

---

# 磁気流体シミュレーション **CANS+**

リリース **1.4**

**CANS+ developers**

2018 年 8 月 20 日



# 目次

|              |                            |           |
|--------------|----------------------------|-----------|
| <b>第 1 章</b> | <b>はじめに</b>                | <b>1</b>  |
| 1.1          | CANS+ 開発者サイト . . . . .     | 1         |
| 1.2          | CANS+ ドキュメント電子図書 . . . . . | 2         |
| 1.3          | 問い合わせ . . . . .            | 2         |
| 1.4          | 開発メンバー（開発当時） . . . . .     | 2         |
| 1.5          | 著作権 . . . . .              | 2         |
| 1.6          | 免責事項 . . . . .             | 3         |
| 1.7          | 謝辞 . . . . .               | 3         |
| <b>第 2 章</b> | <b>イントロダクション</b>           | <b>5</b>  |
| 2.1          | まずは始めましょう . . . . .        | 5         |
| 2.2          | 動作環境 . . . . .             | 6         |
| 2.3          | 環境変数 . . . . .             | 6         |
| 2.4          | 解析・可視化環境 . . . . .         | 6         |
| 2.5          | 全体の構成 . . . . .            | 7         |
| <b>第 3 章</b> | <b>磁気流体力学波</b>             | <b>9</b>  |
| 3.1          | 基礎方程式 . . . . .            | 9         |
| 3.2          | 保存形式 . . . . .             | 11        |
| 3.3          | 線形波 . . . . .              | 12        |
| 3.4          | 非線形効果 . . . . .            | 16        |
| 3.5          | 波の固有ベクトル . . . . .         | 17        |
| <b>第 4 章</b> | <b>差分法の基礎</b>              | <b>21</b> |
| 4.1          | 差分近似 . . . . .             | 21        |
| 4.2          | 線形スカラー移流方程式の差分解法 . . . . . | 23        |
| 4.3          | 保存形表示と数値流束 . . . . .       | 32        |
| 4.4          | Burgers 方程式の数値解法 . . . . . | 33        |
| 4.5          | 流束制限関数 . . . . .           | 34        |
| 4.6          | TVD スキーム . . . . .         | 37        |
| 4.7          | 放物型方程式の差分解法 . . . . .      | 37        |
| 4.8          | 参考文献 . . . . .             | 39        |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| <b>第 5 章 磁気流体力学方程式に対する近似リーマン解法</b>   | <b>41</b>  |
| 5.1 基礎方程式                            | 41         |
| 5.2 近似リーマン解法                         | 44         |
| 5.3 高次精度化                            | 51         |
| 5.4 多次元化                             | 56         |
| 5.5 付録                               | 61         |
| 5.6 参考文献                             | 73         |
| <b>第 6 章 <b>CANS+</b> の使い方</b>       | <b>75</b>  |
| 6.1 <b>CANS+</b> 3 次元コード             | 75         |
| 6.2 IDL による解析・可視化                    | 82         |
| 6.3 matplotlib (python) による解析・可視化    | 92         |
| <b>第 7 章 物理課題</b>                    | <b>107</b> |
| 7.1 衝撃波管問題                           | 107        |
| 7.2 Orszag-Tang 湧問題                  | 109        |
| 7.3 ケルビン・ヘルムホルツ不安定                   | 110        |
| 7.4 磁気リコネクション                        | 114        |
| 7.5 パーカー不安定                          | 120        |
| 7.6 ジェット伝搬                           | 124        |
| 7.7 大局的なブラックホール降着円盤での磁気回転不安定性とジェット形成 | 126        |
| <b>第 8 章 参考文献</b>                    | <b>133</b> |
| <b>参考文献</b>                          | <b>135</b> |

# 第1章

## はじめに

磁気流体シミュレーションは、荷電粒子多体系をマクロに記述する磁気流体 (Magneto-Hydro Dynamic, MHD) 方程式に基づいた流体的計算手法で、プラズマの巨視的現象を取り扱うのに適しています。

**CANS+** は、 **CANS** ( C oordinated A stronomical N umerical S oftware 開発元 HP ) から発展した、高次精度 MHD コードの統合ソフトウェアです。 **CANS+** の特徴として、

- HLLD (HLL) 近似リーマン解法を用いた有限体積法 ( *Miyoshi & Kusano, 2005* )
- MP5 法を用いた高次補間 (5 次精度) ( *Suresh & Huynh, 1997* )
- 9 wave 法を用いた  $\text{divB}$  クリーニング ( *Dedner et al., 2002* )
- カーテシアン／円筒座標系
- 非一様メッシュサイズ
- MPI による 3 次元領域分割化
- IDL によるデータ読み込み・解析ルーチンの整備
- 物理課題の初期設定の用意

が挙げられます。構成はオリジナルの CANS に倣って、共通エンジン部分と物理課題に分けて、ライブラリをリンクする形で、共通エンジンを各課題から利用します。

### 1.1 CANS+ 開発者サイト

下記より、ソースのダウンロード、開発状況がご覧になれます。

<http://bitbucket.org/aplab/cansplus/>

## 1.2 **CANS+** ドキュメント電子図書

本ドキュメントの電子図書形式は

<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/CANS+.epub>

よりダウンロードできます。iPad 等でご利用ください。

## 1.3 問い合わせ

質問、バグレポート、機能要求など、下記よりお問い合わせください。

<https://bitbucket.org/aplab/cansplus/issues/new>

## 1.4 開発メンバー（開発当時）

- ・松本洋介（千葉大学理学研究科） - 統括、計算コア、並列化、最適化、KH 不安定
- ・小川崇之（千葉大学理学研究科） - 計算コア、並列化
- ・朝比奈雄太（千葉大学理学研究科） - 計算コア、並列化、最適化、MHD ジェット
- ・工藤祐己（千葉大学理学研究科） - パーカー不安定
- ・川島朋尚（国立天文台 CfCA） - 降着円盤
- ・錢谷誠司（国立天文台理論部） - 磁気リコネクション
- ・三好隆博（広島大学理学研究科） - アルゴリズム開発、アドバイザー
- ・簗島敬（海洋研究開発機構 IFREE） - アルゴリズム開発、アドバイザー
- ・松元亮治（千葉大学理学研究科） - アドバイザー

## 1.5 著作権

**CANS+** は GNU GPL に基づくオープンソースソフトウェアです。 **CANS+** に含まれる GPL で保護されたソースコードは、自由に改変、頒布することができます。ただし、改変したソフトを第三者に配布等する場合は、GNU GPL であることが求められます。GNU GPL については、<http://www.opensource.jp/gpl/gpl.ja.html.euc-jp> をご覧下さい。

**CANS+** を利用して論文発表を行う際には、下記の論文の引用をお願いします。

Matsumoto et al. (2019), "Magnetohydrodynamic Simulation Code CANS+: Assessments and Applications",  
Publ. Astron. Soc. Japan, doi:10.1093/pasj/psz064

## 1.6 免責事項

**CANS+** は動作検証の上、公開していますが、利用者の責任の上で使用して下さい。 **CANS+** を利用した事によるいかなる損害も我々（**CANS+** 開発チーム）は一切の責任を負いません。

## 1.7 謝辞

**CANS+** は [HPCI 戦略プログラム分野5 「物質と宇宙の起源と構造」](#) によってサポートされています。



## 第2章

# イントロダクション

### 2.1 まずは始めましょう

**CANS+** は Mercurial でバージョン管理されています。Mercurial は Windows, linux, Mac OS に対応したバージョン管理ソフトウェアです。Mercurial のインストールは、Fedora など Redhat 系の場合、

```
$ yum install mercurial
```

Ubuntu など Debian 系の場合、

```
$ sudo apt-get install mercurial
```

で簡単にできます。Mercurial のツールを利用してコードのインストール、アップデートを行います。

まずは、**CANS+** のレポジトリを以下のようにダウンロードします。

```
$ hg clone https://bitbucket.org/aplab/cansplus directory-name
```

**CANS+** は開発途上なため、不定期に更新されます。最新版を反映させるためには、上記で指定した *directory-name* 内で、

```
$ hg pull
$ hg update
```

とすれば、最新版の差分情報が反映されます。この際、自分で修正を加えたファイルと更新ファイルが重なる場合はマージ (**merge**) する必要が出てきます。またその結果、衝突 (**conflict**) する可能性もあります。その場合は出力に従って、テキストエディタ等で該当箇所を編集してください。

Mercurial による分散バージョン管理の詳しい解説は、本家 (<https://www.mercurial-scm.org/>) もしくは日本語解説 (<http://www.lares.dti.ne.jp/~foozy/fujiguruma/scm/mercurial.html>) をご覧ください。

---

注釈: mercurial をインストールできる環境にない場合は、最新版が <https://bitbucket.org/aplab/cansplus/get/default>.

zip よりダウンロードできます。

---

## 2.2 動作環境

以下のソフトウェア・ライブラリがシステムにインストールされている必要があります。

- Mercurial。レポジトリのダウンロード、最新版のアップデートを行うのに必要です（上述）。
- MPI(Message Passing Interface)。コードは MPI 並列化バージョンのみです。
- Fortran コンパイラ。ソースコードは Fortran 90 で書かれています。デフォルトは mpif90 でコンパイルします。
- IDL(Interactive Data Language) バージョン 8 以降。データ読み込み・可視化ルーチンは IDL で用意されています。
- OS は Linux で動作確認済み。上記ソフト・ライブラリがインストールされていれば、Windows、Mac-OS でもたぶん可だと思います。

不具合等についての問い合わせは <https://bitbucket.org/aplab/cansplus/issues/new> まで。

## 2.3 環境変数

環境変数\$CANSPLUS\_DIR を **CANS+** がインストールされたディレクトリの絶対パスとし、以下のように設定します（~/cansplus にインストールした場合）。

bash の場合、

```
export CANSPLUS_DIR=~/cansplus
```

tcsh の場合、

```
setenv CANSPLUS_DIR ~/cansplus
```

## 2.4 解析・可視化環境

### 2.4.1 IDL

IDL による解析・可視化プロシージャがあらかじめ用意されています。\$CANSPLUS\_DIR/3d/idl 内には共通プロシージャ、各課題内には専用のプロシージャがあります。使うためには、環境変数\$IDL\_STARTUP に\$CANSPLUS\_DIR/idl/init.pro を設定します。

bash の場合、

```
export IDL_STARTUP=$CANSPLUS_DIR/idl/init.pro
```

csh の場合、

```
setenv IDL_STARTUP $CANSPLUS_DIR/idl/init.pro
```

\$CANSPLUS\_DIR/idl/init.pro 内には、path の設定、IDL 内の環境の設定等が含まれており、IDL 起動時に自動的に設定されます。各自の好みに合わせて修正してください。

さらなる詳細は [本テキスト idl のページ](#) を参照ください。

## 2.4.2 matplotlib

matplotlib は python プログラム言語をベースとした解析・可視化ライブラリで、IDL と比べてライセンスフリーで使えるため、手頃な解析環境として人気があります。CANS+ が output するデータ形式である DAC 形式データを読み込む python スクリプトが用意されています。さらなる詳細は本テキスト matplotlib のページを参照ください。\$CANSPLUS\_DIR/python 以下にあるスクリプトを python コマンドライン上で呼ぶために以下の設定を行います。

bash の場合、

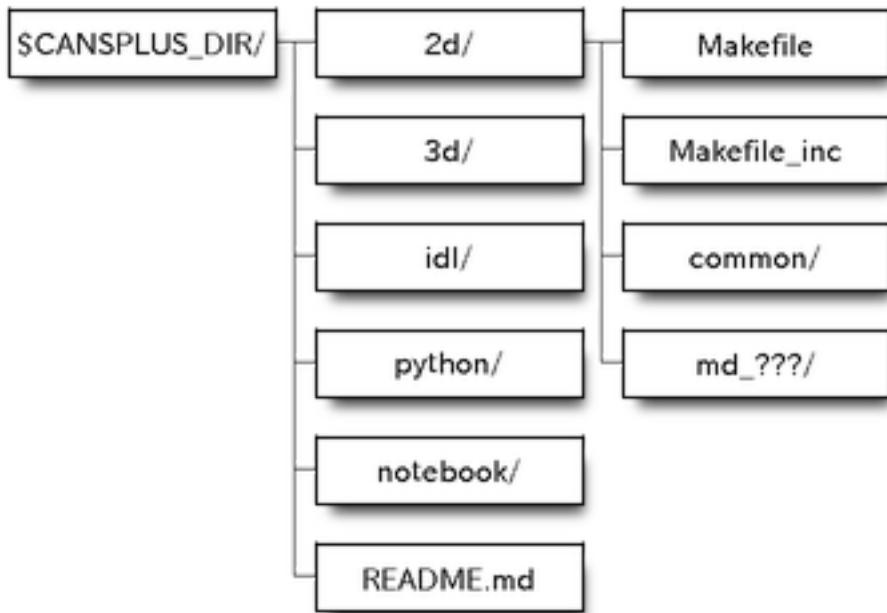
```
export PYTHONPATH=$CANSPLUS_DIR/python
```

csh の場合、

```
setenv PYTHONPATH $CANSPLUS_DIR/python
```

## 2.5 全体の構成

\$CANSPLUS\_DIR 内は、以下のようにディレクトリとファイルで構成されています。



2 次元及び 3 次元のコードが用意されています（2016 年 8 月現在）。“README.md”にはマークダウン形式で **CANS+** の簡単な説明が書かれています。

“2d/ (3d/)”内には、コンパイル用の Makefile、コンパイル時の環境変数を設定した Makefile\_inc が用意されています。各自の環境によってコンパイラ、コンパイラオプションを指定したい場合は、Makefile\_inc 内に設定されている、"\$FC" と "\$FLAGS" を変更してください。

“common/”には共通エンジンが収められています。“md\_???”は、各物理課題の初期設定等が含まれており、“???”に、物理現象の名前が付けられています。

“idl/”内には、IDL による可視化ルーチンが含まれています。各課題で使用する可視化のための共通プロシージャが含まれています。

“python/”内には、データ読み込み用の python スクリプトが含まれています。

“notebook/”内には、IDL と matplotlib を使った解析・可視化ハンズオンのための jupyter notebook が用意されています。

## 第3章

# 磁気流体力学波

著者 花輪知幸（千葉大学）

### 3.1 基礎方程式

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (3.1)$$

運動方程式

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} - \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i}{c} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

$$\pi_{ik} = P \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \quad (3.3)$$

エネルギー収支

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} \right) = \Gamma - \Lambda \quad (3.4)$$

マックスウェル方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \right) = \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.6)$$

オームの法則

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.7)$$

ここでは Einstein の記法を採用して書いています。今回のサマースクールでは粘性が小さく ( $\eta \sim \zeta \rightarrow 0$ )、電気伝導度が無限大 ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) である極限を考える。また変位電流を無視する。この近似は、平均自由行程が十分に短

いと近似したことと同じである。また重力場や加熱・冷却も無視できると考える。この近似を行うと、運動方程式とマックスウェル方程式は

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (B_i B_k) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{B_\ell^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.9)$$

と書き換えられる。本章ではこのように近似した理想磁気流体力学方程式を使って磁気流体波を論じる。使用する変数名をテーブルにまとめる。

|                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| $t$ 時刻                        | $x_i$ 座標                      |
| $\rho$ 密度                     | $P$ 壓力                        |
| $T$ 温度                        | $s$ 比エントロピー                   |
| $\Gamma$ 単位質量あたりの加熱率          | $\Lambda$ 単位質量あたりの冷却率         |
| $\mathbf{j}$ 電流密度             | $\mathbf{B}$ 磁場               |
| $\mathbf{E}$ 電場               | $\sigma$ 電気伝導度                |
| $\Phi$ 重力ポテンシャル               | $c$ 光速度                       |
| $\eta$ ずり粘性 (shear viscosity) | $\zeta$ 体積粘性 (bulk viscosity) |
| $\varepsilon$ 単位質量あたりの内部エネルギー | $\mathbf{v}$ 速度               |
| $E$ 単位質量あたりのエネルギー             | $H$ 単位質量あたりのエンタルピー            |
| $T$ 温度                        | $R$ 気体定数                      |
| $C_V$ 定積比熱                    | $C_P$ 定圧比熱                    |

### 3.1.1 理想気体の状態方程式

$$P = R\rho T \quad (3.10)$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} \quad (3.11)$$

$$s = \frac{R}{\gamma - 1} (\ln P - \gamma \ln \rho) = C_V (\ln P - \gamma \ln \rho) \quad (3.12)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (3.13)$$

$$P = e^{s/C_V} \rho^\gamma = K \rho^\gamma \quad (3.14)$$

エントロピーにはこの他に定数項が加わる。

## 3.2 保存形式

粘性が無視でき (inviscid)、電気伝導度が無限大である場合について考える。このとき流体力学方程式は次のようにまとめられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho v_j v_i - \frac{B_i B_j}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) = \rho g_j \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho H v_i - \frac{B_i}{4\pi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \right) = \rho g_i v_i + \Gamma - \Lambda \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.18)$$

$$E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \varepsilon + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi\rho} \quad (3.19)$$

$$H = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{4\pi\rho} \quad (3.20)$$

式 (3.17) を導出するにあたり、熱力学の関係式

$$d\varepsilon = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{P}{\rho^2}d\rho \quad (3.21)$$

を用いた。

ベクトルを用いると上記の流体力学方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi} \\ \rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho v_x v_z - \frac{B_x B_z}{4\pi} \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ \rho H v_x - \frac{B_x}{4\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \frac{B_y B_x}{4\pi} \\ \rho v_y^2 + P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi} \\ \rho v_y v_z - \frac{B_y B_z}{4\pi} \\ v_y B_x - v_x B_y \\ 0 \\ v_y B_z - v_z B_y \\ \rho H v_y - \frac{B_y}{4\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \frac{B_z B_x}{4\pi} \\ \rho v_z v_y - \frac{B_z B_y}{4\pi} \\ \rho v_z^2 + P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_z^2}{4\pi} \\ \rho v_y v_z \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_z B_y - v_y B_z \\ 0 \\ \rho H v_z - \frac{B_z}{4\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで  $\mathbf{U}$  は状態ベクトル、  $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z$  は流束、  $\mathbf{S}$  は源泉項と呼ばれる。

### 3.3 線形波

#### 3.3.1 流体力学波

すべての物理量は  $x$  や  $y$  に依らず、  $(z, t)$  だけの関数とする。この状況では波は平面波に限られる。また最初は簡単のため磁場や重力場は存在しないとする。このとき運動方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{ds}{\partial t} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (3.27)$$

このとき全ての変化は平面波と考えられる。

もし時間変化がない定常状態では、  $\rho, s, v_x, v_y, v_z, P$  はすべて一定。この状態に対して摂動を考える。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (3.28)$$

$$s = s_0 + s_1 \quad (3.29)$$

$$v_x = v_{x0} + v_{x1} \quad (3.30)$$

$$v_y = v_{y0} + v_{y1} \quad (3.31)$$

$$v_z = v_{z0} + v_{z1} \quad (3.32)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad (3.33)$$

ただし状態方程式を解くと  $\rho = \rho(P, s)$  が得られるので、

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s P_1 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \\ &= c_s^{-2} P_1 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

ここで  $c_s$  は音速を表す。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial v_{y1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{y1}}{\partial z} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{ds_1}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial s_1}{\partial z} = 0 \quad (3.39)$$

方程式 (3.36), (3.37), (3.39) は波が  $v_{z0}$  で進行することを表している。

$$v_{x1}(x, t) = v_{x1}(x - v_{z0}\Delta t, t - \Delta t) \quad (3.40)$$

$$v_{y1}(x, t) = v_{y1}(x - v_{z0}\Delta t, t - \Delta t) \quad (3.41)$$

$$s_1(x, t) = s_1(x - v_{z0}\Delta t, t - \Delta t) \quad (3.42)$$

ここで  $\Delta t$  は任意の時間差。

密度の変化は 2 成分に分け、式 (3.39) を代入すると

$$c_s^{-2} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{v_{z0}}{c_s^2} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (3.43)$$

が得られる。式 (3.43) に  $c_s \rho_0$  を掛けてから式 (3.38) との和をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) + (v_{z0} + c_s) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) = 0 \quad (3.44)$$

が得られる。同様な操作で差をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) + (v_{z0} - c_s) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) = 0 \quad (3.45)$$

が得られる。従って

$$\begin{aligned} J_+ &= v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \\ J_- &= v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \end{aligned} \quad (3.46)$$

により定義される  $J_{\pm}$  は  $v_{z0}, \pm c_s$  で伝播する。

### 3.3.2 磁気流体力学波

磁場を考慮した平面波を考える。再び全ての物理量は  $(z, t)$  だけに依存する場合、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  より、 $B_z$  は一定でなければならない。このことに注意して磁気流体力学方程式を書き直すと、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial}{\partial z} (B_x^2 + B_y^2) = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_x B_z - v_z B_x) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_y B_z - v_z B_y) \quad (3.52)$$

$$\frac{ds}{dt} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (3.53)$$

が得られる。

定常状態では  $\rho, P, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y$  は全て一定。ここでは平衡状態として  $v_x = v_y = 0$  で、 $B_y = 0$   $B_z \geq 0$  である場合を考える。この状態の周りの摂動を考える。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (3.54)$$

$$s = s_0 + s_1 \quad (3.55)$$

$$v_x = v_{x1} \quad (3.56)$$

$$v_y = v_{y1} \quad (3.57)$$

$$v_z = v_{z0} + v_{z1} \quad (3.58)$$

$$B_x = B_{x0} + B_{x1} \quad (3.59)$$

$$B_y = B_{y1} \quad (3.60)$$

$$B_z = B_{z0} \quad (3.61)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad (3.62)$$

摂動方程式は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial v_{y1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{y1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{B_{x0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{x0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = B_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = B_{z0} \frac{\partial v_{y1}}{\partial z} \quad (3.68)$$

$$\frac{ds_1}{dt} + v_{z0} \frac{\partial s_1}{\partial z} = 0 \quad (3.69)$$

と書き表される。

### エントロピー波

式 (3.69) は式 (3.39) と同一で、 $s_1$  が  $v_{z0}$  で移流伝播することを表している。

### アルフヴェン波

運動方程式と誘導方程式の  $y$  成分の線形結合をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_y + \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) + \left( v_{z0} - \frac{B_{z0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_y + \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_y - \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) + \left( v_{z0} + \frac{B_{z0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_y - \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) = 0 \quad (3.71)$$

ここで  $v_y \pm B_{y1}/\sqrt{4\pi\rho_0}$  は Elsasser variable である。平衡状態で磁場は  $xz$  平面内にあるとしたので、 $y$  方向は平均磁場と波数のどちらにも垂直となっている。従ってこの方程式は、横波を表している。伝播速度はアルフヴェン速度と呼ばれ、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を用いて次のように評価できる。

$$v_{Az} \equiv \frac{|B_{z0}|}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \frac{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0|}{k \sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (3.72)$$

### 磁気音波

残りの 4 本の微分方程式は

$$c_s^{-2} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{v_{z0}}{c_s^2} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{B_{x0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{x0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = B_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_{Az} \\ c_s & 0 & 0 & v_{Ax} \\ 0 & -v_{Az} & v_{Ax} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = 0 \quad (3.77)$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{P_1}{c_s \rho_0} \\ v_{x1} \\ v_{z1} \\ \frac{B_{x1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

分散関係

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow ik, \quad \lambda = \frac{\omega}{k} \quad (3.79)$$

$$(\lambda - v_{z0})^4 - (c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2) (\lambda - v_{z0})^2 + c_s^2 v_{Az}^2 \quad (3.80)$$

$$\lambda = v_{z0} \pm v_f, \quad v_{z0} \pm v_s \quad (3.81)$$

$$v_f^2 = \frac{c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2 + \sqrt{(c_s^2 + v_{Ax}^2 - v_{Az}^2)^2 + 4v_{Ax}^2 V_{Az}^2}}{2} \quad (3.82)$$

$$v_s^2 = \frac{c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2 - \sqrt{(c_s^2 + v_{Ax}^2 - v_{Az}^2)^2 + 4v_{Ax}^2 V_{Az}^2}}{2} \quad (3.83)$$

## 3.4 非線形効果

伝播速度は位相により異なる。最も簡単な例は磁場がない等エントロピーの流れ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3.85)$$

密度は圧力だけの関数であることに注意すると、連続の式は

$$\frac{1}{c_s \rho} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) + c_s \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.86)$$

と書き改められる。新しい変数として

$$w \equiv \int \frac{1}{c_s \rho} dP \quad (3.87)$$

と置くと流体力学方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v_z \frac{\partial w}{\partial z} + c_s \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_s \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial J_{\pm}}{\partial t} + (v_z \pm c_s) \frac{\partial J_{\pm}}{\partial z} = 0 \quad (3.90)$$

$$J_{\pm} = v_z \pm w \quad (3.91)$$

ここで波の振幅を表す変数  $J_{\pm}$  を Riemann 不変量と呼ぶ。エントロピーや Elsasser variable も Riemann 不変量である。

初期に  $J_- = 0$  であれば、つねに  $J_- = 0$  なので  $J = 2v_z = 2w$ 。伝播速度  $v_z + w$  は、 $J$  が大きいほど大きい。従って初期の波形が正弦波も次第に切り立った波形に変わる。ついには衝撃波へと変化する。

比熱比  $\gamma$  が一定の理想気体の場合、

$$w = \frac{2c_s}{\gamma - 1} \propto \rho^{(\gamma - 1)/2} \quad (3.92)$$

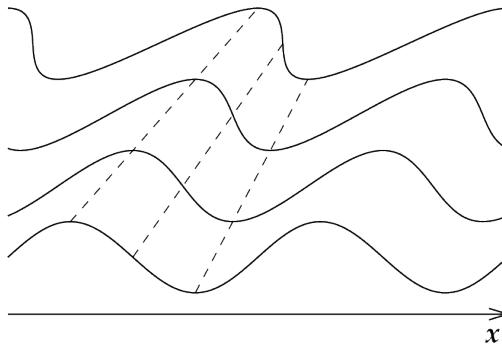


図 1 波の伝播による波頭の先鋒化

## 3.5 波の固有ベクトル

### 3.5.1 磁場のない場合

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

$$\Delta \mathbf{U} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} + v_{z1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ \rho v_z \end{pmatrix} + c_s^{-2} P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

$$= \left( \rho_1 - \frac{P_1}{c_s^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} + \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z + c_s \\ H + c_s v_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} - \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z - c_s \\ H - c_s v_z \end{pmatrix}$$

### 3.5.2 磁場のある場合

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{U} = & \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} + \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z + c_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H + c_s v_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} - \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z - c_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H - c_s v_z \end{pmatrix} \\
 & + B_{1x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{B_{0x}}{4\pi} \end{pmatrix} + B_{1y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.95}
 \end{aligned}$$

エントロピー波は流体のときと同じ。

アルフヴェン波による変化は

$$\Delta \mathbf{U}_{\text{Alfven}} = \left( v_{y1} + \frac{B_{y1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{4\pi\rho_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( v_{y1} - \frac{B_{y1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi\rho_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

と表される。

$\lambda = v_{z0} + v_*$  で伝播する磁気音波による変化 (固有ベクトル)

$$d\mathbf{q} = \begin{pmatrix} c_s c_{Ax} v_* \\ (c_s^2 - v_*^2) v_{Az} \\ v_*^2 c_{Ax} \\ (c_s^2 - v_*^2) v_* \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

と表される。

伝播速度の大小

$$-v_f \leq -v_{Az} \leq -v_s \leq 0 \leq v_s \leq v_{Az} \leq v_f \quad (3.98)$$



## 第4章

# 差分法の基礎

著者 松元亮治（千葉大学）

流体・磁気流体方程式を差分法を用いて数値的に解く際に必要になる基礎的事項について解説する。波の伝播をあらわす線形移流方程式や非線形の Burgers 方程式をとりあげ、差分解法の数値的な安定性や数値振動について論じる。特に、数値的な安定性に優れ、非物理的な数値振動を起こさない差分法として風上差分法を紹介する。

### 4.1 差分近似

変数  $u$  が空間座標  $x, y$  に依存するという 2 次元問題を考える。

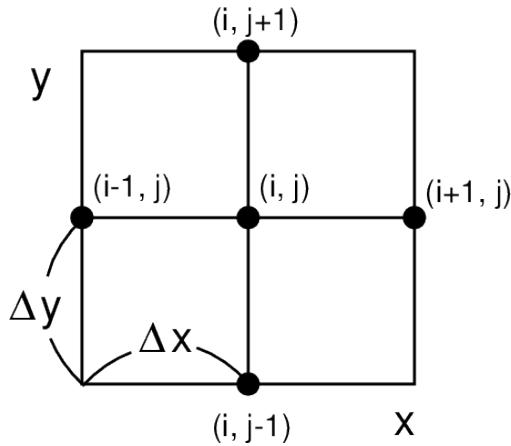


図 1 2 次元メッシュの図

2 次元空間を図のような格子に区切り、各格子点の座標を  $(x_i, y_j)$  とする。格子間隔は  $x$  方向が  $\Delta x$ 、 $y$  方向が  $\Delta y$  とする。 $x_{i\pm 1} = x_i \pm \Delta x$ 、 $y_{j\pm 1} = y_j \pm \Delta y$  である。以下、格子点番号  $(i, j)$  を用いて  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$  のように略記する。

着目している点  $(x_i, y_j)$  のまわりでテイラーフェルムを展開すると、

$$u_{i+1,j} = u(x_i + \Delta x, y_j) = u_{i,j} + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (4.1)$$

$$u_{i-1,j} = u(x_i - \Delta x, y_j) = u_{i,j} - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (4.2)$$

式 (4.1) から式 (4.2) を引くと

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^3) \quad (4.3)$$

したがって、

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.4)$$

すなわち、 $(i, j)$  点における  $u$  の  $x$  方向の微分係数  $(\partial u / \partial x)_i$  が  $\Delta x^2$  の誤差を含む近似のもとで ( $\Delta x$  について 2 次の精度で) 以下のように求まる。

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.5)$$

これを中心差分の式と言う。

同様にして、 $\Delta x$  について 1 次の精度で以下の差分近似式が得られる。

前進差分：

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (4.6)$$

後退差分：

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (4.7)$$

式 (4.1) と式 (4.2) を加えると

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4) \quad (4.8)$$

したがって、

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4.9)$$

これより、 $u$  の  $x$  に関する 2 階微分の係数  $(\partial^2 u / \partial x^2)_i$  を  $\Delta x$  について 2 次の精度で以下のように近似することができる。

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (4.10)$$

同様に、

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_j = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \quad (4.11)$$

## 4.2 線形スカラー移流方程式の差分解法

### 4.2.1 1次元線形スカラー移流方程式

流体・磁気流体方程式の本質は波の伝播にある。この部分だけを取り出して次のような方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

ただし、 $c$  は定数で  $c > 0$  とする。この方程式は、スカラー量  $u$  の空間分布が、一定の速度  $c$  で伝播することをあらわす波動方程式である。

方程式 (4.12) の厳密解は

$$u(x, t) = u(x - ct, 0) \quad (4.13)$$

である。これは、時刻  $t > 0$  におけるスカラー量  $u$  のプロフィールは  $t = 0$  のスカラー量  $u$  のプロフィールが形を保って  $ct$  だけ平行移動した形になることをあらわす。

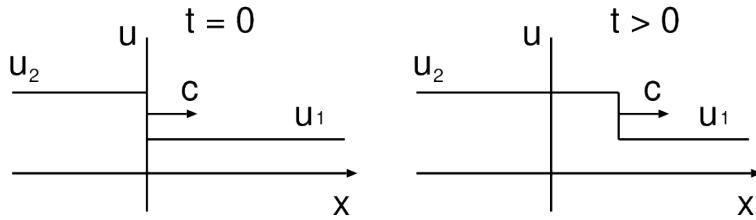


図 2 1 次元スカラー移流問題の初期条件と時間発展

いま、図 1 次元スカラー移流問題の初期条件と時間発展 のように初期に  $x \geq 0$  で  $u = u_1$ 、 $x < 0$  で  $u = u_2$  のように  $x = 0$  で不連続な分布を考えてみると  $t > 0$  での厳密解は右図のような形になる。

### 4.2.2 FTCS スキーム

1 次元線形スカラー移流方程式 (4.12) を時間について現在の時刻  $t_n$  と  $\Delta t$  後の時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  の間で前進差分、空間については中心差分をとって差分化すると次式を得る。ここで、 $u_j^n = u(x_j, t_n)$  である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (4.14)$$

このような差分のとり方を FTCS スキーム (Forward in Time and Centered Difference in Space) と言う。これを整理すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (4.15)$$

ここで、 $\nu$  は次式で定義される数であり、クーラン数と呼ばれる。

$$\nu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.16)$$

式 (4.15) の右辺は時刻  $t_n$  での値、左辺は時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  での値だけで書けている。したがって、時刻  $t_n$  での各格子点での値がわかっているれば直ちに 1 タイムステップ後 ( $t_{n+1}$ ) の各格子点での値を計算することができる。このような解法のことを **陽解法** と言う。

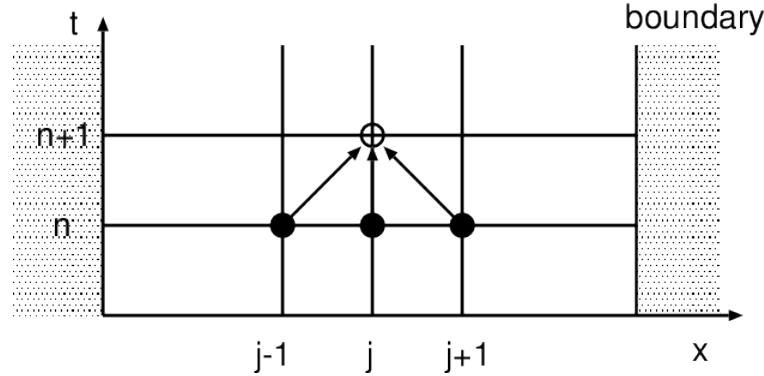


図 3 FTCS スキームにおける変数の依存関係

FTCS スキームにおける変数の依存関係を図 [FTCS スキームにおける変数の依存関係](#) のようになる。矢印は時刻  $t_{n+1}$  の白丸の点の値を計算するのに時刻  $t_n$  の黒丸の格子点の値を使うことを示す。

1 次元波動伝播のシミュレーションを行うアルゴリズムは一般に次のようになる。

1. 各メッシュ点の座標値  $x_j$  をセットする (メッシュ生成)
2. 各メッシュ点の初期値  $u_j(t = 0)$  をセットする (初期条件)
3. 時刻  $t$  が、あらかじめ決められた終了時刻  $t_{\text{end}}$  に達するまで、あるいは決められた回数だけ、以下を繰り返す
  - (a) 左右の境界を除く各格子点について  $\Delta t$  後の値を差分式にもとづいて計算する (時間積分)。たとえば FTCS スキームの場合には計算式 (4.15) を用いる。
  - (b) 左右の境界の値を境界条件から決める。たとえば隣接点と同じ値を入れる (境界条件の適用)
  - (c) 時刻を  $\Delta t$  だけ進める

FTCS スキームを用いて 1 次元線形スカラー移流方程式を解いた結果を [上図](#) に示す。波は形を保って伝わらずに振動が発生してしまっている。この振動は物理的な理由で発生しているのではなく、数値的不安定性によるものである。なぜこのような数値振動が発生してしまうのか、次節で説明する。

### 4.2.3 FTCS スキームの数値的安定性

#### Von Neumann の安定性解析

前節の FTCS スキームによって 1 次元波動伝播のシミュレーションを行ってみると解が激しく振動して数値的に不安定になってしまることがわかった ([FTCS の結果の図](#))。この不安定性の原因を調べるために

$$u_j^n = \cos(j\theta) \quad (4.17)$$

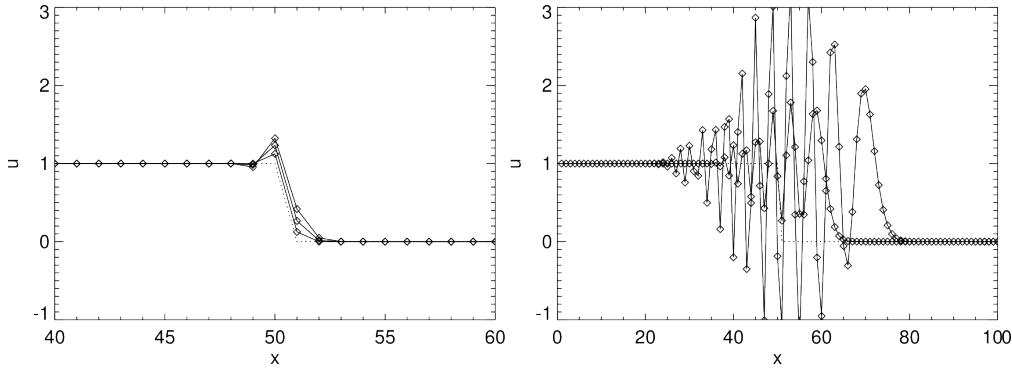


図4 左図: FTCS スキームで、初期値として、 $j = 1, \dots, 50$  に対して  $u = 1$ 、 $j = 51, \dots, 100$  に対して  $u = 0$  とし、クーラン数  $\nu = c\Delta t/\Delta x = 0.25$  で 1 ステップ、2 ステップ、3 ステップ計算したときの  $u$  をプロットした図。右図: 50 ステップ、100 ステップ計算したときの  $u$  をプロットした図。

を差分式 (4.15) に代入してみる。ここで  $\theta$  は、波の波数を  $k$  として  $\theta = k\Delta x$  であらわされる量である。たとえば  $\theta = \pi$  のとき  $u_j^n$  は 安定性解析結果 左図のように 2 メッシュで 1 波長の波、 $\theta = \pi/3$  のときは右図のように 6 メッシュで 1 波長の波をあらわす。

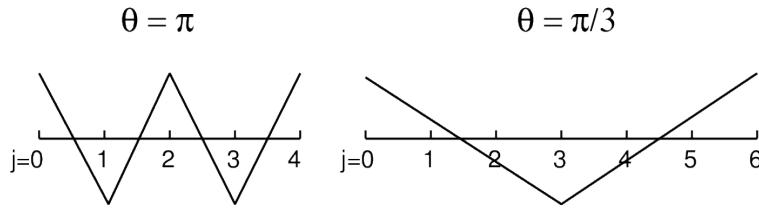


図5 安定性解析結果。メッシュ番号を  $j$  としたときの  $u_j^n = \cos(j\theta)$  のプロフィール。左図:  $\theta = \pi$  の場合。右図:  $\theta = \pi/3$  の場合。

