機械学習・ディープラーニングのための
基礎数学講座　微分・線形代数

SkillUP AI

2章
微分の応用・偏微分

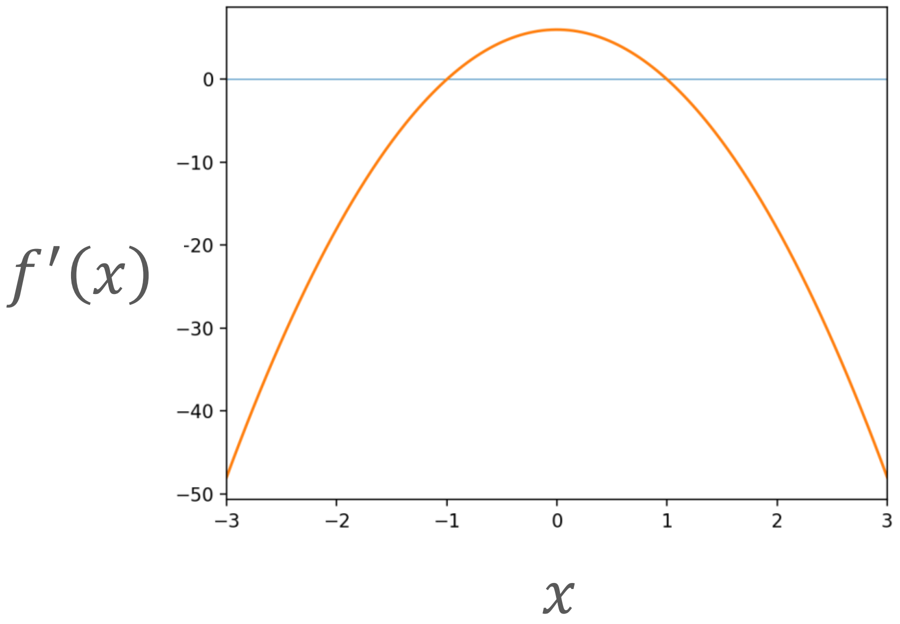
例題解答

例題１　：極値の判定

$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$より$f'(x) = 0$を解くと$x = \pm 1$

$x = 1$を境に$f'(x)$の値は正から負に変わるので極大。極大値は$f(1) = 4$

$x = -1$を境に$f'(x)$の値は負から正に変わるので極小。極小値は$f(-1) = -4$



例題２：高階微分

$f(x) = x^2 + e^{2x} + \sin x$について以下を計算せよ

(1) $\frac{df(x)}{dx} = 2x + 2\mathrm{e}^{2x} + \cos x$

(2) $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x + 2\mathrm{e}^{2x} + \cos x) = 2 + 4\mathrm{e}^{2x} - \sin x$

(3) $\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}(2 + 4\mathrm{e}^{2x} - \sin x) = 8e^{2x} - \cos x$

例題３：導関数と増減表

(1) 定義域を確認せよ

$$y = \log(x+1) - x$$

xの定義域は実数全体

$\log(x+1)$の定義域は真数条件$x+1>0$より$x>-1$

よって$y = \log(x+1) - x$の定義域は$x>-1$

例題３　：導関数と増減表

(2) 一階微分の情報を得よ

$y' = \frac{1}{x+1} - 1$より$y' = 0$を解くと$x = 0$（このx は定義域内）

x=0では$y' = 0$：関数の増減が一瞬止まる

$x < 0$ではy'の符号は正：関数yは増え続ける

$0 < x$ではy'の符号は負：関数yは減り続ける

例題３　：導関数と増減表

(1)　定義域：$x > -1$

(2) 一階微分の情報

- x=0では$y' = 0$：関数の増減が一瞬止まる
- $x < 0$ではy'の符号は正：関数yは増え続ける
- $0 < x$ではy'の符号は負：関数yは減り続ける

以上の情報を表にまとめて以下の増減表を得る

x	-1	…	0	…
y'		+	0	−
y		↗	0	↘

例題４　：関数のグラフの概形

以下の誘導に従い$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$のグラフの概形を描け

(1) 定義域を確認せよ

定義域は$x=0$を除く実数全体

(分母は0になってはいけない)

