機械学習・ディープラーニングのための
基礎数学講座　確率・統計

SkillUP AI

3章
離散型確率分布
問題

例題

例題１：確率変数

下記のデータの各列をカテゴリ変数、離散変数、連続変数に分類せよ

B	C	D	E	F	G
年齢	血圧	肺活量	性別	病気	体重
22	110	4300	M	1	79
23	128	4500	M	1	65
24	104	3900	F	0	53
25	112	3000	F	0	45
27	108	4800	M	0	80
28	126	3800	F	0	50

例題２：確率変数の期待値・分散・標準偏差

以下の表について、期待値、分散および標準偏差を求めよ

X	世帯数	確 率 $p(x)$
1	4	0.4
2	2	0.2
3	3	0.3
4	0	0
5	1	0.1
合計	10	1.0

演習

演習１：確率変数

Xを確率変数、xをXの実現値とする

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
$P(X=x)$	1/10	1/5	2/5	1/5	1/10

(1) Xの期待値$E(X)$を求めよ

(2) Xの分散$V(X)$ を求めよ

(3) Xの二乗X^2の期待値$E(X^2)$を求めよ

(4) $E(X^2)-E(X)^2$を計算してこれが(2)の結果と同じになることを確認せよ

演習２：離散型確率分布

一様分布

$$P(X = x) = \frac{1}{n}\ (x = 1, \ldots, n)$$

において

(1) $E[X]$を求めよ

(2) $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$を用いて$V[X]$求めよ

ヒント：

- $\sum x = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum x^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $E[X^2] = \sum x^2 P(X = x)$

演習３：離散型確率分布

表が出る確率が$\frac{1}{3}$のコインを一回振る試行を考える

表が出たら1, 裏がでたら0となる確率変数Xを考えたとき

(1) 期待値$E[X]$を求めよ

(2) 分散$V[X]$を求めよ

(3) 標準偏差$\sqrt{V[X]}$を求めよ

ヒント：

今回の試行はどの分布で考えることができるだろうか？

演習４：離散型確率分布

１つのサイコロを５回振るとき、1の目が3回出る確率を求めよ

ヒント：

『1の目が出るか』か『 1の目以外の目が出るか』の二つの事象しかない試行を5回繰り返すと考えると、どの分布で解決できそうか？

演習５：離散型確率分布

打率4割の打者がいる。この打者が5回打席に立って4回以上ヒットを打つ確率はどれくらいであろうか？

ヒント：

- ヒットを打つ回数を確率変数Xで表すと『5回打席に立って4回以上ヒットを打つ確率』は$P(X=4)+P(X=5)$である
- 『ヒットを打つ』か『ヒットを打たない』の二つの事象しかない試行を5回繰り返すと考えると、どの分布で解決できそうか？

演習６：離散型確率分布

ある道路で交通量調査を180分間行い、トラックが30台通ったとする。トラックの通過台数がポアソン分布に従うとして以下の問いに答えよ*

(1) トラックの平均通過率(台/時)を求めよ

(2) その道路でトラックが60分間で5台通る確率を求めよ

*ある時間幅（今回は分）あたりの到着の仕方は時間に依存しないと考える（定常状態と呼ばれる考え方）
つまりある特定の時間幅だけ、トラックが極端に多く通過するということはないと考える。

演習７：離散型確率分布

ポアソン分布において

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}(x=0,1,\dots)$$

が正規性を満たすことを確認せよ

ヒント：

- 正規性とは全ての場合における確率を足すと1となるという性質である

  これはあらゆる確率分布が持つ性質である

  今回の場合は$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\,(x=0,1,\dots)$が成り立つことを確認すればよい

- $e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$である。これを$e^{\lambda}$の$\lambda=0$の周りのテイラー展開という（微分・線形代数の講義ではDay2で扱っています）