その結果は

$$u_j^{n+1} = \cos(j\theta) + \nu \sin\theta \sin(j\theta) = \operatorname{Re} [(1 - i\nu \sin\theta) e^{ij\theta}] \quad (4.18)$$

これをもう一度差分式に代入すると

$$\begin{aligned} u_j^{n+2} &= (1 - \nu^2 \sin^2\theta) \cos(j\theta) + 2\nu \sin\theta \sin(j\theta) \\ &= \operatorname{Re} [(1 - i\nu \sin\theta)^2 e^{ij\theta}] \end{aligned} \quad (4.19)$$

である。ここで、 $i$  は虚数単位、 $\operatorname{Re}$  は実部をとることをあらわす。以上からわかるように、

$$u_j^{n+k} = \operatorname{Re} [(1 - i\nu \sin\theta)^k e^{ij\theta}] \quad (4.20)$$

が成り立つ。

以上と同様に、式 (4.17) を複素数に拡張した  $u_j^n = e^{ij\theta}$  を差分式 (4.15) に代入すると

$$u_j^{n+k} = (1 - i\nu \sin\theta)^k u_j^n \quad (4.21)$$

が成り立つ。

差分法(差分スキーム)の数値的安定性を導くひとつ的方法として、

$$u_j^n = g^n e^{ij\theta} \quad (4.22)$$

を差分式に代入して複素増幅率  $g$  を求め、1 タイムステップ間の振幅の増幅率  $|g| \leq 1$  となる条件を求める方法がある。これを Von Neumann の安定性解析と言う。

$u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を FTCS 差分式に代入すると

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{1}{2}\nu(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 1 - i\nu \sin \theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

したがって

$$|g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2 \theta \geq 1 \quad (4.24)$$

以上の結果より、 $\theta = 0$  の場合を除いて FTCS スキームは常に不安定になる。

### テイラー展開による方法

差分化した式にテイラー展開を適用して差分式が満たす偏微分方程式を導くことによっても FTCS スキームが数値的に不安定であることを示すことができる。 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 、 $x_{j\pm 1} = x_j \pm \Delta x$  を用いると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \quad (4.25)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \quad (4.26)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \quad (4.27)$$

### FTCS スキームの差分式

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (4.28)$$

の左辺に (4.25)、右辺に (4.26)、(4.27) を代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 = -\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \right) \quad (4.29)$$

これを整理すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - \frac{c}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \dots \quad (4.30)$$

ここで、解くべき偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.31)$$

より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.32)$$

であることを用いると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta t - \frac{c}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \dots \quad (4.33)$$

右辺が差分化によって新たに加わった項である。右辺第1項は負の拡散係数を持つ拡散項になっている。「正の拡散」は物理量の値のピークをなまらせる働きがあるが、「負の拡散」では物理量が周囲よりもわずかに高い値を持つ部分があるとこのピークがどんどん大きくなるという不安定性を生ずる。

よって、テイラー展開法からもスカラー移流方程式の FTCS スキームは数値的に不安定であることがわかる。

#### 4.2.4 Lax-Friedrich のスキーム

この方法では FTCS スキームの右辺の  $u_j^n$  を  $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$  で置き換える、以下のように差分化する。

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (4.34)$$

$u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を代入して增幅率  $g$  を求めると

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= \cos\theta - i\nu\sin\theta \end{aligned} \quad (4.35)$$

したがって

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2\sin^2\theta \quad (4.36)$$

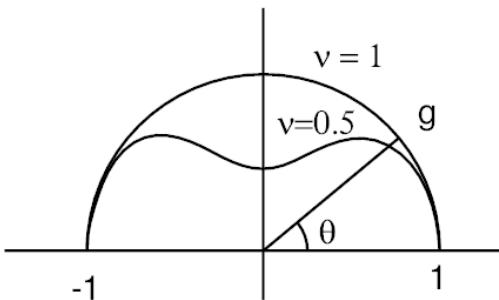
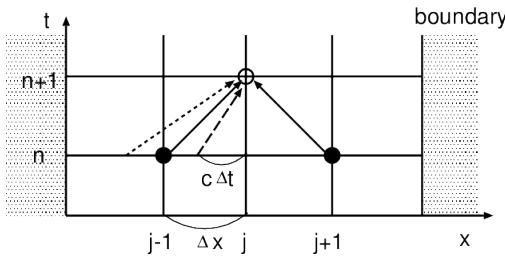


図 6 Lax-Friedrich スキームの場合の增幅率

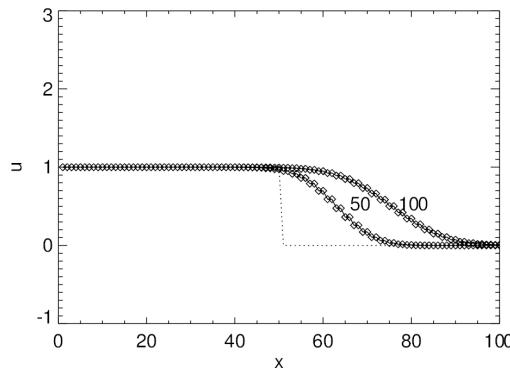
Lax-Friedrich スキームの場合の增幅率  $|g|$  を  $\theta$  の関数として極座標  $(g, \theta)$  で示す。Lax-Friedrich のスキームでは、クーラン数  $\nu = c\Delta t/\Delta x$  が  $|\nu| \leq 1$  を満たす場合、安定に計算を進めることができる。この条件のことを Courant, Friedrich, Lewy 条件 (CFL 条件あるいはクーラン条件) と言う。

クーラン条件の意味を考えてみよう。差分式 (4.34) を書き換えると以下の式を得る。

$$u_j^{n+1} = \frac{1-\nu}{2}u_{j+1}^n + \frac{1+\nu}{2}u_{j-1}^n \quad (4.37)$$

図 7 Lax-Friedrich スキームにおける依存関係。破線と点線はそれぞれ  $\nu < 1$ 、 $\nu > 1$  の場合の波の伝播を示す。

クーラン条件  $|\nu| \leq 1$  が満たされている場合、時刻  $t = t_{n+1}$  の値  $u_j^{n+1}$  は  $t = t_n$  の  $j-1$  点の値  $u_{j-1}^n$  と  $j+1$  点の値  $u_{j+1}^n$  の内挿値になっている。上図に Lax-Friedrich スキームにおける変数の依存関係を示す。実線は時刻  $t = t_{n+1}$  の白丸の格子点の値を計算する際に用いられる時刻  $t = t_n$  の格子点、破線は  $\nu = c\Delta t/\Delta x < 1$  の場合、点線は  $\nu > 1$  の場合の波の伝播を示す。クーラン条件は  $|c|\Delta t < \Delta x$ 、すなわち時間間隔  $\Delta t$  の間に波が 1 メッシュ以上伝わってはいけないことを意味する。 $u_j^{n+1}$  は  $u_{j-1}^n$  と  $u_{j+1}^n$  だけから計算されるが、時間間隔が  $\Delta t > \Delta x/|c|$  となると  $x_{j-1} \leq x \leq x_{j+1}$  より外側からも情報が伝わってくるため計算を安定に進めることができなくなるのである。

図 8 Lax-Friedrich スキームを用いた 1 次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果を示す。

上図に Lax-Friedrich スキームを用いて 1 次元線形スカラー移流方程式の解を求めた結果を示す。数値振動のない解が得られている。Lax-Friedrich スキームの欠点は数値散逸が大きく、不連続面が時間とともになまってしまうことである。

#### 4.2.5 1 次精度風上差分法

図のように波が正の方向に伝わっている場合を考える。このとき、 $j$  点での空間微分を、 $j$  点と風上にあたる  $j-1$  点の間の差分で近似する方法が風上差分である。

1 次元スカラー移流方程式を時間について前進差分、空間については風上差分として差分化すると、 $c > 0$  の場合、以下の差分式を得る。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.38)$$

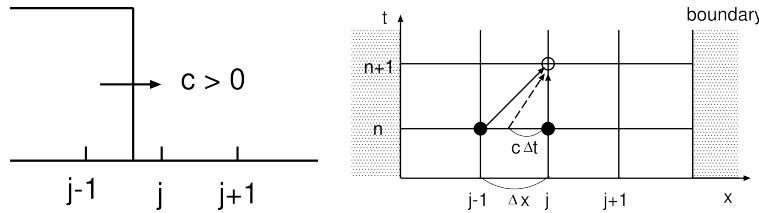


図 9 左図：右方向に伝わる波、右図：1 次精度風上差分における依存関係。破線は波による情報の伝達を示す。

したがって

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (4.39)$$

右図に1次精度風上差分における変数の依存関係を示す。黒丸は時刻  $t_{n+1}$  の白丸の格子点の値を計算する際に用いられる時刻  $t_n$  の格子点、破線は時刻  $t_{n+1}$  に白丸の格子点に到達する波の伝播を示す。

増幅率は

$$\begin{aligned} g &= 1 - \nu(1 - e^{-i\theta}) \\ &= (1 - \nu + \nu \cos \theta) - i \nu \sin \theta \end{aligned} \quad (4.40)$$

したがって

$$\begin{aligned} |g|^2 &= (1 - \nu + \nu \cos \theta)^2 + \nu^2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\nu(1 - \nu)(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.41)$$

これより、 $0 \leq \nu \leq 1$  の場合、任意の  $\theta$  について  $|g| \leq 1$  であり、安定であることがわかる。

風上差分の差分式 (4.39) は次のようにも書ける。

$$u_j^{n+1} = (1 - \nu)u_j^n + \nu u_{j-1}^n. \quad (4.42)$$

クーラン条件  $0 \leq \nu \leq 1$  が満たされている場合、 $u_j^{n+1}$  は時刻  $t = t_{n+1}$  に  $j$  番目の格子点に到達する波の  $t = t_n$  での位置（右図の破線矢印の出発点）における値  $u(x_j - c\Delta t, t_n)$  を  $u_{j-1}^n$  と  $u_j^n$  から線形内挿した値になっている。

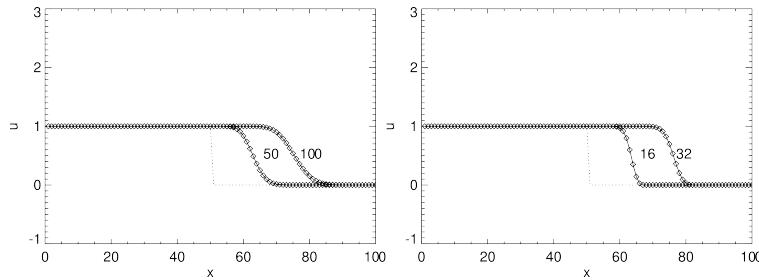


図 10 1 次精度風上差分法を用いた 1 次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。左：クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右： $\nu = 0.80$  で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

上図に1次精度風上差分法を用いたシミュレーション結果を示す。

## 練習問題

- クーラン数  $\nu$  が 1, 0.75, 0.5 の場合について 1 次精度風上差分の增幅率  $|g|$  を位相  $\theta$  の関数として求め、極座標  $(|g|, \theta)$  でプロットせよ。
- 1 次精度風上差分法の差分式 (4.39) にテイラー展開を適用することによって、以下の偏微分方程式が得られることを示せ。右辺第 1 項が拡散項であることに注意して、クーラン条件を導け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} c \Delta x (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} c (\Delta x)^2 (2\nu^2 - 3\nu + 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots$$

## 4.2.6 Lax-Wendroff のスキーム

Lax-Wendroff スキームはテイラー展開にもとづく差分法であり、以下のようにして導かれる。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (4.43)$$

右辺第 2 項、第 3 項に  $\partial u / \partial t = -c \partial u / \partial x$ 、 $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$  を代入すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \quad (4.44)$$

空間微分  $\partial u / \partial x$ 、 $\partial^2 u / \partial x^2$  をそれぞれ中心差分で近似すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} c \Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (4.45)$$

これが Lax-Wendroff スキームである。以上の導出過程からわかるように、Lax-Wendroff スキームは空間、時間についていずれも 2 次精度の解法になっている。

Lax-Wendroff スキームの安定性を von Neumann の方法で調べてみる。增幅率は

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{\nu}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\nu^2}{2} (e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) \\ &= 1 - i\nu \sin \theta + \nu^2 \cos \theta - \nu^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

したがって、

$$\begin{aligned} |g|^2 &= [1 - \nu^2(1 - \cos \theta)]^2 + \nu^2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\nu^2(1 - \nu^2)(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.47)$$

これより、 $|\nu| \leq 1$  であれば任意の  $\theta$  について  $|g| \leq 1$  であり、安定であることがわかる。

1 次元スカラ一方程式の場合、Lax-Wendroff スキームは以下のように 2 段階に分けたスキームと同等である。この方法を **2 段階 Lax-Wendroff 法** と呼ぶ。

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{1}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (4.48)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (4.49)$$

これを図示すると [上図](#) のようになる。

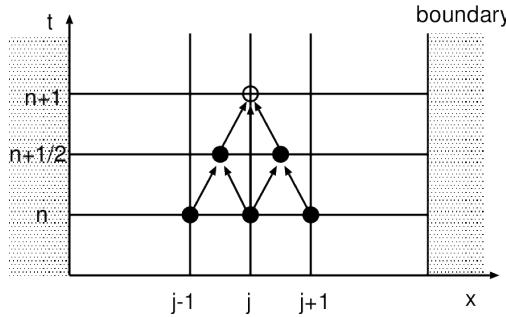


図 11 2段階 Lax-Wendroff スキームにおける依存関係。第一段階で時刻  $t_n$  における格子点  $j-1, j, j+1$  の値から時刻  $t_{n+1/2}$  における格子点  $j-1/2, j+1/2$  の値が計算される。第二段階ではこれらの点の値を用いて時刻  $t_{n+1}$  の白丸の格子点の値が求まる。

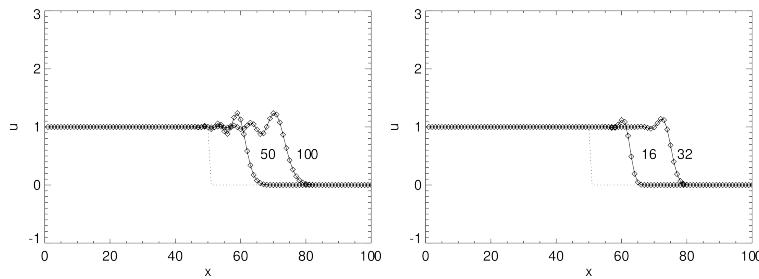


図 12 2段階 Lax-Wendroff 法による 1 次元線形スカラー移流方程式のシミュレーション結果。左図：クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右図：クーラン数  $\nu = 0.80$  で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

図に Lax-Wendroff 法を用いて 1 次元線形スカラー移流方程式の数値解を求めた結果を示す。Lax-Wendroff 法は空間、時間についていずれも 2 次精度の方法であるが、不連続面近傍で数値振動を生じるという欠点を持つ。これに関して、以下の定理が知られている。

### Godunov の定理

1 次元スカラー移流方程式  $\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$  に対して、

$$u_j^{n+1} = \sum_k a_k u_{j+k}^n \quad (4.50)$$

の形の 2 次精度以上の精度を持つどのようなスキームも解の単調性を維持することはできない。

ここで、「解の単調性を維持する」とは、時刻  $t_n$  におけるプロフィール  $u(x, t_n)$  が  $x$  に関して単調増加または単調減少する関数であるならば時刻  $t_{n+1}$  における関数  $u(x, t_{n+1})$  も単調増加または単調減少関数でなければならないことを意味する。たとえば 1 次精度風上差分の場合、 $0 \leq \nu \leq 1$  なら  $u_j^{n+1}$  は必ず  $u_{j-1}^n$  と  $u_j^n$  の間の値をとるため、もしも  $u_{j-1}^n \leq u_j^n \leq u_{j+1}^n$  なら  $u_j^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1}$  となり、単調性が維持される。Godunov の定理の証明については、たとえば藤井 (1994) を参照されたい。

数値振動を抑える方法には以下のものがある。

- 人工粘性を加える

粘性係数を  $\kappa$  として、

$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^{n+1} + \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (4.51)$$

$$\kappa_{j+1/2} = Q_v \Delta x |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (4.52)$$

とする。拡散係数  $\kappa$  は、たとえば以下のように不連続面付近で大きな値をとるように決める。 $Q_v$  はパラメータである。

- 流束制限関数を用いる

これについては後述する。

### 4.3 保存形表示と数値流束

1 次元スカラー移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.53)$$

を以下の形に変形する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (4.54)$$

ここで、

$$f = cu \quad (4.55)$$

は流束をあらわす。式 (4.54) の形を保存形と呼ぶ。

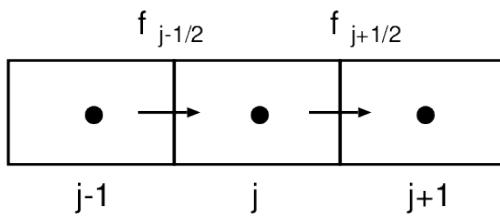


図 13 メッシュ点とメッシュ境界を通って出入りする流束の関係

保存形式の物理的意味を考えるために、図に四角で囲って示した領域 ( $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$ ) における保存量  $u$  の時間変化を求めてみよう。方程式 (4.54) を  $x = x_{j-1/2}$  から  $x = x_{j+1/2}$  まで積分すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u dx + f(x_{j+1/2}) - f(x_{j-1/2}) = 0. \quad (4.56)$$

したがって、保存量  $u$  の積分量

$$u_j^n = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx \quad (4.57)$$

の時間変化は、この時間の間に左右の境界  $x_{j\pm 1/2}$  を通って出入りする流束  $f_{j\pm 1/2}$  の差に等しい。これより次式を得る。

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) \quad (4.58)$$

差分式 (4.58) は保存則を厳密に満たす。これが保存形式を用いる利点である。

メッシュ境界の流束  $f_{j\pm 1/2}^n$  は各メッシュ点での流束から近似的に計算することができる。これを **数値流束** といい、 $\tilde{f}_{j\pm 1/2}^n$  であらわす。各種差分スキームの差分式から数値流束を求めるところのようになる。

- FTCS

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) \quad (4.59)$$

- Lax-Friedrich

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[ (1 - \frac{1}{\nu}) f_{j+1}^n + (1 + \frac{1}{\nu}) f_j^n \right] \quad (4.60)$$

- Upwind (風上差分)

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(f_{j+1}^n + f_j^n) - |c| (u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (4.61)$$

この式は、 $c > 0$  の場合は  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_j^n$  、 $c < 0$  の場合は  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n$  と一致する。

- Lax-Wendroff

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(1 - \nu) f_{j+1}^n + (1 + \nu) f_j^n] \quad (4.62)$$

## 4.4 Burgers 方程式の数値解法

ここまででは、移流の速さ  $c$  が一定の場合の 1 次元線形スカラー移流方程式を扱ってきた。本節では、以下のような非線形波動方程式を差分近似によって解くことを考える。これは、非粘性の場合の Burgers 方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.63)$$

この方程式は流線に沿うラグランジュ微分  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$  を用いると次のように表現できる。

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (4.64)$$

粒子的な描像に立てば、この方程式は力を受けていない粒子の運動を記述しており、その解はもちろん  $u = const.$  である。初期速度分布が正弦波的な場合、[上図](#) に示すように、振幅が正の領域は  $+x$  方向に、負の領域は  $-x$  方向に移動してしまいに波が突っ立ち、有限の時刻で後からきた粒子が前の粒子に追いついてしまう。連続系では空間の 1 点で速度が多価になることはできないため、このような場合に解に不連続が生じる。

Burgers 方程式を差分法によって解くため、方程式をまず、以下のような保存系に変形する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (4.65)$$

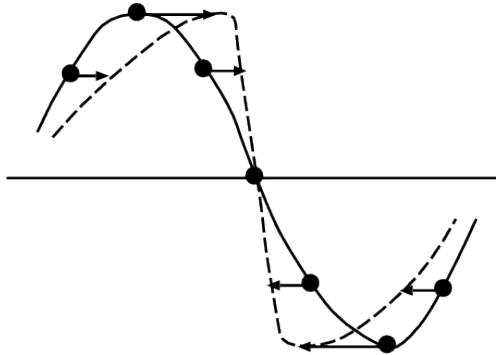
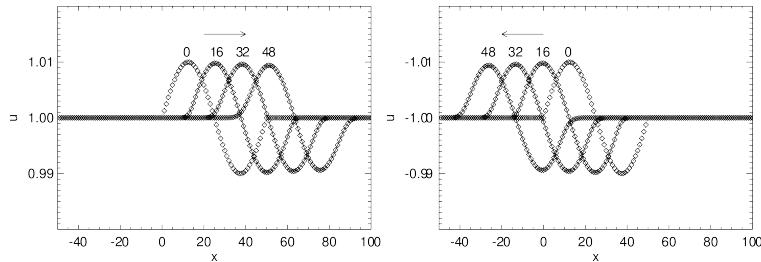


図 14 Burgers 方程式の解の様子。ある有限の時刻で後ろからきた粒子が前の粒子に追いつく。

図 15 Burgers 方程式を 1 次精度風上差分法で解いた結果の例。左：初期に  $u > 0$  の場合。右：初期に  $u < 0$  の場合。図中の数字は時間ステップ数。時間きざみは  $\Delta t / \Delta x = 0.8$  とした。

これは、流束  $f(x)$  が  $f(x) = u^2/2$  の場合に相当し、各種差分スキームを適用することができる。たとえば 1 次精度の風上差分法を適用する場合、線形スカラー方程式で移流の速さ  $c$  が一定である場合には  $c > 0$  のとき  $f_{j+1/2}^n = f_j^n$  であったことに注意し、メッシュ境界の  $j + 1/2$  点での速さを  $(u_j(t) + u_{j+1}(t))/2$  で近似すると、

- $u_{j+1}(t) + u_j(t) > 0$  のとき、  $f_{j+1/2}^n = f_j^n = |u_j(t)|^2/2$
- $u_{j+1}(t) + u_j(t) \leq 0$  のとき、  $f_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n = |u_{j+1}(t)|^2/2$

図に初期に  $u(x) = 1 + \epsilon \sin(kx)$  ( $\epsilon = 0.01, 0 \leq kx \leq 2\pi$ ) のような速度分布を与えた場合の Burgers 方程式の解を 1 次精度の風上差分法で計算した結果を示す。左図の場合、初期に  $u \sim 1$  であることから予想できるように非線形効果が小さい間の解は波の速さが  $c = 1$  の場合の線形スカラー移流方程式の解とほぼ一致し、波はほぼその形を保ちながら右側に伝わっていく。右図では初期に  $u \sim -1$  であり、波は左に伝わる。

非線形性が強くなる場合の Burgers 方程式の数値解の例を図に示す。この例では初期に  $u(x) = 1 + 0.1 \sin(kx)$  のような速度分布を与え、その後の時間発展を 1 次精度の風上差分法によって解いた。Burgers 方程式の非線形項  $u \partial u / \partial x$  の効果により波がしだいに突っ立ち、不連続（衝撃波）が形成されることがわかる。

## 4.5 流束制限関数

以上、線形スカラー移流方程式と Burgers 方程式を例にして差分解法について解説してきた。1 次精度の風上差分法を用いるとこれらの方程式の解にあらわれる不連続面を数値振動を起こすことなくとらえることができる。しかしながら、Godunov の定理が示すように、空間 2 次精度以上の解法では数値振動があらわれてしまうことがわ

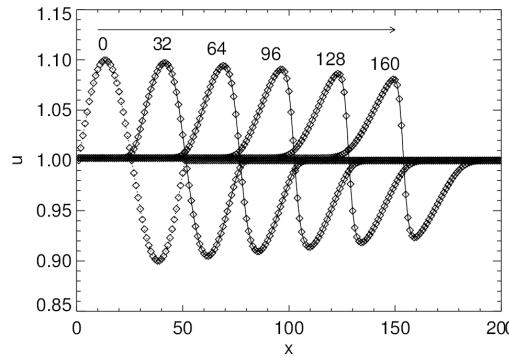


図 16 初期に  $u(x) = 1 + 0.1\sin(kx)$  の速度分布から始めた場合の Burgers 方程式の数値解。図中の数字は時間ステップ数。1 次精度風上差分法で時間きざみは  $\Delta t/\Delta x = 0.8$  とした。

かった。

Lax-Wendroff 法の数値流束を補正することによって、不連続面近傍での振動を抑えることができないかどうか考えてみよう。Lax-Wendroff 法の数値流束は次のようにも書ける。

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = c[u_j^n + \frac{1}{2}(1-\nu)(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (4.66)$$

数値振動が生じない 1 次精度の風上差分の数値流束は  $c > 0$  のとき  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = cu_j$  であり、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第 1 項と一致している。そこで、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第 2 項を次のように補正してみる。

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = c[u_j^n + \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (4.67)$$

ここで導入した  $B_{j+1/2}$  のことを 流束制限関数 と呼ぶ。数値流束 (4.67) を差分式 (4.58) に代入して変形すると次式を得る。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} = \nu[1 - \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j-1/2}] + \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\frac{B_{j+1/2}}{r_j} \quad (4.68)$$

ここで、

$$r_j \equiv \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} \quad (4.69)$$

である。

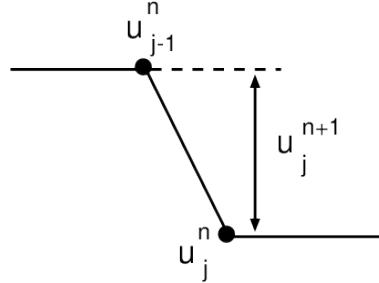


図 17 数値振動が生じないようにするために  $u_j^{n+1}$  の値を制限する範囲

数値振動が生じないようにするために、図に示したように  $u_j^{n+1}$  が  $u_j^n$  と  $u_{j-1}^n$  の間の値をとるように制限を加えることにしよう。これには、式(4.68)の左辺の値を以下のように制限すればよい。

$$0 \leq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} \leq 1 \quad (4.70)$$

式(4.68)の右辺を代入すると以下の条件を得る。

$$-\frac{2}{\nu} \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq \frac{2}{1-\nu} \quad (4.71)$$

CFL 条件が満たされている場合  $0 \leq \nu \leq 1$  なので、

$$-2 \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (4.72)$$

この関係式は、以下のふたつの条件がともに満たされれば成立する。

$$0 \leq B_{j+1/2} \leq 2 \quad (4.73)$$

かつ

$$0 \leq \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (4.74)$$

この範囲を図示すると [流束制限関数の許容範囲図](#) の斜線のない領域になる。

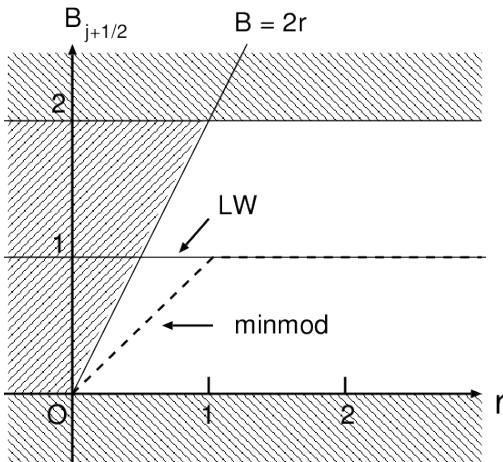


図 18 流束制限関数  $B_{j+1/2}(r)$  の許容範囲。LW は Lax-Wendroff スキームの数値流束に対応する制限関数。minmod は minmod 関数。

$r < 0$  の場合は  $B_{j+1/2} = 0$  のみが許される。Lax-Wendroff 法の数値流束では  $B_{j+1/2} = 1$  (図の LW) であるため、 $r < 1/2$  の領域で許容範囲外となり、数値振動が生じる。図の許容範囲内にある流束制限関数を用いることにより、数値振動が起こらないようにすることができる。その一例は以下の minmod 関数 (図の minmod) である。

$$\text{minmod}(r) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ r & (0 \leq r \leq 1) \\ 1 & (r > 1) \end{cases} \quad (4.75)$$

## 4.6 TVD スキーム

前節では、数値振動をおさえる方法として流束制限関数を導入した。ここでは、数値振動の発生を定量化する方法について考える。

このために、1次元線形スカラー移流方程式において以下の量を定義する。

$$U = \int \left| \frac{du}{dx} \right| dx. \quad (4.76)$$

この量は波の振幅の総和に等しく、移流方程式の厳密解では波のプロフィールが保たれるため、 $dU/dt = 0$  である。

以上との類推により、メッシュ点ごとの物理量の変化量の総和を次式のように定義し、これを Total Variation (TV) と言う。

$$TV(u^n) \equiv \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (4.77)$$

Total Variation が時間とともに増大しないという条件

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (4.78)$$

のことを Total Variation Diminishing (TVD) 条件と呼ぶ。

流束制限関数を導入することによって、差分スキームが TVD 条件を満たすようにすることができる。

## 4.7 放物型方程式の差分解法

### 4.7.1 天体シミュレーションにあらわれる放物型方程式

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

- 磁気拡散方程式

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \nabla^2 B$$

以下のような 1 次元拡散方程式を差分近似によって初期値問題として解くことを考えてみよう。すなわち、時刻  $t = 0$  における  $u(x, t)$  の値  $u(x, 0)$  を与えて、任意の時刻  $t (> 0)$  における  $u(x, t)$  を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.79)$$

拡散係数  $\kappa$  は  $x$  に依らないとする。よく知られているように、この方程式の解は初期条件をフーリエ変換することによって解析的に求めることができる。

解のおおまかな様子を図に示す。

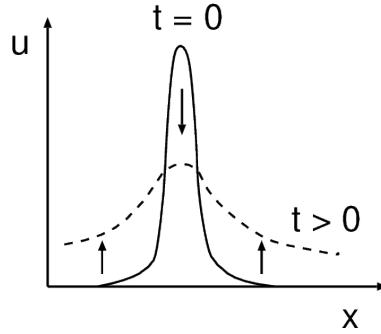


図 19 拡散方程式の解の時間発展の様子

### 4.7.2 拡散方程式の陽解法 (explicit 法)

1 次元拡散方程式 (4.79) を時間について現在の時刻  $t_n$  と  $\Delta t$  後の時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  の間で前進差分、空間については中心差分 (FTCS 差分) をとって差分化すると次式を得る。ここで、 $u_j^n = u(x_j, t_n)$  である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.80)$$

式 (4.80) を変形して次式を得る

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (4.81)$$

右辺は時刻  $t_n$  での値、左辺は時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  での値だけで書いている。したがって、時刻  $t_n$  での各格子点での値がわかっていれば直ちに 1 タイムステップ後 ( $t_{n+1}$ ) の各格子点での値を計算することができる (陽解法)。

### 4.7.3 Von Neumann の安定性解析

FTCS スキームの数値的安定性を調べるために  $u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を FTCS 差分式に代入すると

$$g^{n+1} e^{ij\theta} = g^n e^{ij\theta} + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} g^n [e^{i(j+1)\theta} - 2e^{ij\theta} + e^{i(j-1)\theta}]. \quad (4.82)$$

よって、

$$g = 1 - 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta). \quad (4.83)$$

増幅率が  $|g| \leq 1$  であるためには

$$-1 \leq 1 - 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta) \leq 1. \quad (4.84)$$

したがって、

$$0 \leq \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta) = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1. \quad (4.85)$$

任意の  $\theta$  (任意の波長の波) について安定であるためには

$$0 \leq \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.86)$$

以上により、FTCS スキームにより 1 次元拡散方程式のシミュレーションを行う場合、時間ステップ  $\Delta t$  が上式を満たすようにコントロールする必要があることがわかる。たとえばメッシュサイズを半分にした場合、 $\Delta t$  は  $1/4$  にしなければならない。

#### 4.7.4 拡散方程式の陰解法 (implicit 法)

拡散方程式を差分化する際に右辺の空間差分の部分に、求めるべき  $t_{n+1}$  での  $u$  の値を含めて差分化する方法がある。このような方法を **陰解法 (implicit 法)** と呼び、**explicit** 法とは安定性条件が異ってくる。代表的な陰解法である Crank-Nicolson 法では、パラメータ  $\lambda$  を導入して、以下のように差分化する。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \left[ \lambda \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \lambda) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] \quad (4.87)$$

これを整理すると次のような行列を含む式になる。

$$Au^{n+1} = b(u^n). \quad (4.88)$$

これを解いて  $u^{n+1}$  を求めればよい。

#### 練習問題

1. 行列  $A$  とベクトル  $b$  の各要素を求めなさい。
2. Von Neumann の安定性解析により、 $\lambda > 1/2$  ならば  $\kappa\Delta t/\Delta x^2 > 0$  を満たす任意の  $\Delta t$  について Crank-Nicolson スキームは数値的に安定であることを示しなさい。

### 4.8 参考文献

1. 流体力学の数値計算法 (1994) 東京大学出版会、藤井孝蔵著
2. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, C. Hirsch, John Wiley & Sons, 1990

[1] は、数値流体力学全般についてまとめられたテキストであり、必読文献である。



## 第 5 章

# 磁気流体力学方程式に対する近似リーマン解法

著者 三好隆博（広島大学）、簗島敬（海洋開発研究機構）、松本洋介（千葉大学）

この章では、磁気流体力学 (MHD) 方程式に対する代表的な衝撃波捕獲法である近似リーマン解法について解説する。

### 5.1 基礎方程式

MHD 方程式はプラズマの巨視的なダイナミクスを記述する基礎方程式である。特にここでは、電気抵抗率をゼロとした”理想” MHD 方程式を考える。

#### 5.1.1 MHD 方程式

MHD 方程式は、外力としてローレンツ力を作成させた流体方程式と磁場の時間発展方程式の組み合わせによって与えられる。無次元化した抵抗性 MHD 方程式は、

連続の式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.1)$$

運動方程式：

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (5.2)$$

断熱の式：

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{(\gamma - 1) \eta j^2}{\rho^\gamma} \quad (5.3)$$

誘導方程式 :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (5.4)$$

オームの法則 :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} \quad (5.5)$$

アンペールの法則 :

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (5.6)$$

磁場に関するガウスの法則 :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.7)$$

となる。ここで、 $\rho$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $p$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\gamma$ 、 $\eta$  は、密度、速度、圧力、磁場、電場、電流、比熱比、電気抵抗率をそれぞれ表す。ラグランジュ微分は、 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  である。[\(5.7\)](#) は磁束の保存を表わしており、[\(5.4\)](#) の初期条件を与える。また、[\(5.5\)](#)、[\(5.6\)](#) は見かけ上消去できる。したがって、最終的に MHD 方程式は未知数 8 個の連立非線形偏微分方程式となる。特に電場が誘導電場のみで与えられるとき、すなわち [\(5.5\)](#) の  $\eta$  がゼロのとき、散逸のない理想 MHD 方程式となる。

理想 MHD 方程式 [\(5.1\)](#) - [\(5.7\)](#) は、以下のとおり保存形式で書き直すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v} \\ (e + p_T) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は単位行列を表す。全エネルギー密度  $e$  と全圧力  $p_T$  は、

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}, \quad (5.10)$$

$$p_T = p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}, \quad (5.11)$$

により関係付けられる。理想 MHD 方程式のヤコビアン  $\mathbf{A}$ 、

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (5.12)$$

は独立な実固有値 (特性速度) を持つ<sup>\*1</sup>。したがって、理想 MHD 方程式は双曲型保存則系である。

<sup>\*1</sup> ただし、固有値が縮退し得るため、厳密には固有値は完全独立ではない。

### 5.1.2 1 次元理想 MHD 方程式

この後の議論のため、改めて 1 次元の理想 MHD 方程式を書き下す。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_T - B_x^2 \\ \rho vu - B_x B_y \\ \rho wu - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ (e + p_T) u - B_x (u B_x + v B_y + w B_z) \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

ここで、 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ 、 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とした。また、

$$p_T = p + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2). \quad (5.15)$$

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) - \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right]. \quad (5.16)$$

ただし、ガウスの法則 (5.7) から、1 次元問題では、 $B_x$  は 時間・空間的に一定 となる。

ヤコビアン  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_j (j=1 \dots 7)$  は、(5.14) から、2 つのアルヴェン波、2 つの速進磁気音波、2 つの遅進磁気音波、1 つのエントロピー波として、

$$\lambda_1 = u - c_f, \lambda_2 = u - c_a, \lambda_3 = u - c_s, \lambda_4 = u, \lambda_5 = u + c_s, \lambda_6 = u + c_a, \lambda_7 = u + c_f \quad (5.17)$$

が得られる。ここで、

$$c_a = |b_x|, \quad c_{f/s} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_x^2} \right]}, \quad (5.18)$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad b_x = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}, \quad b_y = \frac{B_y}{\sqrt{\rho}}, \quad b_z = \frac{B_z}{\sqrt{\rho}}, \quad b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2.$$

これから、

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6 \leq \lambda_7 \quad (5.19)$$

の不等式が成り立ち、磁場の向きや強さによって固有値が縮退し得ることがわかる。

一般に双曲型保存則系は、弱解(積分形の保存則を満たす解)として衝撃波解や不連続解を持つことが知られている。特に理想 MHD 方程式では、磁場の強さや向きによって不連続解は全く異なる性質を持つ。衝撃波の後面で磁場が強められる速進衝撃波、磁場が弱められる遅進衝撃波、衝撃波面がアルヴェン速度で伝播するアルヴェン衝撃波が衝撃波解として存在する。ただし、アルヴェン衝撃波では、

$$[\rho] = [p] = [B_y^2 + B_z^2] = 0, \quad \pm \sqrt{\rho} [v] = [B_y], \quad \pm \sqrt{\rho} [w] = [B_z], \quad (5.20)$$

の条件が成り立ち、衝撃波の前後で熱力学的量に変化がないので、回転不連続(rotational discontinuity)とも呼ばれる。ここで、 $[ \cdot ]$  は不連続前後の物理量の差を表す。

また、エントロピー波と共に伝播する不連続解として、

$$[B_y] = [B_z] = [v] = [w] = [p] = 0, B_x \neq 0 \quad (5.21)$$

を満足する接触不連続 (contact discontinuity)、

$$\left[ p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \right] = 0, B_x = 0 \quad (5.22)$$

を満足する接線不連続 (tangential discontinuity) が存在する。この他にも MHD 方程式では、複合波 (compound wave) や過圧縮衝撃波 (overcompressible shock) など普通の衝撃波でない衝撃波 (非古典的衝撃波) の存在が指摘されている。

