e della flessione del dente caricato.

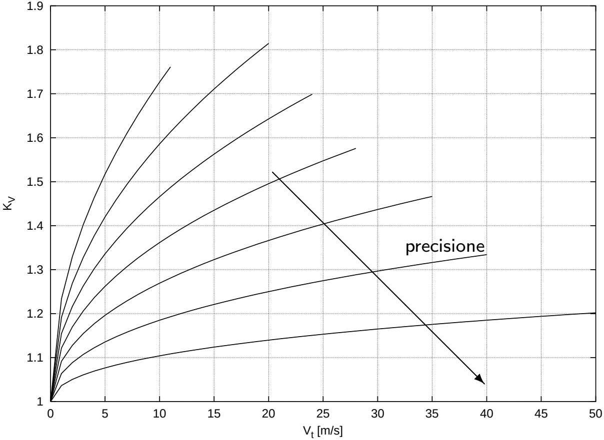


Figure: Coefficiente di velocità K_V in funzione della velocità di strisciamento e della precisione di lavorazione

Ottimizzazione del rendimento

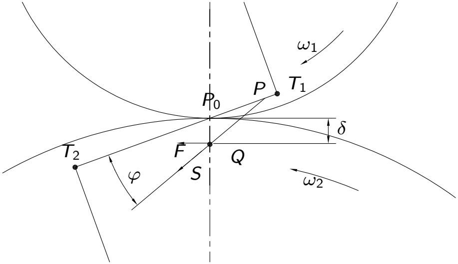
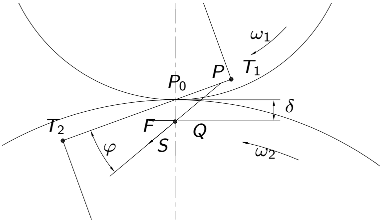
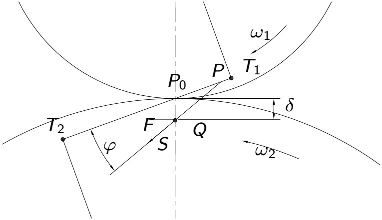


Figure: Direzione della spinta S in presenza d'attrito per contatto nella zona di accesso

- Una chiara indicazione sulla convenienza di ridurre la lunghezza del tratto di accesso rispetto a quello di recesso si ottiene calcolando il *rendimento "istantaneo"* della trasmissione in funzione della posizione del punto di contatto sulla linea di ingranamento.
- 1 ruota motrice, 2 ruota condotta.



- il rendimento istantaneo varia a seconda della posizione del punto di contatto P sulla linea di ingranamento.
- A causa dell'attrito, la mutua spinta S fra i denti non è perpendicolare alle superfici a contatto (e quindi non è diretta lungo la retta d'azione teorica $T_1 T_2$) ma è inclinata dell'angolo d'attrito φ rispetto alla linea d'ingranamento
- non passa per P_0 ma per un punto Q del telaio $O_1 O_2$ spostato verso l'interno della ruota condotta di una quantità $\delta = P_0 Q$ variabile con la posizione di P.



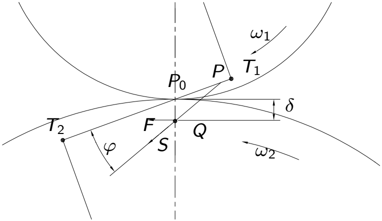
- Spostando la spinta S lungo la sua reale retta di azione, possiamo considerarla applicata in Q, e detta F la sua componente utile (cioè normale alla retta O_1O_2), risulta

$$M_1 = F(r_{p_1} + \delta)$$

$$M_2 = F(r_{p_2} - \delta)$$

- Il rendimento istantaneo vale quindi

$$\eta_1 = \frac{M_2\omega_2}{M_1\omega_1} = \frac{M_2 r_{p1}}{M_1 r_{p2}} = \frac{r_{p1}(r_{p2} - \delta)}{r_{p2}(r_{p1} + \delta)} = \frac{1 - \delta/r_{p2}}{1 + \delta/r_{p1}} < 1 \qquad (26)$$



- Il rendimento istantaneo diminuisce od aumenta all'aumentare o al diminuire della distanza $\delta = P_0Q$: nel caso (abbastanza inverosimile) di $\delta > r_{p_2}$ risulterebbe $\eta_1 < 0$ e si avrebbe l'impossibilità di trasmettere la potenza dalla ruota 1 alla 2.

