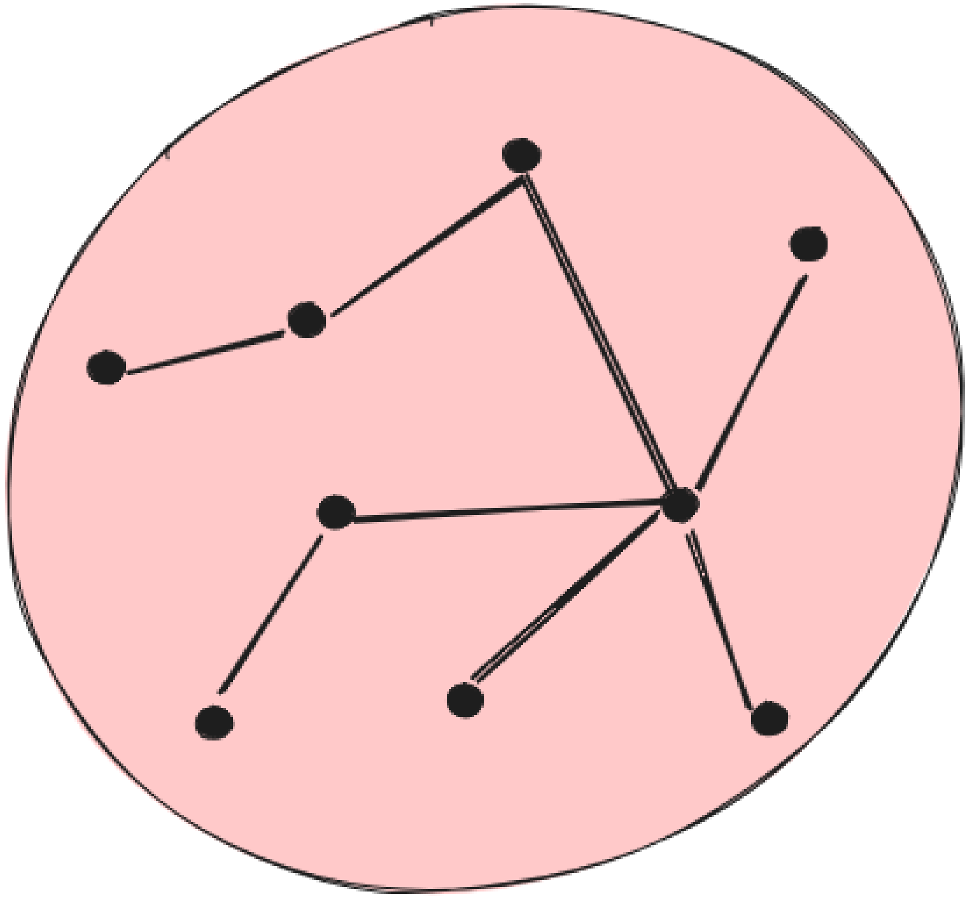
# Najcenejša vpeta drevesa

Uroš Čibej

14.5. 2025



# Ponovimo

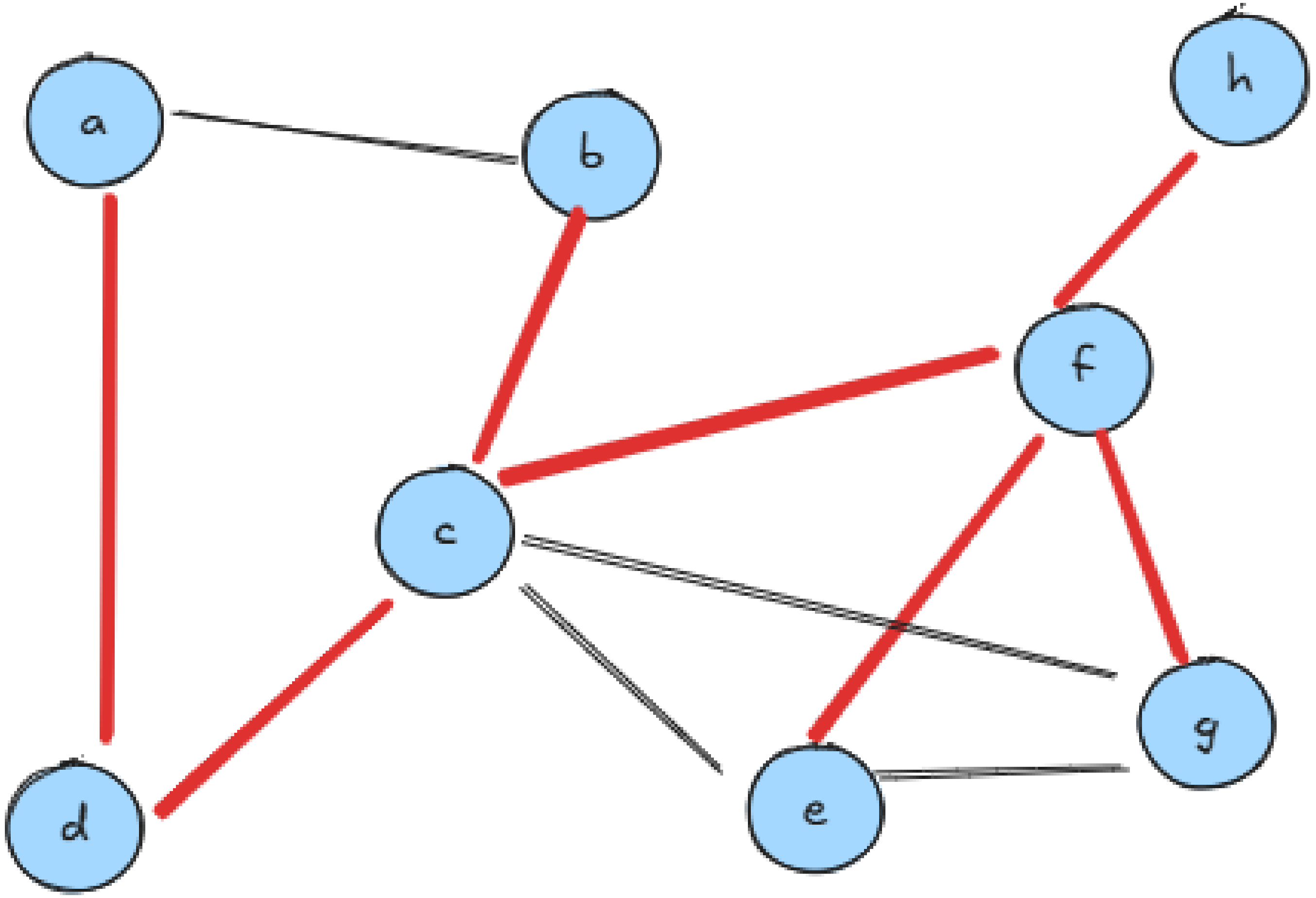
- poznamo osnovne koncepte grafov
- obhode(DFS, BFS)
- najkrajše poti v neuteženih grafih
- najkrajše poti v uteženih grafih

# Pregled

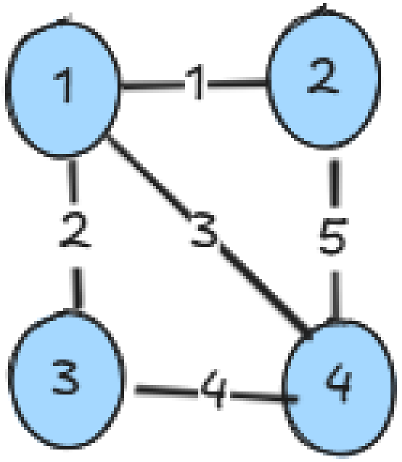
- problem najcenejšega vpetega drevesa
- praktični primeri
- Kruskalov algoritem
- podatkovna struktura disjunktne množice (Union-find)