## 5.2 近似リーマン解法

双曲型保存則系で生ずる不連続解を数値的に安定に解くため、特性の理論に基づく風上法が活発に開発研究され、大きな成功を収めてきた。このような衝撃波 (不連続解) を鋭く捕らえることができる解法を衝撃波捕獲法と呼ぶ。特にオイラー方程式に対しては、近似リーマン解法や流束ベクトル分離法、さらには AUSM(Advection Upstream Splitting Method) 系スキームといった様々なタイプの衝撃波捕獲法が開発された。流束ベクトル分離法は、オイラー方程式の流束関数  $\mathbf{F}$  が保存変数  $\mathbf{U}$  の一次同次関数  $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{U}$  であることを利用して、 $\mathbf{F}$  を正負の固有値を持つ流束関数  $\mathbf{F}^\pm$  に分離する方法である。一方、MHD 方程式は  $\mathbf{F} \neq \mathbf{A}\mathbf{U}$  であり、 $\mathbf{F}^\pm$  の構築は困難である。AUSM 系スキームでは、流束関数を移流項と音波による擾乱項に分離し、それぞれを風上化する<sup>\*2</sup>。MHD 方程式ではアルヴェン波が存在するため、既存の AUSM 系スキームを素直に適用することはできない<sup>\*3</sup>。したがって、MHD 方程式に対する実践的な衝撃波捕獲法としては、近似リーマン解法が用いられることがほとんどである。

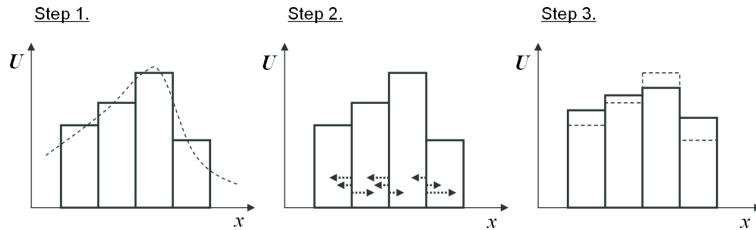
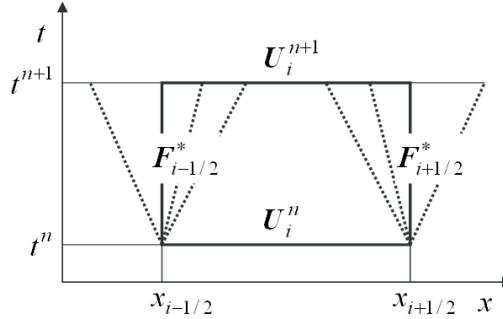


図 1 近似リーマン解法のアルゴリズム。Step 1. 物理量を区分的定数関数によって近似する。Step 2. 各セル境界でリーマン問題を近似的に解く。Step 3. 各セル内でリーマン問題の解を積分する。

流束ベクトル分離法がセル内の特性速度の符号により流束分離を行うのに対し、近似リーマン解法ではセル境界の特性速度の情報を用いて流束の風上化を行う。近似リーマン解法の手続きを [近似リーマン解法のアルゴリズム図](#) に示す。初期条件として、物理量を各セル内で一定となるよう区分的定数関数で与える。このとき各セル境界において物理量が不連続になるため、初期値問題は各セル境界におけるリーマン問題 (衝撃波管問題) に帰着する。最終的に、各セル内でリーマン問題の解を積分することによって、ある区分的定数関数として次の時刻の解が近似的に求められる。この手続きを繰り返すことにより、双曲型方程式を数値的に解くことができる。特に、各セル境界でリーマン問題を厳密に解く方法を Godunov 法と呼ぶ。

<sup>\*2</sup> 発見的方法によって定式化される。

<sup>\*3</sup> 発見的方法によって定式化できる、かもしれない。パラメータ空間は無限である …。

図 2  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  における双曲型保存則系のリーマン問題。

ここで、 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  における双曲型保存則系の時空間保存、

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-1/2}, t)) dt = 0 \quad (5.23)$$

を考える。リーマン問題の解を  $\mathbf{U}(x/t; \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$  とすると、(5.23) は、

$$\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*] = 0, \quad (5.24)$$

ただし、

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}(\mathbf{U}(0; \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})), \quad (5.25)$$

となる (リーマン問題の図)。ここで、 $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ 、 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ 。数値流束  $\mathbf{F}_{i+1/2}^*$  は、 $[x_{i+1/2} + \lambda_1 \Delta t, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  の時空間保存から、

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_i^n - \frac{1}{\Delta t} \int_{\lambda_1 \Delta t}^0 \mathbf{U}(x/t^{n+1}; \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) dx - \lambda_1 \mathbf{U}_i^n \quad (5.26)$$

と与えられる。ただし、 $\lambda_1$  は最小固有値(最小の特性速度)で負とする。 $\lambda_1 > 0$  の場合、超音速問題となるため、 $\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_i^n$  と風上側の流束で置き換えられる。保存則の対称性から、

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_{i+1}^n + \frac{1}{\Delta t} \int_{0}^{\lambda_m \Delta t} \mathbf{U}(x/t^{n+1}; \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) dx - \lambda_m \mathbf{U}_{i+1}^n \quad (5.27)$$

も成立し、(5.26) と一致する。ただし、 $\lambda_m$  は最大固有値(最大の特性速度)で正とする。

オイラー方程式や MHD 方程式は極めて高度な非線形システム方程式であり、リーマン問題の厳密解を求めるためにはニュートン法などの反復計算が必要になる。一方、Godunov 法では最終的に各セル内でリーマン問題の解を平均化するため、解の詳細な情報は失われる。そこで、リーマン問題の厳密解の代替となる性質のよい近似解の探索が重要となる。一般に、リーマン問題の近似解を用いて数値流束を評価する解法を近似リーマン解法、または Godunov 型解法と呼ぶ。

これ以降、セル境界左右の状態を示す添え字をそれぞれ  $L$ 、 $R$  とする。

## 5.2.1 線形近似リーマン解法

$[x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$  においてヤコビアン  $\mathbf{A}$  を一定とする近似リーマン解法、つまり 局所的に基礎方程式を線形化する近似法を線形近似リーマン解法と呼ぶ。

ヤコビアン  $\mathbf{A}_{i+1/2}$  を、正または負の固有値のみを持つヤコビアン  $\mathbf{A}_{i+1/2}^\pm$  に分離する。ここで  $\mathbf{A}_{i+1/2}^\pm$  は、 $\mathbf{A}_{i+1/2}$  に対する固有行列  $\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}$  と右固有行列  $\mathbf{R}_{i+1/2}$  を利用して、

$$\mathbf{A}_{i+1/2}^\pm = \frac{\mathbf{R}_{i+1/2} (\mathbf{\Lambda}_{i+1/2} \pm |\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}|) \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1}}{2} \quad (5.28)$$

と与えられる。したがって、

$$\mathbf{A}_{i+1/2} = \mathbf{A}_{i+1/2}^+ + \mathbf{A}_{i+1/2}^-, |\mathbf{A}_{i+1/2}| = \mathbf{A}_{i+1/2}^+ - \mathbf{A}_{i+1/2}^-, \quad (5.29)$$

ただし、

$$|\mathbf{A}_{i+1/2}| = \mathbf{R}_{i+1/2} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} \quad (5.30)$$

である。右に進む波をまたぐジャンプ条件から、

$$\mathbf{F}_R - \mathbf{F}^* = \mathbf{A}_{i+1/2}^+ (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L), \quad (5.31)$$

同様に左に進む波をまたぐジャンプ条件から、

$$\mathbf{F}^* - \mathbf{F}_L = \mathbf{A}_{i+1/2}^- (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L), \quad (5.32)$$

が得られる。最終的に数値流束を対称化して表すと、

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{A}_{i+1/2}| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (5.33)$$

となる。一般に、この解法は線形近似リーマン解法と呼ばれる。流束の差  $\Delta \mathbf{F}$  を  $\Delta \mathbf{F}^+ + \Delta \mathbf{F}^- P$  と分離することから流束差分離法とも呼ばれる。特に、ジャンプ条件が正しく評価されるよう、

$$\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = \mathbf{A}_{i+1/2} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (5.34)$$

を満足する  $\mathbf{A}_{i+1/2}$  を与える解法は Roe 法<sup>\*4</sup> と呼ばれ、最もスタンダードな近似リーマン解法としてよく知られている。

ただし、実際に MHD 方程式に線形近似リーマン解法を適用するには様々な工夫が必要となる。MHD 方程式では固有値 (5.17) が縮退し得るため、固有ベクトルに特異性が出現する。そのため固有ベクトルの適切な再規格化が必要となる<sup>\*5</sup>。また、 $\gamma = 2$  以外の場合、Roe 法に対するヤコビアン  $\mathbf{A}_{1/2}$  を求めることは容易ではない<sup>\*6</sup>。

線形近似リーマン解法では全ての波が考慮されており、各種不連続解を正しく解像できる。一方で、膨張波(希薄波)が無視されているため、密度および圧力の正値性が破れることができが証明されている。特に MHD 方程式では、磁気エネルギーの寄与分のため、オイラー方程式に比べてさらに正値性の条件は非常に厳しく、計算困難な初期条件が広く存在する。

<sup>\*4</sup> (5.34) に加えて、 $\mathbf{A}_{1/2}$  が独立な実固有値を持ち、ヤコビアンの適合性  $\mathbf{A}_{1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$  を満足する必要がある。これらの性質は合わせて Property U と呼ばれる。

<sup>\*5</sup> ここでは参考文献をあげるにとどめる。Brio & Wu, JCP (1988)

<sup>\*6</sup> ここでは参考文献をあげるにとどめる。Cargo & Gallice, JCP (1997), Balsara, ApJS (1998)

## 5.2.2 HLL 近似リーマン解法

HLL 型の近似リーマン解法<sup>7</sup> では、膨張波も含めて最も速い特性速度  $S_R(> 0)$  と最も遅い速度  $S_L(< 0)$  に囲まれた領域、  $[S_L \Delta t, S_R \Delta t] \times [0, \Delta t]$  における時空間保存則、

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(x, t) dx - S_R \mathbf{U}_R + S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0 \quad (5.35)$$

を満足するよう近似解が求められる。

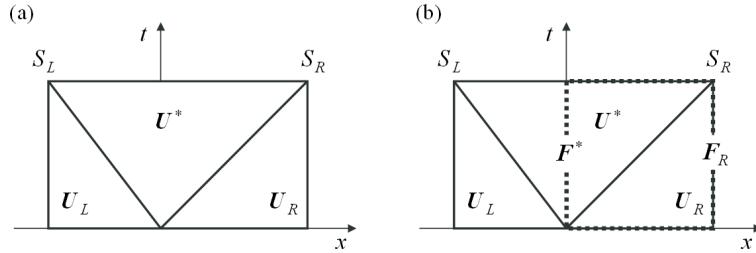


図 3 HLL 近似リーマン解法における (a) 近似解の模式図と (b) 数値流束評価のための積分経路。

特に HLL 法では、  $S_R$  と  $S_L$  に囲まれた領域 (リーマンファン) においてリーマン問題の解が単一状態  $\mathbf{U}^*$  であると仮定する。 (5.35) から、

$$(S_R - S_L) \mathbf{U}^* - S_R \mathbf{U}_R + S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0, \quad (5.36)$$

したがって、

$$\mathbf{U}^* = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{S_R - S_L} \quad (5.37)$$

が得られる (HLL 近似リーマン解法図 (a))。続いて、  $[0, S_R \Delta t] \times [0, \Delta t]$  における時空間保存 (HLL 近似リーマン解法図 (b)) から、

$$S_R \mathbf{U}^* - S_R \mathbf{U} + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}^* = 0 \quad (5.38)$$

となる。ただし、数値流束  $\mathbf{F}^*$  は、

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(0, t) dt \quad (5.39)$$

と定義される。 (5.37) を (5.38) に代入すると、  $\mathbf{F}^*$  は最終的に、

$$\mathbf{F}^* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} \quad (5.40)$$

となる。もちろん、  $[S_L \Delta t, 0] \times [0, \Delta t]$  の保存則からも (5.40) は得られる。HLL 法は非線形の近似解法であり、  $\mathbf{F}^* \neq \mathbf{F}(\mathbf{U}^*)$  であることに注意する必要がある。

HLL 法の数値流束 (5.40) を評価するためには、  $S_R$  と  $S_L$  の情報が必要である。MHD 方程式の特性速度は形式的には (5.17) と与えられる。しかし、厳密な  $S_R$ 、  $S_L$  を得るためにには、リーマン問題を厳密に解く必要がある。そこで、  $S_R$ 、  $S_L$  を過小評価しないよう近似的に、

$$S_R = \max(u_R + c_{fR}, u_L + c_{fL}), \quad S_L = \min(u_R - c_{fR}, u_L - c_{fL}) \quad (5.41)$$

<sup>7</sup> HLL 法の提案者である Harten(TVD/ENO の提案者)、Lax (双曲型保存則系業界の創始者)、van Leer(MUSCL の提案者) の頭文字。

または

$$S_R = \max(u_R, u_L) + \max(c_{fR}, c_{fL}), \quad S_L = \min(u_R, u_L) - \max(c_{fR}, c_{fL}) \quad (5.42)$$

のように与えられる。また、特に Roe 平均値 (5.34) を用いて、

$$S_R = \max(u^{Roe} + c_f^{Roe}, u_R + c_{fR}), \quad S_L = \min(u_L - c_{fL}, u^{Roe} - c_f^{Roe}) \quad (5.43)$$

とも評価される。 $S_R < 0$ 、 $S_L > 0$  の場合についても、(5.40) が片側の流束  $\mathbf{F}_R$  、 $\mathbf{F}_L$  に帰着できるよう、 $S_R$  、 $S_L$  は一般に、

$$S_R = \max(S_R, 0), \quad S_L = \min(S_L, 0) \quad (5.44)$$

と拡張される。

HLL 法は  $\mathbf{U}$  や  $\mathbf{F}$  の詳細によらず非常にシンプルであり、固有ベクトルの計算も不要で計算効率が極めて高い。また、オイラー方程式および MHD 方程式に対して正値性が理論的に証明されており、極めてロバストである。しかし、リーマンファン内を単一状態と仮定しているため、接触不連続や回転不連続などを捕らえることができず、低解像度で数値的散逸が強い。

### 5.2.3 HLLD 近似リーマン解法

続いて、接触不連続や回転不連続を解像できる高解像度 HLL 型近似リーマン解法、HLLD 法<sup>8</sup> ( Miyoshi & Kusano, 2005 ) を検討する。

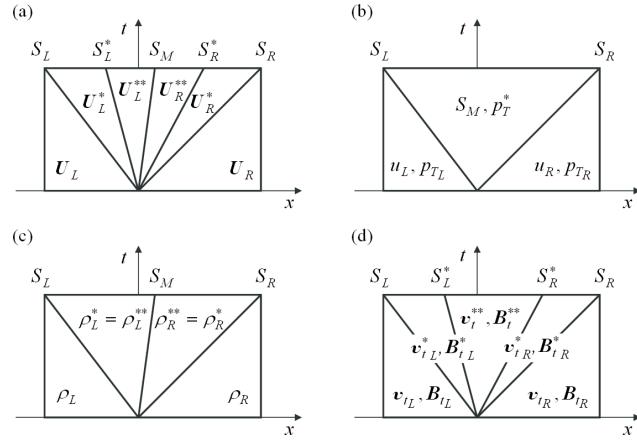


図 4 HLLD 近似リーマン解法における近似解の模式図。

HLLD 法では、リーマンファンにおいて速度  $\mathbf{u}$  が一定と仮定する。この仮定から、リーマンファン内で加速や減速が生じないよう、全圧力  $p_T$  が一定であることも要求される ( HLLD 近似リーマン解法図 (b) )。したがって、リーマンファン内は非圧縮状態となり、リーマン問題の解から遅進衝撃波は除外される。このことから、リーマン問題の近似解は、2 つの速進衝撃波  $S_R$  、 $S_L$  、2 つのアルヴェン波  $S_R^*$  、 $S_L^*$  、1 つのエントロピー波  $S_M$  で分割

<sup>8</sup> HLLD 法の “D” は不連続 (discontinuities) の頭文字を表す。HLLC 法 (接触不連続 (contact discontinuity) を解像する HLL 型の近似リーマン解法) の上位の解法である。

された 4 つの状態 (リーマンファンの左から  $\mathbf{U}_L^*$ 、 $\mathbf{U}_L^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^*$  と表記) となる ([HLLD 近似リーマン解法図 \(a\)](#))。

リーマンファンにおける速度  $u$  はエントロピー波の速度  $S_M$  と一致する。ここで  $S_M$  は、時空間保存則 (5.37) を用いて、

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L} \quad (5.45)$$

と与える。速度  $u$  はリーマンファン内で一定なので、

$$u_L^* = u_L^{**} = u_R^{**} = u_R^* = S_M \quad (5.46)$$

となる。また全圧力  $p_T$  も、

$$p_{TL}^* = p_{T_L}^{**} = p_{TR}^{**} = p_{T_R}^* = p_T^* \quad (5.47)$$

と一定である。

まず、速進衝撃波  $S_\alpha$  ( $\alpha$  は  $R$  または  $L$ ) に対するジャンプ条件、

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_y^* \\ B_z^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_y^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_z^* \\ B_y^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_z^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_y \\ B_z \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha^2 + p_{T_\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_y \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_z \\ B_y u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_z u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T_\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

を考えよう。第 2 式から、

$$\begin{aligned} p_T^* &= p_{TL} + \rho_L (S_L - u_L) (S_M - u_L) \\ &= p_{TR} + \rho_R (S_R - u_R) (S_M - u_R) \\ &= \frac{(S_R - u_R) \rho_R p_{TL} - (S_L - u_L) \rho_L p_{TR} + \rho_L \rho_R (S_R - u_R) (S_L - u_L) (u_R - u_L)}{(S_R - u_R) \rho_R - (S_L - u_L) \rho_L} \end{aligned} \quad (5.49)$$

が得られる。続いて第 1 式から、

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M} \quad (5.50)$$

となる。第 3 式と第 5 式を連立させて、

$$v_\alpha^* = v_\alpha - B_x B_{y_\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (5.51)$$

$$B_{y_\alpha}^* = B_{y_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (5.52)$$

が得られる。同様に、第 4 式と第 6 式から、

$$w_\alpha^* = w_\alpha - B_x B_{z_\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (5.53)$$

$$B_{z_\alpha}^* = B_{z_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha) (S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (5.54)$$

が得られる。最後に第 7 式から、

$$e_{\alpha}^* = \frac{(S_{\alpha} - u_{\alpha})e_{\alpha} - p_{T\alpha}u_{\alpha} + p_T^*S_M + B_x(\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{B}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^*)}{S_{\alpha} - S_M} \quad (5.55)$$

となる。

続いて、アルヴェン波  $S_{\alpha}^*$  に対するジャンプ条件を考える。 $\rho$  のジャンプ条件、すなわち連続の式から明らかに、任意の  $S_{\alpha}^*$  に対し、

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^* \quad (5.56)$$

が成り立つ (*HLLD* 近似リーマン解法図 (c))。したがって、アルヴェン波の速度は、

$$S_R^* = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}, \quad S_L^* = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}} \quad (5.57)$$

と与えられる。ところが、(5.57) を用いると、 $\mathbf{v}_t = (0, v, w)$ 、 $\mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$  のジャンプ条件、

$$S_{\alpha}^* \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^{**} \\ B_{y_{\alpha}}^{**} \\ B_{z_{\alpha}}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{y_{\alpha}}^{**} \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{z_{\alpha}}^{**} \\ B_{y_{\alpha}}^{**} S_M - B_x v_{\alpha}^{**} \\ B_{z_{\alpha}}^{**} S_M - B_x w_{\alpha}^{**} \end{pmatrix} = S_{\alpha}^* \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* \\ B_{y_{\alpha}}^* \\ B_{z_{\alpha}}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* S_M - B_x B_{y_{\alpha}}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* S_M - B_x B_{z_{\alpha}}^* \\ B_{y_{\alpha}}^* S_M - B_x v_{\alpha}^* \\ B_{z_{\alpha}}^* S_M - B_x w_{\alpha}^* \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

から、 $\mathbf{v}_{t\alpha}^{**}$ 、 $\mathbf{B}_{t\alpha}^{**}$  を解くことができない。一方、 $S_M$  に対する  $\mathbf{v}_t$ 、 $\mathbf{B}_t$  のジャンプ条件、

$$S_M \begin{pmatrix} \rho_L^* v_L^{**} \\ \rho_L^* w_L^{**} \\ B_{y_L}^{**} \\ B_{z_L}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L^* v_L^{**} S_M - B_x B_{y_L}^{**} \\ \rho_L^* w_L^{**} S_M - B_x B_{z_L}^{**} \\ B_{y_L}^{**} S_M - B_x v_L^{**} \\ B_{z_L}^{**} S_M - B_x w_L^{**} \end{pmatrix} = S_M \begin{pmatrix} \rho_R^* v_R^{**} \\ \rho_R^* w_R^{**} \\ B_{y_R}^{**} \\ B_{z_R}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_R^* v_R^{**} S_M - B_x B_{y_R}^{**} \\ \rho_R^* w_R^{**} S_M - B_x B_{z_R}^{**} \\ B_{y_R}^{**} S_M - B_x v_R^{**} \\ B_{z_R}^{**} S_M - B_x w_R^{**} \end{pmatrix}, \quad (5.59)$$

から、

$$v_L^{**} = v_R^{**} \equiv v^{**} \quad (5.60)$$

$$w_L^{**} = w_R^{**} \equiv w^{**} \quad (5.61)$$

$$B_{y_L}^{**} = B_{y_R}^{**} \equiv B_y^{**} \quad (5.62)$$

$$B_{z_L}^{**} = B_{z_R}^{**} \equiv B_z^{**} \quad (5.63)$$

となる (*HLLD* 近似リーマン解法図 (d))。そこで、リーマンファンの時空間保存則 (5.35)、

$$(S_R - S_R^*)\mathbf{U}_R^* + (S_R^* - S_M)\mathbf{U}_R^{**} + (S_M - S_R^*)\mathbf{U}_L^{**} + (S_L^* - S_L)\mathbf{U}_L^* - S_R\mathbf{U}_R + S_L\mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0 \quad (5.64)$$

を利用すると、

$$v^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*}v_L^* + \sqrt{\rho_R^*}v_R^* + (B_{y_R}^* - B_{y_L}^*)\text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (5.65)$$

$$w^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*}w_L^* + \sqrt{\rho_R^*}w_R^* + (B_{z_R}^* - B_{z_L}^*)\text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (5.66)$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*}B_{y_R}^* + \sqrt{\rho_R^*}B_{y_L}^* + \sqrt{\rho_L^*}\rho_R^*(v_R^* - v_L^*)\text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (5.67)$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{zR}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{zL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (w_R^* - w_L^*) \operatorname{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (5.68)$$

が得られる。ここで、 $\operatorname{sgn}$  は符号関数である。最後に  $S_\alpha^*$  に対する  $e$  のジャンプ条件から、

$$e_R^{**} = e_R^* + \sqrt{\rho_R^*} (\mathbf{v}_R^* \cdot \mathbf{B}_R^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \operatorname{sgn}(B_x) \quad (5.69)$$

$$e_L^{**} = e_L^* - \sqrt{\rho_L^*} (\mathbf{v}_L^* \cdot \mathbf{B}_L^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \operatorname{sgn}(B_x) \quad (5.70)$$

が得られる。ただし、 $\mathbf{v}^{**} = (S_M, v^{**}, w^{**})$ 、 $\mathbf{B}^{**} = (B_x, B_y^{**}, B_z^{**})$ 。

以上、リーマンファンにおける 4 つの状態、 $\mathbf{U}_L^*$ 、 $\mathbf{U}_L^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^*$  が完全に代数的に得られた。

数値流束  $\mathbf{F}^*$  は、HLL 法と同様に、 $[0, S_R \Delta t] \times [0, \Delta t]$  または  $[S_L \Delta t, 0] \times [0, \Delta t]$  における時空間保存則から求められる。例えば、 $S_L \leq 0 \leq S_L^*$  の場合、

$$(0 - S_L) \mathbf{U}_L^* - (0 - S_L) \mathbf{U}_L + \mathbf{F}^* - \mathbf{F}_L = 0 \quad (5.71)$$

から、 $S_L^* \leq 0 \leq S_M$  の場合、

$$(0 - S_L^*) \mathbf{U}_L^{**} + (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - (0 - S_L) \mathbf{U}_L + \mathbf{F}^* - \mathbf{F}_L = 0 \quad (5.72)$$

から  $\mathbf{F}^*$  が得られる。最終的に、

$$\mathbf{F}^* = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{F}_L^* & \text{for } S_L \leq 0 \leq S_L^* \\ \mathbf{F}_L^{**} & \text{for } S_L^* \leq 0 \leq S_M \\ \mathbf{F}_R^{**} & \text{for } S_M \leq 0 \leq S_R^* \\ \mathbf{F}_R^* & \text{for } S_R^* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R & \text{for } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (5.73)$$

となる<sup>9</sup>。ただし、

$$\mathbf{F}_{R/L}^{*/**} = \mathbf{F} \left( \rho_{R/L}^{*/**}, S_M, v_{R/L}^{*/**}, w_{R/L}^{*/**}, B_x, B_{yR/L}^{*/**}, B_{zR/L}^{*/**}, e_{R/L}^{*/**}, p_T^* \right) \quad (5.74)$$

である。 $S_R$  と  $S_L$  は、HLL 法と同様に、例えば、(5.41) から (5.44) のように評価する。特に磁場がゼロのとき、この解法はオイラー方程式に対する HLLC 法に帰着する。

HLL 法と異なり、HLLD 法では MHD 方程式の接触不連続や回転不連続、接線不連続を正確に解像できる。また、密度および圧力の正値性の保存性も理論的に保証される（付録）<sup>10</sup>。様々な数値実験の結果から、線形近似リーマン解法と同等の解像度を持つつ、線形近似リーマン解法に比べ計算効率が高いことも示されている。したがって、HLLD 法は、解像度、ロバストさ、計算効率の全てに優れた MHD 解法といえる。

### 5.3 高次精度化

近似リーマン解を得るために必要な、あるセル境界  $i + 1/2$  に対する左・右状態である  $U_L$  と  $U_R$  は、単純には  $U_L = U_i$ 、 $U_R = U_{i+1}$  より与えられる。この解は最も安定（上記よりスカラ変数の正値性が保証）である一方、

<sup>9</sup> ジャンプ条件  $S[\mathbf{U}] - [\mathbf{F}] = 0$  を満足するように近似解を求めたので当然である。

<sup>10</sup> MHD 方程式に対する HLL 法の正値性保存性も合わせて証明できる。

数値粘性が過多に含まれていることになり、得られる構造は時間と共に急速に散逸する。また空間 1 次精度である。本節では、近接するより多くのセルの情報を取り入れることにより、 $U_L$ 、 $U_R$  を高精度に求める方法を解説する。以下では、 $i + 1/2$  における左・右状態をそれぞれ  $U_{L,i+1/2}$ 、 $U_{R,i+1/2}$  で表す。

一般に、同じ解像度の結果を得るためにには、多くのセル数を使って低次精度のスキームで解く場合に比べて、少ないセル数で高次精度スキームを用いたほうが必要な計算量は少なくてすむ。これは、セル幅 ( $\Delta x$ ) に対して  $\Delta x^4$  で計算量が増加する (3 次元計算の場合) のに対して、高次精度化にともなう計算量の増加は、せいぜい数倍に留まるためである。また、近年のスカラ型スーパーコンピュータにおいては、セルあたりの演算量を増やした方がより効率的に CPU の能力を活用できることも、スキームの高次精度化に伴うメリットであると言える。

高次精度化を図るためにには多項式による数値補間が必要であるが、不連続面近傍において数値振動の元となる。2 次以上の線形スキームでは解の単調性を維持できないことが知られている (Godunov の定理、前章「差分の基礎」)。従って、不連続面近傍において単調性を維持することができるような (1 次精度に落とす) 非線形スキームの開発が必要となる。以下では、代表的な 2 次精度の **MUSCL 法**、5 次精度の **WENO 法**、**CANS+** で採用されている 5 次精度の **MP5 法** について解説する。

### 5.3.1 MUSCL 補間

*van Leer (1979)* が提唱した、MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) 補間と呼ばれる。着目するセル内の物理量を関数  $u(x)$  で表し、

$$u(x) = U_i + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x}(x - x_i) + \frac{3\kappa}{2} \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta x^2} \left[ (x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right], \quad (5.75)$$

でセル内のプロファイルを構築する。ここで、

$$U_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx \quad (5.76)$$

である。 $\kappa = 1/3$  のとき、セル内を 2 次関数で表現 (3 次精度) することに相当する。

式 (5.75) より、 $U_{L,i+1/2}$ 、 $U_{R,i-1/2}$  は、

$$U_{L,i+1/2} = u(x_{i+1/2}) = U_i + \frac{1 - \kappa}{4}(U_i - U_{i-1}) + \frac{1 + \kappa}{4}(U_{i+1} - U_i), \quad (5.77)$$

$$U_{R,i-1/2} = u(x_{i-1/2}) = U_i - \frac{1 - \kappa}{4}(U_{i+1} - U_i) - \frac{1 + \kappa}{4}(U_i - U_{i-1}). \quad (5.78)$$

式 (5.77)、(5.78) をそのまま採用すると不連続面近傍で数値振動が発生する。数値振動を発生させないためには、全変化量 TV (Total Variation)

$$TV(U) = \sum_i |U_{i+1} - U_i| \quad (5.79)$$

が時間と共に増加しない、TVD (Total Variation Diminishing) 条件

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) \quad (5.80)$$

を満たす必要がある。そこで、TVD 条件を満たすような流束制限関数  $\Phi$  を以下のように導入する。

$$U_{L,i+1/2} = u(x_{i+1/2}) = U_i + \frac{1 - \kappa}{4} \Phi(r)(U_i - U_{i-1}) + \frac{1 + \kappa}{4} \Phi(1/r)(U_{i+1} - U_i) \quad (5.81)$$

$$U_{R,i-1/2} = u(x_{i-1/2}) = U_i - \frac{1-\kappa}{4}\Phi(1/r)(U_{i+1} - U_i) - \frac{1+\kappa}{4}\Phi(r)(U_i - U_{i-1}) \quad (5.82)$$

ここで、流束制限関数  $\Phi(r)$  は  $r = (U_{i+1} - U_i)/(U_i - U_{i-1})$  の関数である。以下では、数ある制限関数のうち代表的な minmod 関数および monotonized central を例に挙げる（**CANS+** でも実装されている）。両制限関数は  $\Phi(r) = r\Phi(1/r)$  の関係があるので、その場合、

$$U_{L,i+1/2} = U_i + \frac{1}{2}\Phi(r)(U_i - U_{i-1}) \quad (5.83)$$

$$U_{R,i-1/2} = U_i - \frac{1}{2}\Phi(1/r)(U_{i+1} - U_i) \quad (5.84)$$

となる。

### minmod limiter

minmod 制限関数は

$$\Phi(r) = \max[0, \min(1, r)] \quad (5.85)$$

で表される。実際の計算では、

$$U_{L,i+1/2} = U_i + \frac{1}{2}\minmod(U_{i+1} - U_i, U_i - U_{i-1}) \quad (5.86)$$

$$U_{R,i-1/2} = U_i - \frac{1}{2}\minmod(U_{i+1} - U_i, U_i - U_{i-1}) \quad (5.87)$$

のように、minmod 関数

$$\minmod(a, b) = \text{sign}(a)\max(0, \min(|a|, \text{sign}(a)b)) \quad (5.88)$$

を定義して、 $U_{L,i+1/2}$ 、 $U_{R,i-1/2}$  を一度に求める。ここで、 $\text{sign}(a)$  は引数  $a$  の符号を返す関数である。

### monotonized central

monotonized central 制限関数は

$$\Phi(r) = \max[0, \min(2r, 0.5(1+r), 2)] \quad (5.89)$$

で表される。実際の計算では、

$$U_{L,i+1/2} = U_i + \frac{1}{2}MC(2(U_{i+1} - U_i), 2(U_i - U_{i-1}), (U_{i+1} - U_{i-1})/2) \quad (5.90)$$

$$U_{R,i-1/2} = U_i - \frac{1}{2}MC(2(U_{i+1} - U_i), 2(U_i - U_{i-1}), (U_{i+1} - U_{i-1})/2) \quad (5.91)$$

のように、MC 関数

$$\begin{aligned} MC(a, b, c) &= \text{sign}(a)\max(0, \min(|a|, \text{sign}(a)b, \text{sign}(a)c)) \\ &= \minmod(a, \minmod(b, c)) \end{aligned} \quad (5.92)$$

を定義して、 $U_{L,i+1/2}$ 、 $U_{R,i-1/2}$  を一度に求める。

### 5.3.2 WENO 法

Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) 法とは、Liu ら (*Liu et al., 1994*) によって開発され、その後 Jiang ら (*Jiang & Shu, 1996*) によって改良された、双曲型方程式を高精度かつ安定に解く数値手法であり、現在は特に圧縮性流体の高解像度シミュレーションに広く利用されている。WENO 法では、物理量のセル平均値

$$U_i = \frac{1}{\Delta} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} u(x) dx, \quad (5.93)$$

を保持し、セル境界の物理量  $U_{i+1/2}$  を非線形補間で近似する。

最もポピュラーな 5 次精度 WENO 法を例に挙げる。ステンシル  $[i-2, i+2]$  において、左に偏りを持たせて、 $i+1/2$  の左状態  $U_{L,i+1/2}$  を求めよう (対称性から  $i-1/2$  の右状態  $U_{R,i-1/2}$  も求めることが出来る)。ステンシルを次の 3 つのサブステンシル

$$\begin{aligned} S^0 &: [i-2, i], \\ S^1 &: [i-1, i+1], \\ S^2 &: [i, i+2], \end{aligned}$$

に分割し、各サブステンシルにおいて  $U_{i+1/2}$  を線形ラグランジュ補間で近似する。

$$U_{i+1/2}^0 = \frac{2U_{i-2} - 7U_{i-1} + 11U_i}{6}, \quad (5.94)$$

$$U_{i+1/2}^1 = \frac{-U_{i-1} + 5U_i + 2U_{i+1}}{6}, \quad (5.95)$$

$$U_{i+1/2}^2 = \frac{2U_i + 5U_{i+1} - U_{i+2}}{6}. \quad (5.96)$$

これらを用いて、 $U_{L,i+1/2}$  を重み付き平均で近似する。

$$U_{L,i+1/2} = \sum_{k=0}^2 w^k U_{i+1/2}^k, \quad (5.97)$$

ここで重み  $w^s$  は  $w^s > 0, \sum_k w^k = 1$  を満たし (凸結合)、さらに以下のルールに基づいて決定される。

- 滑らかなサブステンシルでは大きく、不連続を含むサブステンシルでは小さくする。
- 全てのステンシルの滑らかさが同じならば、最大精度を達成する。これは 5 点を用いた線形ラグランジュ補間で与えられる。

これらを満たす重み  $w^s$  は様々あるが、ここでは標準的な例 (*Jiang & Shu, 1996*) を紹介しよう。

$$w^s = \frac{a^s}{\sum_k a^k}, \quad (5.98)$$

$$a^0 = \frac{0.1}{(IS^0 + \epsilon)^2}, \quad a^1 = \frac{0.6}{(IS^1 + \epsilon)^2}, \quad a^2 = \frac{0.3}{(IS^2 + \epsilon)^2}, \quad (5.99)$$

$$IS^0 = \frac{13}{12} (U_{i-2} - 2U_{i-1} + U_i)^2 + \frac{1}{4} (U_{i-2} - 4U_{i-1} + 3U_i)^2, \quad (5.100)$$

$$IS^1 = \frac{13}{12} (U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (U_{i-1} - U_{i+1})^2, \quad (5.101)$$

$$IS^2 = \frac{13}{12} (U_i - 2U_{i+1} + U_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2})^2, \quad (5.102)$$

ここで  $\epsilon$  はゼロ除算防止のための小さな値（ $10^{-6}$  程度）である。どうしてこのような表式が提案されたかについては、原論文をご覧頂きたい。

重み  $w^s$  が適切に与えられることで、不連続面近傍では振動が抑えられ（不連続面を含むサブステンシルの  $w \ll$  他の  $w$ ）、滑らかな領域（ $IS^0 \sim IS^1 \sim IS^2$ ）では高精度が維持される。これまでの式からわかる通り、WENO 法は全て代数計算のみを用いており、IF 文などの論理計算を用いない。これはコンピュータにとって解読しやすく（ベクトル化されやすい）、計算効率に優れている。近年も改良が進められ、WENO-M（Henrick *et al.*, 2005）や WENO-Z（Borges *et al.*, 2008）などの新しい手法が提案されている。

### 5.3.3 MP5 法

MP5 法とは、5 次精度の Monotonicity Preserving (MP) scheme で、Suresh と Huynh（Suresh & Huynh, 1997）によって開発された手法であり、**CANS+** の高次精度補間スキームとして採用されている。WENO 法と同様に、物理量のセル平均値

$$U_i = \frac{1}{\Delta} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} u(x) dx, \quad (5.103)$$

を保持し、セル境界の物理量  $U_{i+1/2}$  を非線形補間で求めることを考える。以下では、ステンシル  $[i-2, i+2]$  において、 $i+1/2$  の左状態  $U_{L,i+1/2}$  を求めよう（対称性から  $i-1/2$  の右状態  $U_{R,i-1/2}$  も求めることができる）。

MP5 法では、5 点のステンシルを使って 4 次多項式  $u(x)$  を構築する。多項式の係数は、 $[i-2, i+2]$  それぞれにおける式 (5.103) の束縛条件より決定される。それより、 $U_{L,i+1/2}$  における補間値は

$$U_{L,i+1/2} = u(x_{i+1/2}) = \frac{2U_{i-2} - 13U_{i-1} + 47U_i + 27U_{i+1} - 3U_{i+2}}{60} \quad (5.104)$$

で与えられる。得られた解は、スムーズな領域では 5 次の精度となるが、当然、不連続面では数値振動をもたらす。上記 **MUSCL** 法で議論したような、いわゆる TVD スキームを採用することで不連続面での数値振動は回避できるが、TVD スキームは波の伝搬を正確に解けないという弊害があることが知られている。これは、たかだか 3 点の情報では滑らかな関数の極値なのか、不連続面なのかの判定ができないからである（図参照）。