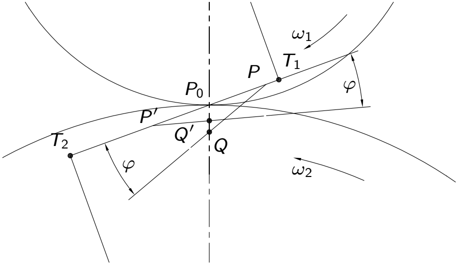
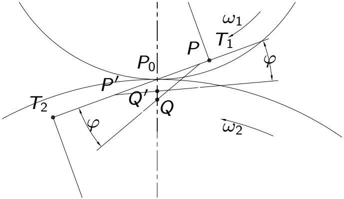
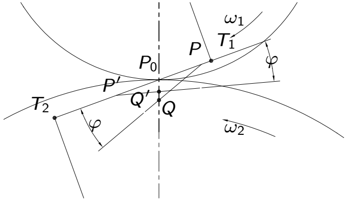


Figure: Direzione della spinta S in presenza d'attrito, punto P' per contatto nella zona di recesso e punto P per contatto nella zona di accesso

- a pari angolo di attrito φ e a pari distanza da P_0 sulla linea dei contatti si hanno valori diversi di δ a seconda che il punto di contatto si trovi nella fase di accesso (punto P) o di recesso (punto P')
- il rendimento peggiore si ha nella fase di accesso ($P_0Q > P_0Q'$).
- In realtà la differenza diventa più vistosa se si tiene conto che il coefficiente d'attrito nella zona di accesso è maggiore che nella zona di recesso, dato che nella prima la lubrificazione non è buona come nella seconda perché fra le



- Il rendimento complessivo risulta la media di tutti i rendimenti istantanei: è chiaro che per avere un rendimento complessivo buono bisognerà che tutti i δ siano abbastanza piccoli, ed in particolare dovranno risultare piccoli i δ corrispondenti ai punti M ed P di inizio e fine della linea dei contatti
- Se possibile, per aumentare il rendimento conviene aumentare i numeri di denti riducendo così i rapporti $m/r_p \simeq 2/z$ e quindi i rapporti δ/r_p. Fissati i numeri di denti, per migliorare il rendimento si può ricorrere ad una correzione V con aumento dell'interasse $(x_1 + x_2 > 0)$ perché così si riduce la lunghezza NM della linea di ingranamento, M ed N si avvicinano a P_0 ed i δ diminuiscono: bisogna però fare attenzione che il fattore di ricoprimento non divenga troppo piccolo.
- Fissato quindi il valore di $x_1 + x_2$ (e quindi il valore dell'interasse), **conviene distribuire tale somma in modo da spostare in recesso la zona dei contatti di quel tanto che serve per rendere uguali i valori di δ in M ed in N.**



- Dall'ampiezza dello spostamento della linea di ingranamento rispetto agli ingranaggi non corretti si può dedurre l'entità del miglioramento di rendimento ottenibile.
- Ovviamente per eseguire la correzione con questi criteri occorre che il verso del flusso di energia nella trasmissione non si inverta mai, cioè che la ruota 1 sia sempre motrice e la ruota 2 sempre condotta, altrimenti il rendimento cambia di valore, come pure cambiano di valore le correzioni x_1 ed x_2 che lo ottimizzano.