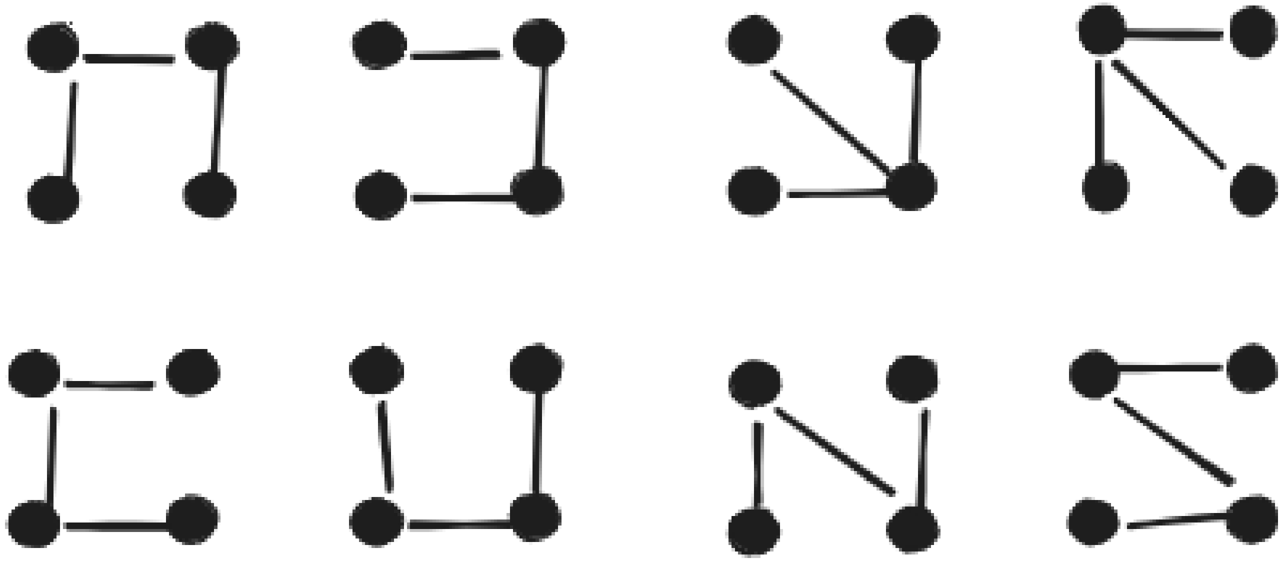
# Vpeto drevo

povezan podgraf brez ciklov, ki vključuje vsa vozlišča



# Koliko je vpetih dreves?



# Primeri uporabe

- načrtovanje omrežij
  - cestna omrežja
  - električna omrežja
  - računalniška omrežja
- gručenje podatkov (kateri podatki so si bolj "sorodni")
- analiza socialnih omrežij