MP5 法は、このように 5 つのセルの情報を用いて周辺のプロファイルを判定し、図左 のような滑らかな曲線の場合は式 (5.104) で求められた値を採用し、図右 のような不連続形状であると判定された場合は、単調性が維持できるような値を補間値の代わりに使う、というものである。つまり、 $U_{L,i+1/2}$  がある許容範囲内に収まるように *median* 関数を用いて  $U_{L,i+1/2}$  を更新する。

$$U_{L,i+1/2} = \text{median}(U_{L,i+1/2}, U_{\min}, U_{\max}). \quad (5.105)$$

ここで、 $\text{median}(a, b, c)$  は 3 変数のうちの中央値を採択する関数で、上記 *minmod* 関数を用いて

$$\text{median}(a, b, c) = a + \text{minmod}(b - a, c - a) \quad (5.106)$$

によって実装される。式 (5.104) で補間した  $U_{L,i+1/2}$  が  $U_{\min} \leq U_{L,i+1/2} \leq U_{\max}$  の場合はそのまま  $U_{L,i+1/2}$  が採択され、例えば、 $U_{L,i+1/2} \leq U_{\min} \leq U_{\max}$  の場合は  $U_{\min}$  が採択される。 $U_{\min}, U_{\max}$  の求め方については、原論文を参照いただきたい。

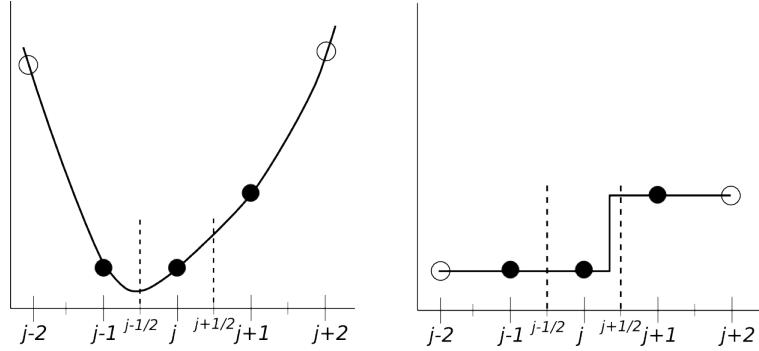


図 5 セル周辺のプロファイルの判定。着目するセル ( $j$ ) を中心とした 3 点 (●) では、左のプロファイル (実線) と右のプロファイルとの区別ができない。外側 2 点 (○) を加えた 5 点で初めて形状の判定を行うことができる。

## 5.4 多次元化

### 5.4.1 時間更新手順

式 (5.8) を時空間で差分化した方程式に基づき、セル  $(i, j, k)$  における時間更新は、

$$\frac{\mathbf{U}_{(i,j,k)}^{n+1} - \mathbf{U}_{(i,j,k)}^n}{\Delta t} = -\frac{\mathbf{F}_{x(i+1/2)}^* - \mathbf{F}_{x(i-1/2)}^*}{\Delta x} - \frac{\mathbf{F}_{y(j+1/2)}^* - \mathbf{F}_{y(j-1/2)}^*}{\Delta y} - \frac{\mathbf{F}_{z(k+1/2)}^* - \mathbf{F}_{z(k-1/2)}^*}{\Delta z} \quad (5.107)$$

で行われる。(関連しない添字  $i, j, k$  は省略した。以下同様。) ここで、 $\mathbf{F}_{x(i\pm 1/2)}^*$ 、 $\mathbf{F}_{y(j\pm 1/2)}^*$ 、 $\mathbf{F}_{z(k\pm 1/2)}^*$  は各方向のセル境界における数値フラックスで、それぞれ

$$\mathbf{F}_{x(i\pm 1/2)}^* = Riemann(\mathbf{U}_{xL,i\pm 1/2}, \mathbf{U}_{xR,i\pm 1/2}), \quad (5.108)$$

$$\mathbf{F}_{y(j\pm 1/2)}^* = Riemann(\mathbf{U}_{yL,j\pm 1/2}, \mathbf{U}_{yR,j\pm 1/2}), \quad (5.109)$$

$$\mathbf{F}_{z(k\pm 1/2)}^* = Riemann(\mathbf{U}_{zL,k\pm 1/2}, \mathbf{U}_{zR,k\pm 1/2}), \quad (5.110)$$

で与えられ、また、 $U_{xL}, U_{xR}, U_{yL}, U_{yR}, U_{zL}, U_{zR}$  は各次元方向周辺のセルから求める。例えば、**CANS+** で採用されている **MP5 法** では

$$\mathbf{U}_{xL,i\pm 1/2} = MP5(\mathbf{U}_{i\mp 2}, \mathbf{U}_{i\mp 1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i\pm 1}, \mathbf{U}_{i\pm 2}) \quad (5.111)$$

$$\mathbf{U}_{yL,j\pm 1/2} = MP5(\mathbf{U}_{j\mp 2}, \mathbf{U}_{j\mp 1}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j\pm 1}, \mathbf{U}_{j\pm 2}) \quad (5.112)$$

$$\mathbf{U}_{zL,k\pm 1/2} = MP5(\mathbf{U}_{k\mp 2}, \mathbf{U}_{k\mp 1}, \mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{k\pm 1}, \mathbf{U}_{k\pm 2}) \quad (5.113)$$

のようにして求める。

### 5.4.2 磁場の発散の数値的処理

マクスウェル方程式は磁場のソレノイダル性

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.114)$$

を保証しているが、多次元の数値計算においては必ずしも保証されていない（1次元（x 方向）では  $B_x$  を一定とすることにより満たされる）。計算の途中に有限の値が一度生じてしまうと、それは時間とともに増加していくため、いずれ計算の破綻をきたす。特に保存系での解法では運動方程式のローレンツ力項、

$$-\nabla \cdot \left( \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (5.115)$$

より磁力線に水平方向への数値的加速が生じるため、数値計算上大きな影響を受ける。

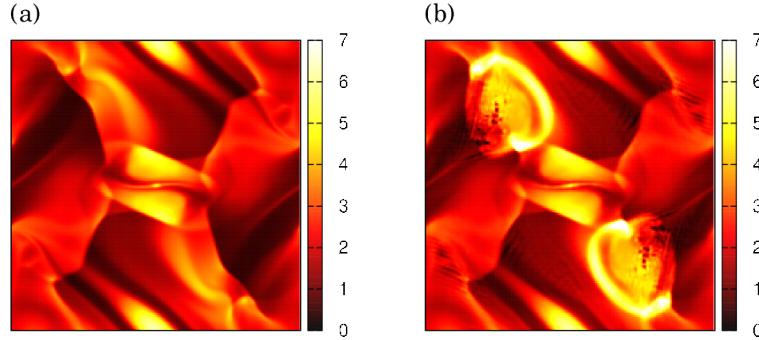


図 6 Orszag-Tang 渦問題のシミュレーション結果。(a) プロジェクション法（後述）による磁場補正をした場合。(b) 磁場補正なし。

例えば [Orszag-Tang 渦問題の図](#) は Orszag-Tang 渦問題を解いたもので、[Orszag-Tang 渦問題の図 5 \(a\)](#) はプロジェクション法（後述）による磁場補正をした場合、[Orszag-Tang 渦問題の図 5 \(b\)](#) は補正をしない場合である。補正しない場合は局所的に、特に、不連続面近傍で磁場のソレノイダル性が破れており、それが広範囲に影響を及ぼし補正した場合と違った結果を導くばかりか、それが原因となり計算が破綻する。したがって多次元の MHD シミュレーションにおいては、いかにして磁場のソレノイダル条件 ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) を満たしながら計算を行うことが重要な課題となっている。本小節では磁場のソレノイダル性を（ある程度）保証する手法について 4 つ手法を例にとり、紹介していく。

### プロジェクション法

次の手法として *Brackbill & Barnes, 1980* によって提唱されたプロジェクション法を挙げる。これは時間更新した磁場を補正することにより、ある精度で磁場のソレノイダル条件を満たす手法である。ある数値解法での時間更新後の磁場を  $\mathbf{B}^{*(n+1)}$  と表記すると、ソレノイダル条件を満たす磁場  $\mathbf{B}^{(n+1)}$  を求めるには、スカラポテンシャル  $\psi$  を導入して

$$\mathbf{B}^{(n+1)} = \mathbf{B}^{*(n+1)} - \nabla \psi \quad (5.116)$$

のように磁場を補正し更新する。 $\psi$  は

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(n+1)} = \nabla \cdot \mathbf{B}^{*(n+1)} - \nabla^2 \psi = 0 \quad (5.117)$$

のポアソン方程式より求めることができる。この修正方法は一様なデカルト座標系においては最も補正量の少ない修正法であることが数学的に証明されている（*Toth, 2000*）。プロジェクション法は磁場自体を補正するため、どの数値計算手法とも相性がよい一方、ポアソン方程式を解く必要があるため、その分計算コストが増える。しかし必ずしも厳密に  $\psi$  を求める必要はなく、ある程度の精度で  $\psi$  が求まれば充分であることが多い。この場合 SOR 法や共役勾配法などの反復法が有効であり、さほど計算コストを増やすことなく磁場の補正が可能である。

## CT 法

プロジェクトでは磁場を補正したのに対して、以下に挙げる CT 法では磁場の配置を工夫することにより磁場のソレノイダル条件が丸め誤差の範囲で満たされる (Evans & Hawley, 1988)。

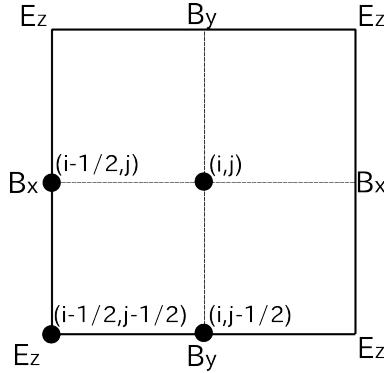


図 7 CT 法で使われる物理量のグリッド上への配置方法。

CT 法でのグリッド配置図は CT 法で使われている物理量の配置方法を表したものである。磁場はセル境界面の中心に面に垂直な磁場成分を配置する。磁場の時間発展には電場の情報が必要であるが、セルの角に定義した電場を使って磁場の誘導方程式を解く。例えば 2 次元の場合、

$$B_{x(i+1/2,j)}^{(n+1)} = B_{x(i+1/2,j)}^{(n)} - \Delta t \frac{E_{z(i+1/2,j+1/2)}^{(n)} - E_{z(i+1/2,j-1/2)}^{(n)}}{\Delta y} \quad (5.118)$$

$$B_{y(i,j+1/2)}^{(n+1)} = B_{y(i,j+1/2)}^{(n)} + \Delta t \frac{E_{z(i+1/2,j+1/2)}^{(n)} - E_{z(i-1/2,j+1/2)}^{(n)}}{\Delta x} \quad (5.119)$$

のように差分化した形で解く。その結果、差分化した  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 、つまり、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} = & + \frac{B_{x(i+1/2,j)} - B_{x(i-1/2,j)}}{\Delta x} \\ & + \frac{B_{y(i,j+1/2)} - B_{y(i,j-1/2)}}{\Delta y} \end{aligned} \quad (5.120)$$

は時間更新前後で維持される。これは、式 (5.118)、(5.119) の左辺を式 (5.120) に代入すると明らかで、式 (5.118)、(5.119) の右辺の電場が相殺することにより

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(n+1)} = \nabla \cdot \mathbf{B}^n \quad (5.121)$$

の関係が導かれる。CT 法は磁場の離散化についてのみ規定しており、流体量 (2 次元の場合は面に垂直な磁場  $B_z$  も) の離散化は任意である。そこでこれらを有限体積法に基づいてセル中心に定義した場合の、CT 法との組み合せ方について述べる。

### 有限体積法への実装

以下は簡単のため 2 次元の場合だが、3 次元への拡張は容易である。

- セル境界面の磁場  $B_{x(i-1/2,j)}, B_{y(i,j-1/2)}$  からセル中心の磁場を補間する。例えば線形補間では  $B_{x(i,j)} = (B_{x(i-1/2,j)} + B_{x(i+1/2,j)}) / 2, B_{y(i,j)} = (B_{y(i,j-1/2)} + B_{y(i,j+1/2)}) / 2$ .

2. 全ての物理量がセル中心に配置されたので、任意の衝撃波捕捉法を用いて、セル境界面における数値流束  $\mathbf{F}_{i-1/2,j}$ ,  $\mathbf{F}_{i,j-1/2}$  を求める。誘導方程式の  $x$ ,  $y$  成分の数値流束は電場の  $z$  成分なので、 $E_{z(i-1/2,j)}$ ,  $E_{z(i,j-1/2)}$  が求められたことになる。
3. セル境界面の電場を用いて、セルの角の電場  $E_{z(i-1/2,j-1/2)}$  を補間する。最も簡単なのは算術平均 (*Balsara & Spicer, 1999*) である。式 (5.122) は実装が容易だが、中心補間なので数値振動が発生する場合がある。これを抑制するために、例えば風上方向を考慮した補間方法 (*Gardiner & Stone, 2005*) や、セルの角で誘導方程式について再度衝撃波捕捉法を用いて電場を求める方法 (*Londrillo & Del Zanna, 2004*, *Del Zanna et al., 2007*) など、様々な方法が提案されている。

$$E_{z(i-1/2,j-1/2)} = \frac{(E_{z(i-1,j-1/2)} + E_{z(i,j-1/2)} + E_{z(i-1/2,j-1)} + E_{z(i-1/2,j)})}{4}. \quad (5.122)$$

4. 面内磁場を式 (5.118), (5.119) に従って更新する。他の物理量は通常の有限体積法に従って更新する。

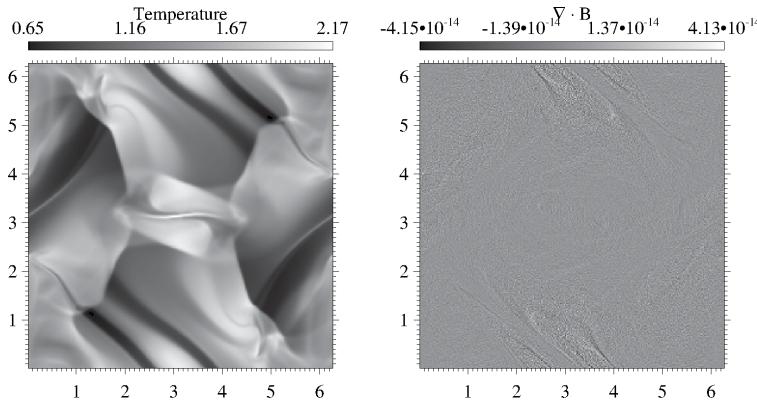


図 8 Orszag-Tang 湧問題のシミュレーション結果。(左) 温度。(右) 磁場の発散。

CT 法の Orszag-Tang 湧問題テスト図 は式 (5.122) に基づいた CT 法を Orszag-Tang 湧問題に適用した結果である。右図より、磁場のソレノイダル条件が計算機精度の範囲で満たされていることがわかる。

### 移流拡散法

移流拡散法は  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  の存在を許容しつつも、その場に留まらないように移流 (伝搬)・拡散させて計算の破綻を回避しようという発想の手法である。

### 8 wave 法

Powell (*cf. Powell et al., 1999*) が提唱した手法は、MHD 方程式 (5.8) に  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  に比例したソース項を導入して解く方法である。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S}, \quad (5.123)$$

$$\mathbf{S} = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (5.124)$$

本形式では、 $\nabla \cdot \mathbf{B}$  の移流（拡散）を含んでいるため、8 wave formulation と呼ぶ。Powell の手法は  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  誤差を数値的に拡散させながら流れに乗せて逃すことに相当する。しかし、流れの濁み点では数値拡散しか効かず、 $\nabla \cdot \mathbf{B}$  が溜まってしまうという欠点がある。また、保存形で書かれていないため、衝撃波のジャンプ条件を正しく満たさない。一方で、本形式はガリレイ不变の形をしているという特性がある（通常の MHD 方程式はガリレイ不变でない Powell *et al.*, 1999）。

## 9 wave 法

Dedner (*Dedner et al.*, 2002) らが提案した方法は、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S}, \quad (5.125)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \\ e \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v} + \psi \mathbf{I} \\ (e + p_T) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ c_h^2 \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi \end{pmatrix} \quad (5.126)$$

の形式で、新たにスカラポテンシャル  $\psi$  を導入して解く手法である。 $\psi$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{B}$  は共に電信方程式（telegraph equation）

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{c_h^2}{c_p^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} - c_h^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (5.127)$$

$$\frac{\partial^2 (\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t^2} + \frac{c_h^2}{c_p^2} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} - c_h^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (5.128)$$

にしたがって時間発展することが導かれる。ここで  $c_h$ 、 $c_p$  はそれぞれ任意の値を持つ伝搬速度、減衰係数を表す。

ここで単純のため、1次元（x 方向）の場合のソース項がない（右辺が 0）式 (5.125)、(5.126) を考えてみる。すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.129)$$

のように、 $B_x$  と  $\psi$  は他の変数とは分離して考えることができる。この方程式の固有値、右固有ベクトルはそれぞれ  $\pm c_h$ 、 $(1, \pm c_h)^T$  で、通常の MHD 方程式に固有値が 2つ（ $\pm c_h$ ）加わるため、9 wave 法と呼ばれる。

セル境界でのそれぞれの値  $(B_{x,m}, \psi_m)^T$  は、 $(B_{x,l}, \psi_l)^T$ 、 $(B_{x,r}, \psi_r)^T$  をそれぞれ左・右状態とした近似リーマン問題の解から、

$$\begin{pmatrix} B_{x,m} \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{x,l} \\ \psi_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(B_{x,r} - B_{x,l}) - \frac{1}{2c_h}(\psi_r - \psi_l) \\ \frac{1}{2}(\psi_r - \psi_l) - \frac{c_h}{2}(B_{x,r} - B_{x,l}) \end{pmatrix} \quad (5.130)$$

のようにして求められる。これより、数値フラックス  $(\psi_m, c_h^2 B_{x,m})^T$  を用いて、式 (5.129) を有限体積法で解くことができる。式 (5.125) のソース項を含めた解は、有限体積法で解いた後の値を  $\psi^*$  とすると、

$$\psi^{n+1} = \psi^* \exp \left( -\Delta t_n \frac{c_h^2}{c_p^2} \right) \quad (5.131)$$

のように、演算子分離してソース項の寄与を解析的に求める。(ここで、 $\Delta t_n$  は時刻  $t_n$  における時間刻み幅、 $\psi^{n+1}$  は時刻  $t_{n+1}$  の時間更新後の値。)

実際の数値計算では、 $c_h$ 、 $c_p$  はフリーパラメタとして与える。 $c_h$  は  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  誤差の（物理的でない）伝搬速度を表す。したがって、数値計算上安定な範囲で任意に決めることができ、MHD 方程式から決まる CFL 条件となるような速度 ( $c_h(t_n) = \text{CFL} \times \min(\Delta h)/\Delta t_n$ ) で与える。 $c_p$  については、伝搬と拡散のスケールの比較から、 $c_r = c_p^2/c_h = \text{const.}$  となるように  $c_p$  を決めている。数値実験による検証から、 $c_r = 0.18$  が空間解像度によらず最適な値としてしばしば採用される (cf. Dedner et al. 2002)。

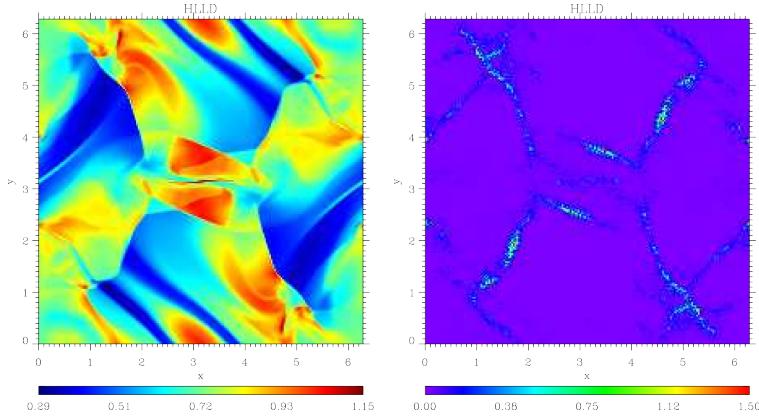


図 9 Orszag-Tang 湧問題のシミュレーション結果。(左) 温度。(右) 磁場の発散。

9 wave 法の Orszag-Tang 湧問題テスト図 は 9 wave 法を実装した場合の Orszag-Tang 湧問題に適用した結果である。CT 法（上図）に比べて磁場のソレノイダル条件誤差は大きいものの、物理的構造は同様の結果を得られていることがわかる。

以上のように、9 wave 法は伝搬速度についても任意に設定することができるため、8 wave 法で問題となる流れの澁み点での  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  の蓄積の問題は解消される。いずれにしても、移流拡散法は元の方程式系に対して少しの変更を加えることで容易に導入できることから、計算効率がよい。ただし、8 wave 法は保存系ではないので衝撃波捕獲法と組み合わせた場合に、衝撃波のジャンプ条件を正確に満たさないという欠点がある。一方、9 wave 法は保存系なのでその問題が回避されるが、解が拡散的になりやすいことが経験的に知られている。

## 5.5 付録

### 5.5.1 HLL 型近似リーマン解法の正値性の証明

MHD 方程式の物理的な解の集合  $G$  、

$$G = \left\{ \mathbf{U} \left| \rho > 0, p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2} - \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2} \right] > 0 \right. \right\} \quad (5.132)$$

を考える。 $G$  に含まれる  $\mathbf{U}_1$  と  $\mathbf{U}_2$  の重み付き平均値  $\mathbf{U}$  、

$$\mathbf{U} = (1 - \theta)\mathbf{U}_1 + \theta\mathbf{U}_2 \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad (5.133)$$

に対して、密度  $\rho$  と圧力  $p$  は、

$$\rho = (1 - \theta)\rho_1 + \theta\rho_2 \quad (5.134)$$

$$p = (1 - \theta)p_1 + \theta p_2 + \theta(1 - \theta)(\gamma - 1) \left( \frac{\rho_1 \rho_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2}{2\rho} + \frac{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|^2}{2} \right) \quad (5.135)$$

と表される。したがって、 $\rho > 0$ 、 $p > 0$  であり、 $\mathbf{U}$  も  $G$  に含まれることがわかる。

近似リーマン解法による数値解は、各セル境界におけるリーマン問題の近似解を各セル内で積分したものに等しい。一方、上で示されたとおり、 $G$  に含まれる  $\mathbf{U}$  の重み付き平均値は  $G$  に含まれる。したがって、近似リーマン解法の正値性の保存性を証明するためには、リーマン問題の近似解の正値性を調べればよいことになる。

HLLD 近似リーマン解法における  $\mathbf{U}_R^*$ 、 $\mathbf{U}_R^{**}$  の正値性の条件、

$$\rho_R^* > 0, \quad (5.136)$$

$$\rho_R^{**} > 0, \quad (5.137)$$

$$e_R^* - \frac{1}{2}\rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}_R^*|^2 > 0, \quad (5.138)$$

$$e_R^{**} - \frac{1}{2}\rho_R^{**} |\mathbf{v}_R^{**}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}_R^{**}|^2 > 0, \quad (5.139)$$

について議論しよう。

ここで、次のような変数、

$$\xi \equiv S_R - u_R, \eta \equiv S_R - S_M, \zeta \equiv S_M - u_R \quad (5.140)$$

を導入する。 $S_R$  が、例えば (5.41) – (5.43) のように、膨張波も含めた系最大の特性速度よりも小さくならないように与えられるので、 $\xi$  と  $\eta$  は常に正である。一方、 $\zeta$  は正と負のどちらも取り得る。また、変数の定義から  $\xi - \eta = \zeta$  である。

密度の正値性の条件 (5.136)、(5.137) は、(5.50)、(5.56) から、

$$\rho_R^* = \rho_R^{**} = \frac{\xi}{\eta} \rho_R > 0 \quad (5.141)$$

と常に満たされることがわかる。

$\mathbf{U}_R^*$  における圧力の正値性の条件 (5.138) を示すため、

$$\varphi \equiv \eta \left( e_R^* - \frac{1}{2}\rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}_R^*|^2 \right) \quad (5.142)$$

の正値性を証明しよう。 $\varphi$ を整理すると、

$$\begin{aligned}
\varphi &= \xi e_R - p_{TR} u_R + p_T^* S_M + B_x (\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{B}_R - \mathbf{v}_R^* \cdot \mathbf{B}_R^*) - \eta \frac{\rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2}{2} - \eta \frac{|\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \\
&= \xi \left( \frac{p_R}{\gamma - 1} + \frac{\rho_R |\mathbf{v}_R|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} \right) - \left( p_R + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} \right) u_R + \left( p_R + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} + \rho_R \xi \zeta \right) S_M \\
&\quad + B_x \left( -B_x \zeta - \frac{\rho_R \xi \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR}) + \frac{B_x \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} |\mathbf{B}_{tR}|^2 + \frac{\rho_R B_x \xi \zeta^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} |\mathbf{B}_{tR}|^2 \right) \\
&\quad - \xi \frac{\rho_R |\mathbf{v}_R^*|^2}{2} - (\xi - \zeta) \frac{|\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \\
&= \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} + p_R \zeta + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} \zeta + \rho_R S_M \xi \zeta \\
&\quad + \frac{\rho_R (|\mathbf{v}_R|^2 - |\mathbf{v}_R^*|^2)}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_R|^2 - |\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \zeta \\
&\quad - B_x^2 \zeta - \frac{\rho_R B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta + \frac{\rho_R B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi \zeta^2 \\
&= \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} + p_R \zeta + \rho_R S_M \xi \zeta + \frac{\rho_R (u_R^2 - S_M^2)}{2} \xi \\
&\quad + \frac{\rho_R (|\mathbf{v}_{tR}|^2 - |\mathbf{v}_{tR}^*|^2)}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2 - |\mathbf{B}_{tR}^*|^2}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2 + |\mathbf{B}_{tR}^*|^2}{2} \zeta \\
&\quad - \frac{\rho_R B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta + \frac{\rho_R B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi \zeta^2 \\
&= \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} + p_R \zeta + \frac{\rho_R \xi}{2} \zeta^2 \\
&\quad + \frac{\rho_R \xi}{2} \left( \frac{2 B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta - \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \zeta^2 \right) \\
&\quad + \frac{\xi}{2} \left( -\frac{2 \rho_R |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta - \frac{\rho_R^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi^2 \zeta^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( 2 |\mathbf{B}_{tR}|^2 + \frac{2 \rho_R |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{\rho_R^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi^2 \zeta^2 \right) \zeta \\
&\quad - \frac{\rho_R B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta + \frac{\rho_R B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi \zeta^2 \\
&= \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} + p_R \zeta + \frac{\rho_R \xi}{2} \left( 1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \right) \zeta^2
\end{aligned} \tag{5.143}$$

となる。ただし、 $\mathbf{v}_{tR} = (0, v_R, w_R)$ 、 $\mathbf{B}_{tR} = (0, B_{yR}, B_{zR})$ 。途中、(5.47)–(5.55)、

$$p_{TR}^* = p_{TR} + \rho_R \xi \zeta \tag{5.144}$$

$$\rho_R^* = \frac{\xi}{\eta} \rho_R \tag{5.145}$$

$$\mathbf{v}_{tR}^* = \mathbf{v}_{tR} - \frac{B_x \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \mathbf{B}_{tR} \tag{5.146}$$

$$\mathbf{B}_{tR}^* = \frac{\rho_R \xi^2 - B_x^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \mathbf{B}_{tR} = \left( 1 + \frac{\rho_R \xi \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \right) \mathbf{B}_{tR} \tag{5.147}$$

$$e_R^* = \frac{\xi e_R - p_{TR} u_R + p_T^* S_M + B_x (\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{B}_R - \mathbf{v}_R^* \cdot \mathbf{B}_R^*)}{\eta} \tag{5.148}$$

を利用した。ここで、 $S_R$  が系最大の特性速度であることから、 $\xi \geq c_{fR}$ 、 $\eta \geq c_{fR}$  となるので、

$$\varphi' = \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} + p_R \zeta + \frac{\rho_R \xi}{2} \left( 1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \zeta^2 \leq \varphi \quad (5.149)$$

である。つまり、 $\varphi'$  が正であれば  $\varphi$  は必ず正である。 $\varphi'$  は  $\zeta$  の二次方程式であり、2次の項の係数は、

$$\rho c_f^2 - |\mathbf{B}|^2 = \rho c_f^2 - B_x^2 - |\mathbf{B}_t|^2 > 0 \quad (5.150)$$

から正である<sup>\*11</sup>。したがって、 $\varphi'$  の判別式  $D$  が負のとき、任意の  $\zeta$  に対して  $\varphi'$  は正となる。つまり、

$$D(\varphi') = p_R^2 - \frac{2\rho_R p_R}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \xi^2 < 0 \quad (5.151)$$

から、

$$\xi^2 > \frac{(\gamma - 1)p_R}{2\rho_R} \left( 1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right)^{-1} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_{fR}^2 \quad (5.152)$$

のとき、正値性の条件 (5.138) は満たされる。ただし、導出過程で、

$$\rho c_s^2 - B_x^2 = -\frac{B_x^2 |\mathbf{B}_t|^2}{\rho c_f^2 - B_x^2}, \quad c_f^2 c_s^2 = \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2} \quad (5.153)$$

を利用した。最終的に正値性の条件は、

$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR} \quad (5.154)$$

となり、 $S_R$  は明らかにこの条件を満たす。

続いて、 $\mathbf{U}_R^{**}$  における圧力の正値性の条件 (5.139) は、

$$\begin{aligned} p_R^{**} &= (\gamma - 1) \left( e_R^{**} - \frac{\rho_R^* |\mathbf{v}^{**}|^2}{2} - \frac{|\mathbf{B}^{**}|^2}{2} \right) \\ &= p_R^* + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \left| \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}_R^* + \mathbf{B}_R^* \operatorname{sgn}(B_x) \right|^2 - \left| \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}^{**} + \mathbf{B}^{**} \operatorname{sgn}(B_x) \right|^2 \right) \\ &= p_R^* > 0 \end{aligned} \quad (5.155)$$

と示される。

$\mathbf{U}_L^*$ 、 $\mathbf{U}_L^{**}$  の正値性の条件は、対称性から、

$$S_L < u_L - \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fL} \quad (5.156)$$

となり、 $S_L$  は容易にこの条件を満たす。

以上、リーマン問題の近似解、 $\mathbf{U}_L^*$ 、 $\mathbf{U}_L^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^*$  の正値性が示された。したがって、HLLD 近似リーマン解法は正値性を保存する解法である。

また、HLL 近似リーマン解法における近似解は、HLLD 近似リーマン解法における近似解の重み付き平均値として与えられる。したがって、HLL 近似リーマン解法も正値性を保存する解法である。

<sup>\*11</sup>  $\mathbf{B}_t = 0$ 、 $B_x^2 \geq \gamma p$  のとき、 $|\mathbf{B}_t|^2 / (\rho c_f^2 - B_x^2)$  は  $0/0$  となる。ただし、 $\mathbf{B}_t = 0$  では、(5.143) はオイラー方程式に対する HLLC 近似リーマン解法の正値性条件に一致する。

## 5.5.2 HLLD 近似リーマン解法のサンプルプログラム

HLLD 近似リーマン解法のサンプルプログラムを示す。

Fortran90:

```

!-----
subroutine calc_flux_hlld(rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl, &
                         ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,prr, &
                         bnc, &
                         fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen)
!-----
real(DP), intent(IN)  :: rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl
real(DP), intent(IN)  :: ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,prr
real(DP), intent(IN)  :: bnc
real(DP), intent(OUT) :: fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen
real(DP), parameter   :: eps=1.D-40
real(DP)               :: bnc2,sgn
real(DP)               :: roli,pml,ptl,enl,vbl
real(DP)               :: rori,pmr,ptr,enr,vbr
real(DP)               :: cl2,cal2,cb12,cfl2,cfl
real(DP)               :: cr2,car2,cbr2,cfr2,cfr
real(DP)               :: sr,sl
real(DP)               :: slvl,srvr,rslvl,rsrvr,drsvi
real(DP)               :: vnc,ptc
real(DP)               :: slvc,rhdl,rhdli,rhnvl,rhnbl
real(DP)               :: srvc,rhdr,rhdri,rhnvr,rhnbr
real(DP)               :: ro2l,vt2l,vu2l,bt2l,bu2l,vb2l,en2l
real(DP)               :: ro2r,vt2r,vu2r,bt2r,bu2r,vb2r,en2r
real(DP)               :: rro2l,rro2r,rrro2i
real(DP)               :: vt3m,vu3m,bt3m,bu3m,vb3m,en3l,en3r
real(DP)               :: rou,vtu,vuu,btu,buu,enu
!.....
! Bn at the interface
!.....
bnc2 = bnc**2
sgn  = sign(1.0_DP,bnc)
!.....
! variables at the left-face
!.....
roli = 1.0_DP/rol
pml  = 0.5_DP*(bt1**2+bul**2)
ptl  = prl+pml
enl  = gammamli*prl+pml+0.5_DP*rol*(vnl**2+vtl**2+vul**2)
vbl  = vtl*btl+vul*bul
!.....
! variables at the right-face
!.....
rori = 1.0_DP/oror

```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```

pmr = 0.5_DP*(btr**2+bur**2)
ptr = prr+pmr
enr = gammamli*prr+pmr+0.5_DP*r0r*(vnr**2+vtr**2+vur**2)
vbr = vtr*btr+vur*bur
!
! maximum / minimum wave speeds
!
c12 = gamma*prl*roli
cr2 = gamma*prr*r0ri
cal2 = bnc2*roli
car2 = bnc2*r0ri
cbl2 = c12+cal2+2.0_DP*pml*roli
cbr2 = cr2+car2+2.0_DP*pmr*r0ri
cfl2 = 0.5_DP*(cbl2+sqrt(abs(cbl2**2-4.0_DP*c12*cal2)))
cfr2 = 0.5_DP*(cbr2+sqrt(abs(cbr2**2-4.0_DP*cr2*car2)))
cfl = sqrt(cfl2)
cfr = sqrt(cfr2)
sl = min(0.0_DP,min(vnl,vnr)-max(cfl,cfr))
sr = max(0.0_DP,max(vnl,vnr)+max(cfl,cfr))
!
! HLL average of the normal velocity and the total pressure
!
slvl = sl-vnl
srvr = sr-vnr
rslvl = rol*slvl
rsrvr = r0r*srvr
drsvi = 1.0_DP/(rsrvr-rslvl)
vnc = (rsrvr*vnr-rslvl*vnl-ptr+ptl)*drsvi
ptc = (rsrvr*ptl-rslvl*ptr+rsrvr*rslvl*(vnr-vnl))*drsvi
!
! variables of the outer sides in the Riemann fan
!
slvc = sl-vnc
srvc = sr-vnc
ro2l = rslvl/slvc
ro2r = rsrvr/srvc
rhd1 = rslvl*slvc-bnc2
rhdr = rsrvr*srvc-bnc2
if(abs(rhd1) > eps) then
  rhdli = 1.0_DP/rhd1
  rhnvl = (vnl-vnc)*bnc
  rhnbl = rslvl*slvl-bnc2
  vt21 = vtr+rhnvl*rhdli*btr
  vu21 = vur+rhnvl*rhdli*bul
  bt21 = rhnbl*rhdli*btr
  bu21 = rhnbl*rhdli*bul
else
  vt21 = vtr

```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```

vuu = vu3m
btu = bt3m
buu = bu3m
enu = en3l
else if((vnc < 0.0_DP).and.(vnc+abs(bnc)/rro2r >= 0.0_DP))then
  rou = ro2r
  vtu = vt3m
  vuu = vu3m
  btu = bt3m
  buu = bu3m
  enu = en3r
else
  rou = ro2r
  vtu = vt2r
  vuu = vu2r
  btu = bt2r
  buu = bu2r
  enu = en2r
end if
!.....
! HLLD fluxes
!.....
fro = rou*vnc
fmn = rou*vnc*vnc+ptc-bnc2*0.5_DP
fmt = rou*vtu*vnc-bnc*btu
fmu = rou*vuu*vnc-bnc*buu
fbt = btu*vnc-bnc*vtu
fbu = buu*vnc-bnc*vuu
fen = (enu+ptc)*vnc-bnc*(vtu*btu+vuu*buu)
!-----
end subroutine calc_flux_hlld
!-----

```

C:

```

#include <math.h>
inline double max(double a, double b)
{
  return( (a > b)?a:b );
}
inline double min(double a, double b)
{
  return( (a > b)?b:a );
}

#define EPS (1e-8)

