別紙

[36] ‥ Olver

[9] ‥ Debye(1909) [50] ‥ Watson

1/2

Remark 3.1 *Using Debye's contour, Debye shows the following asymptotic expansions (3.13) and (3.15) of order α for $H^{(2)}_\alpha(x)$ and $J_\alpha(c)$ from their integral representations[9],[36],[50]. Watson gives an explanation on Debye's contour in his book[50].*

第2種 ハンケル関数

$$\begin{aligned} H^{(2)}_\alpha(x) \;\sim\; & \frac{\mathrm{i}}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\sin\tau_0-\tau_0\cos\tau_0)}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(\mathrm{i}\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{\frac{1}{2}}}-\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\cot^2\tau_0\right)\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(\mathrm{i}\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ & \left.+\left(\frac{3}{128}+\frac{7}{576}\cot^2\tau_0+\frac{385}{3456}\cot^4\tau_0\right)\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{(\mathrm{i}\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{\frac{5}{2}}}+\cdots\right], \end{aligned} \tag{3.13}$$

where τ_0 is a saddle point and defined through

$$\tau_0=-\mathrm{i}\log\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\right). \tag{3.14}$$

Since

$$\cos\tau_0=\frac{\alpha}{x},\quad \sin\tau_0=-\mathrm{i}\frac{\alpha}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2},$$

we have

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\sin\tau_0-\tau_0\cos\tau_0)} &= \exp\left\{-\alpha\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}+\alpha\log\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\right)\right\} \\ &= \exp\left(-\alpha\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\right)\times\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\right)^\alpha \\ &\sim \mathrm{e}^{-\alpha}\times\left(\frac{2\alpha}{x}\right)^\alpha=\left(\frac{2\alpha}{\mathrm{e}x}\right)^\alpha \quad \text{as } \alpha\to\infty. \end{aligned}$$

On the other hand, the following formulae hold.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\quad\text{and}\quad\left(\mathrm{i}\frac{x}{2}\sin\tau_0\right)^{1/2}\sim\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\quad\text{as } \alpha\to\infty.$$

Then the first term of (3.13) is asymptotically equal to

$$\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\left(\frac{2\alpha}{\mathrm{e}x}\right)^\alpha.$$

Hence we have

$$H^{(2)}_\alpha(x)\sim\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\left(\frac{2\alpha}{\mathrm{e}x}\right)^\alpha\quad\text{as } \alpha\to\infty.$$

In the same manner as this discussion, from the following Debye's formula[9] we have the asymptotic expansion of $J_\alpha(x)$ as $\alpha\to\infty$.

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) \;\sim\; & \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\sin\tau_0-\tau_0\cos\tau_0)}\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(\mathrm{i}\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{\frac{1}{2}}}+\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\cot^2\tau_0\right)\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(\mathrm{i}\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ & \left.+\left(\frac{3}{128}+\frac{7}{576}\cot^2\tau_0+\frac{385}{3456}\cot^4\tau_0\right)\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{(\mathrm{i}\frac{x}{2}\sin\tau_0)^{\frac{5}{2}}}+\cdots\right], \end{aligned} \tag{3.15}$$

2/E

where τ_0 is a saddle point and defined through

$$\tau_0 = -\mathrm{i}\log\left(\frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\right). \tag{3.16}$$

Lemma 3.1 *Let $\psi(\theta)$ be a 2π periodic continuous function. Suppose that the derivative $\psi'(\theta)$ exists almost everywhere, and that it belongs to $L^2(0,2\pi)$. Let ψ_n and $\Psi_n^{(N)}$ be the nth Fourier coefficient of ψ, and the nth discrete Fourier coefficients of ψ, respectively. Then the following equality holds.*

$$\Psi_n^{(N)} - \psi_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}-\{0\}} \psi_{n+Np} \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

PROOF. The function $\psi(\theta)$ is expanded in the following uniformly absolutely convergent Fourier series:

$$\psi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{3.18}$$

The nth discrete Fourier coefficient of ψ is given as follows.

$$\Psi_n^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \psi(\theta_j)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.19}$$

Inserting (3.18) into the right-hand of (3.19), we obtain (3.17). □

Proposition 3.3 *There exists a positive integer L, depending on κ and γ, with the following property: If $N \geq L$, then*

$$\left|G_n^{(N)} - g_n\right| \leq \frac{6}{N\pi}\left(\gamma^{N+|n|} + \gamma^{N-|n|}\right) \quad \text{for } n \text{ with } |n| \leq N/2.$$

PROOF. Fix a positive integer L_1 arbitrarily. Suppose that integers N, n and p satisfy

$$N \geq L_1, \quad |n| \leq N/2, \quad p \neq 0.$$

Then the following inequality holds.