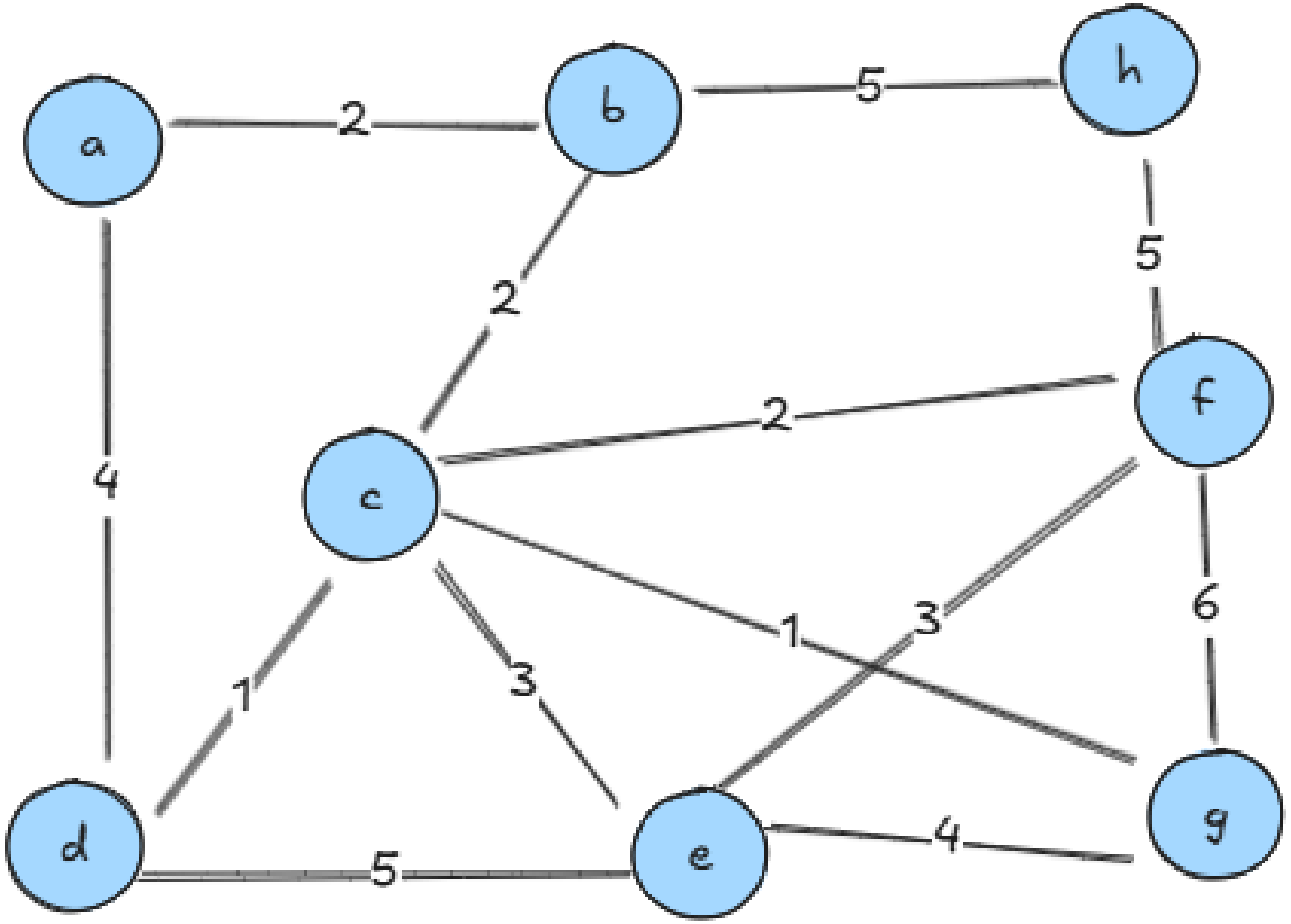
# Kruskalov algoritem

- Joseph Kruskal (1956)
- požrešni algoritem (tudi Dijkstra je požrešen)
- v **ogromnem** prostoru vseh možnih vpetih dreves je izjemno učinkovit