```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```

void calc_flux_hlld(double rol, double vnl, double vtl, double vul, double btl,
                     double bul, double prl,
                     double ror, double vnr, double vtr, double vur, double btr,
                     double bur, double prr,
                     double bnc, double gamma,
                     double *fro, double *fmn, double *fmt, double *fmu, double *fbt,
                     double *fbu, double *fen)
{
    /* Calculate HLLD fluxes */
    /* rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl: input primitive variables at the left side */
    /* ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,prr: input primitive variables at the right side */
    /* bnc: input normal magnetic field at the interface */
    /* gamma: specific heat ratio */
    /* fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen: output HLLD fluxes at the interface*/
    {
        double gammamli=1.0/(gamma-1.0);
        /* Bn at the interface */
        double bnc2=bnc*bnc;
        int sgn=(bnc > 0)?(1):(-1);
        /* Variables at the left-face */
        double roli=1.0/rol;
        double pml=0.5*(btl*btl+bul*bul);
        double ptl=prl+pml;
        double enl=gammamli*prl+pml+0.5*rol*(vnl*vnl+vtl*vtl+vul*vul);
        double vbl=vtl*btl+vul*bul;
        /* Variables at the right-face */
        double rori=1.0/oror;
        double pmr=0.5*(btr*btr+bur*bur);
        double ptr=prr+pmr;
        double enr=gammamli*prr+pmr+0.5*rori*(vnr*vnr+vtr*vtr+vur*vur);
        double vbr=vtr*btr+vur*bur;
        /* Maximum/minimum wave speeds */
        double cl2=gamma*prl*rol;
        double cr2=gamma*prr*rori;
        double cal2=bnc2*rol;
        double car2=bnc2*rori;
        double cbl2=cl2+cal2+2.0*pml*rol;
        double cbr2=cr2+car2+2.0*pmr*rori;
        double cfl2=0.5*(cbl2+sqrt(fabs(cbl2*cbl2-4.0*cl2*cal2)));
        double cfr2=0.5*(cbr2+sqrt(fabs(cbr2*cbr2-4.0*cr2*car2)));
        double cfl=sqrt(cfl2);
        double cfr=sqrt(cfr2);
        double sl=min(0.0,min(vnl,vnr)-max(cfl,cfr));
        double sr=max(0.0,max(vnl,vnr)+max(cfl,cfr));
        /* HLL average of the normal velocity and the total pressure */
        double slvl=sl-vnl;
        double srvr=sr-vnr;
        double rslvl=rol*slvl;
        double rsrvr=ror*srvr;
    }
}

```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```

double drsvi=1.0/(rsrvr-rslvl);
double vnc=(rsrvr*vnr-rslvl*vnl-ptr+ptr)*drsvi;
double ptc=(rsrvr*ptr-rslvl*ptr+rsrvr*rslvl*(vnr-vnl))*drsvi;
/* Variables of the outer sides in the Riemann fan */
double slvc=sl-vnc;
double srvc=sr-vnc;
double ro2l=rslvl/slvc;
double ro2r=rsrvr/srvc;
double rhdl=rslvl*slvc-bnc2;
double rhdr=rsrvr*srvc-bnc2;
double vt2l,vu2l,bt2l,bu2l;
double vt2r,vu2r,bt2r,bu2r;
if (fabs(rhdl) > EPS){
    double rhdli=1.0/rhdl;
    double rhnvl=(vnl-vnc)*bnc;
    double rhnbl=rslvl*slvl-bnc2;
    vt2l=vtl+rhnvl*rhdli*bt1;
    vu2l=vul+rhnvl*rhdli*bul;
    bt2l=rhnbl*rhdli*bt1;
    bu2l=rhnbl*rhdli*bul;
} else{
    vt2l=vtl;
    vu2l=vul;
    bt2l=bt1;
    bu2l=bul;
}
if (fabs(rhdr) > EPS){
    double rhdri=1.0/rhdr;
    double rhnvr=(vnr-vnc)*bnc;
    double rhnbr=rsrvr*srvr-bnc2;
    vt2r=vtr+rhnvr*rhdri*btr;
    vu2r=vur+rhnvr*rhdri*bur;
    bt2r=rhnbr*rhdri*btr;
    bu2r=rhnbr*rhdri*bur;
} else{
    vt2r=vtr;
    vu2r=vur;
    bt2r=btr;
    bu2r=bur;
}
double vb2l=vt2l*bt2l+vu2l*bu2l;
double vb2r=vt2r*bt2r+vu2r*bu2r;
double en2l=(slvl*enl-ptr*vnl+ptr*vnc+bnc*(vbl-vb2l))/slvc;
double en2r=(srvr*enr-ptr*vnr+ptr*vnc+bnc*(vbr-vb2r))/srvc;
/* Variables of the inner sides in the Riemann fan */
double rro2l=sqrt(ro2l);
double rro2r=sqrt(ro2r);
double rro2i=1.0/(rro2r+rro2l);

```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```

double vt3m=(rro2r*vt2r+rro2l*vt2l+(bt2r-bt2l)*sgn)*rro2i;
double vu3m=(rro2r*vu2r+rro2l*vu2l+(bu2r-bu2l)*sgn)*rro2i;
double bt3m=(rro2l*bt2r+rro2r*bt2l+rro2r*rro2l*(vt2r-vt2l)*sgn)*rro2i;
double bu3m=(rro2l*bu2r+rro2r*bu2l+rro2r*rro2l*(vu2r-vu2l)*sgn)*rro2i;
double vb3m=vt3m*bt3m+vu3m*bu3m;
double en3l=en2l-rro2l*(vb2l-vb3m)*sgn;
double en3r=en2r+rro2r*(vb2r-vb3m)*sgn;
/* Variables at the interface */
double rou,vtu,vuu,btu,buu,enu;
if (vnc-fabs(bnc)/rro2l > 0) {
    rou=r02l;
    vtu=vt2l;
    vuu=vu2l;
    btu=bt2l;
    buu=bu2l;
    enu=en2l;
} else{
    if (vnc >= 0) {
        rou=r02l;
        vtu=vt3m;
        vuu=vu3m;
        btu=bt3m;
        buu=bu3m;
        enu=en3l;
    } else{
        if (vnc+fabs(bnc)/rro2r >= 0) {
            rou=r02r;
            vtu=vt3m;
            vuu=vu3m;
            btu=bt3m;
            buu=bu3m;
            enu=en3r;
        } else{
            rou=r02r;
            vtu=vt2r;
            vuu=vu2r;
            btu=bt2r;
            buu=bu2r;
            enu=en2r;
        }
    }
}
/* HLLD fluxes */
*fro=rou*vnc;
*fmn=rou*vnc*vnc+ptc-bnc2*0.5;
*fmt=rou*vtu*vnc-bnc*btu;
*fmu=rou*vuu*vnc-bnc*buu;
*fbt=btu*vnc-bnc*vtu;

```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```
* fbu=buu*vnc-bnc*vuu;
* fen=(enu+ptc)*vnc-bnc*(vtu*btu+vuu*buu);
}
```

注釈: 数値計算量を削減するため、 $p_T \rightarrow (B_t^2 + B_u^2)/2$ 、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \rightarrow (v_t B_t + v_u B_u)$  とするなど、できるだけ代数的に整理している。

注釈: if 文が計算が遅い場合は、sign 関数を用いてプログラムを書き換えることができる。

```
rhdl1 = 1.0_DP/(rhdl+0.5_DP-sign(0.5_DP,abs(rhdl)-eps))
rhdr1 = 1.0_DP/(rhdr+0.5_DP-sign(0.5_DP,abs(rhdr)-eps))

h1 = 0.5_DP+sign(0.5_DP,vnc)
hr = 1.0_DP-h1
h2l = 0.5_DP+sign(0.5_DP,vnc-dabs(bnc)/rro2l)
h3l = (1.0_DP-h2l)*h1
h2r = 0.5_DP-sign(0.5_DP,vnc+dabs(bnc)/rro2r)
h3r = (1.0_DP-h2r)*hr
rou = ro2l*h1+ro2r*hr
vsu = vs2l*h2l+vs3m*h3l+vs3m*h3r+vs2r*h2r
vtu = vt2l*h2l+vt3m*h3l+vt3m*h3r+vt2r*h2r
bsu = bs2l*h2l+bs3m*h3l+bs3m*h3r+bs2r*h2r
btu = bt2l*h2l+bt3m*h3l+bt3m*h3r+bt2r*h2r
enu = en2l*h2l+en3l*h3l+en3r*h3r+en2r*h2r
```

注釈: MHD 方程式の流束は回転対称なので、上の 1 次元数値流束サブルーチンをそのまま多次元計算に利用できる。有限体積的なアプローチであれば、非構造格子も含むカーテシアン座標以外でも利用できる。

```
...
vn = vy
vt = vz
vu = vx
...
call calc_flux_hlld(rol,vnl,vtl,vul, ...
...
fmx_y = fmu
fmy_y = fmn
fmz_y = fmt
...
```

## 5.6 参考文献

- *Balsara (1998)*
- *Balsara & Spicer (1999)*
- *Borges et al. (2008)*
- *Brackbill & Barnes (1980)*
- *Brio & Wu (1988)*
- *Cargo & Gallice (1997)*
- *Dedner et al., 2002*
- *Del Zanna et al. (2007)*
- *Evans & Hawley (1988)*
- *Gardiner & Stone (2005)*
- *Henrick et al. (2005)*
- *Jiang & Shu (1996)*
- *Liu et al. (1994)*
- *Londrillo & Del Zanna (2004)*
- *Miyoshi & Kusano (2005)*
- *Powell et al. (1999)*
- *Suresh & Huynh, 1997*
- *Toth (2000)*
- *van Leer (1979)*



## 第 6 章

# CANS+ の使い方

本章では **CANS+** の具体的な使い方について説明をします。2 次元及び 3 次元コードが用意されています。1,2 次元課題については、不要な次元方向のセル数を 1 として計算することができます。また、コードは MPI 並列化されていますので、簡単なテスト計算でもプロセス数を指定した MPI 並列計算をする必要があります。以下では 3 次元コードをベースに説明します。

データ出力は特殊なバイナリ形式となっているため、それを読み込むための IDL プロシージャが予め用意されています。その他、可視化などの後処理プロシージャも用意しています。

## 6.1 CANS+ 3 次元コード

### 6.1.1 基礎方程式

CANS+ は以下のような規格化された MHD 方程式を解いています。

質量保存の式 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.1)$$

運動量保存の式 :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p_t \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}) = 0, \quad (6.2)$$

誘導方程式 :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v} + \psi \mathbf{I}) = -\nabla \times (\eta \mathbf{j}), \quad (6.3)$$

エネルギー保存の式 :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot ((e + p_t) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})) = S(\rho, p), \quad (6.4)$$

$\nabla \cdot \mathbf{B}$  補正用のスカラポテンシャル :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (6.5)$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は単位行列、 $p_t$  は

$$p_t = p + \frac{B^2}{2} \quad (6.6)$$

で定義される、全圧力（プラズマ圧力+磁気圧力）を表し、プラズマ圧は

$$p = (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{B^2}{2} \right) \quad (6.7)$$

より求められます（ここで  $\gamma$  は比熱比）。

式 (3.4) の右辺はソース項となっており、課題によって冷却や加熱効果として（陽に）含まれます。また、低圧力領域への安定化としても（陰に）導入されています。従って、厳密なエネルギー保存は数値的安定化のため成り立っていません。

また、式 (5.4) に含まれる  $\psi$  は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.8)$$

からの誤差をなるべく小さいまま解き進めるために導入されたスカラ変数で、式 (6.5) に従って解き進められます。式 (6.1) - (6.5) を GLM-MHD 方程式系と呼びます（詳細は前章 *移流拡散法*、*Dedner et al., 2002*）。

保存系で書かれた GLM-MHD 方程式系はシステム方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S} \quad (6.9)$$

にまとめて、

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{i,j,k}}{\partial t} + \sum_{s=i,j,k} \frac{\mathbf{F}_{s+1/2}^* - \mathbf{F}_{s-1/2}^*}{\Delta_s} = \mathbf{S}_{i,j,k} \quad (6.10)$$

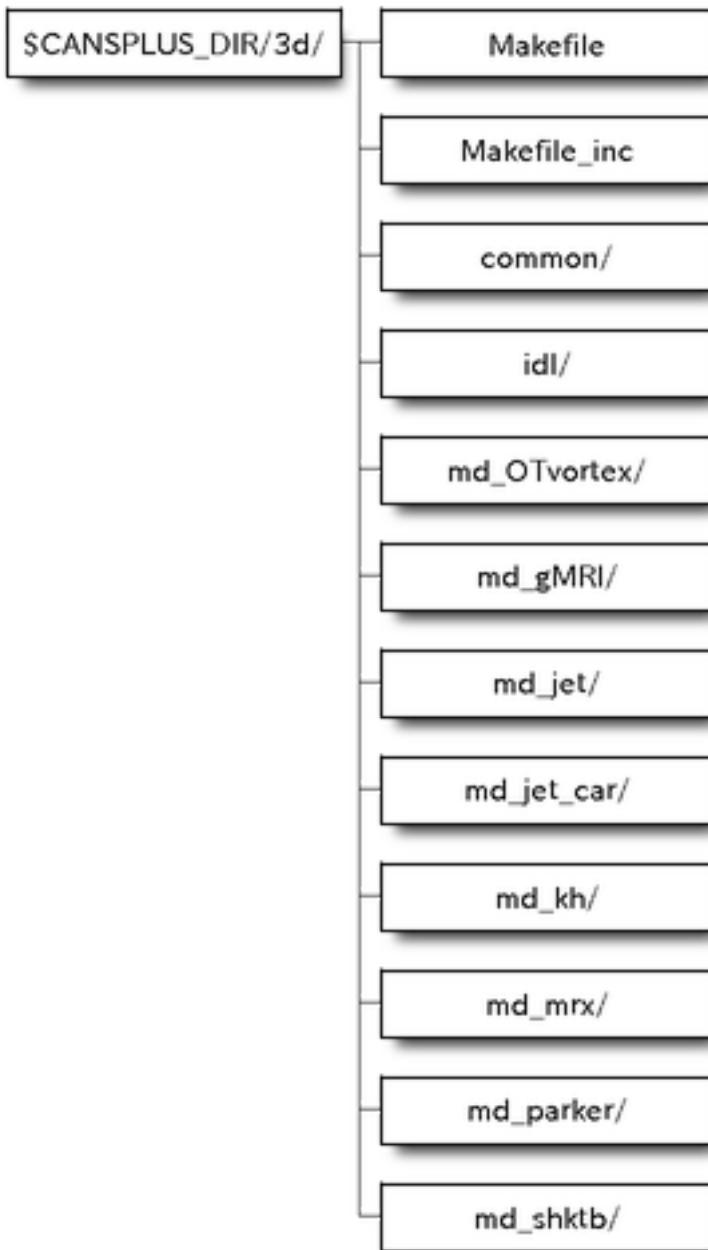
のように、有限体積法として解きます。ここで、 $\Delta_s$  は各次元方向 ( $s = i, j, k$ ) のセル幅、 $F_{s \pm 1/2}^*$  はセル境界における数値フラックスを表します。数値フラックスを、

- 5 次精度の MP5 法によるセル境界への変数補間（前章 *MP5*, *Suresh and Huynh, 1997*）
- HLLD (HLL) 近似リーマン解法（前章 *HLLD*, *Miyoshi and Kusano, 2005*）

によって求めることにより、**CANS+** は空間（5 次）精度・安定性を確保したコードとなっています。ソース項も含めて、時間更新は 3 次精度の TVD ルンゲ・クッタ法（*Gottlieb and Shu, 1998*）を採用しています。

## 6.1.2 パッケージ構成

以下のような構成になっています。



Makefile はコードのバイナリ生成、削除をコントロールしています。初期化するには\$CANSPLUS\_DIR/3d 内で、

```
$ make clean
```

としてください。Makefile\_inc には、

```
FC = mpif90
FFLAGS = -O2
```

のように、make する際のコンパイラとコンパイラオプションの環境変数が設定されています。ここでは、"\$FC"

には MPI 版 Fortran コンパイラのコマンド名、"\$FFLAGS"にはコンパイラオプションが設定されています。コンパイラとコンパイラオプションを変更したい場合は、例えばとあるスパコン上では、

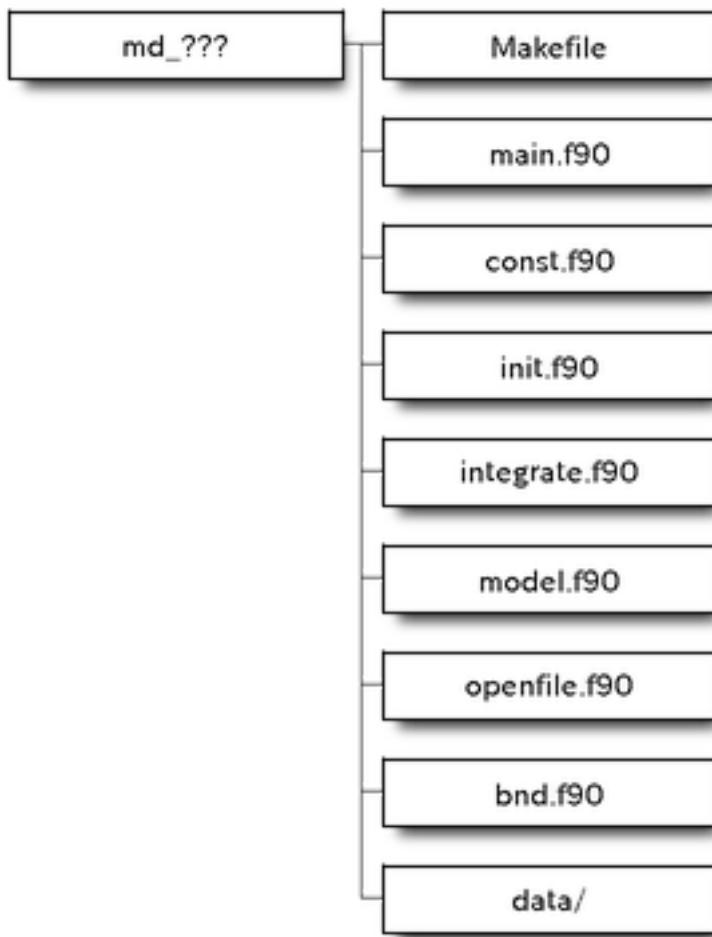
```
FC = mpifrt
FFLAGS = -Kfast
```

のように修正してください（インテルコンパイラがない場合）。

"common"には共通する MHD 方程式数値解法のエンジン部分、"idl"にはポスト処理用として *IDL* ルーチンが用意されています。

物理課題として「衝撃波管問題 (md\_shktb)」、「Orsarg-Tang 湧問題 (md\_OTvortex)」、「ケルビン・ヘルムホルツ不安定 (md\_kh)」、「磁気リコネクション (md\_mrx)」、「パーカー不安定 (md\_paker)」、「ジェット伝搬（直交格子）(md\_jet\_car)」、「ジェット伝搬（円筒座標系）( md\_jet)」、「降着円盤での磁気回転不安定 (gMRI)」が用意されています（2018 年 8 月現在）。

各課題には、



が主に含まれており、それぞれの課題に沿った初期設定のサンプルが置かれています。"data/"はデフォルトの計算

結果の出力先です。

例えば、衝撃波管問題の計算を行うには、

```
$ cd $CANSPLUS_DIR/3d/md_shktb
$ make
$ mpiexec -n 1 ./a.out
```

とします。結果は DAC 形式と呼ばれるオリジナル **CANS** で使われていたバイナリデータ形式で、"data/"内に出力されます。

### 6.1.3 パラメタ設定

各課題において、ユーザーが編集する必要があるのは（基本的に）

- const.f90
- model.f90

のみです。以下では、ケルビン・ヘルムホルツ不安定の課題ディレクトリ (md\_kh/) を例にとって見ていきます。

各課題に含まれる"const.f90"では、シミュレーションを行うのに必要な定数が設定されています。

**const.f90:**

```
module const

implicit none

! physical constants
real(8),parameter :: pi = acos(-1.0d0), pi2 = 2d0*pi
real(8),parameter :: gm = 5d0/3d0 ! specific heat ratio

! time control parameters
logical,parameter :: restart = .false. ! if .true. then start from restart data
integer,parameter :: nstop = 100000
real(8),parameter :: tend = 200.0d0, dtout = 4
real(8),parameter :: safety = 0.3d0 ! CFL number
real(8),parameter :: dtmin = 1d-10! minimum time step

! Output DIRs
character(*),parameter :: input_dir = "./data/", output_dir = "./data/"

! Cell & MPI
integer,parameter :: margin = 3 ! for 5th order interpolation
integer,parameter :: ix = 90+2*margin, jx=64+2*margin, kx=1+2*margin
integer,parameter :: mpisize_x = 2, mpisize_y = 5, mpisize_z = 1
integer,parameter :: igx = ix*mpisize_x-2*margin*(mpisize_x-1)
```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```

integer,parameter :: jgx = jx*mpisize_y-2*margin*(mpisize_y-1)
integer,parameter :: kgx = kx*mpisize_z-2*margin*(mpisize_z-1)
real(8),parameter :: xmin = 0.d0, ymin = -10.d0, zmin = 0.d0
real(8),parameter :: xmax = 2.d0*pi/0.56d0, ymax = +10.d0, zmax = 1.d0
real(8),parameter :: dxg0 = (xmax-xmin)/real(jgx-margin*2)
real(8),parameter :: dyg0 = (ymax-ymin)/real(jgx-margin*2)
real(8),parameter :: dzg0 = (zmax-zmin)/real(kgx-margin*2)
!TRUE if periodic boundary condition is applied. (1:x, 2:y, 3:z)
logical,parameter :: pbcheck(3) = (/.true., .false., .true./)

! Parameters for the Kelvin-Helmholtz instability
real(8),parameter :: ro0    = 1.d0 !at Y=ymax
real(8),parameter :: b0     = 1.d0 !at Y=ymax
real(8),parameter :: beta   = 1.d0 !at Y=ymax, Pressure in B0^2/4pi = beta/2
real(8),parameter :: v0     = sqrt(1.d0+0.5*gm*beta) !Velocity difference in VAO
real(8),parameter :: rr     = 0.1d0 !rho ratio (ro(y=ymin)/ro(y=ymax))
real(8),parameter :: br     = 1.d0 !field strength ratio
real(8),parameter :: theta  = pi/2. !field elevation angle
real(8),parameter :: lmd    = 1.d0 !velocity shear width

end module const

```

まずは定数。

pi, pi2 定数  $\pi$ ,  $2\pi$

gm 比熱比  $\gamma$

計算時間に関する制御変数の設定を行います。

restart 直前の途中結果からリスタートするかどうか (.true. / .false.) を決める変数です。"restart=.true."の場合、"data/"内にある"readFileNumber.dat"というファイルに記載された番号の出力データから計算を再開します。

nstop 最大時間ステップ数。

tend, dtout シミュレーションの終了時刻、データ出力時間間隔です。

safety クーラン数。ここで定めた CFL 条件を満たすように、系の発展と共に時間刻み幅を修正しています。

ご用心: safety  $\leq 0.4$  が安定条件です (cf. *Suresh and Huynh, 1997* )。

dtmin 最小時間ステップ刻み幅です。これを下回ると、終了します。

input\_dir, output\_dir データの入出力先です。

次に、主にセル数、MPI のパラメタ設定を行います。

**margin** 境界のマージン用のセル数で、5次精度の多項式補間法を使っているので、3点必要になります。

**ix, jx, kx** 各プロセスが担当するセル数です。本課題設定では2次元計算を想定しているので、z方向のセル数を1（マージンを含めると7）としています。1次元テストを行う際には同様にy方向のセル数を1としてください。

**mpisize\_x, mpisize\_y, mpisize\_z** 各次元方向の領域分割数です。全プロセス数はこの3つを掛けあわせた数となります。

ご用心: 円筒座標系 ( $r, \phi, z$ ) の場合、 $\phi$ 方向のプロセス数 (mpisize\_y) は、並列化の制約から、偶数である必要があります。

**igx, jgx, kgx** 全シミュレーション空間のセル数となります。

**xmin, xmax, ...** シミュレーション空間の各方向のサイズを表します。

**dxg0, dyg0, dzg0** 基本となるセル幅となります。一様セル幅ではこの値が使われます。

**pbcheck** 各次元方向の境界条件を判定し、周期境界条件の場合は".true."、それ以外の場合は".false."としてください。

以上が各課題に共通の初期設定・パラメタとなります。

最後に、各課題固有のパラメタが（必要な場合）設定されています。"model.f90"を参照の上、パラメタを設定してください。また、モデルの初期プロファイルを変更したい場合も、"model.f90"を編集します。

#### 6.1.4 領域分割法による並列化

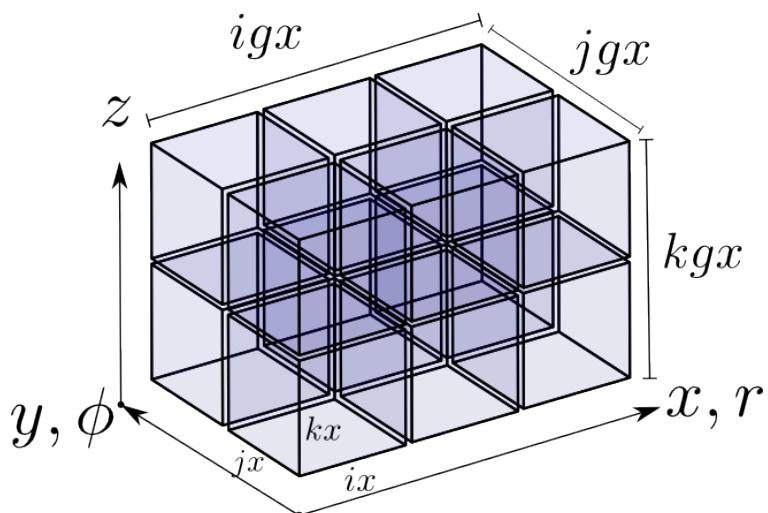


図 1 3次元コードにおける領域分割法と各プロセスが担当する領域

**CANS+** は、領域分割法と各プロセスが担当する領域図 のように、各次元方向に領域を区分化し、各領域の発展を各プロセス (Rank) が分担することにより、並列化を行っています。図例では、 $x, y, z$  ( $r, \phi, z$ ) 方向にそれぞれ、 $3 \times 2 \times 2$  分割し、計 12 並列計算の場合を表しています。各ノードが担当するセル数を "ix", "jx", "kx" で設定し、シミュレーション領域全体を "igx", "jgx", "kgx" で表します。これらパラメタの設定は [パラメタ設定](#) を参照ください。

## 6.1.5 データフォーマット

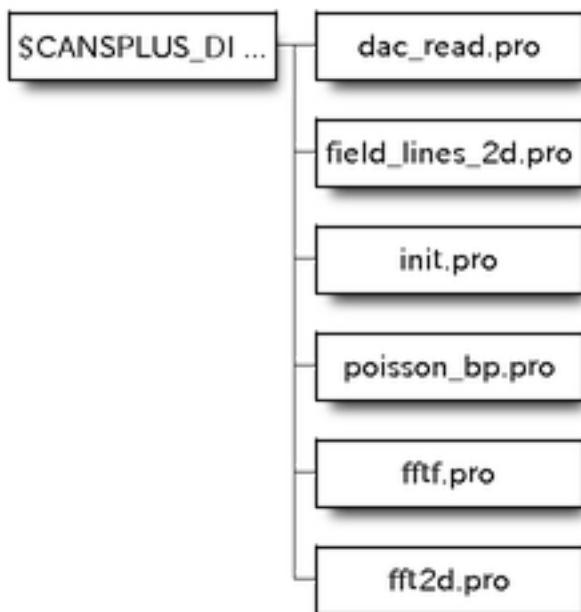
**CANS+** では、DAC 形式というオリジナル **CANS** で使われていたデータフォーマット（ヘッダ付きの Fortran Unformatted 形式）をそのまま採用しています。また入出力データは、各プロセスごとに別れた個別のファイルとして扱われます。これらを読み込み、IDL でひとつの配列データとして格納するプロシージャが `idl/` に用意されています。使い方は IDL の解析・可視化 [データの読み込み](#) をご参照ください。

## 6.2 IDL による解析・可視化

著者 松本洋介（千葉大学）、簗島敬（海洋開発研究機構）

本章では、**CANS+** での解析・可視化ツールである IDL (Interactive Data Language) の基本的な使い方と、用意されている IDL プロシージャ及びアニメーションの作り方を説明します。IDL のバージョンが 8.0 以降では、グラフィックス環境が大きく変わり、可視化が容易かつ洗練されました。**CANS+** のデータ読み込み、それらの可視化機能、解析手法の紹介をします。さらなる詳細は [IDL のドキュメントサイト](#) を参照してください。

`$CANSPLUS_DIR/idl` 内には、以下のような IDL のプロシージャが用意されています。これらは各課題から共通して使えるものです。



課題に固有のプロシージャは各課題ディレクトリ内に用意されており、共通プロシージャを内部で利用しています。

### 6.2.1 環境変数の設定

環境変数\$IDL\_STARTUP に\$CANSPLUS\_DIR/idl/init.pro を設定します。

bash の場合、

```
export IDL_STARTUP=$CANSPLUS_DIR/idl/init.pro
```

tcsh の場合、

```
setenv IDL_STARTUP $CANSPLUS_DIR/idl/init.pro
```

\$CANSPLUS\_DIR/idl/init.pro 内には、path の設定、IDL 内の環境の設定等が含まれており、IDL 起動時に自動的に設定されます。各自の好みに合わせて修正してください。

### 6.2.2 データの読み込み

オリジナル **CANS** で使われていたバイナリデータフォーマットである DAC 形式データを読み込む共通プロシージャが用意されています。各 MPI プロセスごとに出力されたデータをまとめて一つの配列に格納します。

#### dac\_read.pro

```
Name
dac_read
DAC データを読み込む

Syntax
dac_read,data,x,y,filename ; 2D データ
dac_read,data,x,y,z,filename ; 3D データ

Arguments
data
記録するデータ配列

x, y(, z)
シミュレーションのセル幅から計算した、x, y (, z) 軸

filename
読み込むデータのファイル名。ワイルドカードが使え、パターンに
マッチしたファイルを一度に読み込む。ただし、読みこむ全ての数
値データ配列数は等しい必要がある。
```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

```
Example1
IDL> dac_read,bx,x,y,z,'010000_bx_rank=*.dac'

Example2
IDL> dac_read,allvars,x,y,'010000_*_rank=*.dac'

Example3
IDL> dac_read,bxall,x,y,z,'0[1-5]0?00_bx_rank=*.dac'
```

### 6.2.3 1 次元プロット

1次元のプロットを作成する方法を以下に簡単に示します。

```
IDL> dac_read,data,x,y,z,'0011_*_rank=*.dac' ;; データ読み込み
IDL> pl=plot(x,data[*,6],xtitle='x',yttitle='$\rho$') ;; 軸のタイトルに Latex コマンドが使える！
```

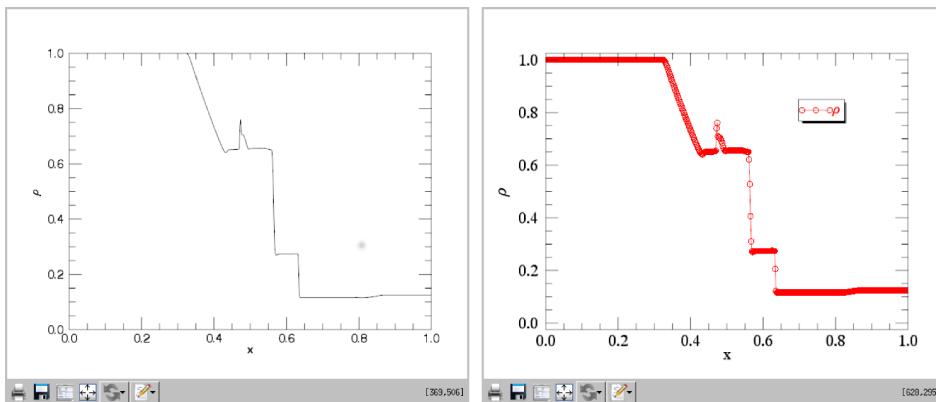


図 2 1次元プロットの例。左は修正前、右は後から修正を加えたもの。

これに修正を加える場合は、pl の property に値を代入します。

```
IDL> pl.symbol='circle' ;; ○の追加
IDL> pl.color='red' ;; 線を赤に
IDL> pl1.xstyle=3 ;; x 方向の描画範囲を少し広げる
IDL> pl1.ystyle=3 ;; y 方向の描画範囲を少し広げる
IDL> pl.font_size=16 ;; フォントサイズを 16 に
IDL> pl.font_name='Times' ;; フォントを Times に
IDL> leg=legend(target=pl,position=[0.85,0.85],/data,/auto_text_color)
IDL> leg.font_name = 'Times'
IDL> leg.font_size = '14'
IDL> leg.label = '$\rho$'
```

のようにして後からプロットの属性に変更を加えることができます。GUI での操作も可能です。凡例を加えるには、legend 関数を使います。

複数のプロットを並べて表示する場合は `layout` オプションを使います。この例では  $2 \times 2$  のパネル状に並べて表示します。

```
IDL> pl1=plot(x,data[*,6],xstyle=1,ystyle=2,color='red',$  
IDL>           layout=[2,2,1])  
IDL> pl2=plot(x,data[*,5],xstyle=1,ystyle=2,color='blue',$  
IDL>           layout=[2,2,2],/current)  
IDL> pl3=plot(x,data[*,7],xstyle=1,ystyle=2,color='purple',$  
IDL>           layout=[2,2,3],/current)  
IDL> pl3=plot(x,data[*,8],xstyle=1,ystyle=2,color='green',$  
IDL>           layout=[2,2,4],/current)  
IDL> pl1.title='$\rho$'  
IDL> pl2.title='$P$'  
IDL> pl3.title='$V_x$'  
IDL> pl4.title='$V_y$'
```

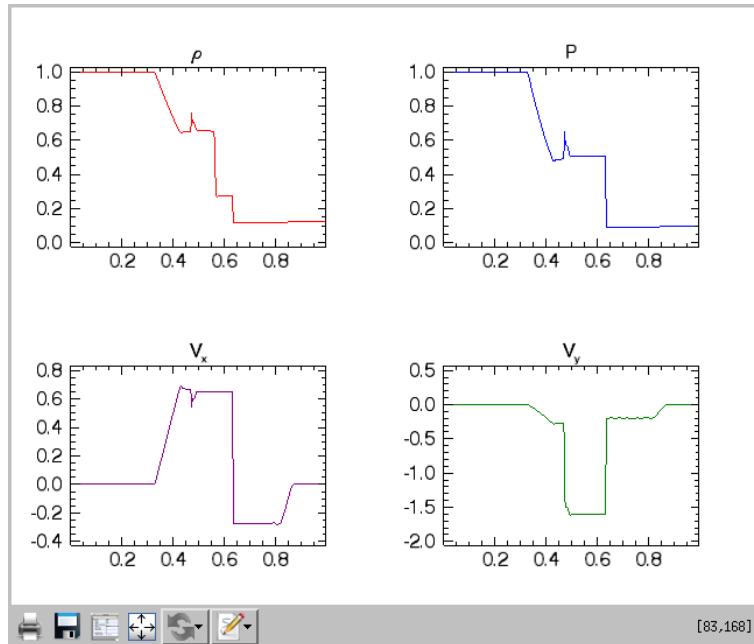


図 3 上記の設定の結果

するとこのように表示されます。

その他の応用は、サンプルプロシージャ `md_shktb/batch.pro` をご覧ください。また、`plot`, `legend` 関数に関する情報は

```
IDL> ?plot  
IDL> ?legend
```

とすることで、ブラウザで見ることができます。

## 6.2.4 2 次元可視化

### カラーマップ図

物理量の2次元プロファイルを表示する方法を以下に示します。

```
IDL> dac_read,data,x,y,z,'0013*.dac'
IDL> dx = abs(x[1]-x[0]) ;; 軸の位置の修正のため
IDL> dy = abs(y[1]-y[0]) ;; 軸の位置の修正のため
IDL> img = image(data[*,*,5],x-dx/2.,y-dy/2.,axis_style=2,$
IDL           xtickdir=1, ytickdir=1,rgb_table=33)
IDL> cb = colorbar(target=img,orientation=1,tickdir=1,$
IDL           position=[0.85,0.1,0.9,0.9])
```

image で2次元配列データを画像化し、colorbar でカラーバーを指定の場所に配置します。すると

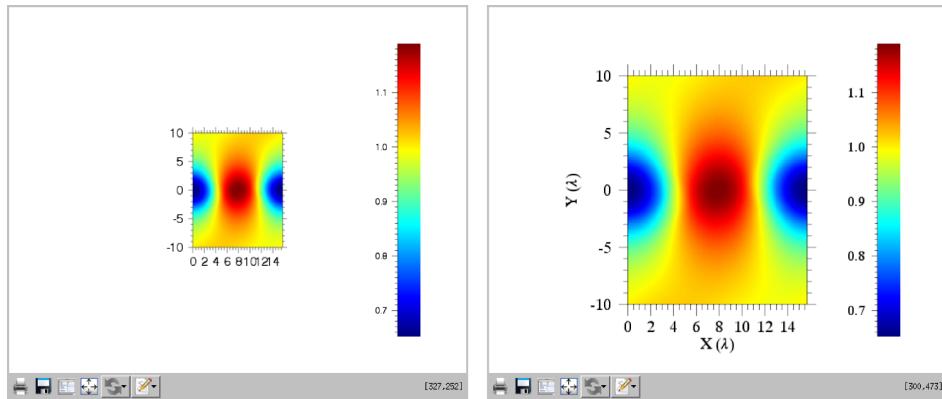


図 4 2 次元カラー図の例。左が修正前、右が修正後。

これでは画像が小さいので拡大、フォント名・サイズを変更、軸にタイトルを付け加え見栄え良くします。

```
IDL> img.font_name='Times'
IDL> img.font_size='16'
IDL> img.xtitle='$X (\lambda)$' ;; CAN USE LATEX COMMANDS FOR TITLE
IDL> img.ytitle='$Y (\lambda)$'
IDL> img.xstyle=1
IDL> img.ystyle=1
IDL> img.scale,2.0,2.0 ;; ENLARGE IF IMAGE IS SMALL
IDL> cb.font_name='Times'
IDL> cb.font_size='14'
```

これらの属性の修正は、関数の引数として最初から渡すことも可能です。その他の応用は、サンプルプロジェクト md\_OTvortex/batch.pro, md\_kh/batch.pro をご覧ください。また、image、colorbar 関数に関する情報は

```
IDL> ?image
IDL> ?colorbar
```

とすることで、ブラウザで見ることができます。

### ベクトル図

ベクトル場を矢印で表現することも可能です。例えば、上記で作成した 2 次元 カラー図 に速度場ベクトルを付け加える場合は、

```
IDL> vct = vector(data[*,*,7],data[*,*,8],x-dx/2.,y-dy/2.,/overplot)
```

のようにします（単体で表示する場合は overplot オプションを外す）。

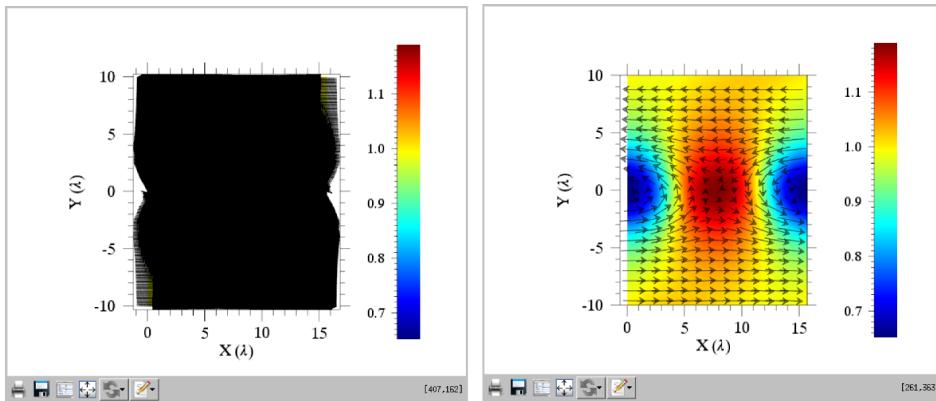


図 5 2 次元カラー図 + 速度場ベクトルの例。左が修正前、右が修正後。

しかし、そのままだと全ての情報を矢印で描くことになってしまないので、サンプリングして描画するように修正する。

