極配置法

安齋智紀

July 6, 2017

1　2重極配置

質量 m の質点を PD 制御 (K_P, K_D) で動かす．力の飽和は考えない．Fig. 1 を参照．

1.1　フィルタなし

系の伝達関数を求める．目標値 (入力) を r，現在の値（出力) を x とする．それぞれラプラス変換した後の値は $R(s), X(s)$ とする．

$$\begin{aligned}(R-X)(K_P+K_Ds)\frac{1}{ms^2} &= X &(1)\\ R-X &= \frac{ms^2}{K_P+K_Ds}X &(2)\\ R &= \frac{K_P+K_Ds+ms^2}{K_P+K_Ds}X &(3)\\ G(s) &= \frac{X}{R}=\frac{K_Ds+K_P}{ms^2+K_Ds+K_P} &(4)\end{aligned}$$

伝達関数 $G(s)$ の極はその分母の根である．それを負の実数の重解にすればよいから，各ゲインを

$$ms^2+K_Ds+K_P = m(s+\omega)^2 = ms^2+2ms\omega+m\omega^2 \quad (5)$$

$$K_D = 2m\omega,\ K_P = m\omega^2\ (\omega>0) \quad (6)$$

と設計すれば，伝達関数は

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{K_Ds+K_P}{ms^2+K_Ds+K_P} &(7)\\ &= \frac{2m\omega s+m\omega^2}{ms^2+2m\omega s+m\omega^2} &(8)\\ &= \frac{\omega^2+2\omega s}{(s+\omega)^2} &(9)\end{aligned}$$

となる．

1.2　フィルタあり

フィルタなしのバージョンの伝達関数にステップ応答を与えるとオーバーシュートし，さらに分子の s があるせいでステップを入れた瞬間に入力が無限大に発散するという問題がある．そこでこの分子の項を打ち消すフィルタを設けてオーバーシュートせず収束する系を設計する．設計したい伝達関数は

$$G(s) = \frac{\omega^2}{(s+\omega)^2} \tag{10}$$

であるから，フィルタは

$$G_F(s) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 2\omega s} = \frac{\omega}{\omega + 2s} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\omega}s} \tag{11}$$

と設計できる．これは時定数 $\frac{2}{\omega}$ の LPF である．このフィルタを入力 R にかけることでこの伝達関数を設計できる（目標値との誤差 $R-X$ にかけるのではない）．なぜなら，

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} G_F(s)^{-1} = \frac{X(s)}{R(s)G_F(s)} \tag{12}$$

だからである．

2　三重極配置

考え方は二重極配置と特に変わらない．これに I 制御を追加する．

2.1　フィルタなし

系の伝達関数は

$$\begin{aligned}
(R-X)\left(\frac{K_I}{s} + K_P + K_D s\right)\frac{1}{ms^2} &= X & (13)\\
R - X &= \frac{ms^2}{\frac{K_I}{s} + K_P + K_D s} X & (14)\\
R &= \frac{\frac{K_I}{s} + K_P + K_D s + ms^2}{\frac{K_I}{s} + K_P + K_D s} X & (15)\\
G(s) &= \frac{X}{R} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_D}{ms^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I} & (16)
\end{aligned}$$

各ゲインを

$$ms^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I = m(s+\omega)^3 = ms^3 + 3ms^2\omega + 3ms\omega^2 + m\omega^3 \tag{17}$$

$$K_D = 3m\omega,\ K_P = 3m\omega^2,\ K_I = m\omega^3\ (\omega > 0) \tag{18}$$

と設計すれば，伝達関数は

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_D s^2 + K_P s + K_D}{ms^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I} && (19)\\
&= \frac{3m\omega s^2 + 3m\omega^2 s + 3m\omega}{ms^3 + 3m\omega s^2 + 3m\omega^2 s + m\omega^3} && (20)\\
&= \frac{\omega s^2 + 3\omega^2 s + 3\omega}{(s+\omega)^3} && (21)
\end{aligned}
$$

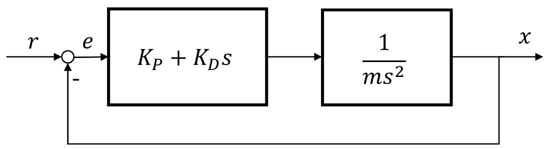
となる．

2.2　フィルタあり

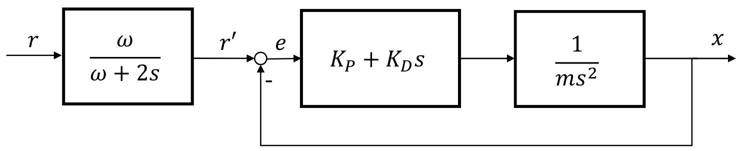
二重極配置と同じでこのままの伝達関数では必ずオーバーシュートするので分子を打ち消すフィルタを入れることを考える．フィルタの伝達関数は

$$
G_F(s) = \frac{\omega^3}{\omega s^2 + 3\omega^2 s + 3\omega} = \frac{\omega^2}{s^2 + 3\omega s + 3} \tag{22}
$$

である．



フィルタなし



フィルタあり

Figure 1