说明

在这个例子中，我们对下面这个例子使用了benders decomposition方法。

An example of Benders Decomposition on fixed charge transportation problem bk4x3. Optimal objective in reference : 350. Erwin Kalvelagen, December 2002 See: http://www.in.tu-clausthal.de/~gottlieb/benchmarks/fctp/

其中，FCTP master problem直接建模求解。

FCTP benders decomposition使用benders方法求解，通过callback求解。

FCTP benders cycle version分别构建两个model求解，没有通过callback求解。

1. $\hat{y}=\mathbf{0}$

迭代情况

supply = [10, 30, 40, 20],

demand = [20, 50, 30]

fixed cost = [[10, 30, 20],[10, 30, 20], [10, 30, 20]]

transport cost = [[2.0, 3.0, 4.0], [3.0, 2.0, 1.0], [1.0, 4.0, 3.0], [4.0, 5.0, 2.0]]

初始化UB = 1999, LB = 1

第0次，

$$\hat{y} = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$$ feasibility cut, $$ 100.0 -10.0 y_{11} -10.0 y_{12} -10.0 y_{13} -20.0 y_{21} -30.0 y_{22} -30.0 y_{23}\ -20.0 y_{31} -40.0 y_{32} -30.0 y_{33} -20.0 y_{41} -20.0 y_{42} -20.0 y_{43} <= 0 $$

第1次， $$y = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0]$$

其中，

$$y_{23} = 1.0, \ y_{31} = 1.0,\ y_{33} = 1.0,\ y_{41} = 1.0 $$

feasibility cut, $$ 50.0 -10.0 y_{12} -30.0 y_{22} -40.0 y_{32} -20.0 y_{42} <= 0 $$

第2次， $$y = [0.0, 0.0, 0.0, -0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 1.0, -0.0, 1.0, 0.0, -0.0]$$

其中，

$$y_{22} = 1.0, \ y_{31} = 1.0,\ y_{32} = 1.0,\ y_{41} = 1.0 $$

feasibility cut, $$ 30.0 -10.0 y_{13} -30.0 y_{23} -30.0 y_{33} -20.0 y_{43} <= 0 $$

第3次， $$y = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -0.0, -0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0]$$

其中，

$$y_{22} = 1.0, \ y_{32} = 1.0,\ y_{33} = 1.0 $$

feasibility cut, $$ 30.0 -10.0*y_{13} -30.0*y_{23} -30.0*y_{33} -20.0*y_{43} <= 0 $$

第4次， $$y = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -0.0, -0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0]$$ 其中， $$ y_{32} = 1.0,\ y_{33} = 1.0,\ y_{41} = 1.0,\ y_{42} = 1.0, $$ feasibility cut, $$ 40.0 -10.0*y_{11} -10.0*y_{12} -10.0*y_{13} -20.0*y_{21} -30.0*y_{22} -30.0*y_{23} <= 0 $$

第5次， $$y = [0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0]$$ 其中， $$ y_{12} = 1.0,\ y_{23} = 1.0,\ y_{32} = 1.0,\ y_{41} = 1.0, $$ optimality cut, $$ 490.0 -20.0*y_{11} -40.0*y_{12} -20.0*y_{13} -20.0*y_{21} -150.0*y_{22} \ -150.0*y_{23} -40.0*y_{42} -80.0*y_{43} <= q $$

第6次， $$y = [1.0, 1.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0]$$ 其中， $$ y_{11} = 1.0\ y_{12} = 1.0\ y_{21} = 1.0\ y_{22} = 1.0\ y_{23} = 1.0\ y_{42} = 1.0\ y_{43} = 1.0 $$ feasibility cut, $$ 490.0 -20.0*y_{11} -40.0*y_{12} -20.0*y_{13} -20.0*y_{21} -150.0*y_{22} \ -150.0*y_{23} -40.0*y_{42} -80.0*y_{43} <= q $$

第7次， $$y = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0]$$ 其中， $$ y_{11} = 1.0\ y_{12} = 1.0\ y_{13} = 1.0\ y_{21} = 1.0\ y_{22} = 1.0\ y_{23} = 1.0\ y_{32} = 1.0\
y_{43} = 1.0 $$ optimality cut, $$ 300.0 -20.0*y_{11} -80.0*y_{31} <= q $$

第8次， $$y = [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0]$$ 其中， $$ y_{11} = 1.0\ y_{22} = 1.0\ y_{23} = 1.0\ y_{31} = 1.0\ y_{32} = 1.0\ y_{41} = 1.0 $$ feasibility cut, $$ 10.0 -10.0*y_{12} -10.0*y_{13} -20.0*y_{42} -20.0*y_{43} <= 0 $$