# Osnovna ideja

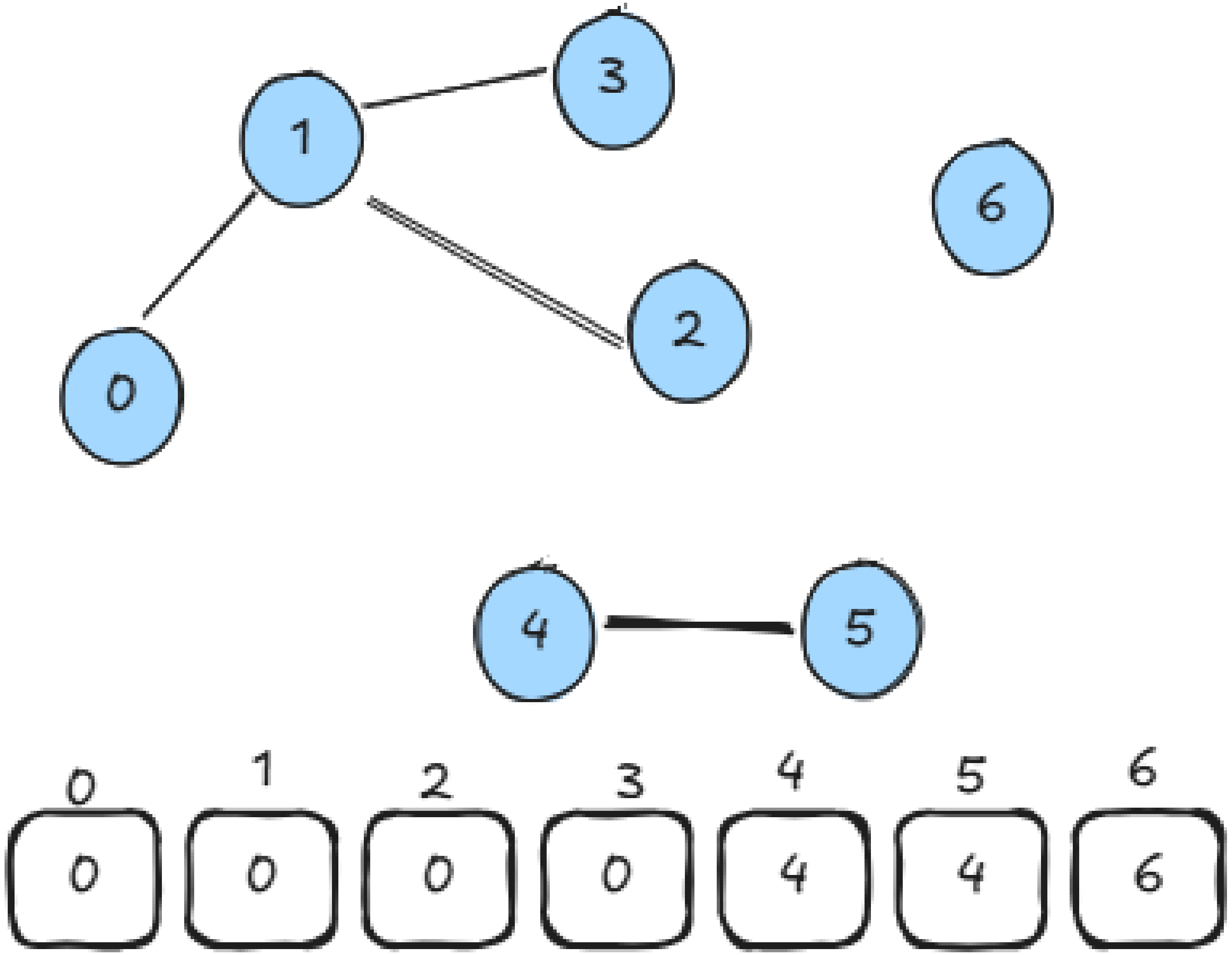
- Povezave uredimo (naraščajoče) po utežeh v seznam $L$
- Vsako vozlišče je eno drevo $T_v$
- za vsako povezavo $(u, v) \in L$
  - če povezava ne tvori cikla
    - povežemo drevesi $T_u$ in $T_v$ v novo drevo