例題４　：関数のグラフの概形

以下の誘導に従い$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$のグラフの概形を描け

(2) 増減表をかけ

$$f'(x)=\frac{(2x+1)x-(x^2+x+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

$f'(x)=0$とすると$x=\pm 1$（$f''(x)=0$は実数解なし）

例題４　：関数のグラフの概形

以下の誘導に従い$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$のグラフの概形を描け

(2) 増減表をかけ

x	…	-1	…	0		1	…
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗	-1	↘		↘	3	↗

例題４　：関数のグラフの概形

(3) 漸近線を調べよ

漸近線が分かりやすい形になるべく分解すると$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$

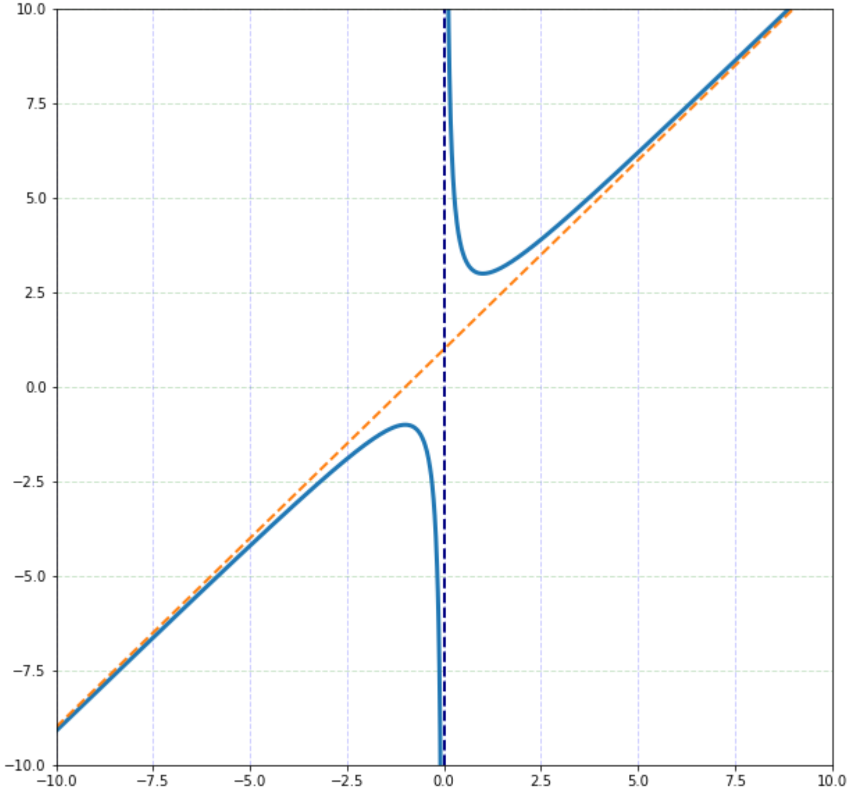
xが大きくなるほど$\frac{1}{x}$は0に近づいていき、 関数全体としては$x + 1$の影響が強くなる

