機械学習・ディープラーニングのための
基礎数学講座　微分・線形代数

SkillUP AI

1章
様々な関数の微分

例題解答

例題１ ：関数

以下(1)-(3)のグラフを描け

https://www.wolframalpha.com
で以下のコードを打って確認して下さい

(1) $y = 2x + 1$ Plot[2x+1, {x, -5, 5}]

(2) $y = x^2 + 1$ Plot[x^2+1, {x, -5, 5}]

(3) $y = 3^x$ Plot[3^x, {x, -5, 5}]

例題１：関数

以下(4)-(7)を計算せよ

(4) $\log_2 8 + \log_3 9 = 3 + 2 = 5$

(5) $\log_a a = 1$

(6) $\log_a 1 = 0$

(7) $\log_3 \sqrt{9} = \log_3 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 9 = \frac{2}{2} = 1$

例題２：関数

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

例題３：合成関数

$$f(x) = 2x + 3, \qquad g(x) = 2x^2, \qquad h(x) = x^2 + x$$

のとき、以下の合成関数を求めよ

(1) $f \circ g(x) = 2 \cdot g(x) + 3 = 2(2x^2) + 3 = 4x^2 + 3$

(2) $g \circ f(x) = 2 \cdot \left(f(x)\right)^2 = 2(2x + 3\ )^2 = 8x^2 + 24x + 18$

(3) $f \circ g \circ h(x) = f \circ \left(g \circ h(x)\right) = f \circ (2h(x)^2)$

$$= f \circ \{2(x^2 + x)^2\} = 2\{2(x^2 + x)^2\} + 3 = 4(x^2 + x)^2 + 3$$

例題 4 ：極限

$$(1)\ \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{2x^2-x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+4)}{(x-2)(2x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+4)}{(2x+3)}=\frac{10}{7}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)}{(x+5)}=0$$

例題５ ： 1変数n次多項式

以下(1)-(3)式を微分せよ

(1) $y' = -5x^4 + \frac{2}{3}x + x^{-2}$

(2) $y' = \frac{1}{3}(x^3)' + \frac{1}{2}(x^2)' + (x)' + (1)' = x^2 + x + 1 + 0 = x^2 + x + 1$

(3) $y' = \frac{1}{x} + e^x + \cos x - \sin x$

例題６：合成関数の微分

(1) $h(x) = (x^2 + 4)^2$ をxで微分せよ

(2) $y = (x^2 + 3x + 1)^4$ をxで微分せよ

(1) $h'(x) = 2(x^2 + 4) \times 2x = 4x(x^2 + 4)$
(2) $y' = 4(x^2 + 3x + 1)^3(2x + 3)$

例題７：合成関数の微分

(1)　$y = e^{-7x}$ を x で微分せよ。

$$y' = e^{-7x}(-7x)' = -7e^{-7x}$$

(2)　$y = (2x+3)^3$ を x で微分せよ

$$y' = 3(2x+3)^2(2x+3)' = 6(2x+3)^2$$

(3)　$y = \sqrt{-3x+1}$ を x で微分せよ

$$y' = \frac{1}{2}(-3x+1)^{-\frac{1}{2}}(-3x+1)' = -\frac{3}{2\sqrt{-3x+1}}$$

例題８：積の微分

(1)　$x^3 e^x$ を微分せよ。

$$(x^3 e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$$

(2)　$x^{10} e^{2x}$を微分せよ。 ⇒合成関数の微分との合わせ技

$$(x^{10} e^{2x})' = 10x^9 e^{2x} + 2x^{10} e^{2x} = 2x^9 e^{2x} (5 + x)$$

(3)　xe^{x^2} を微分せよ。 ⇒合成関数の微分との合わせ技

$$\left(xe^{x^2}\right)' = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = (1 + 2x^2) e^{x^2}$$

例題９：商の微分

(1) $y = \frac{x^2+2}{x+1}$

$$y' = \frac{(x^2+\ 2)'(x+1)-(x^2+\ 2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$$

(2) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{(e^x)'(\sqrt{x})-(e^x)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{e^x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x}{x} = \frac{2xe^x-e^x}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^x}{2x^{\frac{3}{2}}}(2x-1)$$

(3) $y = \frac{1}{x^3+1}$

$$y' = \frac{(1)'(x^3+1)-(1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$$