$$|n + Np| \geq L_1/2. \tag{3.20}$$

In fact we have

$$|n+Np| \geq |Np| - |n| \geq N - |n| \geq N - N/2 = N/2 \geq L_1/2.$$

①は実のorder，②は複素のorderについての漸近展開についての論文です。

実はDebyeの論文には直接9.31が得られる公式はありません。9.3.1公式は別紙の計算でDebyeの公式から得られます。

Debyeは Debye's Contour と Watsonの補題から別紙の漸近展開を得ています。Watsonの補題についてはOlverの漸近展開の教科書にあります。これは鞍点法を具体的に計算するためのものですが，Watsonの補題の仮定として，Olverは鞍点の挙動が漸近パラメータ（この場合は次数(order)）に依存しないことを要求しています。しかし，Bessel, Hankelのケースでは次数が変化すると鞍点も動きます。

Debyeはこの場合も扱えるようにDebye's Contourを議論したと思われますが，これについてはまだ理解していません。Debye's Contourについては

Watson の Bessel 関数の教科書に解説があります。

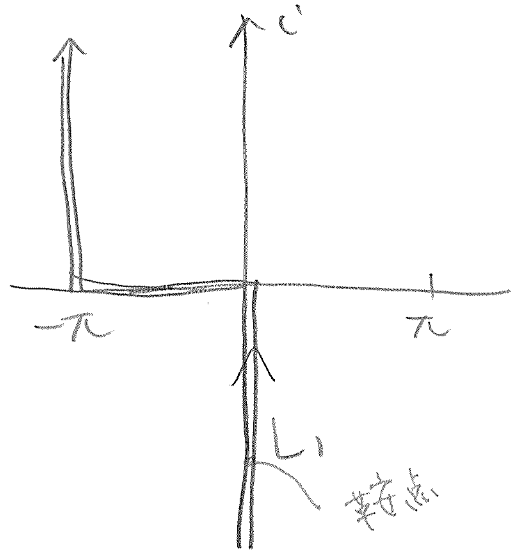
Debye が鞍点法を適用した積分は

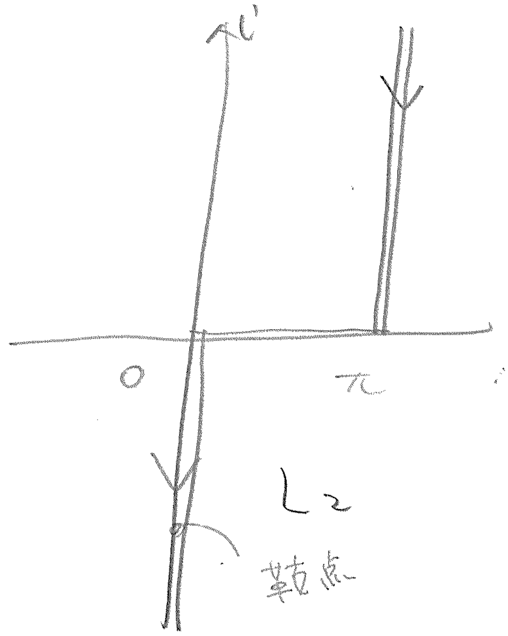
$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-ix\sin t + i\nu t}\,dt$$

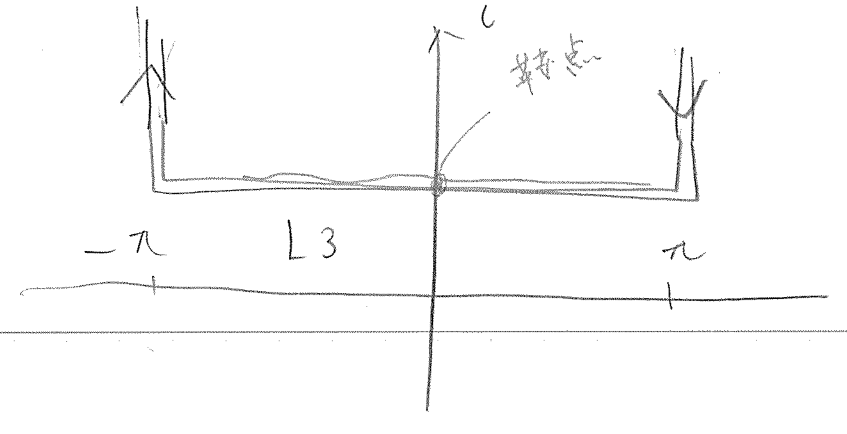
$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_2} e^{-ix\sin t + i\nu t}\,dt$$

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{L_3} e^{-ix\sin t + i\nu t}\,dt$$

積分路 L_1, L_2, L_3 は それぞれ







となります。

これらの積分公式の導出は、一松信, 特殊関数入門 森北出版 (1999) で Bessel の3項漸近式に Mellin 変換を行うことによって得ています。

「導出の概要」

① $xZ_{\nu+1} - 2\nu Z_\nu + xZ_{\nu-1} = 0$

に Mellin 変換をほどこして得られる微分方程式に適当な条件を課すと、ある積分が得られるが、これを級数表示すると、ベッセル関数 $J_\nu(x)$ であることがわかる。

② $J_\nu(x)$ の積分路の変形, $J_\nu(x)$ と $H^{(1)}_\nu(x)$, $H^{(2)}_\nu(x)$ の ν を介した関数等式などにより, 鞍点法を適用できるハンケル関数の積分表示を得る。

→ 一松 (p143 ~ p146)