機械学習・ディープラーニングのための
基礎数学講座　確率・統計

SkillUP AI

2章
確率
解答

例題解答

例題１：確率の基礎

試行：１つのサイコロを一回投げ、出た目を観察する

（１）標本空間は？

標本空間は$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

（２）根元事象は？

1から6までの目の一つ一つ

例題２：確率の基礎

試行：１つのサイコロを一回投げ、出た目を観察する

事象A：偶数の目が出る

事象B：1,2,3の目が出る

(1) $P(A \cap B)$を求めよ

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

(2) $\mathrm{P}(A)$を求めよ

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(3) $P(B)$を求めよ

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(4) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B)$を加法定理を使って求めよ

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

例題３：確率の基礎

試行：サイコロを２つ、１回ずつ投げた

「少なくとも片方が偶数になる」という事象を事象Aとすると

(1) 余事象A^Cは何か

A^C：「両方とも偶数ではない（＝両方とも奇数である）」

(2) P(A)を求めよ

$$P(A^C) = \frac{3}{6} * \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

例題４：条件付き確率

３本当たり、５本はずれのくじをAくん、Bくんが順に引く。
引いたくじはもとに戻さないとする。
事象A , Bをそれぞれ

A : Aくんが当たりを引く

B : Bくんが当たりを引く

とするとき、$P(B|A) =$を求めよ

解答)

Aくんが当たりを引いたことが確定しているので

くじの中には２本の当たりと５本のはずれが入っている

よってBくんが当たりを引く確率$P(B|A) = \frac{2}{7}$

例題５：条件付き確率

	電車通勤	電車通勤ではない
本社勤務	20	5
本社勤務でない	30	40

事象A：電車通勤である
事象B：本社勤務である

ランダムに選んだ1人が**本社勤務**であった

このときその人が**電車通勤**である確率を条件付き確率の公式を用いて求めよ

解答）

電車通勤で本社勤務の人が 20人、本社勤務の人が 20+5=25人なので

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{20/95}{25/95} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

例題６：ベイズの定理

(1) この国で、病気にかかっている人が陽性と判定される確率$P(B_1|A_1)$はいくらでしょうか

$$\frac{8}{10} = 0.8$$

(2) この国で、病気にかかっていない人が陽性と判定される確率$P(B_1|A_2)$はいくらでしょうか。

$$\frac{(10-9)}{10} = 0.1$$

例題６：ベイズの定理

(3) この国のある人に焦点を当てます。この人はまだ検診を受けていませんし、病気にかかっているかどうかも分かっていません。この人が病気Aにかかっている確率$P(A_1)$はいくらでしょうか

$$\frac{40}{10000} = 0.004$$

例題６：ベイズの定理

(4) この人が病気Aにかかっていない確率$P(A_2)$はいくらでしょうか

$$\frac{(10000-40)}{10000}=0.996$$

(5) この人が検査を受けた場合、陽性になる確率$P(B_1)$は

いくらでしょうか。

$$\frac{40}{10000}\cdot 0.8+\frac{10000-40}{10000}\cdot 0.1=0.1028$$

例題６：ベイズの定理

(6) この人が検査を受けたところ、陽性の判定になりました。この人が病気Aにかかっている確率$P(A_1|B_1)$はどれくらいでしょうか。ベイズの定理を使って求めましょう。

$$\frac{\frac{8}{10}\cdot\frac{40}{10000}}{\frac{40}{10000}\cdot 0.8+\frac{10000-40}{10000}\cdot 0.1}=0.03112840$$

例題６：ベイズの定理

(7)この人が検査を受ける前と受けた後で、病気Aにかかっている確率はどのように変化したでしょうか？

0.4%から3.1%に上昇した

→検査を受けたことで、病気Aにかかっている確率が上昇した。

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

ここで用いたベイズの定理は左記の式

左辺は、計算によって求めたい確率

→計算後にわかる確率であるため、事後確率と呼ぶ

右辺の$P(A)$は、計算する前にわかっていた病気Aになる確率

→これは事前確率と呼ばれる。

演習解答

演習１：確率

３枚の硬貨を同時に投げるとき表が２枚出る確率を求めよ

また、少なくとも1枚表が出る確率を求めよ

解答)

各コイン表・裏の二通りの出方があるので３枚のコインの表・裏の出方は８通り。

表が２枚出る出方には(表・表・裏), (表・裏・表), (裏・表・表)の３通りがあるので

表が2 枚出る確率は$\frac{3}{8}$である。

少なくとも1 枚表が出るという事象は、表が1 つも出ないという事象の余事象であるから

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

演習２：ベイズの定理

事象A: 検査で疲れていると判定される

事象B1: 実際に疲れてる

事象B2: 実際には疲れていない

疲れていると判定されたときに実際に疲れている確率$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)}{P(A)} P(B_1)$を求める。

$$P(B_1) = \frac{70}{100}, \qquad P(B_2) = 1 - \frac{70}{100} = \frac{30}{100}$$

$$P(A|B_1) = \frac{95}{100}, \qquad P(A|B_2) = 1 - \frac{98}{100} = \frac{2}{100}$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \ \cap A) = P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2) = 0.671$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)}{P(A)} P(B_1) = \frac{0.95}{0.671} * 0.7 = 0.99105 \ldots \approx 0.991$$

宿題

解答

宿題１：条件付き確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0$$

乗法の定理

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

ベイズの定理

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0}$$

宿題２：ベイズの定理

「事象A: 女性である, 事象B: 男性である, 事象C1: 満足した, 事象C2: 満足しなかった」とする

満足しなかったと答えた人が女性である確率$P(A|C2) = \frac{P(C2|A)}{P(C2)}P(A)$を求める。

$$P(A) = \frac{180}{300} = 0.6, \qquad P(B) = \frac{120}{300} = 0.4$$

$$P(C2|A) = 1 - (\text{女性で満足している確率}) = 1 - \frac{75}{100} = 0.25$$

$$P(C2|B) = 1 - (\text{男性で満足している確率}) = 1 - \frac{50}{100} = 0.5$$

$$P(C2) = P(C2 \cap A) + P(C2 \cap B) = P(C2|A) * P(A) + P(C2|B) * P(B) = 0.65$$

$$P(A|C2) = \frac{P(C2|A)}{P(C2)}P(A) = \frac{0.25}{0.35} * 0.6 = 0.42857 \ldots \approx 0.429$$