演習解答

演習１：関数

以下(1)-(4)を計算せよ（$a(>0)$, k, lは定数）

(1) $e^2 \cdot e^3 = e^5$

(2) $e^{2a} \cdot e^{5a} = e^{7a}$

(3) $2ke + 3ke + 5le = 5ke + 5le = 5(k+l)e$

(4) $(e^2)^3 + (e^x)^3 = e^6 + e^{3x}$

以下(5)-(8)を計算せよ（$a(>0)$, k, lは定数）

(5) $k\log_3 9 + l\log_2 8 = 2k + 3l$

(6) $\log_a a^k = k\log_a a = k$

(7) $\log_a 1 + \log e = 0 + 1 = 1$

(8) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 27^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 27 = \frac{3}{2}$

演習３：極限

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-4x-16}{5x^2-17x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(2x+4)}{(x-4)(5x+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+4)}{(5x+3)}=\frac{12}{23}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)}{(2x-1)}=0$

演習４：基本的な関数の微分

(1) $y = \log(2x+1)$

$$y' = \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}$$

(2) $y = 4x^3 + 3x^2 + x^{-1}$

$$y' = 12x^2 + 6x - x^{-2}$$

(3) $y = \cos 3x - \sin(-2x+1)$

$$y' = -\sin 3x\,(3x)' - \cos(-2x+1)\,(-2x+1)'$$

$$= -3\sin 3x + 2\cos(-2x+1)$$

演習５：合成関数の微分

（1）$y = \sqrt{2x+3}$

$$y' = (2x+3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+3)' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

(2) $y = \log(x^2 + 2\sin^2 x + e^{2x})$

$$y' = \frac{(x^2 + 2\sin^2\ x + e^{2x})'}{x^2 + 2\sin^2\ x + e^{2x}} = \frac{2x + 4\sin x\,(\sin x)' + e^{2x}(2x)'}{x^2 + 2\sin^2\ x + e^{2x}}$$

$$= \frac{2x + 4\sin x\cos x + 2e^{2x}}{x^2 + 2\sin^2\ x + e^{2x}}$$

演習５（２）補足

$\sin^2 x$のxによる微分について

$\sin^2 x$の微分は公式に載っていないので、合成関数の微分を使うことを考える

$\sin x = t$とおくと

$$\sin^2 x = t^2; t = \sin x$$

$$\frac{d(\sin^2 x)}{dx} = \frac{d(\sin^2 x)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d(t^2)}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d(t^2)}{dt}\frac{d(\sin x)}{dx} = 2t \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x$$

演習６：積の微分

(1) $y = (2x+1)(3x+1)$

$$y' = (2x+1)'(3x+1) + (2x+1)(3x+1)'$$

$$= 2(3x+1) + 3(2x+1) = 12x + 5$$

(2) $y = (e^{-2x}+1)(3\log x + 1)$

$$y' = (e^{-2x}+1)'(3\log x + 1) + (e^{-2x}+1)(3\log x + 1)'$$

$$= -2e^{-2x}(3\log x + 1) + \frac{3}{x}(e^{-2x}+1)$$

$$= -6e^{-2x}\log x - 2e^{-2x} + \frac{3e^{-2x}}{x} + \frac{3}{x}$$

演習７：商の微分

(1) $y = \frac{x^2+2}{x+1}$

$$y' = \frac{(x^2+2)'(x+1) - (x^2+2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$$

(2) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{(e^x)'(\sqrt{x}) - (e^x)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{e^x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x}{x} = \frac{2xe^x - e^x}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^x}{2x^{\frac{3}{2}}}(2x-1)$$

(3) $y = \frac{1}{x^3+1}$

$$y' = \frac{(1)'(x^3+1) - (1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$$

演習 7 (1)別解

$y = \frac{x^2+2}{x+1}$を$y = (x^2 + 2) \cdot \frac{1}{x+1}$と考えて積の微分法を使って微分しても良い

$$y' = \left\{(x^2 + 2) \cdot \frac{1}{x+1}\right\}' = (x^2 + 2)' \cdot \frac{1}{x+1} + (x^2 + 2) \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)'$$

$$= 2x \cdot \frac{1}{x+1} + (x^2 + 2)\left\{\frac{(1)'(x+1) - 1 \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{2x}{x+1} + (x^2 + 2) \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2+2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x+1) - x^2 - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$$