第9次， $$y = [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0]$$ 其中， $$ y_{11} = 1.0\ y_{22} = 1.0\ y_{23} = 1.0\ y_{31} = 1.0\ y_{32} = 1.0\ y_{43} = 1.0 $$ optimality cut, $$ 320.0 -20.0*y_{12} -40.0*y_{42} -80.0*y_{43} <= q $$

第10次， $$y = [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0]$$ 其中， $$ y_{11} = 1.0\ y_{23} = 1.0\ y_{31} = 1.0\ y_{32} = 1.0\ y_{42} = 1.0\ y_{43} = 1.0 $$ optimality cut, $$ 280.0 -20.0*y_{12} -60.0*y_{22} <= q $$

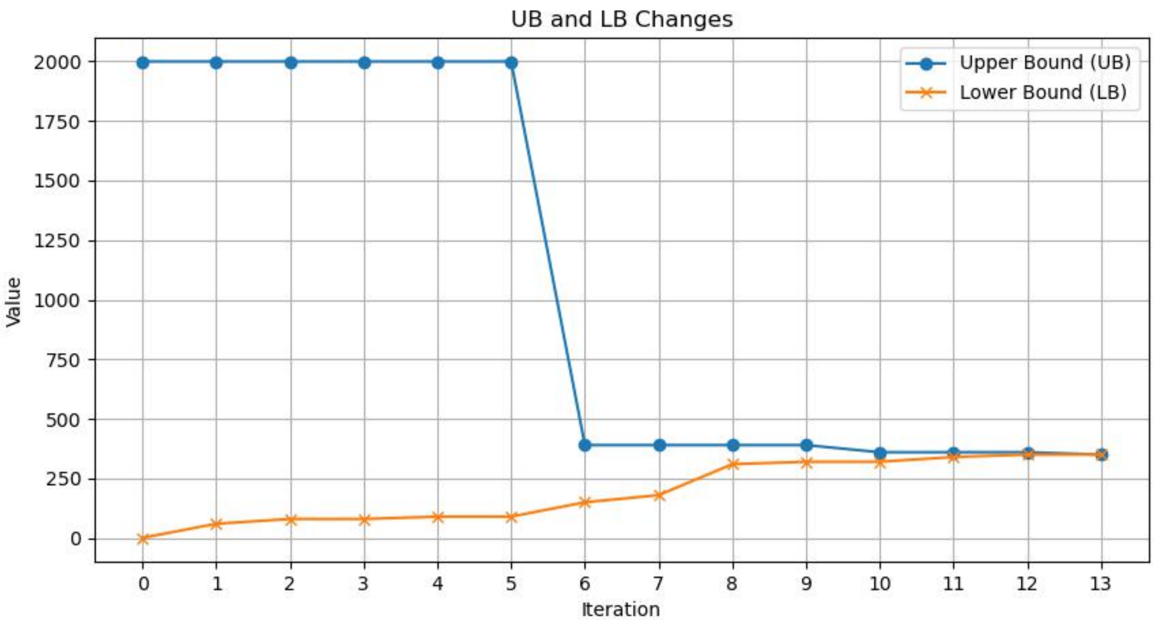
第11次， $$y = [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 1.0]$$ 其中， $$ y_{11} = 1.0\ y_{22} = 1.0\ y_{31} = 1.0\ y_{33} = 1.0\ y_{42} = 1.0\ y_{43} = 1.0 $$ optimality cut, $$ 340.0 -40.0*y_{12} -60.0*y_{22} -80.0*y_{32} <= q $$

第12次， $$y = [0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0]$$ 其中， $$ y_{13} = 1.0\ y_{22} = 1.0\ y_{31} = 1.0\ y_{32} = 1.0\ y_{43} = 1.0 $$ optimality cut, $$ 240.0 -20.0*y_{12} <= q $$

第13次， $$y = [0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0]$$ 其中， $$ y_{13} = 1.0\ y_{22} = 1.0\ y_{31} = 1.0\ y_{32} = 1.0\ y_{43} = 1.0 $$

optimal solution found.