# Primer



# Kako zaznamo cikel?

obe krajišči povezave v istem drevesu


3
1
6
2
0
4
5
0 1 2 3 4 5 6
0 0 0 0 4 4 6

# Implementacija (disjunktne množice)

```
class NaiveDisjointSets:
    def __init__(self, n):
        self.name = list(range(n))

    def union(self, u, v):
        # implementirajmo skupaj
```

# Implementacija (Kruskal)

```python
# uporaba naivnih disjunktnih množic
def kruskal_simple(self):
    ds = NaiveDisjointSets(self.n)
    edges = []
    for u in range(self.n):
        for v, w in self.adj_list[u]:
            if u < v:
                edges.append((w, u, v))
    edges.sort()
    mst = GraphWAL(self.n)
    for w, u, v in edges:
        if ds.name[u] != ds.name[v]:
            ds.union(u, v)
            mst.add_edge(u, v, w)
```

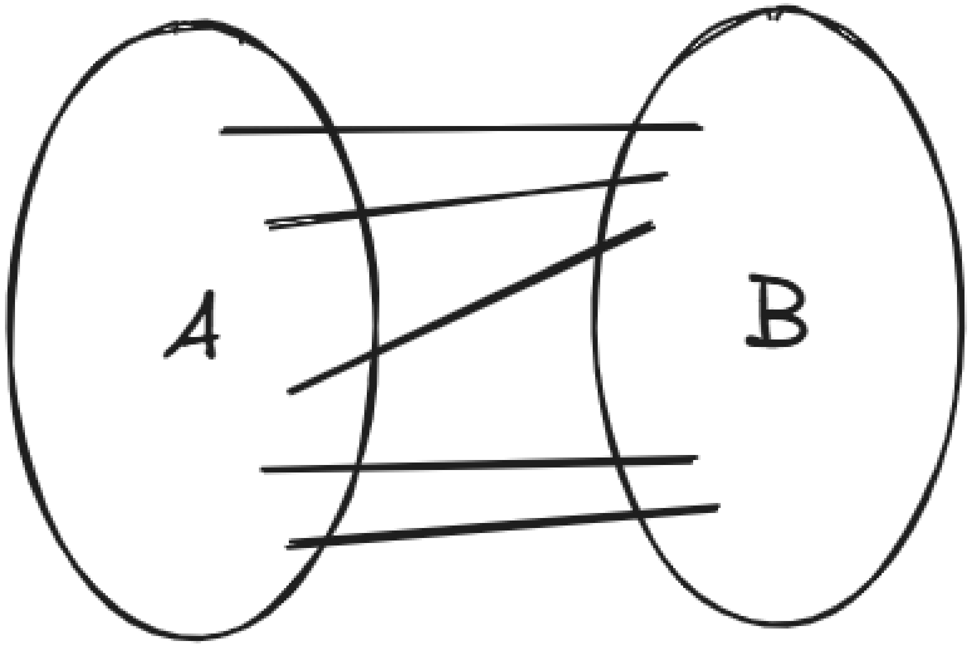
# Zakaj ta algoritem dela?