宿題解答

宿題１：微分

(1) $y = -\frac{1}{x}$

$$y' = -\frac{1}{x} = -x^{-1} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

(2) $y = \cos 2x$

$$y' = -\sin 2x\,(2x)' = -2\sin 2x$$

(3) $y = 4^x$

$$y' = 4^x \log 4$$

宿題２：微分

(4) $y = \sin 3x$

$$y' = \cos 3x\,(3x)' = 3\cos 3x$$

(5) $y = e^{-x}$

$$y' = -e^{-x}$$

(6) $y = (2x+1)(3x+1)$

$$y' = (2x+1)'(3x+1) + (2x+1)(3x+1)'$$

$$= 2(3x+1) + 3(2x+1) = 12x + 5$$

宿題３：微分

(7) $y = (\log 2x^2)^2$

$$y' = 2(\log 2x^2)(\log 2x^2)'$$

$$= 2(\log 2x^2)\frac{1}{2x^2}(2x^2)'$$

$$= 2(\log 2x^2)\frac{1}{2x^2}4x$$

$$= \frac{4}{x}\log 2x^2$$

宿題４ ：微分

(8) $y=(e^{-2x}+1)(3\log x+1)$

$$y'=(e^{-2x}+1)'(3\log x+1)+(e^{-2x}+1)(3\log x+1)'$$

$$=-2e^{-2x}(3\log x+1)+\frac{3}{x}(e^{-2x}+1)$$

$$\left(=-6e^{-2x}\log x-2e^{-2x}+\frac{3e^{-2x}}{x}+\frac{3}{x}\right)$$

宿題５：微分

(9) $y = \cos^4(3x-2)$

$$y' = 4\cos^3(3x-2)\{\cos(3x-2)\}' = 4\cos^3(3x-2)\{-\sin(3x-2)\}(3x-2)'$$

$$= 4\cos^3(3x-2)\{-\sin(3x-2)\}\cdot 3$$

$$= -12\cos^3(3x-2)\sin(3x-2)$$

次のページに詳細な解答があります

頭の中で合成関数の微分ができるようになるまで演習をするのが理想です

演習５（２）補足

$y=\cos^4(3x-2)$のxによる微分について

$\cos^4(3x-2)$の微分は公式にないので、合成関数の微分を使うことを考える

$\cos(3x-2)=t$とおくと　$\cos^4(3x-2)=t^4; t=\cos(3x-2)$

$$\frac{d(\cos^4(3x-2))}{dx}=\frac{d(\cos^4(3x-2))}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{d(t^4)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{d(t^4)}{dt}\boxed{\frac{d(\cos(3x-2))}{dx}}$$

ここで再度合成関数の微分
この問題の難しさはここ

$\frac{d(\cos(3x-2))}{dx}$について$3x-2=u$とおくと

$$\frac{d(\cos(3x-2))}{dx}=\frac{d(\cos(u))}{du}\frac{du}{dx}=-\sin u\cdot 3=-3\sin(3x-2)$$

最終的に

$$\frac{d(\cos^4(3x-2))}{dx}=\frac{d(t^4)}{dt}\frac{d(\cos(3x-2))}{dx}=4t^3\cdot\{-3\sin(3x-2)\}=-12\cos^3(3x-2)\sin(3x-2)$$

宿題6 ：微分

(10) $y = (x^2+1)^3 e^{5x^3}$

$$y' = \{(x^2+1)^3\}'\left(e^{5x^3}\right) + (x^2+1)^3\left(e^{5x^3}\right)'$$

$$= \{3(x^2+1)^2(x^2+1)'\}\left(e^{5x^3}\right) + (x^2+1)^3 e^{5x^3}(5x^3)'$$

$$= 3(x^2+1)^2 \cdot 2x \cdot e^{5x^3} + (x^2+1)^3 e^{5x^3} \cdot 15x^2$$

$$= x(x^2+1)^2 e^{5x^3}\{6 + 15x(x^2+1)\}$$

$$= x(x^2+1)^2 e^{5x^3}(15x^3 + 15x + 6)$$

$$= 3xe^{5x^3}(x^2+1)^2\,(5x^3+5x+2)$$