xが右から０に近づくとき、関数全体としては無限大に発散する

xが左から０に近づくとき、関数全体としては負の無限大に発散する

例題４ ：関数のグラフの概形

$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$のグラフの概形は以下の通り



演習解答

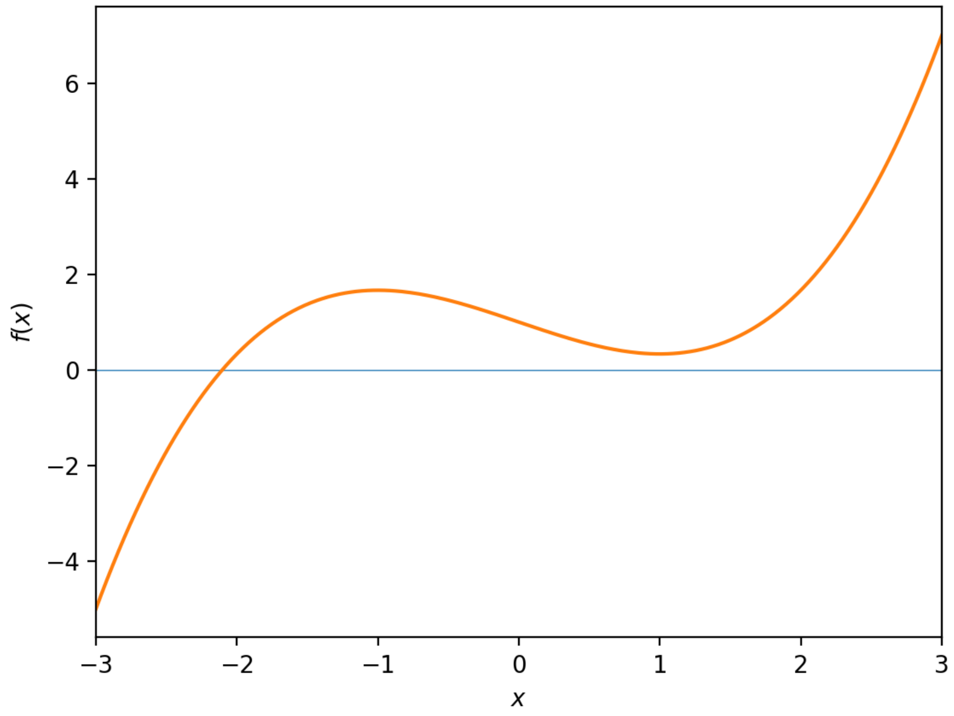
演習１：関数の概形

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$(定義域：実数全体)

$f'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$を解くと$x = \pm 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{5}{3}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗



演習２：偏微分

$\sin x + \cos^2 y$を各変数で偏微分せよ

(1) xで偏微分したとき

$$\frac{\partial(\sin x + \cos^2 y)}{\partial x} = \cos x$$

(2) yで偏微分したとき

$$\frac{\partial(\sin x + \cos^2 y)}{\partial y} = 2\cos y \cdot (-\sin y) = -2\sin y \cos y$$

演習３：高階微分

$f(x) = e^{ax}\log(ax)$について以下を計算せよ

(1) $\frac{df(x)}{dx} = (e^{ax})'(\log(ax)) + (e^{ax})(\log(ax))' = \left(a\log(ax) + \frac{1}{x}\right)e^{ax}$

(2) $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\left(a\log(ax) + \frac{1}{x}\right)e^{ax}\right\}$

$$= \left(a\log(ax) + \frac{1}{x}\right)'(e^{ax}) + \left(a\log(ax) + \frac{1}{x}\right)(e^{ax})'$$

$$= \left(a^2\log(ax) + \frac{2a}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{ax}$$

演習３：高階微分

$f(x) = e^{ax}\log(ax)$について以下を計算せよ

(3) $\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left\{\left(a^2\log(ax) + \frac{2a}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{ax}\right\}$

$$= \left(a^2\log(ax) + \frac{2a}{x} - \frac{1}{x^2}\right)'(e^{ax}) + \left(a^2\log(ax) + \frac{2a}{x} - \frac{1}{x^2}\right)(e^{ax})'$$

$$= \left(a^2\frac{1}{ax}a - \frac{2a}{x^2} + 2\frac{1}{x^3}\right)(e^{ax}) + \left(a^2\log(ax) + \frac{2a}{x} - \frac{1}{x^2}\right)(ae^{ax})$$

$$= \left(\frac{3a^2}{x} - \frac{3a}{x^2} + \frac{2}{x^3} + a^3\log(ax)\right)e^{ax}$$

宿題解答

宿題１：偏微分

以下の関数を x と y それぞれにおいて偏微分しなさい

$$f\,(x\,,y) = 3x^2 + 6xy + 8y^4$$

(1) xで偏微分したとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 6y$$

(2) yで偏微分したとき

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x + 32y^3$$

宿題２：二階偏微分

$f(x,y)=e^{x+3y}$のとき、次を求めよ。

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x+3y}$

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=3e^{x+3y}$

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=3e^{x+3y}$

(4) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=9e^{x+3y}$