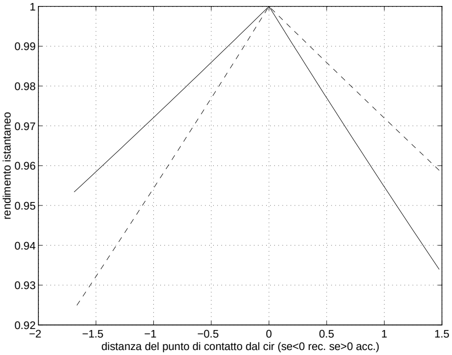


Figure: rendimenti istantanei in un ingranaggio caratterizzato da: $z_1 = 50$ $z_2 = 70$ $\vartheta_0 = 20^\circ$ $x_1 = 1.6$ $x_2 = 2$ $m = 1$

La linea tratteggiata rappresenta il rendimento retrogrado

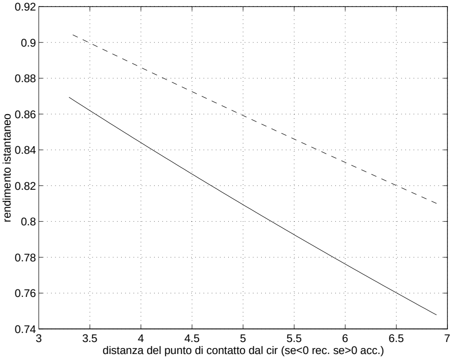


Figure: rendimenti istantanei in un ingranaggio caratterizzato da: $z_1 = 50$ $z_2 = 70$ $\vartheta_0 = 20^\circ$ $x_1 = -1.9$ $x_2 = 2$ $m = 1$

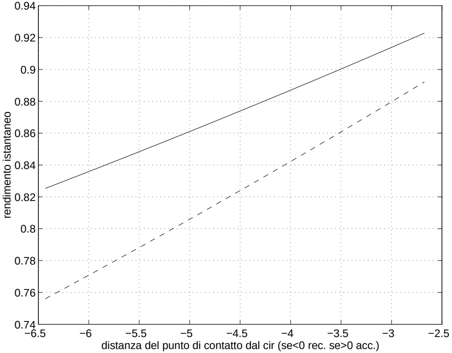
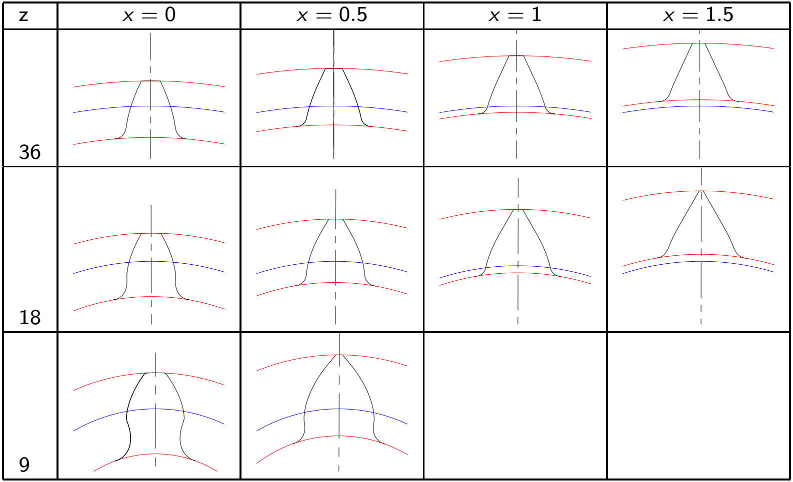


Figure: rendimenti istantanei in un ingranaggio caratterizzato da: $z_1 = 50$ $z_2 = 70$ $\vartheta_0 = 20^\circ$ $x_1 = 1.6$ $x_2 = -2$ $m = 1$



La correzione influenza la sezione resistente del dente (a pari modulo e lunghezza assiale). Questo effetto è tenuto in conto attraverso il coefficiente Y_F della normativa

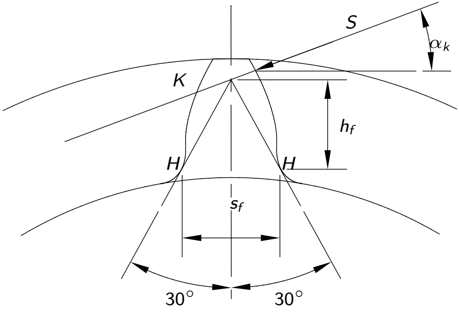
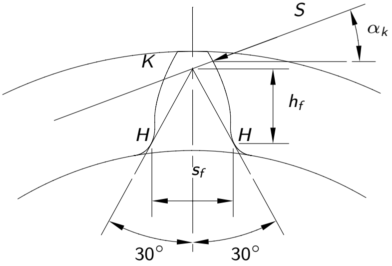