```
IDL> vct.x_subsample = 10
IDL> vct.y_subsample = 7
IDL> vct.transparency = 50 ;; ついでに矢印を透過 (50%)
```

その他の応用は、サンプルプロシージャ `md_kh/batch.pro` をご覧ください。また、`vector` 関数に関する情報は

```
IDL> ?vector
```

とすることで、ブラウザで見ることができます。

### 等高線図

磁力線を描く（ベクトルポテンシャルの等高線）ためには、等高線を図示するのが便利です。例えば、上記で作成した 2 次元 カラー図 に質量密度の等高線を描き加える（この例では圧力分布とほぼ同じ）場合は、

```
IDL> cnt = contour(data[*,*,6],x-dx/2.,y-dy/2.,/overplot,c_color=0)
```

のようにして行います。

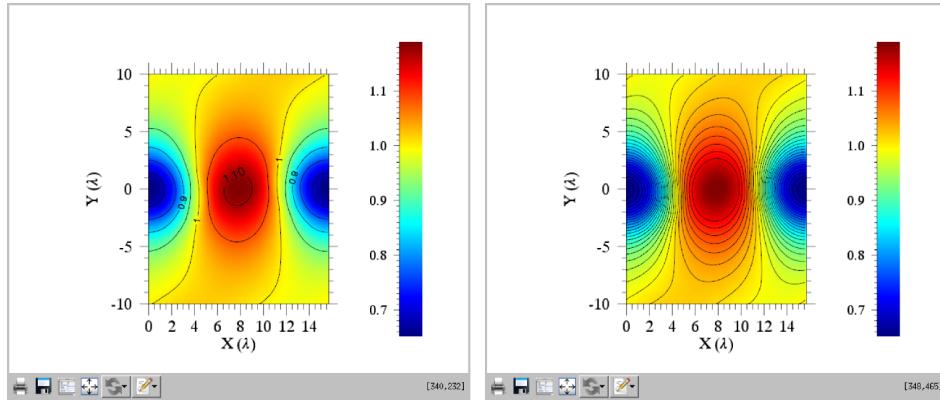


図 6 2 次元カラー図 + 等高線の例。左が修正前、右が修正後。

等高線ラベルを削除、等高線の数を増やす場合は、

```
IDL> cnt.c_label_show=0
IDL> cnt.n_levels=30
```

のようにして後から修正ができます（関数に引数として渡すことも可能）。contour 関数に関する情報は

```
IDL> ?contour
```

とすることで、ブラウザで見ることができます。

## 6.2.5 ベクトル場の流線

ベクトルデータから流線を描くには、以下の共通プロシージャが利用できます。

### field\_lines\_2d.pro

```
Name
  field_lines_2d
  2 次元のベクトル量から流線（磁力線）を描く
```

```
Syntax
  fl = field_lines_2d(ux, uy, [npos=npos,] [nsteps=nsteps,] [len=len,]
                      [r0=r0,] [dir=dir])
```

```
Return Value
  fl
  描く流（磁力）線の2次元座標情報。位置を各方向のグリッド数で規格化。
```

```
Arguments
  ux, uy
  描画する2次元ベクトル量
```

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

## Keywords

npos

線の数。デフォルトは 100。

nsteps

トレースするステップ数。デフォルトは 10000。

len

各方向 1 ステップあたりの長さ (グリッド単位) を指定する 2 次元配列

r0

各線のスタート位置 (x, y)。与えられなければ、ランダムに決められる。

r0=r0[2, npos] である必要がある。

dir

トレースする方向。+1 ならばベクトルの向き。-1 ならば反対向き。デフォルトは +1。

## Example

```

IDL> dac_read,data,x,y,z,'0011*_rank=*.dac'
IDL> dx = abs(x[1]-x[0])
IDL> dy = abs(y[1]-y[0])
IDL> lx = max(x)-min(x)+dx
IDL> ly = max(y)-min(y)+dy
IDL> img = image(data[*,*,5],x-dx/2.,y-dy/2.,axis_style=2,$
IDL>           xtickdir=1, ytickdir=1,rgb_table=33)
IDL> npos=10 ;; Number of starting points
IDL> f1=field_lines_2d(data[*,*,0],data[*,*,1],npos=npos)
IDL> .run
- for k=0,npos-1 do begin
-   pl = plot(f1[0,*,*,k]*lx,f1[1,*,*,k]*ly,/overplot,color='black')
- endfor
- end
IDL>

```

## 6.2.6 フーリエ変換

現象の発展に伴ってどのようなモードが成長しているのかを把握するためには、フーリエ変換を行います。1 次元データと 2 次元データをフーリエ変換する共通プロシージャを用意しています。

### fftf.pro

## Name

fftf

1 次元データをフーリエ変換し、振動数や波数に対して昇順にソートする。

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

## Syntax

```
f1d = fftf(data, time, direction, freq=freq)
```

## Return Value

f1d

入力された 1 次元データ data のフーリエ変換。振動数や波数に対して昇順にソートされている。

関数の平方の総和（積分）が、そのフーリエ変換の平方の総和（積分）と等しくなるように規格化されている（パーセバルの定理）。

freq

独立変数 time に対応する振動数や波数が出力される。 $2\pi$  が掛かっていないことに注意。

## Arguments

data

1 次元データ。

time

時刻や座標といった独立変数。

direction

フーリエ変換の方向。-1 ならフーリエ変換、+1 なら逆変換。指定しない場合は-1。

## Example

```
IDL> data = randomu(system(/sec), 512)
IDL> time = findgen(512)
IDL> f1d = fftf(data, time, freq=freq)
IDL> plot, freq, abs(f1d), /y1
```

**fft2d.pro**

## Name

fft2d

2 次元データをフーリエ変換し、振動数や波数に対して昇順にソートする。

## Syntax

```
f2d = fft2d(data, x, t, direction, wnum=wnum, freq=freq)
```

## Return Value

f2d

入力された 2 次元データ data のフーリエ変換。振動数や波数に対して昇順にソートされている。

関数の平方の総和（積分）が、そのフーリエ変換の平方の総和（積分）と等しくなるように規格化されている（パーセバルの定理）。

wnum

独立変数 x に対応する振動数や波数。 $2\pi$  が掛かっていないことに注意。

freq

(次のページに続く)

(前のページからの続き)

独立変数  $t$  に対応する振動数や波数。 $2\pi$  が掛かっていないことに注意。

## Arguments

data

2 次元データ。

x, t

時刻や座標といった独立変数。

direction

フーリエ変換の方向。-1 ならフーリエ変換、+1 なら逆変換。指定しない場合は-1。

## Example

```
IDL> data = randomu(systime(/sec), 128, 128)
IDL> x = findgen(128)
IDL> t = findgen(128)
IDL> f2d = fft2d(data, x, t, wnum=wnum, freq=freq)
IDL> plot_clcnt, alog10(abs(f2d)), xax=wnum, yax=freq
```

## 6.2.7 図の出力

上記 2 次元カラー図 等で作成した図をファイルに保存するには、

```
IDL> img = image(data[*,*,5], x-dx/2., y-dy/2., axis_style=2, $
IDL>           xtickdir=1, ytickdir=1, rgb_table=33)
IDL> img.save, 'result.png' ;; 画像で保存
IDL> img.save, 'result.eps' ;; ポストスクリプトで保存
```

のようにして、`save` メソッドを利用して保存します（`plot` でも同様）。ファイル形式は拡張子で自動判定します。

## 6.2.8 サンプルプロシージャ

IDL による可視化のサンプルプロシージャ `batch.pro` が課題ディレクトリ "md\_shktb/" , "md\_OTvortex/" , "md\_kh/" にありますので、適宜修正してお使いください。 `batch.pro` は

```
IDL> .run batch
```

で実行し、書かれている内容をバッチ処理します。使用例は各課題（衝撃波管問題、*Orszag-Tang* 渦問題、ケルビン・ヘルムホルツ不安定）のページをご覧ください。

## 6.2.9 アニメーションの作り方

以下の様に、IDL 上で結果を png ファイルとして保存します。

```
IDL> dac_read,ro,x,y,z,'*_ro_rank=*.dac'
IDL> info=size(ro,/dimension)
IDL> nt = info[2]
IDL>.run
- for i=0,nt-1 do begin
-   if(i eq 0)then begin
-     img = image(ro[*,*,i],x-dx/2.,y-dy/2.,axis_style=2,$
-                 xtickdir=1, ytickdir=1,rgb_table=33)
-   endif else begin
-     img.setdata,ro[*,*,i]
-   endelse
-   img.save,'result'+strcompress(string(i,format='(i3.3)'),/remove)+'.png'
- endfor
- end
```

上記の様にすると、作業ディレクトリには"result005.png"のように連番でファイル名が付けられた画像ファイルが作成されます。

結果を png ファイルに出力後、Linux にインストールされている ImageMagick (convert) や ffmpeg を使って、結果の図をアニメーション化します。まず、convert を使った方法を説明します。

```
$ convert result???.png result.gif
```

の様にすると、gif アニメーションが作成されます。convert の際の詳しいオプションは"man convert"に委ねます。

次に、ffmpeg を使ったアニメーション作成例を示します。

```
$ ffmpeg -i result%03d.png -sameq -vcodec mjpeg result.avi
```

の様に、gif アニメーション以外のフォーマット（この例では、元の画像と同じ画質で、エンコードに mjpeg、格納形式として avi を指定している）の動画ファイルが作成可能です。更なるオプションは"man ffmpeg"に委ねます。

上記の様に、IDL 上での結果を連番で名前を付けた画像ファイルに保存すれば、Windows, Mac-OS でのその他のツールも利用可能だと思います。

## 6.3 matplotlib (python) による解析・可視化

著者 松本洋介（千葉大学）

### 6.3.1 はじめに

matplotlib（と numpy）の基本的な使い方及びアニメーションの作り方を説明します。matplotlib は python プログラム言語をベースとした解析・可視化ライブラリで、IDL と比べてライセンスフリーで使えるため、手頃な解析環境として人気があります。

jupyter notebook は、python プログラミング及び matplotlib による可視化などのチュートリアル／ハンズオンのための便利なツールとして知られています。本 notebook は jupyter notebook のセットアップができている環境下で動作します。

以下では CANS+ のデータ読み込み、それらの可視化機能、解析手法の紹介をします。

本解説は\$CANSPLUS\_DIR/notebook 内に `matplotlib_hands-on.ipynb` として用意されています。jupyter notebook を使って読んで下さい。

以下で使われるプロシージャの一部は\$CANSPLUS\_DIR/python 内に用意されています。これらは各課題から共通して使えるものです。

### 6.3.2 python 環境の準備

#### インストール

anaconda3 をインストールするのがお手軽です。

<https://www.anaconda.com/download/> よりバイナリファイルをダウンロードして、圧縮ファイルをインストール先に展開してください。

本サマーセミナーでは、すでに anaconda3 がインストールされています。

#### 環境設定

anaconda3 をインストールした先を以下では `~/anaconda3` とします。

bash の場合、

```
export PATH=~/anaconda3:$PATH
```

csh の場合、

```
setenv PATH ~/anaconda3:${PATH}
```

とすることで、anaconda3 内の python を優先的に使うように設定します。これにより、OS に別途インストールされている python 環境と分けて使用します。以上の設定は`.bashrc` や`.tcshrc` に書いておくとよいです。

```
[1]: import sys
print(sys.version)

3.6.6 |Anaconda custom (64-bit)| (default, Jun 28 2018, 17:14:51)
[GCC 7.2.0]
```

のように出力されたら、インストールは正常に完了しています。試しに `numpy` をインポートして利用してみましょう。

```
[2]: import numpy as np
data = np.array([1000, 100.0, 1])
```

```
[3]: print(data)

[1000.  100.     1.]
```

```
[4]: print(data.dtype)

float64
```

### jupyter notebook の起動

`matplotlib` を使った可視化・解析方法の例は\$CANS\_PLUSDIR/notebook/内の `matplotlib_hands-on.ipynb` にあります。本 notebook の利用方法は、

```
$ jupyter-notebook $CANSPLUS_DIR/notebook/matplotlib_hanbs-on.ipynb
```

で起動します。ブラウザが立ち上がり、ブラウザのページの中でコマンドをインタラクティブに実行していきます。

セル内の改行は **Enter** キー、セル内の命令の実行は **Shift + Enter** キーで行います。

### 6.3.3 データの読み込み

#### テキストファイルデータの読み込み

```
[5]: import numpy as np
import glob
list = glob.glob('*_vyi.dat')
data = np.loadtxt(list[0])
```

**IDL** バイナリデータ (**IDL save file**) の読み込み

```
[6]: import scipy.io as sio
data_set= sio.readsav('sample.dat')
data = data_set['data']
xax = data_set['x']
yax = data_set['y']
```

**DAC** バイナリデータの読み込み

CANS+ は CANS から使われる独自の DAC バイナリ形式を採用しています。CANS+ で出力したデータの読み込みルーチンの使い方を説明します。

bash の場合:

```
$ export PYTHONPATH=$CANSPLUS_DIR/python
```

csh の場合:

```
$ setenv PYTHONPATH $CANSPLUS_DIR/python
```

のように、python コマンドラインから読み込める path の設定を行います。その後

```
$ python
```

として、

```
from dac_read import dac_read
#./data/にデータがある場合
#2D 計算の場合。10 スナップショット目の全ての物理変数を読み込む例
data, x, y = dac_read('./data/0010_*_rank=*.dac', dimension=2)

#3D 計算の場合。質量密度のみ全ての時間ステップを読み込む例
data, x, y, z = dac_read('./data/0???_ro_rank=*.dac', dimension=3)
```

の様にして計算結果を読み込むことができます。

**注意**

多次元配列の場合、python では、行・列の順に格納されます。これは、それぞれの次元が Y 軸、X 軸に相当していて、IDL や Fotran と異なる（C 言語と同じ）ことに注意が必要です。

### 6.3.4 matplotlib を使った可視化

#### matplotlib の使い方参考サイト

以下では、解析・可視化について基本的なところしか紹介しません。細かい調整等が必要な場合は下記のサイトが参考になると思いますので、適宜参照してください。

- <https://jakevdp.github.io/PythonDataScienceHandbook/index.html>
- <http://www.turbare.net/transl/scipy-lecture-notes/intro/matplotlib/matplotlib.html>
- <http://seesaawiki.jp/met-python/d/matplotlib>

#### モジュールのインポート

まずは matplotlib のモジュールをインポートします。おまじないだと思ってください。

```
[7]: import matplotlib.pyplot as plt
```

#### 描画ウィンドウの表示方法

notebook 内では、描画内容はセル内に表示されていますが、python のコマンドライン上では、最後に

```
plt.show()
```

もしくは

```
plt.pause(0.1)
```

のようにして、新しく立ち上がるウィンドウ内に描画します。

前者と後者の方法の違いは、前者はウィンドウにフォーカスされて、ウィンドウを閉じない限りコマンドラインに戻れないのに対して、後者ではウィンドウを立ち上げたままコマンドラインに戻ることができます。

ipython を使うと jupyter notebook と同じように使えて、

```
$ ipython --pylab
```

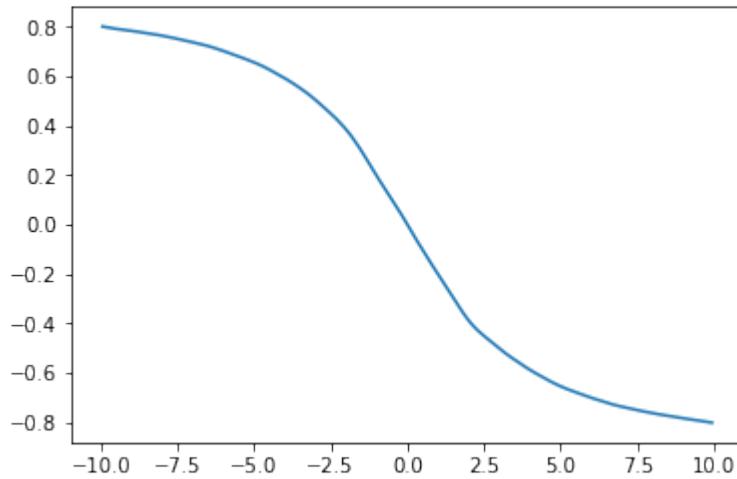
のよう`-pylab` オプションをつけて ipython を起動すれば、描画時に自動的にウィンドウが立ち上がります。

#### 1次元プロット

線プロットの作り方です。1次元 plot の詳しい使い方は?plt.plot より確認できます。

```
[8]: xpos1 = np.argmin(np.abs(xax-np.max(xax)/2))
plt.plot(yax,data[7,:,:xpos1])

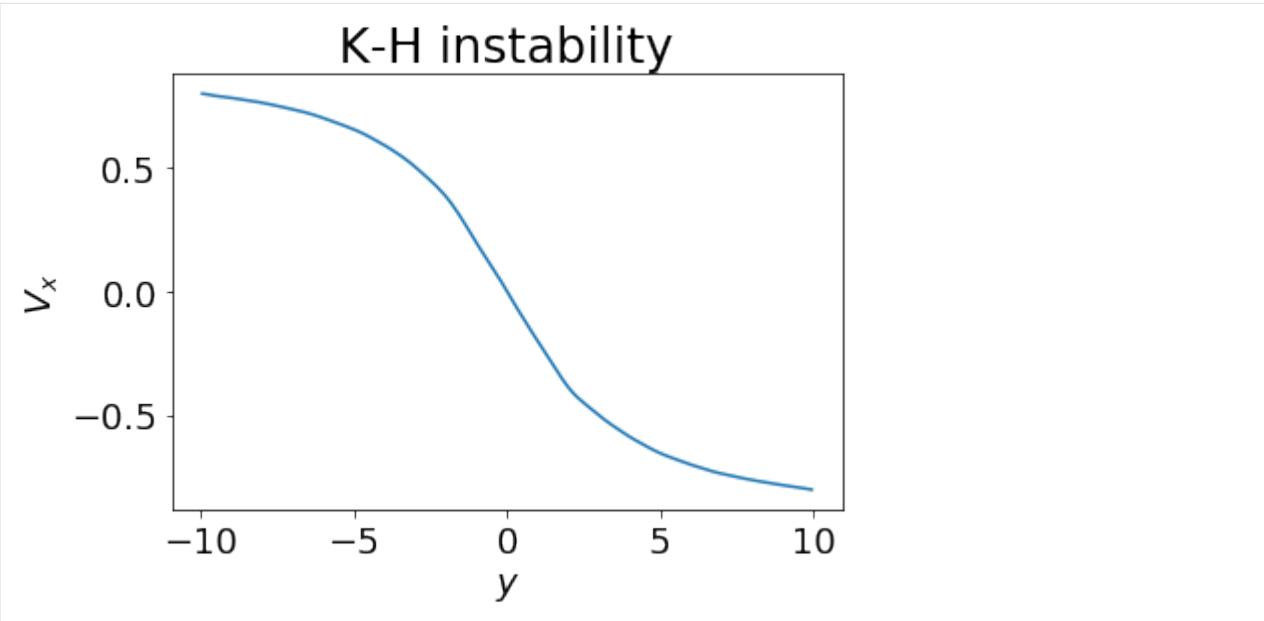
[8]: [matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcc364debe0]
```



軸にタイトルを入れたりして見栄えを変えます。

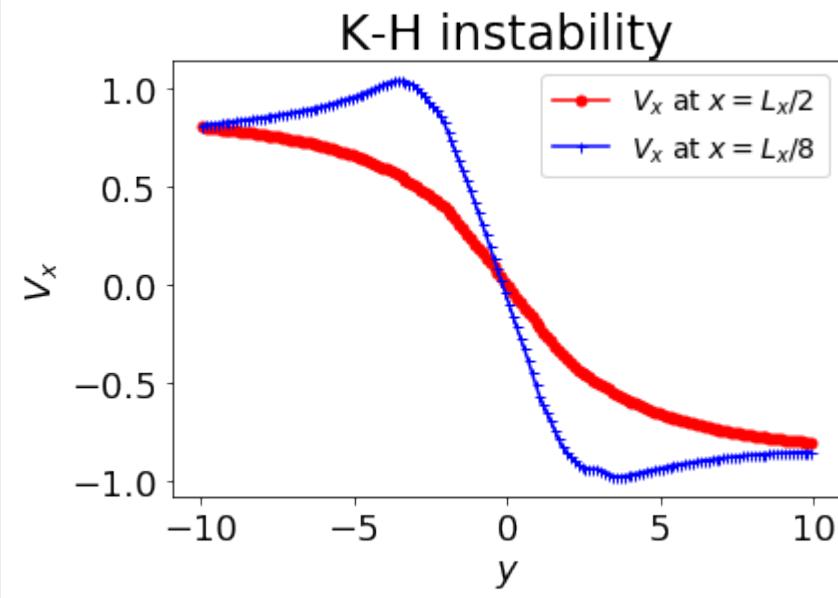
```
[9]: #デフォルトフォントサイズの設定
#個別に指定しない限りは以降この設定が反映される
plt.rcParams['font.size'] = 18
#軸のタイトル、タイトルの追加
plt.plot(yax,data[7,:,:xpos1])
plt.xlabel('$y$')
plt.ylabel('$V_x$')
plt.title('K-H instability', fontsize=24)

[9]: Text(0.5,1,'K-H instability')
```



別のデータのプロットを重ね描きして、レジェンドを追加します。

```
[10]: plt.plot(yax,data[7,:,:xpos1], 'ro-', markersize=5, label='$V_x$ at $x=L_x/2$')
xpos2 = np.argmin(np.abs(xax-np.max(xax)/8.))
plt.plot(yax,data[7,:,:xpos2], 'b+-', markersize=5, label='$V_x$ at $x=L_x/8$')
plt.title('K-H instability', fontsize=24)
plt.xlabel('$y$')
plt.ylabel('$V_x$')
plt.legend(loc='upper right', fontsize=14)
[10]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fcc363565f8>
```

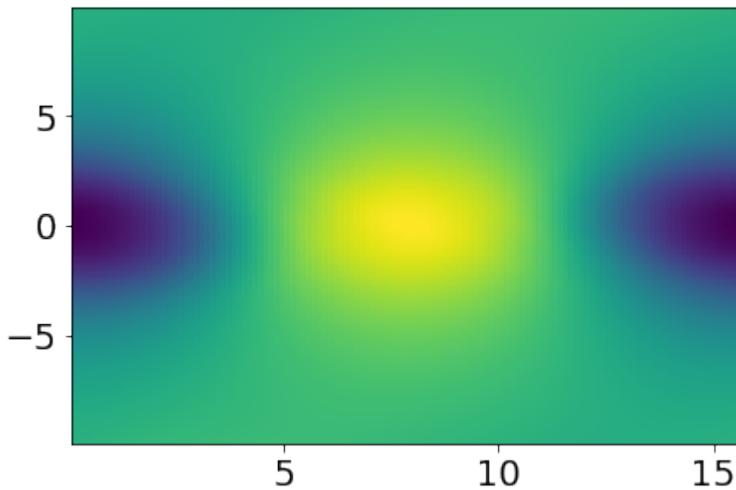


## 2 次元マップ

### pcolormesh を使った方法

```
[11]: #x 軸、y 軸データから 2 次元データを作る
xax2d, yax2d = np.meshgrid(xax, yax)
plt.pcolormesh(xax2d, yax2d, data[5, :, :])

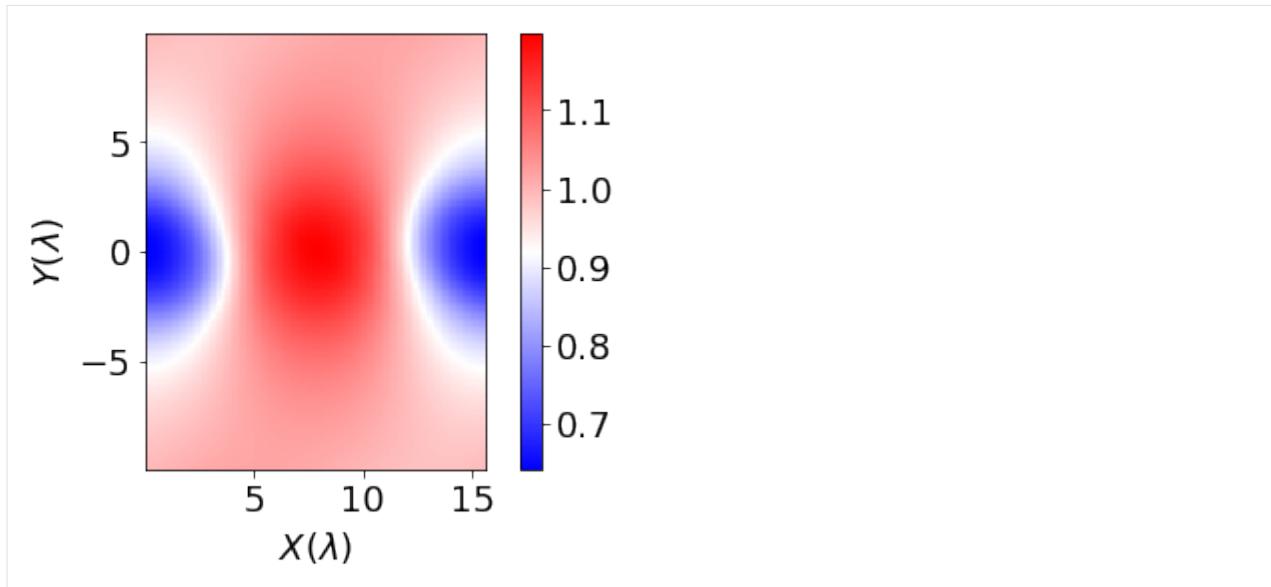
[11]: <matplotlib.collections.QuadMesh at 0x7fcc362c8390>
```



軸タイトルやデータに基づくアスペクト比の変更、カラーバーを追加するなどして見栄えを整えます。

```
[12]: plt.pcolormesh(xax2d, yax2d, data[5, :, :], cmap='bwr')
plt.xlabel('$X (\lambda)$')
plt.ylabel('$Y (\lambda)$')
##図のアスペクト比を軸データを元に決める
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.colorbar()

[12]: <matplotlib.colorbar.Colorbar at 0x7fcc36260668>
```



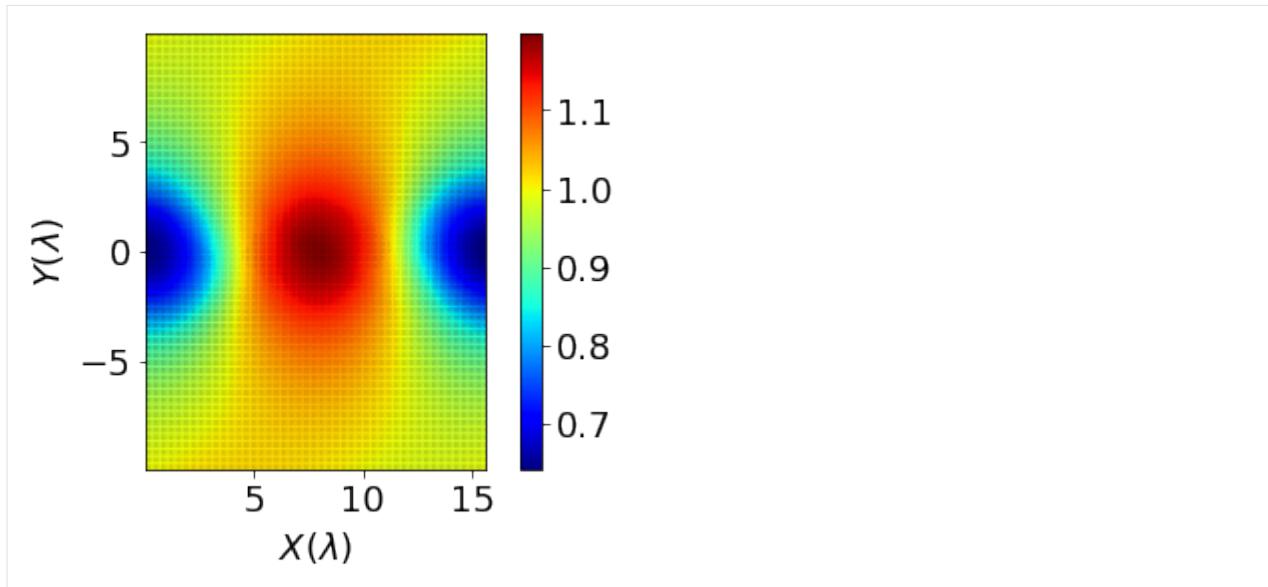
カラーマップは [https://matplotlib.org/examples/color/colormaps\\_reference.html](https://matplotlib.org/examples/color/colormaps_reference.html) を参考に指定してください。

### ベクトル場の表示

#### ベクトル矢印による表現 (**quiver**)

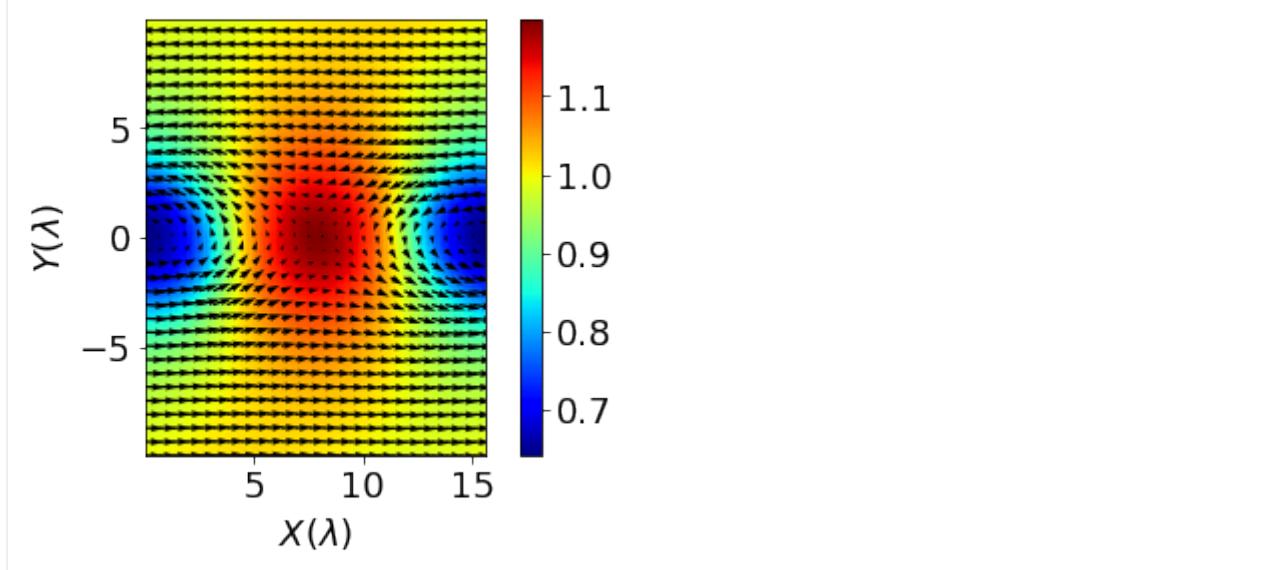
上記で作成した 2 次元 カラー図に速度場ベクトルを付け加える場合を例に示します。

```
[13]: plt.pcolormesh(xax2d,yax2d,data[5,:,:],cmap='jet')
plt.xlabel('$X (\lambda)$')
plt.ylabel('$Y (\lambda)$')
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.colorbar()
plt.quiver(xax2d,yax2d,data[7,:,:],data[8,:,:])
[13]: <matplotlib.quiver.Quiver at 0x7fcc361fb240>
```



しかし、そのままだと全ての情報を矢印で描くことになってしまうので、サンプリングして描画するように修正する。

```
[14]: plt.pcolormesh(xax2d,yax2d,data[5,:,:],cmap='jet')
plt.xlabel('$X (\lambda)$')
plt.ylabel('$Y (\lambda)$')
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.colorbar()
#配列要素を 5 つ飛ばしで描画 (::5)
plt.quiver(xax2d[::5,::5],yax2d[::5,::5],data[7,::5,::5],data[8,::5,::5],scale=np.
           ←max(xax),width=0.0075)
[14]: <matplotlib.quiver.Quiver at 0x7fcc34da98d0>
```

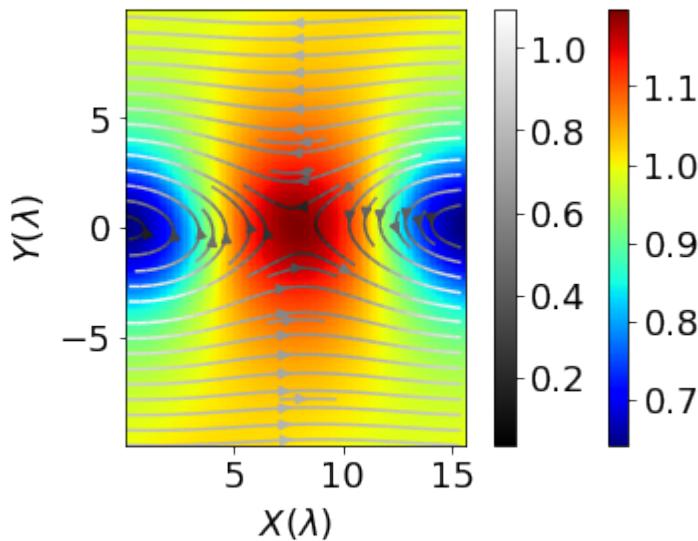


流線による表現 (**streamplot**)

矢印だとうまく表現できない場合もあるので、別 の方法を紹介します。

```
[15]: plt.pcolormesh(xax2d,yax2d,data[5,:,:],cmap='jet')
plt.xlabel('$X (\lambda)$')
plt.ylabel('$Y (\lambda)$')
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.colorbar()
#配列要素を3つ飛ばしで描画 (::3)
plt.streamplot(xax2d[::3,::3],yax2d[::3,::3],data[7,::3,::3],data[8,::3,::3],color=np.
    -sqrt(data[7,::3,::3]**2+data[8,::3,::3]**2),cmap='binary_r')
#ベクトル場の大きさで流線の色をつける
plt.colorbar()

[15]: <matplotlib.colorbar.Colorbar at 0x7fcc34517278>
```

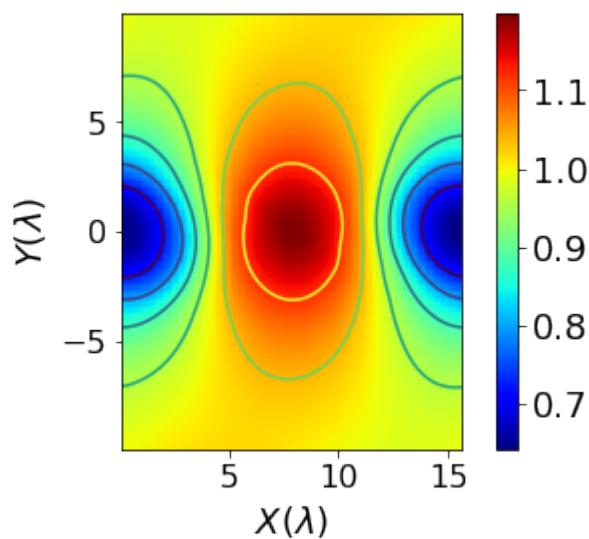


## 等高線

磁力線を描く（ベクトルポテンシャルの等高線）ためには、等高線を図示するのが便利です。例えば、上記で作成した2次元カラー図に質量密度の等高線を描き加える（この例では圧力分布とほぼ同じ）場合を以下で示します。

```
[16]: plt.pcolormesh(xax2d,yax2d,data[5,:,:],cmap='jet')
plt.xlabel('$X (\lambda)$', fontsize=18)
plt.ylabel('$Y (\lambda)$', fontsize=18)
plt.tick_params(labelsize=16)
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.colorbar()
plt.contour(xax2d,yax2d,data[5,:,:])
```

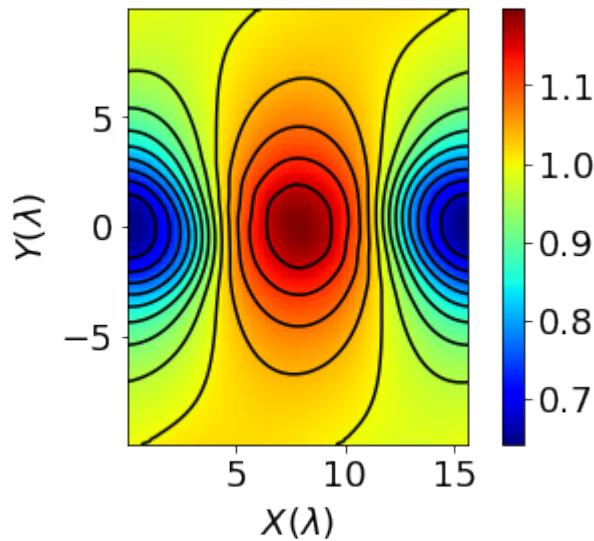
[16]: <matplotlib.contour.QuadContourSet at 0x7fcc344add68>



等高線の数を増やす場合は、

```
[17]: plt.pcolormesh(xax2d,yax2d,data[5,:,:],cmap='jet')
plt.xlabel('$X (\lambda)$')
plt.ylabel('$Y (\lambda)$')
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.colorbar()
plt.contour(xax2d,yax2d,data[5,:,:],15,colors='black')
```

[17]: <matplotlib.contour.QuadContourSet at 0x7fcc344631d0>



### 結果のファイルへの出力

上記 2 次元マップで作成した図をファイルに保存するには、それぞれのクラスに共通した `save` メソッドを使ってファイルに保存します。ファイル名の拡張子からファイルフォーマットが自動的に決まります。

```
[18]: plt.pcolormesh(xax2d,yax2d,data[5,:,:],cmap='jet')
plt.xlabel('$X (\lambda)$')
plt.ylabel('$Y (\lambda)$')
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.colorbar()
plt.contour(xax2d,yax2d,data[5,:,:],15,colors='black')
#描画内容を保存 (解像度を DPI=150 で指定)
plt.savefig('result_matplotlib.png',bbox_inches='tight',dpi=150)
plt.savefig('result_matplotlib.eps',bbox_inches='tight')
plt.close()
```

### 6.3.5 アニメーションの作り方

以下の様に、python 上で結果を png ファイルとして保存します。