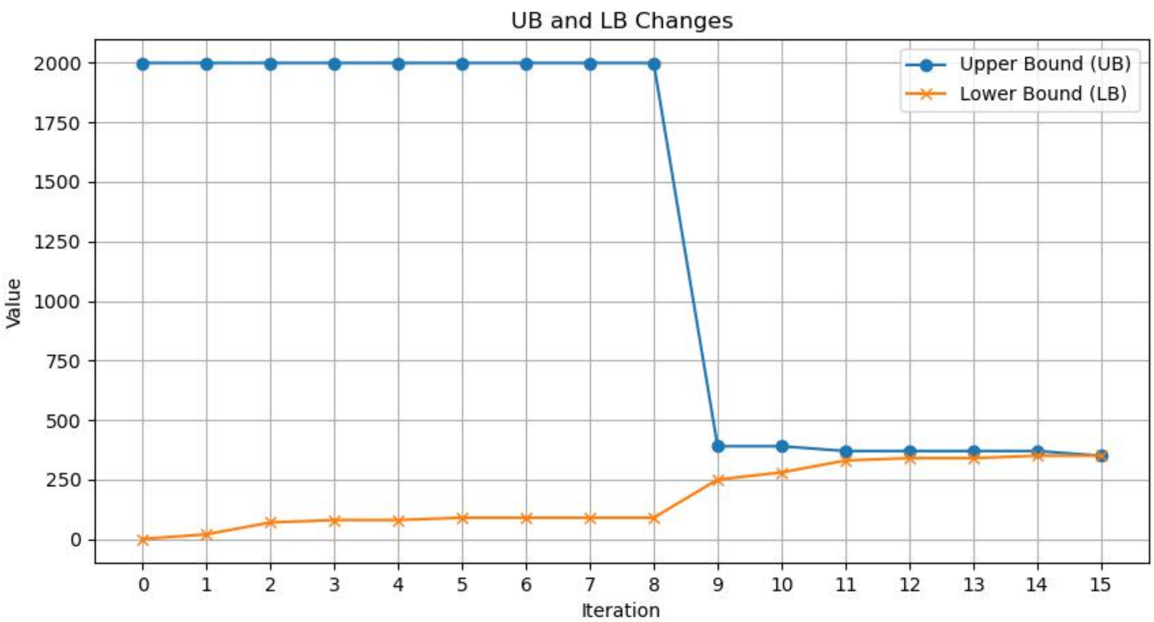
上下界变化图



2. 部分$\hat{y}=\mathbf{1}$的迭代

假定我们给定的y如下所示： $$\hat{y} = [0,0,0, 0,1,0, 0,0,1, 0,1,0]$$,

那么上下界变化如下所示：

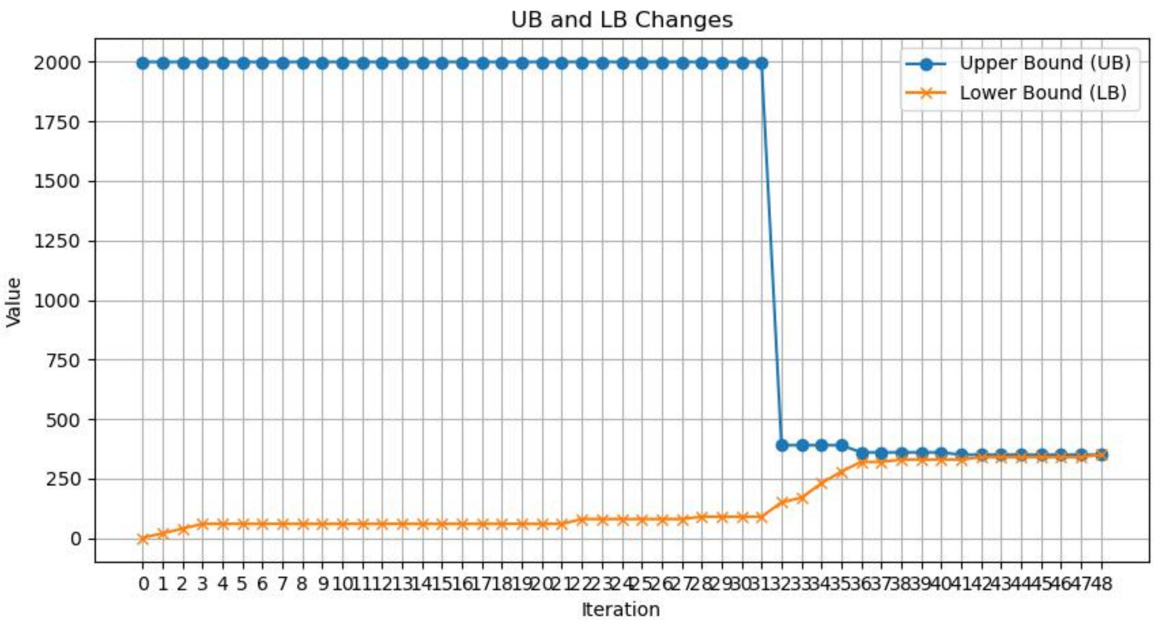


上界在第九次迭代才更新，即子问题在第九次才找到optimal solution，说明初始化时，不同的y影响后面生成cut的质量。

3. 不同M_{ij}的影响

直观上理解，子问题约束3右侧的M_{ij}越紧越好，从不等式上来说，M_{ij}越小越好，那么这个影响有多大呢？可以通过实验看下效果。 在构建子问题时，通过分析需求量与供应量，$M_{ij}=min{c_{ij}, d_{ij}}, \forall i

\in S, \forall j \in D$，如果我们直接取$M_{ij}=50$,



上界在第32次才被更新，这从侧面说明在构面模型时，更紧的约束可以减少求解的时间。