Figure: Determinazione sezione d'incastro. Forza applicata al punto d'inizio contatto singolo

- seguendo il procedimento del Lewis il calcolo di resistenza del dente a fatica viene eseguito schematizzando il dente con una trave a mensola, incastrata alla base.
- A causa della forma del dente e specialmente del raccordo alla base, si ha una certa indeterminatezza nella scelta della sezione di incastro (H-H), cioè della sezione in cui si raggiungono i valori massimi della sollecitazione (met. tangenti inclinate 30°, oppure parabola, o analitici).

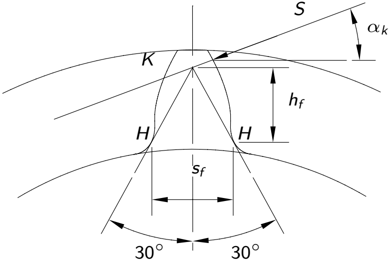


- Detta h_f la distanza del punto K dalla HH
- il momento flettente nella sezione d'incastro vale

$$M_f = S \cos \alpha_k h_f$$

- dove S è la spinta ed α_k l'angolo che essa forma con la HH. La sollecitazione di flessione in H vale pertanto

$$\sigma = M_f/W = \frac{S \cos \alpha_k h_f}{(1/6) b {s_f}^2} \tag{27}$$



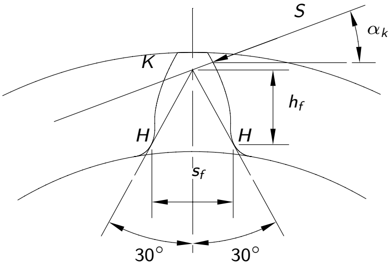
- Di solito inoltre si preferisce riferire la S alla spinta utile "nominale" F_t , che si ottiene dividendo il momento agente sull'ingranaggio per il raggio $mz/2$ della sua primitiva di taglio: essendo $S\cos\theta_0 = F_t$ si ricava la formula

$$\sigma = \frac{F_t}{bm} Y_F \tag{28}$$

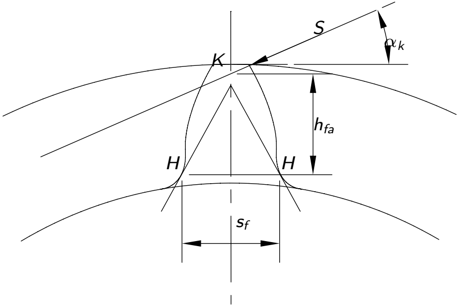
in cui

$$Y_F = \frac{6(h_f/m)\cos\alpha_k}{(s_f/m)^2\cos\theta_0} \tag{29}$$

è il fattore di forma . Non dipende dal modulo dell'ingranaggio, ma solo dalla forma del dente



- Alla sollecitazione così calcolata andrebbe aggiunta quella di compressione dovuta alla spinta assiale $S \sin \alpha_k$, molte volte trascurabile.
- La reale condizione di carico viene considerata dalla normativa per mezzo del coefficiente $Y_S > 1$ che permette di calcolare la sollecitazione effettiva partendo da quella nominale calcolata con il metodo semplificato esposto. Questo fattore di correzione tiene inoltre in considerazione l'effettiva sezione resistente alla base del dente.



- La forma del dente dipende dal numero di denti z, dalla correzione x e della dentiera utilizzata
- A pari forma del dente, il valore massimo di Y_F si ha quando è massimo il braccio h_f, cioè quando il carico agisce sul punto più esterno del dente
- in questa condizione di carico il valore di Y_F viene a dipendere solo da z ed x (trascurando il ribassamento)
- Questa situazione di carico viene rappresentata dal coefficiente di forma Y_{Fa} e dal coefficiente Y_{Sa}, simile ad Y_S.