```
[19]: data_set = sio.readsav('sample_ro-time.dat')
ro = data_set['ro']
nt = ro.shape[0]
for l in range(0,nt):
    plt.pcolormesh(xax2d,yax2d,ro[l,:,:],cmap='jet')
    plt.xlabel('$X (\lambda)$')
    plt.ylabel('$Y (\lambda)$')
    plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
    plt.colorbar()
    plt.savefig('result_matplotlib'+str(l).zfill(3)+'.png',bbox_inches='tight',dpi=150)
    plt.close()
```

上記のようにすると、作業ディレクトリには” `result_matplotlib005.png`” のように連番でファイル名が付けられた画像ファイルが作成されます。

結果を png ファイルに出力後、Linux にインストールされている `ImageMagick (convert)` や `ffmpeg` を使って、結果の図をアニメーション化します。まず、`convert` を使った方法を説明します。

```
$ convert result???.png result.gif
```

のようにすると、`gif` アニメーションが作成されます。`convert` の際の詳しいオプションは” `man convert`” に委ねます。

次に、`ffmpeg` を使ったアニメーション作成例を示します。

```
$ ffmpeg -r 10 -i result_matplotlib%03d.png -qscale 0 -vcodec mpeg4 result.mp4
```

のように、gif アニメーション以外のフォーマット（この例では、元の画像と同じ画質で、エンコードに mpeg4、格納形式として mp4 を指定している）の動画ファイルが作成可能です。更なるオプションは”`man ffmpeg`”に委ねます。

[ ]:



## 第 7 章

# 物理課題

本章では、 **CANS+** で用意されている物理課題を紹介します。

### 7.1 衝撃波管問題

著者 松本洋介（千葉大学）

#### 7.1.1 背景

MHD シミュレーションコードをテストする標準問題として、衝撃波管問題が知られている。これは、シミュレーションの系 ( $0 \leq X \leq L_x$ ) の左側 ( $X < L_x/2$ ) と右側 ( $X \geq L_x/2$ ) を異なる状態で初期に設定し、その後の系の発展を見るものである。これはちょうど、近似リーマン解を求める際のセル境界における左・右状態を設定するのと同じである（[近似リーマン解法参照](#)）。結果として現れる、接触不連続、接線不連続、回転不連続、速・遅衝撃波、膨張波などが正しい速度で伝搬するか、を検証することができる。また、不連続近傍における数値振動、解像度（何セルで表現できるか）を計算スキームによって比較するためにもしばしば採用される。本課題では、*Brio & Wu (1988)* の衝撃波管問題を例に取って、計算結果例を紹介する。

#### 7.1.2 課題設定

以下にシミュレーションの初期設定をまとめた。設定は”model.f90”で行っている。なお、オリジナルの設定と違い、比熱比  $\gamma = 5/3$  である（*Ryu & Jones, 1995* 参照）。

| 物理量    | 左状態 ( $X < L_x/2$ ) | 右状態 ( $X \geq L_x/2$ ) |
|--------|---------------------|------------------------|
| $\rho$ | 1.0                 | 0.125                  |
| $P$    | 1.0                 | 0.1                    |
| $V_x$  | 0.0                 | 0.0                    |
| $V_y$  | 0.0                 | 0.0                    |
| $V_z$  | 0.0                 | 0.0                    |
| $B_x$  | 0.75                | 0.75                   |
| $B_y$  | 1.0                 | -1.0                   |
| $B_z$  | 0.0                 | 0.0                    |

### 7.1.3 結果

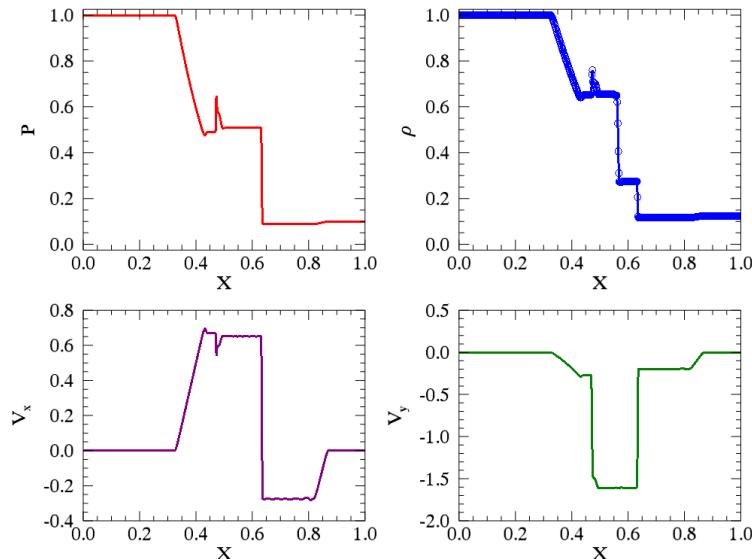


図 1  $T = 0.1$  における結果。左上 → 右上 → 左下 → 右下の順に、圧力、質量密度、速度  $x$  成分、速度  $y$  成分を表す。

$T = 0.1$  における結果を 図 に示す。右上の質量密度から、左から順に、速い膨張波、slow compound 波 ( $X \sim 0.47$ )、接触不連続 ( $X \sim 0.55$ )、遅衝撃波 ( $X \sim 0.63$ )、速い膨張波が形成される。これら不連続周辺で若干の数値振動が残るもの、**CANS+** の特徴である高次精度化により、数点で解像できていることがわかる。

### 7.1.4 まとめ

本課題では *Brio & Wu (1988)* を例にとったが、様々な設定例が *Ryu & Jones (1995)* に掲載されているので、参考にしてテストを行ってみるとよい。

### 7.1.5 参考文献

- *Brio & Wu, 1988*
- *Ryu & Jones, 1995*

## 7.2 Orszag-Tang 湧問題

著者 松本洋介（千葉大学）

### 7.2.1 背景

多次元 MHD シミュレーションコードの標準問題として、Orszag-Tang 湧問題（*Orszag & Tang, 1979*）が知られている。本問題では、複数の衝撃波の相互作用や渦形成などが含まれ、MHD シミュレーションコードの安定性および精度を比較する上でしばしばよく挙げられる。また、2 次元計算のため、磁場のソレノイダル性（ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ）を維持できないと計算が破綻する（[磁場の発散の数値的処理](#)を参照）。

### 7.2.2 課題設定

初期状態として、各物理量に対して下記のように設定する。

$$\begin{aligned}\rho &= \gamma^2 \\ P &= \gamma \\ V_x &= -\sin(Y) \\ V_y &= +\sin(X) \\ V_z &= 0.0 \\ B_x &= -\sin(Y) \\ B_y &= +\sin(2X) \\ B_z &= 0.0\end{aligned}$$

ここで、 $\gamma = 5/3$  は比熱比である。計算領域は  $0 \leq X \leq 2\pi$ 、 $0 \leq Y \leq 2\pi$  で、各方向に対して周期境界条件を与える。

### 7.2.3 結果

### 7.2.4 参考文献

- *Orszag & Tang, 1979*

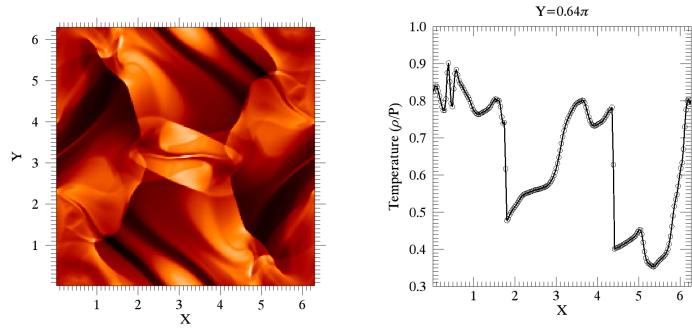


図 2  $T = \pi$  における結果。左が温度 ( $P/\rho$ ) の 2 次元分布を表し、右は  $Y = 0.64\pi$  における  $X$  方向のプロファイル

## 7.3 ケルビン・ヘルムホルツ不安定

著者 松本洋介（千葉大学）

### 7.3.1 背景

二つの運動している媒体が相対速度を持って接している場合、境界領域においては速度シア層が形成される。その速度シア境界は擾乱に対して不安定であることが 19 世紀後半より知られており、これを初期の研究者の名前から因んでケルビン-ヘルムホルツ (Kelvin-Helmholtz、以下 KH) 不安定と言う。速度シア境界は、地球大気中から天体现象において普遍的に存在し、KH 不安定の発達は幅広い領域において応用されている。本巻で取り扱う実験室や宇宙空間でのプラズマ現象においても例外ではなく、速度シア層が存在するプラズマ物理領域に置いて KH 不安定が成長し、各領域において重要な役割を果たしている。

KH 不安定自体は流体的不安定であるため、プラズマ中での KH 不安定の非線形発展については主に MHD シミュレーションによる研究が行われている。例えば、活動銀河核などから放出される宇宙ジェットの MHD シミュレーションが多く報告されているが、KH 不安定がジェットの安定性に大きな影響を与えていていることが明らかになっている (Ferrari *et al.*, 1998; Baty *et al.*, 2003)。このような MHD シミュレーションによるアプローチは、太陽風と接する地球磁気圏境界において成長する KH 不安定に対しても適用してきた。

### 7.3.2 線形理論

数値計算による非線形発展を示す前に、線形理論から導かれる不安定条件と成長率を示す。これらは数値計算の初期設定、計算結果の妥当性を確認するのに有益である。

いま、プラズマが  $x$  方向に流れ、速度が  $y$  方向に差し渡し  $V_0$  変化している速度シア層を考える。また、背景磁場は  $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, 0, B_{0z})$  の成分を持つ。このようなプラズマ中での KH 不安定の成長は、磁場の存在とプラズマの圧縮性に大きく影響を受ける（詳しくは文献 Chandrasekhar 1961, ; Miura & Pritchett, 1982 を参照のこと）。

ここで、2 つの特別なケースを考えよう。まずは、背景磁場が背景速度と同じ方向に向いている場合、すなわち

$\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, 0, 0)$  の場合、速度シアの大きさについて

$$V_A < \frac{V_0}{2} < C_S \quad (7.1)$$

の条件を満たす場合に不安定となる。ここで  $V_A = |\mathbf{B}_0|/\sqrt{\mu_0 \rho_i}$  は Alfvén 速度、  $C_S = \sqrt{\gamma P_i / \rho_i}$  は音速である ( $\rho$ 、  $P$ 、  $\gamma$  はそれぞれ質量密度、圧力、比熱比である)。速度シアの大きさ ( $V_0/2$ ) が  $V_A$  より大きい必要があるのは、速度場の面内に磁場が存在すると磁気張力が安定化の働きをもたらすためであると直感的にも理解できる。また音速で制限されているのは、プラズマの圧縮性による安定化の効果である。このことから、平行磁場 ( $\mathbf{V}_0 // \mathbf{B}_0$ ) の場合は高  $\beta$  プラズマ、例えば、宇宙ジェットのような弱い磁場領域に適用される。ここで、 $\beta = \frac{P}{P_{mag}}$  はプラズマ圧力と磁気圧力  $P_{mag} \equiv |\mathbf{B}|^2/(2\mu_0)$  との比である。

一方、垂直磁場 ( $\mathbf{V}_0 \perp \mathbf{B}_0$ ) の場合は

$$\frac{V_0}{2} < V_f = \sqrt{V_A^2 + C_S^2} \quad (7.2)$$

が不安定条件であり、亜磁気音速の流れであれば常に不安定である。このような条件は様々なプラズマ  $\beta$  領域に適用可能であり、特に低緯度磁気圏境界においてはこの条件が満たされていると考えられている。現実には波数ベクトル、磁場、流れの向きが様々であり、それぞれの状況において不安定条件は違うが、一般に垂直磁場条件が最も不安定であり、平行磁場条件が最も安定化されやすい。

KH 不安定の成長率は上記条件に加え、速度シアの厚みが時間スケールを決める。以下では、数値シミュレーションでも用いられる一般的な速度シアの関数に対する成長率を求める。シミュレーションでは初期条件として

$$V_x = -\frac{V_0}{2} \tanh\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad (7.3)$$

の形で速度プロファイルがしばしば与えられる。また、ここでは垂直磁場配位  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  を考えよう。プラズマの圧力はプラズマ  $\beta$  より決まり、密度と共に一様に与える。このような条件の下で MHD 方程式を線形化し、得られた線形 MHD 方程式を固有値問題として数値的に解くことにより固有値（成長率）と固有関数が得られる（詳細は省く）。

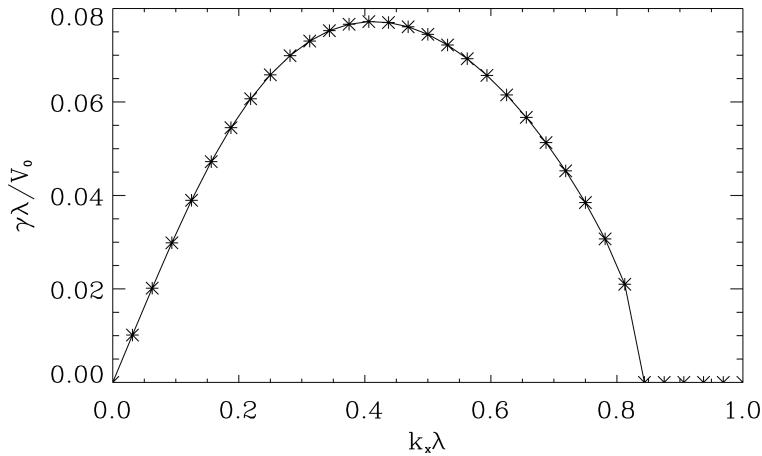


図 3 KH 不安定の成長率とそれに対応する不安定モード。横軸は速度シアの厚み  $\lambda$  で規格化された波数、縦軸は  $\lambda/V_0$  で規格化された成長率。

上図 は、 $\beta = 2.0$ 、 $V_0/V_f = 1.0$  の場合の成長率とそれに対応する不安定モードを表す。これより、最大成長率は  $\gamma\lambda/V_0 = 0.077$  であり、対応する不安定モードは  $k_x\lambda = 0.4$  であることがわかる。これらを元に計算領域のサイズを決める。また、計算結果から得られた成長率を求ることにより、計算の妥当性のチェックを行う。

### 7.3.3 結果

上記線形解析結果のパラメタを用いてシミュレーション結果と線形理論との比較を行う。背景場は

$$\begin{aligned} V_x(y) &= -\frac{V_0}{2} \tanh\left(\frac{y}{\lambda}\right), \\ \rho(y) &= \frac{\rho_0}{2} \left\{ (1 - rr) \tanh\left(\frac{y}{\lambda}\right) + 1 + rr \right\}, \\ B_x(y) &= \frac{B_0}{2} \left\{ (1 - br) \tanh\left(\frac{y}{\lambda}\right) + 1 + br \right\} \cos(\theta), \\ B_z(y) &= \frac{B_0}{2} \left\{ (1 - br) \tanh\left(\frac{y}{\lambda}\right) + 1 + br \right\} \sin(\theta), \end{aligned} \quad (7.4)$$

の関数で設定され (model.f90 参照)、それぞれ使用するパラメタは、

|            |                   |
|------------|-------------------|
| $B_0$      | 1.0               |
| $\rho$     | 1.0               |
| $\lambda$  | 1.0               |
| $\beta$    | 2.0               |
| $V_0/V_f$  | 1.0               |
| $rr$       | 1.0               |
| $br$       | 1.0               |
| $theta$    | 90°               |
| $L_x$      | $2\pi\lambda/0.4$ |
| $L_y$      | $\pm 10\lambda$   |
| $\Delta h$ | $\lambda/8$       |

である。境界条件は、 $x, z$  方向は周期境界、 $y$  方向は反射端境界とした。

図 はシミュレーション結果で、KH 不安定に特徴的な渦形成とそれに伴った低圧・高圧ペアが確認できる。

得られた計算結果の妥当性を調べるため、速度擾乱成分である  $V_y$  を  $x$  方向にフーリエ変換し、 $y$  方向に平均化した最大成長率モード (モード数 1) のフーリエ振幅の時間発展を調べたのが 上図 である。また比較のため、線形解析で得られた成長率 ( $\gamma_{fgm}\lambda/V_0 = 0.077$ ) の傾きを同時にプロットした。結果、シミュレーションで得られた最大成長率モードの線形成長率は、線形解析結果が予測した値に沿う。また系の発展の後半での振幅の振動は KH 不安定の非線形現象として知られている (Miura & Sato, 1978)。

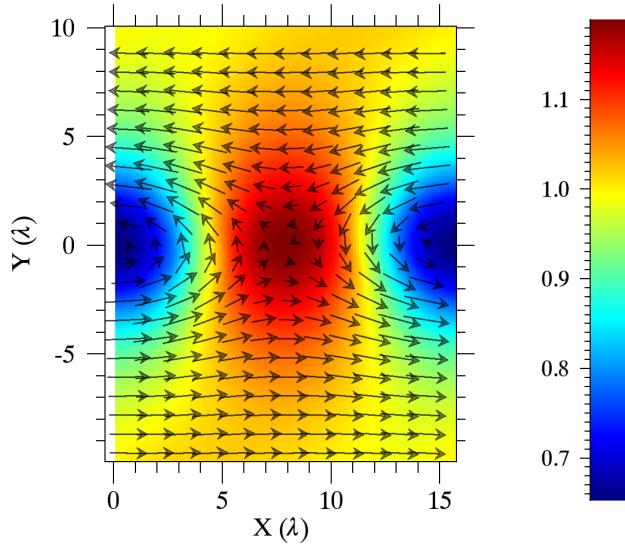
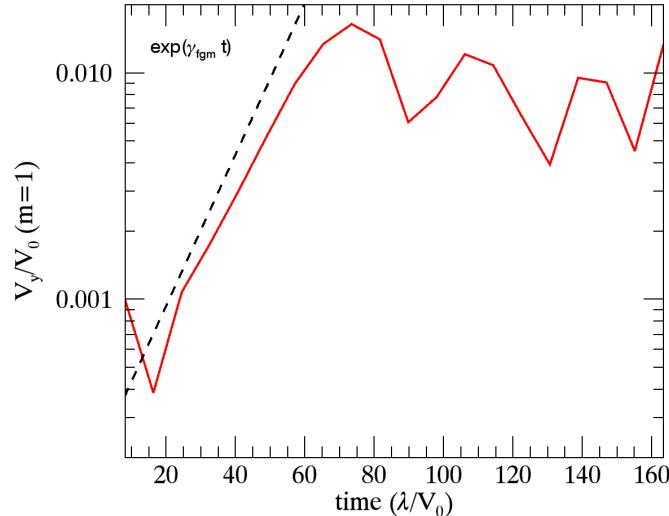
図4  $T = 106\lambda/V_0$  における KH 不安定の非線形発展結果。色は圧力、矢印は速度場ベクトルを表す。

図5 最大成長率モードのフーリエ振幅の時間発展

### 7.3.4 まとめ

以上のように、KH 不安定は渦を生み出す元である。上記パラメタでは、コヒーレントな渦構造が安定に存在する。しかし、非一様な媒質中の KH 不安定による渦は非線形段階で不安定化され乱流へと移行する。このような、KH 不安定の非線形発展中に新たに励起される構造を、2 次的不安定性と呼ぶ。特に密度成層中の KH 不安定が 2 次的に励起する不安定性は、回転による遠心力が擬似的に重力の役割を果たすレイリーティラー (Rayleigh-Taylor, 以下 R-T) 不安定として知られている (Matsumoto & Hoshino, 2004)。この 2 次的 R-T 不安定により乱流へと移行

した結果、無衝突プラズマの混合過程が促進されている。

本例では垂直磁場配位のみを紹介したが、水平磁場での KH 不安定の発達も重要となる宇宙ジェットなどの研究領域もあり、MHD シミュレーション（Nykyri & Otto, 2001）や 2 流体シミュレーション（Nykyri & Otto 2004, ; Nakamura et al., 2008）で示されている磁気リコネクションとのカップリングが注目される。さらに近年の 3 次元 MHD シミュレーションでは 3 次元性による新たな KH 不安定の乱流移行が見出されてきている（Matsumoto & Seki, 2007）。

### 7.3.5 参考文献

- Baty et al. 2003
- Chandrasekhar 1961
- Ferrari et al. 1998
- Matsumoto & Hoshino 2004
- Matsumoto & Seki 2007
- Miura & Pritchett 1982
- Miura & Sato 1978
- Nakamura et al. 2008
- Nykyri & Otto 2001
- Nykyri & Otto 2004

## 7.4 磁気リコネクション

著者 錢谷誠司（国立天文台）

### 7.4.1 背景

磁気リコネクションは、MHD スケールで起きる物理素過程である。ただし、理想 MHD 条件

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (7.5)$$

のもとでは磁力線は繋ぎ代わることができない（Newcomb, 1958）。MHD リコネクションではオームの法則に電気抵抗項を追加して磁力線の繋ぎ代えを許している。

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (7.6)$$

電気抵抗効果を組み入れた MHD 方程式系を抵抗性磁気流体（resistive MHD）方程式系と呼ぶ。

磁気リコネクションの resistive MHD シミュレーションは、我が国の鵜飼ら (*Ugai & Tsuda, 1977*) が初めて計算を行なって以来、世界中で活発に研究されているテーマである。現在、リコネクションの非線形発展は、(7.6) 式の電気抵抗  $\eta$  の設定方法によって大きく異なることがわかっている。

(1) 抵抗  $\eta$  が空間的に一様であれば、遅い Sweet-Parker 型リコネクションが起きる。そして、系のサイズが大きな場合には、磁気島（プラズモイド）が多数現れるプラズモイド型リコネクションに遷移する (*Loureiro et al., 2007*; *Bhattacharjee et al., 2009*)。

(2) 抵抗  $\eta$  が空間的に局在化しているとリコネクションジェットの両側にスローショックを伴う Petschek 型リコネクションが起きる (*Petschek, 1964*)。また、例えば  $\eta = \alpha_0 \max(0, |j| - j_{\text{threshold}})$  のように電気抵抗を物理量の関数（電流密度  $j$  や電流強度  $j/\rho$  を用いるものが多い）にする流儀もあって、総称して異常抵抗モデルと呼ぶ。電流が強い領域では MHD で記述できない物理が作用して抵抗も強くなる、と仮定するわけだが、その際は関数形を正当化する必要がある。異常抵抗モデルでも、非線形発展の結果として抵抗の大きな領域が局在化し、Petschek リコネクションになることが多い (*Scholer 1989*; *Ugai 1992*)。

## 7.4.2 課題設定

*Zenitani & Miyoshi, 2011* (以降 ZM11 と呼ぶ) に倣って、座標系の原点付近にリコネクション点を置く。プラズマと電磁場の初期設定は以下の通りである。

$$\mathbf{B}(y) = B_0 \tanh(y/L) \hat{\mathbf{x}}, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad (7.8)$$

$$\rho(y) = \rho_0 (1 + \cosh^{-2}(y/L)/\beta_{up}), \quad (7.9)$$

$$p(y) = p_0 (\beta_{up} + \cosh^{-2}(y/L)), \quad (7.10)$$

である。磁場の向きが反転する真ん中領域では磁気圧が働かない。そこでプラズマを真ん中に多めに入れて、全体の圧力バランスが成り立つようにしている。 $\beta_{up}$  は、プラズマベータ（磁気圧に対するプラズマ圧力の比）を

$$\beta = \frac{2p}{B^2} \quad (7.11)$$

上流領域で評価したものある。簡単のため、系全体で温度 ( $T = p/\rho$ ) を一定にしている。規格化は次の通り：

|          |     |
|----------|-----|
| $B_0$    | 1   |
| $\rho_0$ | 1   |
| $L$      | 1   |
| $p_0$    | 0.5 |

こうすると上流アルヴェン速度が  $c_{A,up} = 1$ 、典型距離をアルヴェン速度で横切るのにかかるアルヴェントランジット時間が  $T = L/c_{A,up} = 1$  となるので、議論が簡単になる。電気抵抗は、次の式のように原点付近に局在化させる。

$$\eta(x, y) = \eta_0 + (\eta_1 - \eta_0) \cosh^{-2}(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (7.12)$$

デフォルト値は  $\eta_1 = 1/60$  で、背景にも  $\eta_0 = 1/1000$  の弱い抵抗を入れている。背景抵抗をゼロにすると、MHD の不連続面をよりシャープに解けるようになるだろう。反面、高解像度の数値解法では、磁気島（プラズモイド）内の乱流磁場の中に、グリッドスケールの数値振動が混じってしまうこともある。 $\eta_0 = 0$  にする場合は、念のため、計算後に面内磁場を確認してほしい。

局在化した抵抗のため、放っておいてもリコネクションは起きる。しかし今回は磁場に擾乱を加えて早くリコネクションを起こすことにしよう。次の擾乱ポテンシャルは原点近傍に  $B_0$  の 3% 程度の弱い擾乱を追加する。

$$\delta A_z = 0.03 \times 2LB_0 \exp[-(x^2 + y^2)/(2L)^2] \quad (7.13)$$

さらに境界条件を工夫して、系の第一象限のみを解く。9-wave 法 (hyperbolic divergence cleaning 法; Dedner 法) の仮想ポテンシャル  $\phi$  の境界条件は間違えやすいので注意する。

計算領域のサイズは  $[0, 200] \times [0, 50]$  とした。これは ZM11 とほぼ同じで、解像度を  $30 \rightarrow 20$  に変更している。

### 7.4.3 結果

図は  $t=250$  でのプラズマの速度成分  $v_x$  をプロットしたものである。赤いアウトフロー領域の上下には、Petschek リコネクション ( Petschek, 1964 ) 特有のスローショックが出来ている。これに加えて、あちこちにシャープな構造が見える。

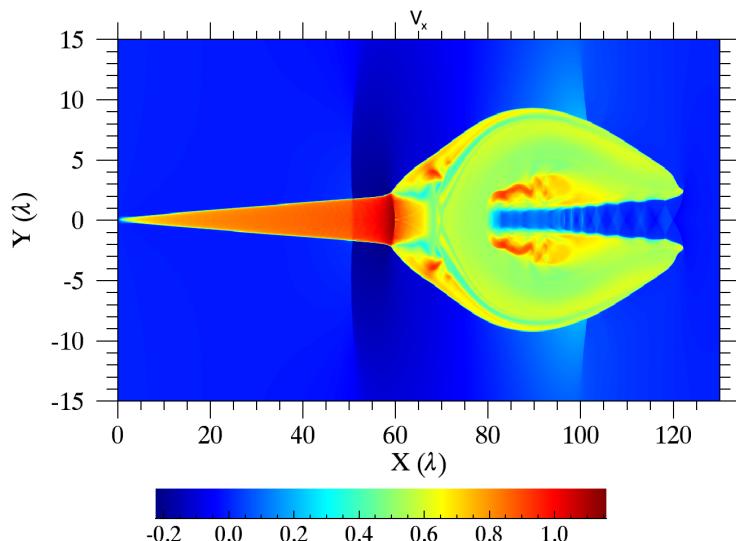


図 6  $t=250$  のアウトフロー速度成分  $v_x$

結果を下の図と見比べてみよう。この図は、ZM11 のサマリー図に、その後のアップデート ( Zenitani, 2015 ) を反映させたものである。

例えば、[アウトフロー図](#) の  $x = 50$  あたり ( [サマリー図](#) の#7) に見える構造は、右側を上流とするスローショックである。この衝撃波は、音速程度の速度で磁気島（プラズモイド）が運動する時、後ろ側によく現れる。一方、

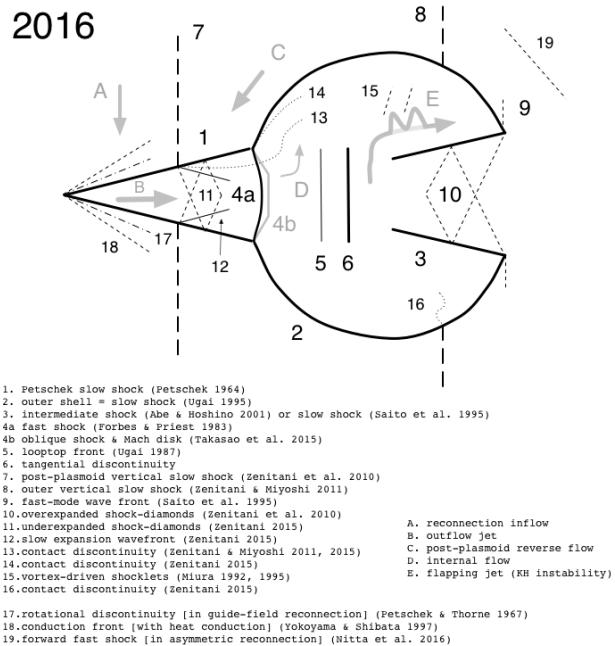
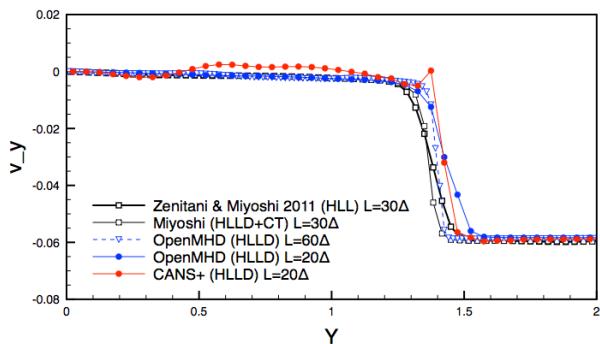


図 7 プラズモイド構造のサマリー

航空工学では、飛行機の速度が音速の 0.8 倍を超えたあたりから、翼の上面の後ろ側に縦衝撃波が立つことが知られていて、これを reconnection shock と呼ぶ。プラズモイドを翼面に見立てると、今回のスローショックは reconnection shock に対応することがわかるだろう。また、[アウトフロー図](#)をよく見ると、 $x = 100$ あたりにも衝撃波が立っている。プラズモイドの速度が超音速に達すると前面にも衝撃波が立ち、合計 4 本のスローショックが現れるわけである。衝撃波が交差するところにできる複雑な構造にも注目してみよう。

図 8  $x=40$  での  $v_y$  のカット

図は、Petschek スローショックの  $t=250$ ,  $x=40$  の断面で  $v_y$  を示したものである。参考のため、ZM11 のデータと三好先生のコード、そして、公開 HLLD コード [OpenMHD](#)<sup>\*3</sup> の計算結果も示している。CANS+ はスローショックを少ないグリッド数で解いているが、速度成分  $v_y$  がオーバーシュートしている。これは高精度解法に特有の数値振動だろう。また、 $v_y$  が  $0.5 < y < 1.2$  で揃っていないのは、アウトフロー領域内を飛び交う微小波を見ているからである。この近くの  $v_y$  の 2 次元プロファイルには斜めの波面が見えていて、Petschek スローショックで繰

\*3 <http://th.nao.ac.jp/MEMBER/zenitani/openmhd-j.html>

り返し反射しているように見える (*Tanuma & Shibata, 2007*)。微小波の成因は、グリッドとの関係から判断して数値的なものだと思うが、現時点ではわからない。そして、元が物理振動であれ数値振動であれ、**CANS+** は高次精度なので波を減衰させないのでだろう。

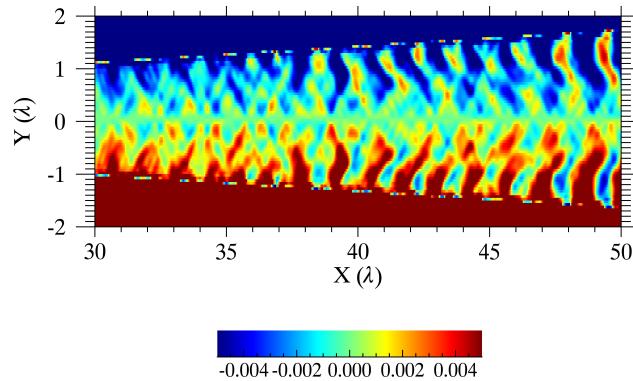


図 9  $-0.005 < v_y < 0.005$  の 2 次元プロファイル。

また、磁気島（プラズモイド）の先頭側にも複雑な構造が現れる。アウトフロー図 からはよくわからないので、表示領域やカラーバーを調整してサマリー図 の #10 に相当するものを探してみてほしい。下の図 は、ZM11 のきっかけとなった相対論 MHD シミュレーション (*Zenitani et al. 2010*) の該当部分である。同じ現象が綺麗に見えているので、これを使って説明することにする。シミュレーションの初期設定では、圧力バランスを満たすために真ん中にプラズマ密度の高い領域（プラズマシート）を設置していた。そのため、リコネクションジェットのプラズマ流は、プラズマシートを避けて上下を流れゆく（オレンジ色の矢印）。ジェット先端からは「FS」で示すように斜め衝撃波が伸びていて、その先にダイアモンドの形をした構造が連なっている。この構造を ショックダイアモンド と呼ぶ。

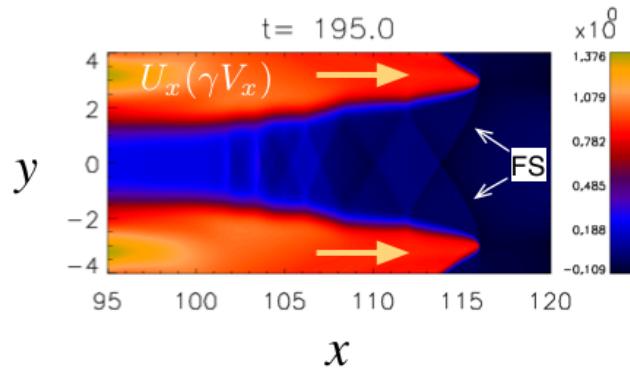


図 10 プラズモイド先端部の構造 (*Zenitani et al. 2010*)

ショックダイアモンドは超音速流に特有の構造で、航空・ロケット分野でよく知られている。下の図 のようにジェットエンジン（灰色）から高温・高速のガスが後方に吹き出しているとしよう。ジェット内の圧力  $P_{jet}$  と外気の圧力  $P_{ambient}$  はあまり変わらないとする。ジェットが排出口から外に出ると、その情報はジェット内を音速で伝わって、外気との圧力差を調整しようとする。しかし、排出速度がジェット内の音速を超えていると、 $P_{jet} < P_{ambient}$  の場合（過膨張; overexpanded と呼ぶ）は衝撃波が、 $P_{jet} > P_{ambient}$  の場合（不足膨張; underexpanded と呼ぶ）は膨張波（希薄波）が斜めに伝わっていく。ジェットと外気との境界は自由境界であるか

ら、反対側に到達した衝撃波は膨張波、膨張波は圧縮波（衝撃波）となって反射し、このサイクルを繰り返すことで、ダイアモンド状の領域を作っていくわけである。プラズモイドの先端では右から左に入ってくるプラズマシートが、(a) 過膨張タイプの [超音速ジェット](#) に対応していることがわかる。 $P_{jet}$  と  $P_{ambient}$  の差が大きな場合は構造がさらに複雑になるが、高速流体力学・圧縮性流体力学の教科書（例えば *Shapiro 1953* など）を起点に調べていただければ良いだろう。オンラインでは、フロリダ国際大学の[解説ページ](#)も参考になる。また、この分野の日本語の入門書としては [松尾 \(1994\)](#) をお薦めする。

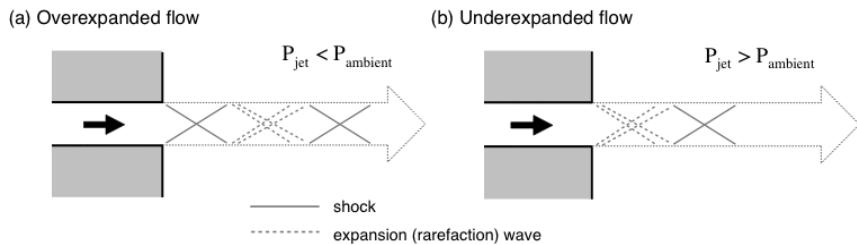


図 11 超音速ジェットの基本構造

せっかくなので、ショックダイアモンドの実例をいくつか紹介しよう。アメリカ空軍の超音速偵察機 [SR-71](#)（ブラックバード）はマッハ 3.2 で飛ぶことができたが、[BBC の特集ページ](#)（特に 2:50あたり）の映像を見ると、エンジン後方に超音速流に伴うショックダイアモンドが見えている。このショックダイアモンドは [リアリティ](#)を追い求める分野（音が出るので注意）でも再現されている。次世代戦闘機 [F-35](#) に搭載予定の超音速エンジンも [綺麗なダイアモンド](#)を生成する。もちろん、戦闘機だけではなく、ロケットエンジン（[1](#), [2](#)）や [映画の射撃シーン](#)でもショックダイアモンドを見ることができる。

ショックダイアモンド構造は、活動銀河核から吹き出す宇宙ジェットともよく似ている。[超音速流の図](#)を 90 度回転させて、[ジェット課題](#)の図と見比べてみよう。コクーンの中を超音速で突き抜けるジェットの中には、斜めの構造が見えていないだろうか？ 少し考えると背景物理が共通であることがわかるだろう。ちなみに宇宙ジェット業界では、圧縮部分の斜め衝撃波を [reconfinement shock](#) あるいは [recolimation shock](#) と呼んでいる。観測的にもジェットの中に小さな塊（「ノット」と呼ぶ）構造が見えることが知られており（例えば *Godfrey et al., 2012*）、[reconfinement/recolimation shock](#) 下流側のダイアモンドに相当するのではないかと言われている。

#### 7.4.4 まとめ

磁気リコネクションのアウトフロージェットやプラズモイドの運動に伴って、周辺にさまざまな衝撃波が発生する。このような構造を解くためには、衝撃波に対応した Godunov 型の数値解法が有効である。CANS+ は、その中でも最も優れた HLLD 法（*Miyoshi & Kusano, 2005*）を採用しているうえ、時間精度・空間精度も高いため、これまで解けなかった新しい構造も見える。その際、コードの特性を考慮して、数値的なものと物理的に意味のある結果を切り分け、後者を議論することが大切である。シミュレーション系で見える構造の中には、航空・ロケットや宇宙ジェットと共になものもあり、物理法則の普遍性を体感することができるだろう。

### 7.4.5 謝辞

この課題のコードは、2014 年のサマースクール期間中に柴山さん（名大）、岩本さん（茨城大）、河村さん（京大）、阪本さん（東北大）が作成して下さったものである。また、衝撃波問題も、柴山さんが期間中に報告して下さったものである。

### 7.4.6 参考文献

- *Bhattacharjee et al., 2009*
- *Godfrey et al., 2012*
- *Loureiro et al., 2007*
- *Miyoshi & Kusano, 2005*
- *Newcomb, 1958*
- *Petschek, 1964*
- *Scholer, 1989*
- *Shapiro, 1953*
- *Tanuma & Shibata, 2007*
- *Ugai, 1992*
- *Ugai & Tsuda, 1977*
- *Zenitani et al., 2010*
- *Zenitani & Miyoshi, 2011*
- *Zenitani, 2015*
- 圧縮性流体力学：内部流れの理論と解析 (1994) 理工学社、松尾一泰著

## 7.5 パーカー不安定

著者 工藤祐己（千葉大学）、工藤哲洋（国立天文台）

### 7.5.1 背景

磁場に貫かれた電離ガスが重力によって成層化している場合、擾乱を与えると系は線形不安定である。この不安定性は、曲げられた磁力線に沿ってガスが落下することで発生した浮力が磁気張力に打ち勝つ場合に成長する、磁気

浮力不安定性の一種である。Parker(1966, 1967)は、銀河においてこの不安定性によって低温で高密度な星間ガス雲が形成されるというモデルの提唱と不安定性の安定性解析をしたことからパーカー不安定性と呼ばれている。パーカー不安定性は、銀河・降着円盤のような円盤天体や太陽大気に代表されるような恒星大気において、天体内部の磁場強度に制限を与える增幅・維持機構(ダイナモ機構)や磁束浮上によるエネルギー輸送とコロナ加熱といった磁気的活動性に重要な物理機構であると考えられている。

本課題では回転によるシアやコリオリ力を無視した、円盤の一部を切り取った局所2次元計算を行う(z方向のセル数を1として計算する)。

## 7.5.2 課題設定

### 無次元化

計算コードの中において、変数は次の表1のように無次元化して扱われている。長さ、速度、時間の単位はそれぞれ $H_0$ 、 $C_{s0}$ 、 $T_0 = H_0/C_{s0}$ 。ここで、 $H_0$ 、 $C_{s0}$ はそれぞれスケールハイトと音速を表す。表1に各物理量とその規格化単位をまとめる( $k_B$ はボルツマン定数、 $m$ は平均粒子質量を表す)。