# Prerezi

Prerez določa razbitje množice vozlišč grafa v dve množici $A, B$

$$A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$$

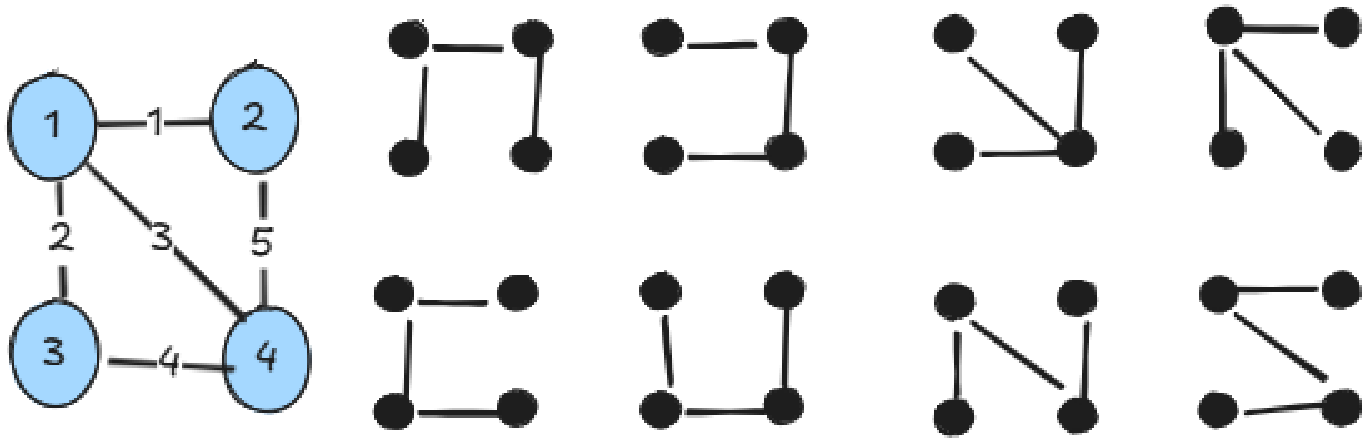
Prerez je množica povezav, ki potekajo od $A$ do $B$.



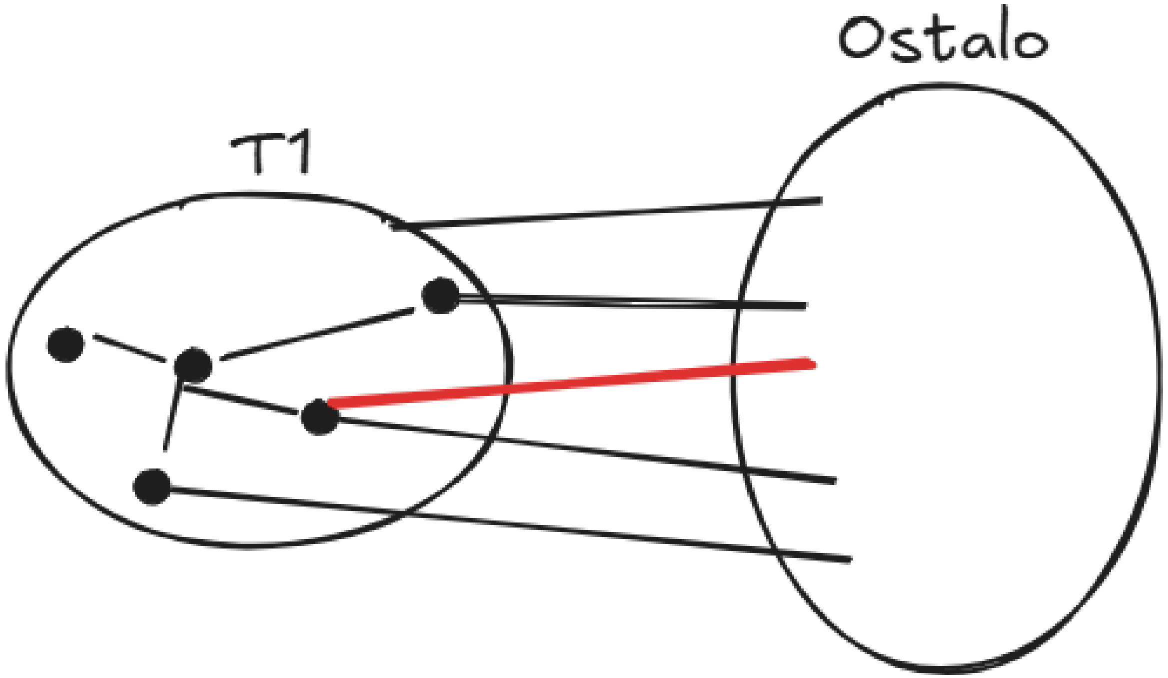
# Izrek

V vsakem prerezu je povezava z najmanjšo utežjo gotovo v najmanjšem vpetem drevesu