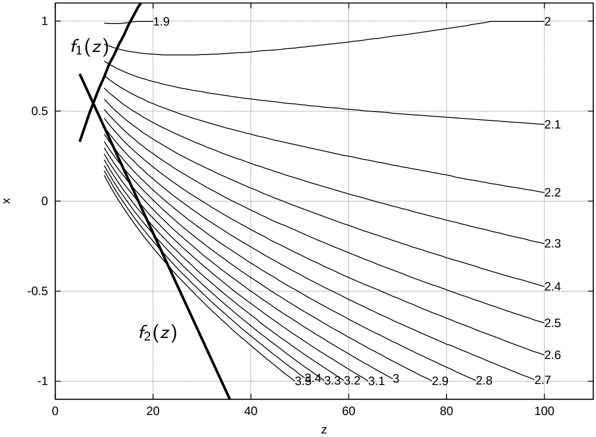
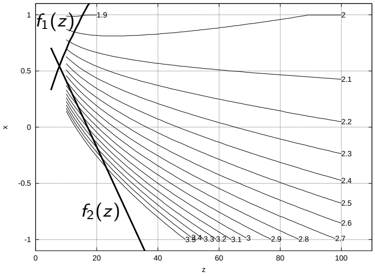


Figure: Correzione adimensionale per coefficienti Y_{Fa} costanti in funzione del numero di denti

Il coefficiente Y_{Fa} dipende sia dal numero di denti che dalla correzione $Y_{Fa} = Y_{Fa}(z, x)$



- Y_{Fa} (e quindi σ) diminuisce all'aumentare di x, cioè che le correzioni positive aumentano la capacità di carico
- Y_{Fa} peggiora avvicinandosi alla curva $x = f_2(z)$ che segna il pericolo di sottotaglio
- Y_{Fa} si riduce notevolmente, diventando ottimo, man mano che ci si avvicina alla curva $x = f_1(x)$ che limita il campo di scelta per il pericolo dell'appuntimento.

- non è consigliabile avvicinarsi troppo a quest'ultima curva
- per un corretto calcolo della σ bisogna però tenere anche presente la che la spinta S si ripartisce su due coppie di denti contemporaneamente in presa.
- Infatti il contatto nel punto estremo utilizzato corrisponde a contatti nei punti M od N della linea delle pressioni cioè ai punti di inizio o fine dell'ingranamento, dove certamente, se $f > 1$, la spinta S si ripartisce fra più coppie di denti.
- La spinta S grava certamente tutta sulla singola coppia solo nell'intervallo M_1N_1, intervallo nel quale però il braccio h_f e quindi il fattore Y_F risultano minori.
- Per tenere conto di questa situazione la normativa introduce un ulteriore coefficiente $Y_\epsilon < 1$ funzione del fattore di ricoprimento

$$Y_\epsilon = 0.25 + 0.75/f \ . \tag{30}$$

- La sollecitazione viene quindi infine calcolata come

$$\sigma = \frac{F_t}{bm} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\epsilon \tag{31}$$

- È bene però osservare che in presenza di sensibili errori sul passo della dentatura il benefico effetto di ripartizione della spinta fra più coppie di denti svanisce, perché in tal caso l'errore sul passo fa si che se una delle due coppie è in presa l'altra non lo è, non essendo giuste le posizioni relative dei denti: in questo caso il punto più pericoloso è M dove il valore di σ non risulta dimezzato
- Per cercare di migliorare le condizioni di funzionamento di una coppia di ingranaggi in presa dal punto di vista della resistenza a fatica, prefissato l'interasse di funzionamento I, e quindi la somma $x_1 + x_2$, conviene ripartire le correzioni x_1 ed x_2 in modo che i fattori di forma calcolati in M_1 ed N_1 risultino uguali fra loro, e pertanto minimi; prescindendo dal fattore di ricoprimento f che, a pari $x_1 + x_2$, varia poco, ciò significa anche uguagliare fra loro i fattori di forma calcolati in M ed N, i cui valori sono ricavabili dal diagramma di figura 21
- Tenendo conto del sovraccarico dinamico attraverso il coefficiente di velocità K_V la formula di verifica degli ingranaggi "a forza" è

$$\sigma = \frac{F_t}{bm} K_V Y_{Fa} Y_{Sa} Y_{\epsilon} < \sigma_{am} \ . \tag{32}$$