| 変数              | 規格化単位                        |
|-----------------|------------------------------|
| $x, y, z$       | $H_0$                        |
| $v_x, v_y, v_z$ | $C_{s0}$                     |
| $t$             | $H_0/C_{s0}$                 |
| $\rho$          | $\rho_0$                     |
| $p$             | $\rho_0 C_{s0}^2$            |
| $B_x, B_y, B_z$ | $\sqrt{4\pi\rho_0 C_{s0}^2}$ |
| $T$             | $C_{s0}^2/(\gamma k_B/m)$    |

以降、変数は無次元量として記述する。

### パラメータ・初期条件・境界条件

初期条件として、ガスは次のような重力・温度・プラズマベータの分布のもとで密度・圧力分布を決める。重力分布は赤道面( $y = 0$ )に対して反対称となるよう与える。

$$g_y = -g_0 \tanh(y/w_g)$$

温度分布は、円盤部(低温ガス)とコロナ(高温ガス)からなる。それぞれ $|y| < y_{\text{tr}}$ に低温ガス( $T = 1$ )、 $|y| > y_{\text{tr}}$ に高温ガス( $T = T_{\text{cor}}$ )となるように与える。

$$T = 1 + \frac{1}{2}(T_{\text{cor}} - 1) \left[ \tanh\left(\frac{|y| - y_{\text{tr}}}{w_{\text{tr}}}\right) + 1 \right]$$

プラズマベータは $\beta = 1/\alpha$ であるような磁気シートが $y_{\text{f1}} < y < y_{\text{f2}}$ に分布するように与える。

$$\beta^{-1} = \left| \alpha \frac{1}{2} \left[ \tanh\left(\frac{|y| - y_{\text{f1}}}{w_{\text{f0}}}\right) + 1 \right] \frac{1}{2} \left[ \tanh\left(\frac{|y| - y_{\text{f2}}}{w_{\text{f0}}}\right) + 1 \right] \right|$$

これらの条件のもと、 $y = 0$  での密度の値  $\rho_0$  を決めることで密度・圧力分布は次の式を解く。

$$\frac{d}{dy}[(1 + \alpha)p] = \rho g_y$$

$$p = \rho T / \gamma$$

初期磁場は  $x$  成分のみとし

$$B_x = \sqrt{2p\alpha}, B_y = 0, B_z = 0$$

また、この初期状態に、赤道面 ( $y = 0$ ) に対して反対称となるような速度擾乱を加える。

$$v_x = A \sin(2\pi x / \lambda_p) \frac{1}{2} \left[ \left( \tanh \frac{y - y_{\text{ptb1}}}{w_{\text{ptb1}}} - \tanh \frac{y - y_{\text{ptb2}}}{w_{\text{ptb2}}} \right) - \left( \tanh \frac{y - y_{\text{ptb3}}}{w_{\text{ptb2}}} - \tanh \frac{y - y_{\text{ptb4}}}{w_{\text{ptb1}}} \right) \right]$$

パラメータについては"const.f90"の中で表のようく設定されている。

| パラメタ   | 値                | コードの中の変数名                  |
|--|------------------|----------------------------|
| $y=0$ の重力 $g_0$  | $1/\gamma$       | g0                         |
| 重力の変化の遷移幅 $w_g$  | 0.5              | wg                         |
| 低温・高温ガスの遷移する位置 $y_{\text{tr}}$   | 6                | ytr                        |
| 遷移幅 $w_{\text{tr}}$  | 0.5              | wtr                        |
| 高温ガス温度 $T_{\text{cor}}$  | 25               | tcor                       |
| 円盤部のプラズマベータの逆数 $\alpha$  | 1                | alpha                      |
| 磁気シートの範囲と遷移幅 $y_{\text{f1}}, y_{\text{f2}}, w_{\text{f0}}$                           | $-2.5, 2.5, 0.5$ | yf1, yf2, wf0              |
| 比熱比 $\gamma$   | $5/3$            | gm                         |
| $y = 0$ の密度 $\rho_0$   | 1                | ro0                        |
| 擾乱の $x, y$ 方向の振幅 $A$   | 0.05             | amp                        |
| 擾乱の $x, y$ 方向の波長 $\lambda_x, \lambda_y$  | 20, 0            | xlamd, ylamd               |
| 擾乱の $y$ 方向の印加範囲 $y_{\text{ptb1}}, y_{\text{ptb2}}, y_{\text{ptb3}}, y_{\text{ptb4}}$ | $-4, -1, 1, 4$   | yptb1, yptb2, yptb3, yptb4 |
| 擾乱の $y$ 方向の遷移幅 $w_{\text{ptb1}}, w_{\text{ptb2}}$                                    | 0.5, 0.5         | wptb1, wptb2               |
| $x$ 方向計算領域   | $[-20, 20]$      | [xmin, xmax]               |
| $y$ 方向計算領域   | $[-25, 25]$      | [ymin, ymax]               |
| $z$ 方向計算領域   | $[-0.5, 0.5]$    | [zmin, zmax]               |

境界条件は、 $x$  境界に周期境界、 $y$  境界に初期値を代入するような境界条件をおいた。

### 7.5.3 結果

計算結果を以下に示す。

パーカー不安定性の線形段階において線形解析とシミュレーションの結果を比較した。

図左 は、線形理論によって課題設定のパラメータ (温度、重力、磁気シートに従う) を用いて計算された不安定性モードの分散関係である。成長率が最大となるのは  $(k_x, \sigma) = (0.345, 0.175)$  、:臨界波数は  $k_{\text{crit}} \sim 0.598$  と求

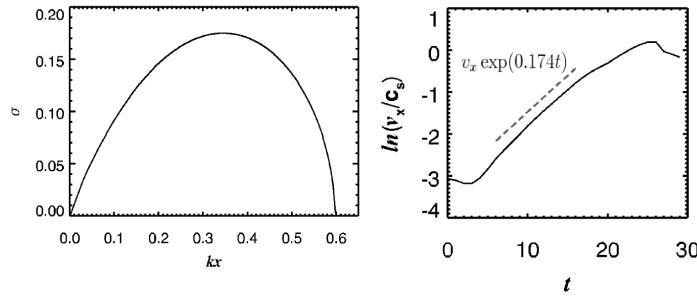


図 12 左は縦軸を  $x$  方向の波数、横軸を成長率にとった、線形解析によるパーカー不安定性の分散関係。右は線形段階による摂動  $v_x$  の線形成長と線形解析との比較。

また、線形理論による計算手法は *Matsumoto et al. (1988)* に従った（線形理論の詳細については *Parker 1966* ; *Matsumoto et al. 1988* ; *Kim et al. 1997*）。パーカー不安定性の分散関係はパラメータ（温度、重力、磁気シートの空間分布等）に依存する（例えば、*Kim & Hong, 1998* , *Kamaya et al. 1996* ）。

図右はシミュレーションから得られた、初期の摂動振幅が最大となる位置における  $v_x$  の時間発展（実線）と線形解析による成長率（破線）を示した。線形解析の結果、初期摂動の波長  $\lambda = 20$  に対して成長率は  $\sigma \sim 0.174$  と求まり、シミュレーション結果とほぼ一致していることがわかる。

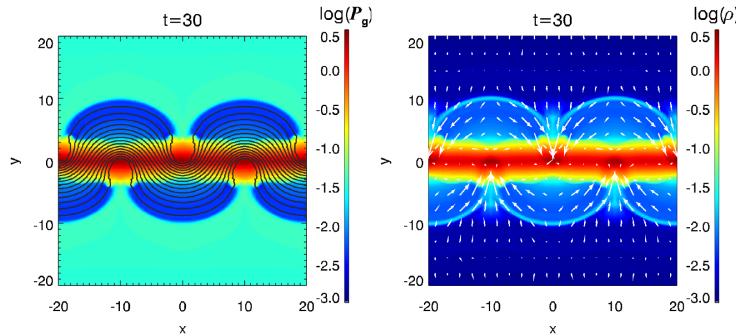


図 13 非線形段階 ( $t = 30$ ) のシミュレーション結果。カラーコントラスト左が圧力、右が密度を表し、曲線が磁力線、矢印は速度ベクトルを表す。

図は非線形段階  $t = 30$  における結果を示した。パーカー不安定性によって磁力線がループ状に曲げられている。ループの頂上では磁力線に沿ったガスの落下に伴って密度と圧力が減少し、磁力線に沿った落下速度が大きくなることで生じた衝撃波が見られる。一方ループの足元では、落下してガスが集まり増加している。様々なプラズマベータにおける非線形段階の振る舞いについては *Matsumoto et al. (1990)* で詳しく議論されている。

#### 7.5.4 参考文献

- *Kamaya et al., 1996*
- *Kim et al., 1997*
- *Kim & Hong, 1998*

- *Matsumoto et al., 1988*
- *Matsumoto et al., 1990*
- *Parker, 1966*
- *Parker, 1967*

## 7.6 ジェット伝播

著者 朝比奈雄太（千葉大学）

### 7.6.1 背景

X線連星やブラックホール候補天体、活動銀河核等は宇宙ジェットと呼ばれる細く絞られた超音速アツフローを噴出する時期がある。ジェットは中心天体近傍で解放された重力エネルギーを遠方まで伝え、周辺環境に大きな影響を及ぼす。またジェットはインナーナルショックやジェットターミナルショックなどの衝撃波をもち、粒子加速の場としても注目されている。さらに、銀河中心核から噴出したジェットが銀河の構造や進化に影響を与えるといったフィードバック機構によって活動銀河核と銀河の共進化を論じる上でも重要である。

ジェットと周辺環境との相互作用を調べるために多くのジェット伝播シミュレーションが実施してきた。*Norman et al. (1982)* は 2 次元円等座標系流体シミュレーションを実施し、銀河間ガス中を伝播する超音速ジェットの基本構造とその安定性を研究した。その後磁気流体シミュレーションや 3 次元シミュレーションへの拡張が行われ、トロイダル磁場によってジェットが屈曲するキンク不安定性等、磁場がジェットに与える影響についても研究された (*Todo et al., 1992, 1993 ; Mizuno et al., 2011*)。さらに光速に近いジェットを扱うために相対論を考慮したシミュレーションも行われており、その形状や安定性が議論されている *Marti et al., 1997 ; Rosen et al., 1999 ; Aloy et al., 2000 ; Zhang et al., 2003 ; Mizuno et al., 2007* )。

### 7.6.2 シミュレーションモデル

ジェットの形成については計算せず、収束したジェットが噴出することを仮定し、境界条件としてジェットを計算領域に注入する ([モデル図](#))。

外部ガスとジェットのパラメーターを表に示す。磁場はジェット内にトロイダル磁場  $B_\phi \propto \sin^4(r\pi)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  を考え、その強さは  $r = 0.5$  でプラズマ  $\beta = p/(B^2/2) = 100$  を仮定した。

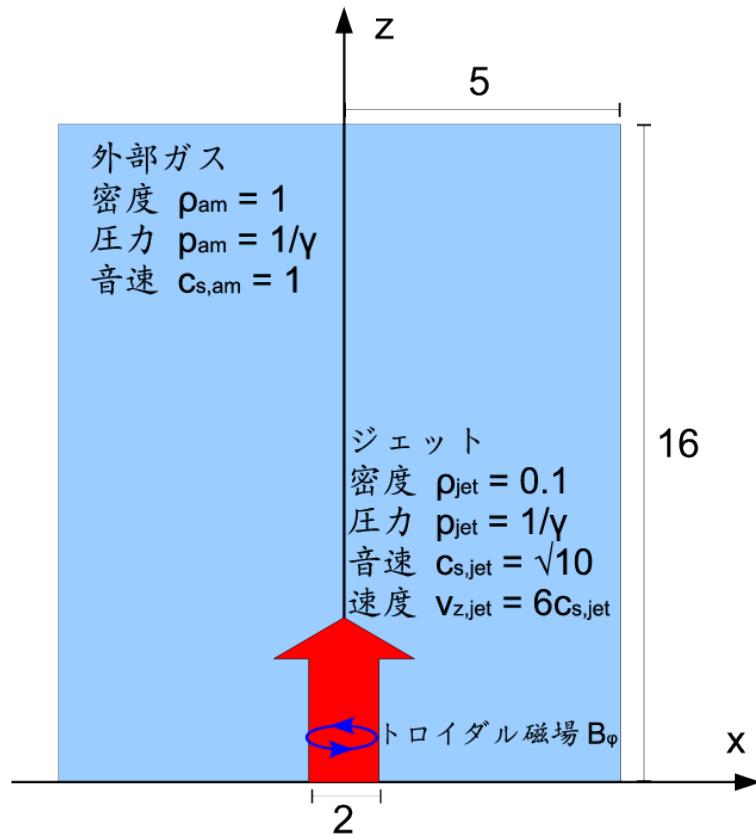
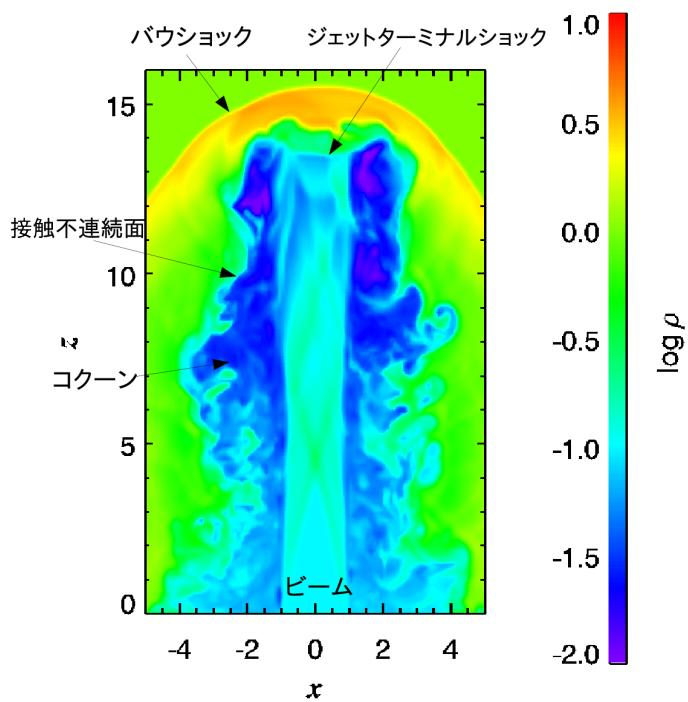


図 14 ジェット伝播シミュレーションモデル

| パラメーター       | 値            |
|--------------|--------------|
| $\rho_{am}$  | 1            |
| $p_{am}$     | $1/\gamma$   |
| $c_{s,am}$   | 1            |
| $\rho_{jet}$ | 0.1          |
| $p_{jet}$    | $1/\gamma$   |
| $c_{s,jet}$  | $\sqrt{10}$  |
| $v_{z,jet}$  | $6c_{s,jet}$ |

### 7.6.3 結果

図に計算結果の密度分布を示す。ジェットの前方にはバウショックと呼ばれる円弧状の衝撃波が形成され、外部ガスが加熱・圧縮されている。ジェット先端に形成されたジェットターミナルショックと呼ばれる強い衝撃波によってジェットガスは減速され、ジェットを包み込む高温低密度なバックフロー(コクーン)が形成される。

図 15 ジェット伝播シミュレーション結果の密度分布 ( $t=3.5$ )

#### 7.6.4 参考文献

- Aloy *et al.*, 2000
- Marti *et al.*, 1997
- Mizuno *et al.*, 2007
- Mizuno *et al.*, 2011
- Norman *et al.*, 1982
- Rosen *et al.*, 1999
- Todo *et al.*, 1992
- Todo *et al.*, 1993
- Zhang *et al.*, 2003

## 7.7 大局的なブラックホール降着円盤での磁気回転不安定性とジェット形成

著者 川島朋尚（国立天文台）、町田真美（九州大学）

## 7.7.1 背景

ブラックホール候補天体からは、高光度の様々な波長の輻射に加え、しばしばアウトフローやジェットの様な高速のプラズマ噴出流が観測されている。これらの輻射やプラズマ噴出は、ブラックホール周りに形成される回転プラズマ（降着円盤）による重力エネルギーの解放により可能になる。

ブラックホール候補天体では様々な輻射スペクトル状態が観測されており（例：明るく輻射スペクトルが柔らかい High/Soft 状態や、暗くスペクトルが硬い Low/Hard 状態）、それに対応し様々なタイプの降着円盤が考案されてきた。例えば、標準円盤と呼ばれる幾何学的に薄く光学的に厚い円盤（*Shakura & Sunyaev, 1973*）は、High/Soft 状態の輻射スペクトルを良く説明できるが、Low/Hard 状態のスペクトルは再現できない。Low/Hard 状態は *Ichimaru (1977)* により考案され *Narayan and Yi (1994, 1995)* により再発見された放射不良降着流（Radiatively Inefficient Accretion Flow, 以下 RIAF）により説明できる。輻射スペクトル状態の違いはジェットの噴出にも関連がある。Low/Hard 状態ではジェットの噴出が観測されているが、High/Soft 状態ではジェットの噴出は検出されていない（*Fender et al., 2004*）。

この演習では、RIAF のシミュレーションを実施する。

## 7.7.2 磁場の役割

降着円盤においては、磁場は角運動量輸送やジェットの形成といった非常に重要な役割を持つ。以下に、その役割について見ていく。

まず、回転プラズマの流体素片を考える。ブラックホールへと降着していく過程で流体素片の角運動量  $l$  が保存しているとすると、遠心力の大きさは  $l^2/r^3$  で重力の大きさは  $GM/r^2$  であるため（ $r$  は中心天体からの距離、 $G$  は重力定数、 $M$  は中心天体の質量）、やがて遠心力は重力と釣り合うまで大きくなり、ある半径でケプラー回転となる。この半径よりも内側へとガスが降着するためには、角運動量を外側へと輸送する必要がある。この輸送過程は長いあいだ謎であり現象論的な粘性モデルである  $\alpha$  粘性が用いられてきたが、1990 年代になると磁気回転不安定性（Magneto-Rotational Instability, 以下 MRI）によって生じる磁気乱流のマクスウェル応力によって角運動量輸送が起きることが *Balbus & Hawley (1991)*; *Hawley & Balbus (1992)* によって再発見された<sup>\*1</sup>。

MRI とは、回転プラズマ中に現れる slow MHD mode の不安定性である。鉛直方向の磁場に貫かれた回転円盤を理想 MHD 近似を仮定して考える。ある流体素片を内側へ微小距離だけ移動させると、角運動量の保存により回転角速度は微小移動の前に比べ速くなる。いま磁力線の凍結によりこの流体素片は元の半径で回転している流体素片と磁場によりつながれている。この流体素片同士をつなぐ磁場のマクスウェル応力によって、内側へ微小移動した流体素片は元の半径の流体素片へ角運動量を受け渡し、さらに内側へと移動する。この内側への移動に伴い角速度は再び大きくなり、同様のメカニズムを繰り返すことさらに外側へと移動していく。これが MRI の概要である。MRI の軸対称モードの最大成長波長での成長率は  $(1/2)|d\Omega/d(\ln r)|$  であり、これは円盤の約 1 回転の時間スケールに相当する。

降着円盤での MRI による磁気乱流の成長は shearing box を用いた局所的なシミュレーションで確認され（*Hawley*

<sup>\*1</sup> MRI は 1959 年に *Velikhov* が鉛直方向磁場に貫かれたクエット流の問題で発見され、*Chandrasekhar (1960)* が一般的な回転則の場合に拡張した。

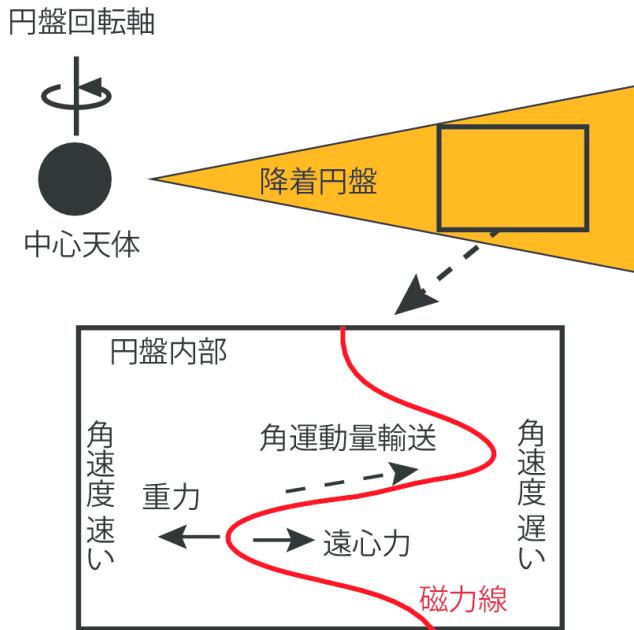


図 16 降着円盤での MRI の概念図

& Balbus, 1991 ; Hawley, 1995)、その後、大局的シミュレーションでも確認されており (Matsumoto, 1999 ; Hawley, 2000 ; Machida et al., 2000 ; Stone & Pringle, 2001)、長いあいだ謎であった降着円盤の角運動量輸送メカニズムは現在では MRI により発生する磁気乱流のマクスウェル応力であると考えられている。

また、RIAF からはジェットが噴出されることが観測から示唆されている。ジェットを噴出するにはプラズマの加速が必要である。輻射が弱い RIAF でのジェットの加速機構は磁気遠心力加速 (Blandford & Payne, 1982) や、磁気タワーによる磁気圧加速 (Lynden-Bell, 1996 ; Kato et al., 2004a, b)、また一般相対論的効果として Kerr ブラックホールからのスピンの引き抜き (Blandford & Znajek, 1977) が提案されておりそれぞれジェットの加速が確認されているが、まだ加速機構の統一的な理解には至っていない。

### 7.7.3 初期条件

初期条件として、トーラスの pressure maximum の半径  $r_0$  を  $40 r_s$  に設置する ( $r_s$  はシュバルツシルト半径)。トーラス内部での角運動量は一定とする。磁場はトーラスの内部にポロイダル磁場を設定する。具体的にはベクトルポテンシャルが密度に比例するように設置する。ここで pressure maximum でのプラズマ  $\beta$  (= ガス圧/磁気圧) を 100 とする。

外側境界は自由境界を内側 ( $8r_s$ ) では吸収境界を設置する。

### 7.7.4 結果

### 降着流とジェットの形成

まず、トーラスの pressure maximum  $r_0$  でおよそ 1 回転時間スケール (MRI の線形成長の時間スケール) で channel flow が形成される。マクスウェル応力による角運動量の引き抜きが起こり、急激な質量降着が起こる。また、それに伴い、磁気流体ジェットの噴出が起こる (質量密度の図)。

およそ 5 回転ほど経過すると準定常な降着状態になり、磁気乱流の構造もはっきりと現れる。

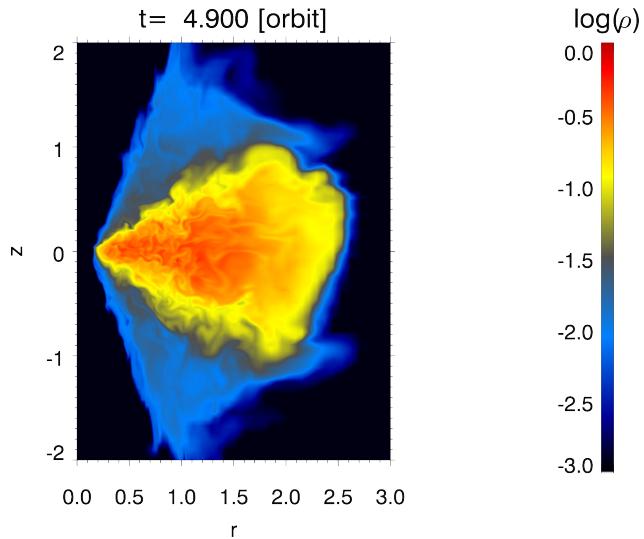


図 17 MRI の成長により角運動量が再分配され形成された降着流。回転軸まわりにジェットが形成されている。

また、回転軸付近に磁気流体ジェットの形成も確認できる。円盤差動回転によって増幅されたトロイダル磁場でジェットはコリメートされる。また回転軸付近はポロイダル磁場が優勢になる (磁場の図)。

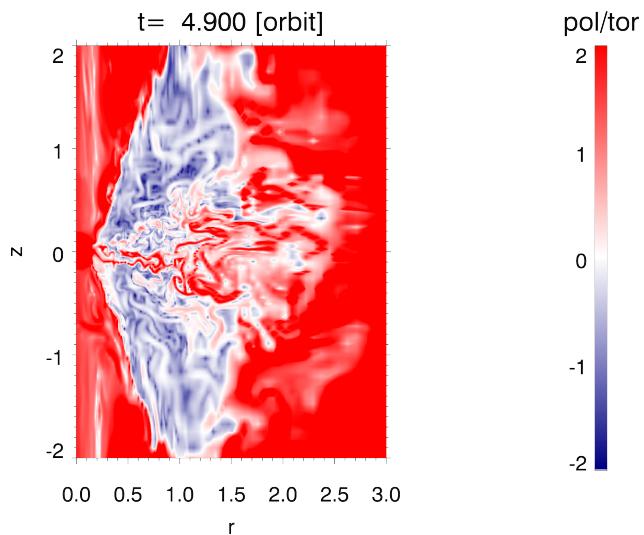


図 18 ポロイダル磁場とトロイダル磁場の大きさの比

### 磁気乱流による $\alpha$ の値

図は MRI 乱流による  $\alpha$  の値である。 $\alpha$  は  $\alpha \equiv (\langle B_r B_\varphi \rangle / \langle P_g \rangle)$  と定義した。ここで  $B_r, B_\varphi, P_g$  はそれぞれ動径方向磁場、方位角方向磁場、ガス圧であり、” $\langle \rangle$ ” は空間平均を表す。今回は  $r \leq 0.5r_0 (= 20r_s)$ ,  $z^2 \leq 0.3r_0$  の範囲内で体積重みをつけて平均をとった。約 1 秒で不安定性により channel flow が形成され、 $\alpha$  の値が急増しているのがわかる。その後、磁気乱流による角運動量輸送が支配的になり、 $\alpha$  の値は 0.01-0.1 となる。

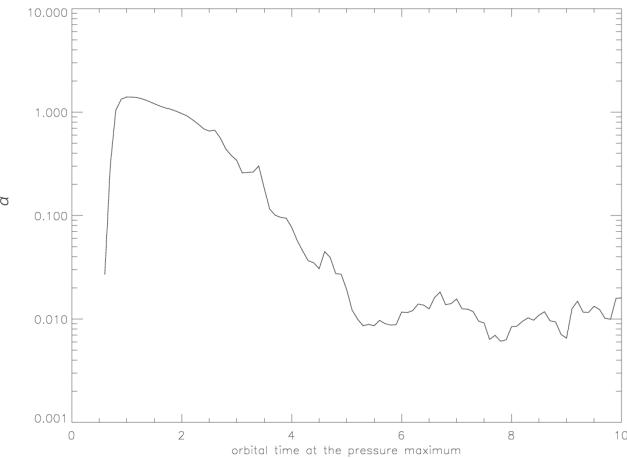


図 19 マクスウェル応力とガス圧の空間平均により得られた  $\alpha$  の値の時間発展

### 7.7.5 まとめ

ここでは 2 次元のシミュレーションを実施し、MRI によって成長する磁気乱流のマクスウェル応力で降着流が形成されることおよび降着流からの磁気流体ジェットの噴出を確認した。しかし 2 次元シミュレーションでは降着流やジェットのおおまかな構造は議論できるが、非軸対称な構造を議論することはできない。また、このことは長時間計算が不可能であることにも繋がる。軸対称 2 次元の場合、方位角方向のパーカー不安定性を計算できないために、いちど差動回転によりポロイダル磁場がトロイダル成分に変換されると再びポロイダル成分に変換することは難しい。そのため、やがて MRI 乱流は減衰してしまう。3 次元に拡張するとパーカー不安定性により磁場が浮上することでポロイダル成分が作られ、軸対称モードの MRI の成長が再び可能となる。降着流の進化を正しく理解するためにはこの様なダイナモ機構をフルに扱うことが必要不可欠であり、3 次元シミュレーションを実施する必要がある。

また、今回は初期トーラスの中に単一の方向のポロイダル磁場を仮定したが、ある半径ごとに磁場の方向を反転させるような初期条件でもシミュレーションが実施されており、降着流やジェットのダイナミクスが変わることが示唆されている (Narayan *et al.*, 2012)。初期磁場形状に関する問題は現在のところ未解決であり、初期磁場形状が結果に与える影響を定性的・定量的に明らかにすることが必要である。また長時間のシミュレーションの実施により結果の収束性を明らかにすることも重要である。これらの問題は降着円盤の磁気流体シミュレーション研究の今後の課題である。

## 7.7.6 参考文献

- *Balbus & Hawley, 1991*
- *Blandford & Payne, 1982*
- *Blandford & Znajek, 1977*
- *Chandrasekhar, 1960*
- *Fender et al., 2004*
- *Hawley & Balbus, 1991*
- *Hawley et al., 1995*
- *Hawley, 2000*
- *Ichibamaru, 1977*
- *Kato et al., 2004a*
- *Kato et al., 2004b*
- *Lynden-Bell, 1996*
- *Machida et al., 2000*
- *Matsumoto, 1999*
- *Narayan & Yi, 1994*
- *Narayan & Yi, 1995*
- *Narayan et al., 2012*
- *Shakura & Sunyaev, 1973*
- *Stone & Pringle, 2001*



## 第 8 章

### 参考文献



# 参考文献

- [Aloy00] Aloy et al., *Astrophys. J.*, 2000.
- [Balbus-Hawley91] Balbus and Hawley, *Astrophys. J.*, 1991.
- [Balsara98] Balsara, *Astrophys. J. Suppl.*, 1998.
- [Balsara-Spicer99] Balsara and Spicer, *J. Comput. Phys.*, 1999.
- [Bhattacharjee09] Bhattacharjee et al., *Phys. Plasmas*, 2009.
- [Baty03] Baty et al., *Phys. Plasmas*, 2003.
- [Bogdan03] Bogdan et al., *Astrophys. J.*, 2003.
- [Borges08] Borges et al., *J. Comput. Phys.*, 2008.
- [Brackbill-Barnes80] Brackbill and Barnes, *J. Comput. Phys.*, 1980.
- [Blandford-Payne82] Blandford and Payne, *MNRAS*, 1982.
- [Blandford-Znajek77] Blandford and Znajek, *MNRAS*, 1977.
- [Brio-Wu88] Brio and Wu, *J. Comput. Phys.*, 1988.
- [Cargo-Gallice97] Cargo and Gallice, *J. Comput. Phys.*, 1997.
- [Chandrasekhar60] Chandrasekhar, *PNAS*, 1960.
- [Chandrasekhar61] Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Dover, 1961.
- [Dedner02] Dedner et al., *J. Comput. Phys.*, 2002.
- [DelZanna07] Del Zanna et al., *Astronomy & Astrophys.*, 2007.
- [Evans-Hawley88] Evans and Hawley, *Astrophys. J.*, 1988.
- [Fender04] Fender et al., *MNRAS*, 2004.
- [Ferrari98] Ferrari et al., *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 1998.
- [Fujii94] 藤井孝蔵、「流体力学の数値計算法」、東京大学出版会、1994 年

- [Gardiner-Stone05] Gardiner and Stone, *J. Comput. Phys.*, 2005.
- [Godfrey12] Godfrey et al., *Astrophys. J.*, 2012.
- [Gottlieb-Shu98] Gottlieb and Shu, *Mathematics of Computation*, 1998.
- [Hawley-Balbus91] Hawley and Balbus, *Astrophys. J.*, 1991.
- [Hawley95] Hawley et al., *Astrophys. J.*, 1995.
- [Hawley00] Hawley, *Astrophys. J.*, 2000.
- [Henrick05] Henrick et al., *J. Comput. Phys.*, 2005.
- [Hirsch90] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, 1990.
- [Ichimaru77] Ichimaru, *Astrophys. J.*, 1977.
- [Jiang-Shu96] Jiang and Shu, *J. Comput. Phys.*, 1996.
- [Kamaya96] Kamaya et al., *Astrophys. J.*, 1996.
- [Kato04a] Kato et al., *Astrophys. J.*, 2004a.
- [Kato04b] Kato et al., *Astrophys. J.*, 2004b.
- [Kato08] Kato et al., *Black-hole accretion disks — Towards a New Paradigm —*, Kyoto University Press, 2008.
- [Kim97] Kim et al., *Astrophys. J.*, 1997.
- [Kim-Hong98] Kim and Hong, *Astrophys. J.*, 1998.
- [Liu94] Liu et al., *J. Comput. Phys.*, 1994.
- [Londrillo-DelZanna04] Londrillo and Del Zanna, *J. Comput. Phys.*, 2004.
- [Loureiro07] Loureiro et al., *Phys. Plasmas*, 2007.
- [Lynden-Bell96] Lynden-Bell, *MNRAS*, 1996.
- [Marti97] Marti et al., *Astrophys. J.*, 1997.
- [Machida00] Machida et al., *Astrophys. J.*, 2000.
- [Matsumoto88] Matsumoto et al., *PASJ*, 1988.
- [Matsumoto90] Matsumoto et al., *Astrophys. J.*, 1990.
- [Matsumoto99] Matsumoto, in *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 240, *Numerical Astrophysics*, 1999.
- [Matsumoto-Hoshino04] Matsumoto and Hoshino, *Geophys. Res. Lett.*, 2004.
- [Matsumoto-Seki07] Matsumoto and Seki, *J. Geophys. Res.*, 2007.

[Matsuo94] 松尾一泰、「圧縮性流体力学：内部流れの理論と解析」、理工学社（オーム社）、1994 年

[Miyoshi-Kusano05] Miyoshi and Kusano, *J. Comput. Phys.*, 2005.

[Miura-Pritchett82] Miura and Pritchett, *J. Geophys. Res.*, 1982.

[Miura-Sato78] Miura and Sato, *J. Fluid Mech.*, 1978.

[Mizuno07] Mizuno et al., *Astrophys. J.*, 2007.

[Mizuno11] Mizuno et al., *Astrophys. J.*, 2011.

[Nakamura08] Nakamura et al., *J. Geophys. Res.*, 2008.

[Narayan12] Narayan et al., *MNRAS*, 2012.

[Narayan-Yi94] Narayan and Yi, *Astrophys. J.*, 1994.

[Narayan-Yi95] Narayan and Yi, *Astrophys. J.*, 1995.

[Newcomb58] Newcomb, *Ann. Phys.*, 1958.

[Norman82] Norman et al., *Astron. & Astrophys.*, 1982.

[Nykyri-Otto01] Nykyri and Otto, *Geophys. Res. Lett.*, 2001.

[Nykyri-Otto04] Nykyri and Otto, *Ann. Geophys.*, 2004.

[Orszag-Tang79] Orszag and Tang, *J. Fluid Mech.*, 1979.

[Parker66] Parker, *Astrophys. J.*, 1966.

[Parker67] Parker, *Astrophys. J.*, 1967.

[Petschek64] Petschek, in *AAS/NASA Symposium on the Physics of Solar Flares*, 1964.

[Powell99] Powell et al., *J. Comput. Phys.*, 1999.

[Rosen99] Rosen et al., *Astrophys. J.*, 1999.

[Ryu-Jones95] Ryu and Jones, *Astrophys. J.*, 1995.

[Scholer89] Scholer, *J. Geophys. Res.*, 1989.

[Shakura-Sunyaev73] Shakura and Sunyaev, *Astron. Astrophys.*, 1973.

[Shapiro53] Shapiro, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*, John Wiley & Sons, 1953.

[Stone-Pringle01] Stone and Pringle, *MNRAS*, 2001.

[Suresh-Huynh97] Suresh and Huynh, *J. Comput. Phys.*, 1997

[Tanuma-Shibata07] Tanuma and Shibata, *PASJ*, 2007.

- [Todo92] Todo et al., PASJ, 1992.
- [Todo93] Todo et al., Astrophys. J., 1993.
- [Toth00] Toth et al., J. Comput. Phys., 2000.
- [Ugai-Tsuda77] Ugai and Tsuda, J. Plasma Phys., 1977.
- [Ugai92] Ugai, Phys. Fluids, 1992.
- [vanLeer79] van Leer, J. Comput. Phys., 1979.
- [Zenitani10] Zenitani et al., Astrophys. J., 2010.
- [Zenitani-Miyoshi11] Zenitani and Miyoshi, Phys. Plasmas, 2011.
- [Zenitani15] Zenitani, Phys. Plasmas, 2015.
- [Zhang03] Zhang et al., Astrophys. J., 2003.