

## 基礎数学講座 微分・線形代数 修了課題

### 問題

$x$ の関数

$$y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$$

の最小値は0です。これを勾配降下法を用いて求めてみましょう！学習係数 $\rho$ を自分で設定し、なるべく少ない更新回数で最小値にたどり着くことを目指します。ただし、勾配の値が0ぴったりになることは稀なので「勾配の絶対値が0.01を下回ったときに最小値にたどり着いた」と定義することにします。**さあ、あなたは何回の更新で最小値に辿り着けるでしょうか！**なお、以下の情報を参考にして下さい。

- $x$ の初期値  $x^{(0)}$ は2.5とします。
- $y' = f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$  という変形をすると計算しやすいです。
- 今回は学習係数 $\rho$ を 0.020, 0.021, ..., 0.039, 0.040 の中から選んで下さい。
- 更新の回数が6になったら別の学習係数を選んでみてください。

### 便利シート

更新回数 $t$	$x^{(t)}$ の値	勾配 $f'(x^{(t)})$ の値	更新式	$f(x^{(t)})$
0	2.5	22.5	$x^{(1)} \leftarrow 2.5 - \rho * 22.5$	5.0625
1				
$\vdots$				

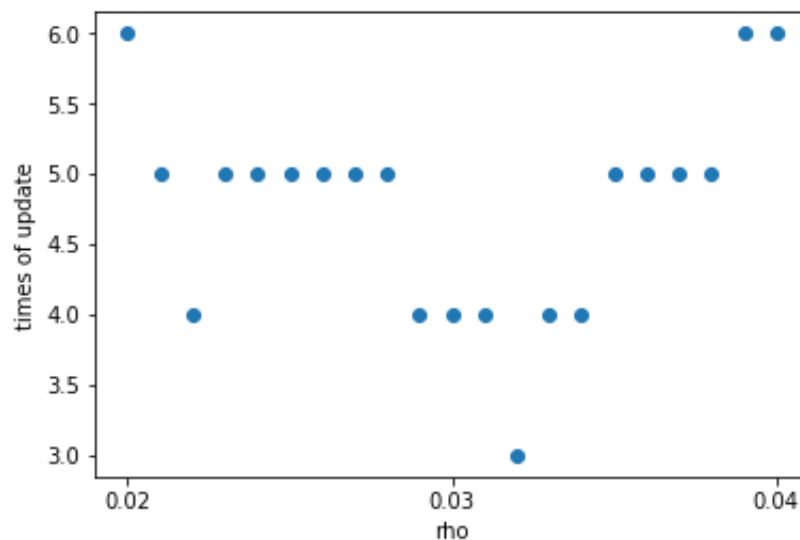
### 結果

学習係数 $\rho$ を\_\_に設定したとき、\_\_回の更新で勾配の値が\_\_となった！

(次のページに答えがありますので注意)

## 参考

各学習係数において、勾配の値が0.01未満となるまでに何回の更新が必要かをグラフにしたものです。学習係数が **0.032** のときに最速で最小値にたどり着きます。



$y = x^4 - 8x^2 + 16$ をグラフにすると以下ようになります。実を言うとそのグラフは極小値を2つ持ちます。今回の条件では、多くの方が $x = 2$ に対応する極小値に辿り着いていると思います。これは初期値  $x^{(0)}$ を2.5にしたためです。 $x$ の初期値  $x^{(0)}$ を $-2.5$ とすると、 $x = -2$ に対応する最小値の所に辿り付くことでしょう。このように、勾配降下法では学習係数だけでなく初期値も非常に重要となってきます。