**Primer:**



# "Dokaz" pravilnosti



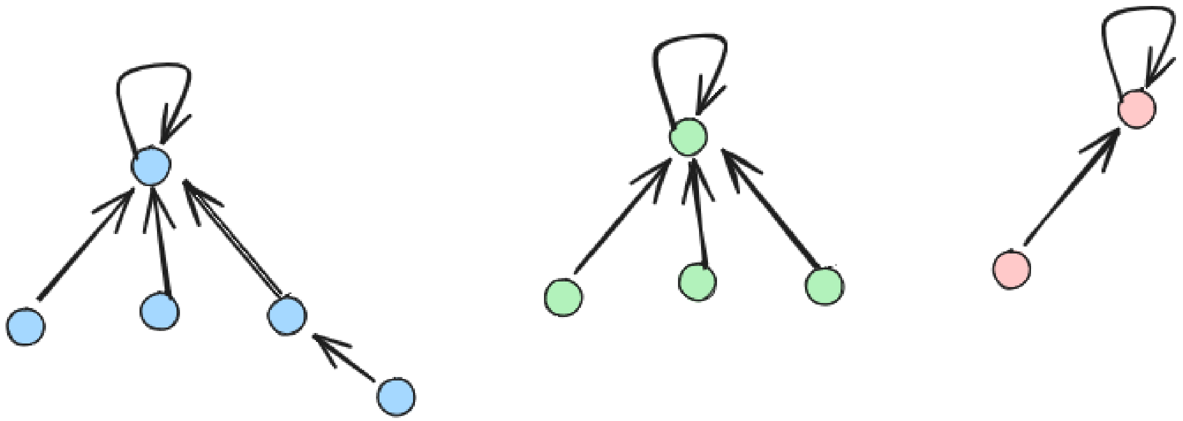
# Časovna zahtevnost

```
for w, u, v in edges:
        if ds.name[u] != ds.name[v]:
            ds.union(u, v)
            mst.add_edge(u, v, w)
```

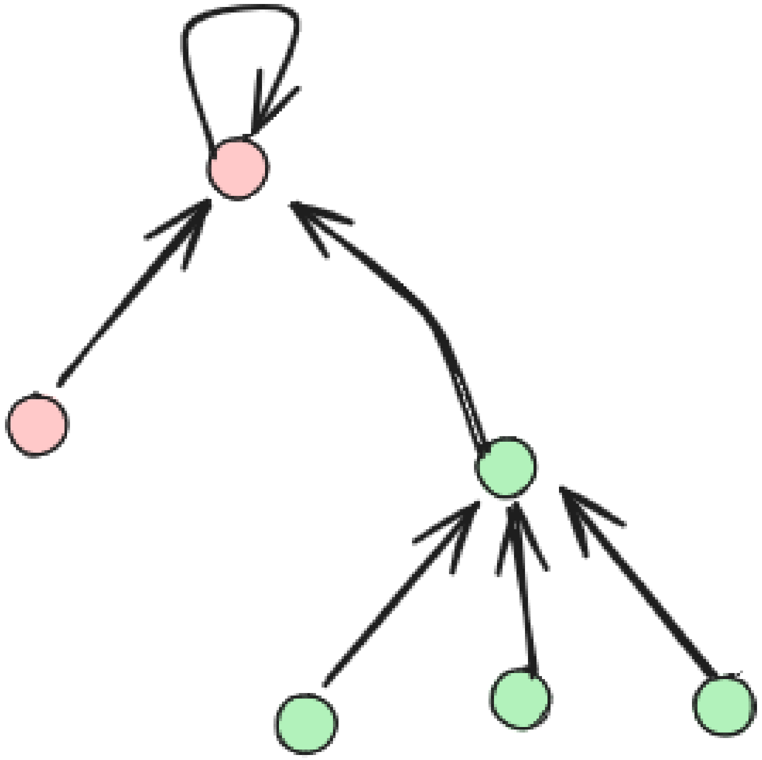
$$O(mn)$$

# Podatkovna struktura disjunktne množice

- Kateri dve operaciji potrebujemo
  - preverjanje pripadnosti isti množici (**find**)
  - unija dveh množic (**union**)