- Fissata la somma $x_1 + x_2$, resta da suddividerla fra i due ingranaggi: si hanno due casi, quello dei riduttori e quello dei surmoltiplicatori di velocità
- I vari costruttori di ingranaggi e le raccomandazioni fornite dalla normativa ISO per mezzo del Technical Report ISO TR 4467, danno indicazioni su come ripartire la somma delle correzioni in funzione dei numeri di denti delle ruote dentate.
- In ISO TR 4467 , in modo analogo a quanto proposto dall'Henriot [**?**], l'allocazione della somma delle correzioni sulle ruote dentate di un ingranaggio viene ottenuta con le relazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1 + x_2)\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \lambda\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \\ x_2 &= (x_1 + x_2)\frac{z_2}{z_1 + z_2} + \lambda\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \end{aligned} \tag{33}$$

dove il pedice 1 indica una caratteristica del pignone

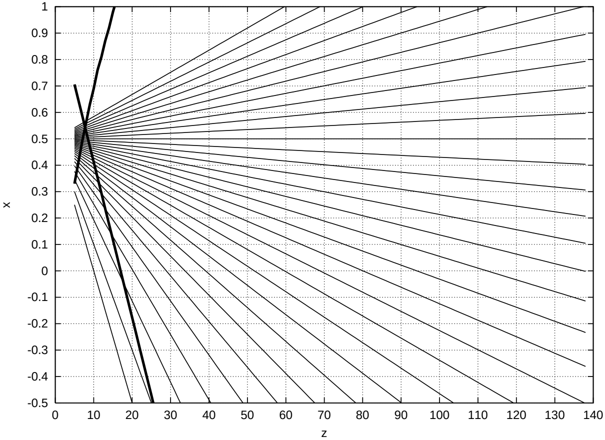


Figure: Diagramma per l'allocazione delle correzioni per riduttori di velocità

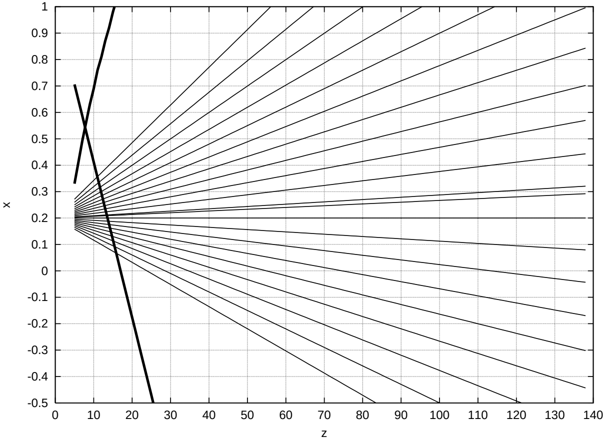
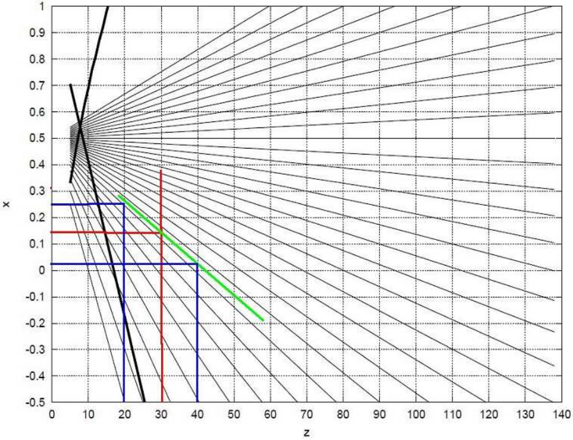


Figure: Diagramma per l'allocazione delle correzioni per moltiplicatori di velocità


x
z
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140