機械学習・ディープラーニングのための 基礎数学講座　確率・統計

SkillUP AI

3章
離散型確率分布
解答

例題

例題１ ：確率変数

下記のデータの各列をカテゴリ変数、離散変数、連続変数に分類せよ

年齢：離散変数

血圧：連続変数

肺活量：連続変数

性別：カテゴリ変数

病気：カテゴリ変数

体重：連続変数

例題２：確率変数の期待値・分散・標準偏差

以下の表について、確率変数Xの期待値、分散および標準偏差を求めよ

X	確率 $p(x)$
1	0.4
2	0.2
3	0.3
4	0
5	0.1
合計	1.0

平均

$$\mu = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0.1 = 2.2$$

分散

$$\sigma^2 = (1 - 2.2)^2 \cdot 0.4 + (2 - 2.2)^2 \cdot 0.2$$

$$+(3 - 2.2)^2 \cdot 0.3 + (4 - 2.2)^2 \cdot 0 + (5 - 2.2)^2 \cdot 0.1$$

$$= 1.56$$

標準偏差

$$\sigma = \sqrt{1.56} \approx 1.25$$

演習

演習１：確率変数

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
$P(X=x)$	1/10	1/5	2/5	1/5	1/10

(1)$E[X]=\mu=\sum xP(X=x)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$

(2)$V[X]=\sum(x-\mu)^2P(X=x)$

$$=(0-2)^2\times\frac{1}{10}+(1-2)^2\times\frac{1}{5}+(2-2)^2\times\frac{2}{5}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}+(4-2)^2\times\frac{1}{10}$$

$=1.2$

(3) $E[X^2]=\sum x^2P(X=x)=0\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}=5.2$

(4) $V[X]=E[X^2]-E[X]^2=5.2-4=1.2$

演習２：離散型確率分布

一様分布

$$P(X=x)=\frac{1}{n}\ (x=1,\dots,n)$$

において

(1) $E[X]$を求めよ

(2) $V[X]=E[X^2]-E[X]^2$を用いて$V[X]$求めよ

$$E[X]=\sum x\,p(x)=\sum x\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum x=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

$$E[X^2]=\sum x^2\,p(x)=\frac{1}{n}\sum x^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V[X]=E[X^2]-E[X]^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12}$$

演習３：確率変数

表が出る確率が$\frac{1}{3}$のコインを一回振る試行を考える
表が出たら1, 裏がでたら0となる確率変数Xを考えたとき

(1) 期待値$E[X]$を求めよ

(2) 分散$V[X]$を求めよ

(3) 標準偏差$\sqrt{V[X]}$を求めよ

確率変数Xが1となる確率が$\frac{1}{3}$で0となる確率が$\frac{2}{3}$のベルヌーイ分布を考えればよい

平均：$\mu = p = \frac{1}{3}$、**分散：**$\sigma^2 = p(1-p) = \frac{2}{9}$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{p(1-p)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

演習４：離散型確率分布

１つのサイコロを５回振るとき、1の目が3回出る確率を求めよ

確率変数Xは1の目が出た総数を表すとすると、Xは二項分布$B\left(5,\frac{1}{6}\right)$に従う

$$P(X=3)= {}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-3} \approx 0.032$$

WolframAlphaで、$B(5,1/6)$を意味する
『binomial distribution[5,1/6]』というコマンドを打ってみてください

演習５：離散型確率分布

打率4割の打者がいる。この打者が5回打席に立って4回以上ヒットを打つ確率はどれくらいであろうか？

確率変数Xをヒットを打った総数とすると、Xは二項分布$B\left(5,\frac{4}{10}\right)$に従う

$$P(X=4)={}_5C_4\left(\frac{4}{10}\right)^4\left(1-\frac{4}{10}\right)^{5-4}=0.0768$$

$$P(X=5)={}_5C_5\left(\frac{4}{10}\right)^5\left(1-\frac{4}{10}\right)^{5-5}=0.01024$$

$$P(X=4)+P(X=5)=0.08704$$

演習６：離散型確率分布

ある道路で交通量調査を180分間行い、トラックが30台通ったとする。トラックの通過台数がポアソン分布に従うとして以下の問いに答えよ*

(1) トラックの平均通過率(台/時)を求めよ

(2) その道路でトラックが60分間で5台通る確率を求めよ

(1) 平均通過率(台/時)$=\frac{30}{3}=10$

(2)確率変数Xはトラックの通過台数を表すとする。λは「ある期間に平均何回事象が起こったか」を表すので$\lambda=10$。$Po(10)$は『１時間に平均10回トラックが通る道路で、実際に１時間でX台通る確率』を表すことになるので

$$P(X=5)=\frac{10^5}{5!}e^{-10}\approx 0.037$$

演習７：離散型確率分布

ポアソン分布において

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} (x = 0, 1, \dots)$$

が正規性を満たすことを確認せよ

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

確かにポアソン分布は正規性を満たしている

なお計算の途中で$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$を用いている