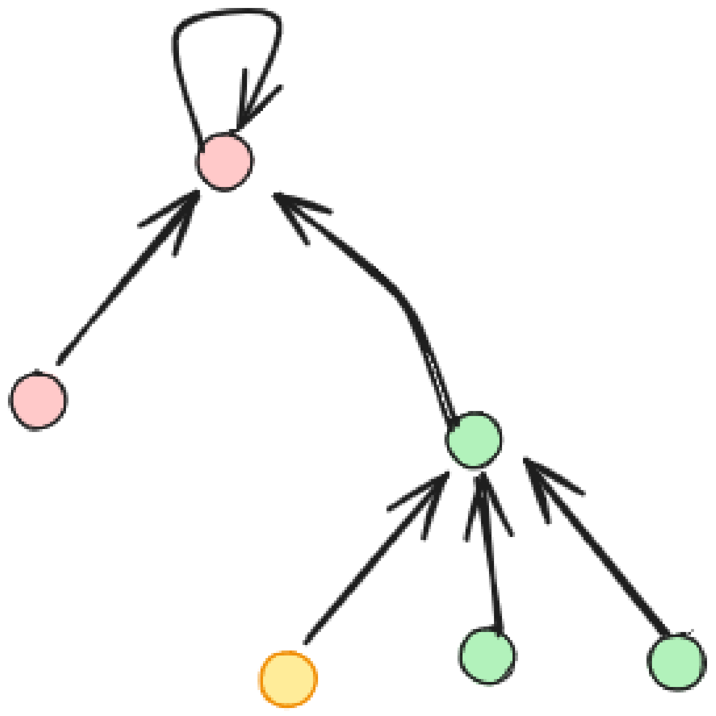


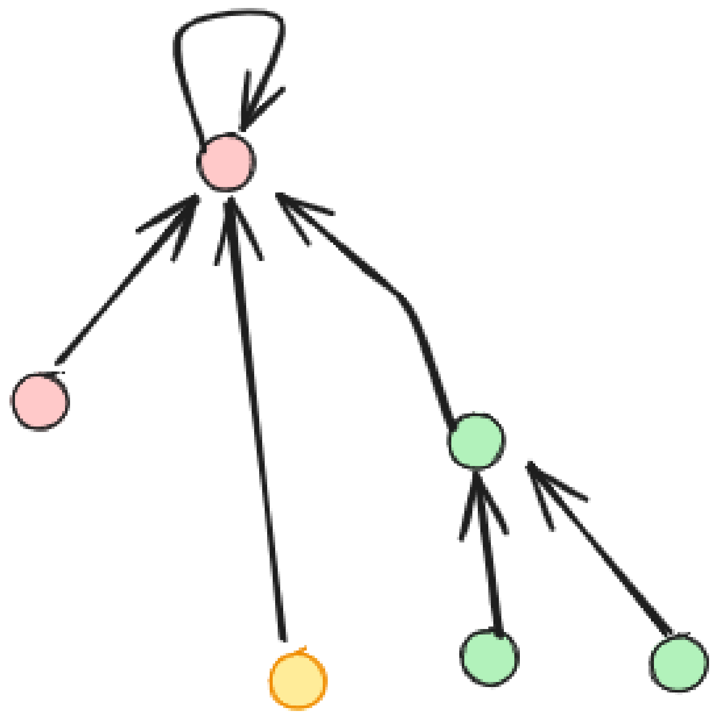
# Unija



# Iskanje korena

Pri iskanju korena lahko premaknemo vozlišča bližje (zmanjševanje globine):





# Implementacija

```python
class UnionFind:
    def __init__(self, n):
        self.parent = list(range(n))

    def find(self, u):
        if self.parent[u] != u:
            self.parent[u] = self.find(self.parent[u])
        return self.parent[u]

    def union(self, u, v):
        root_u = self.find(u)
        root_v = self.find(v)
        if root_u != root_v:
            self.parent[root_u] = root_v
```

# Časovna zahtevnost?

Skoraj konstantna za unije množic:

$$O(1)$$

Kruskal s to tehniko postane:

$$O(m)$$