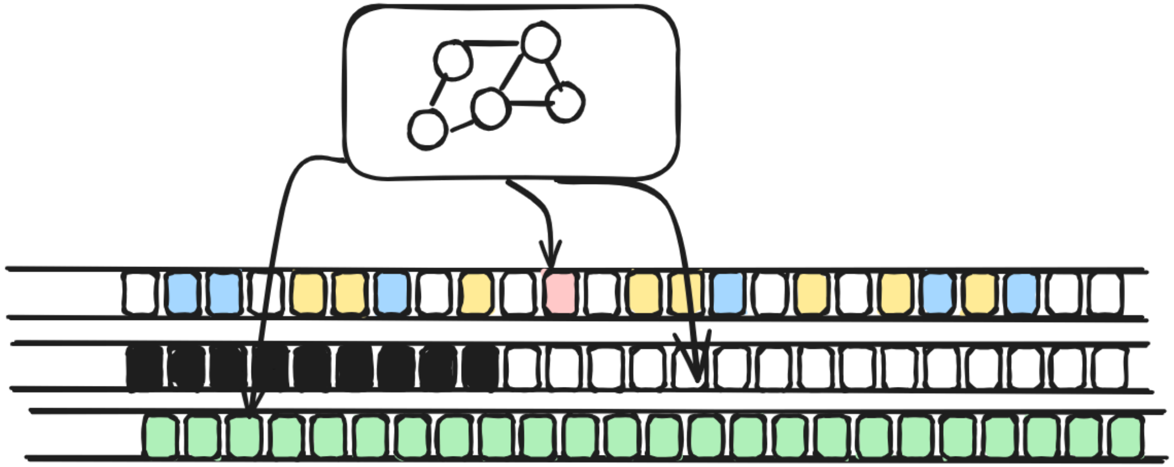
Turingovi stroji

Uroš Čibej



Pregled

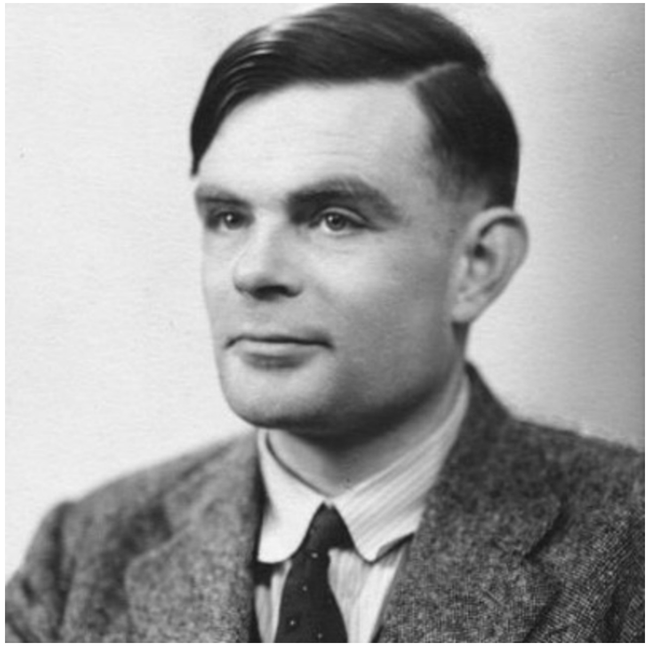
- Osnovni model Turingovega stroja
- Razširitve
  - večtračni
  - nedeterministični
- Ekvivalence teh modelov
- Church-Turingova teza

Literatura

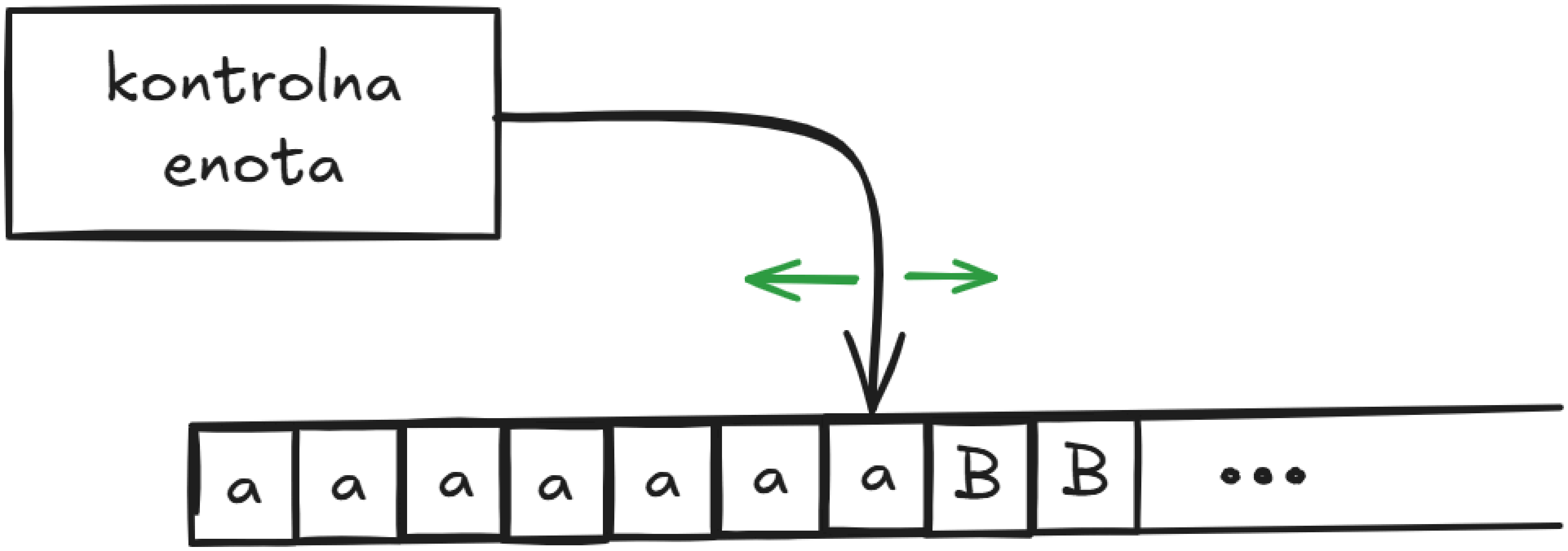
- Sipser poglavje 3.
- **dodatno:** https://introtcs.org/public/lec_06_loops.html

Ekspres zgodovina

- **David Hilbert** (1910) - potreba po formalni definiciji algoritma
- **Alan Turing**: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem (1936)
- **Alonzo Church**: An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory (1936)



Shematski prikaz TS



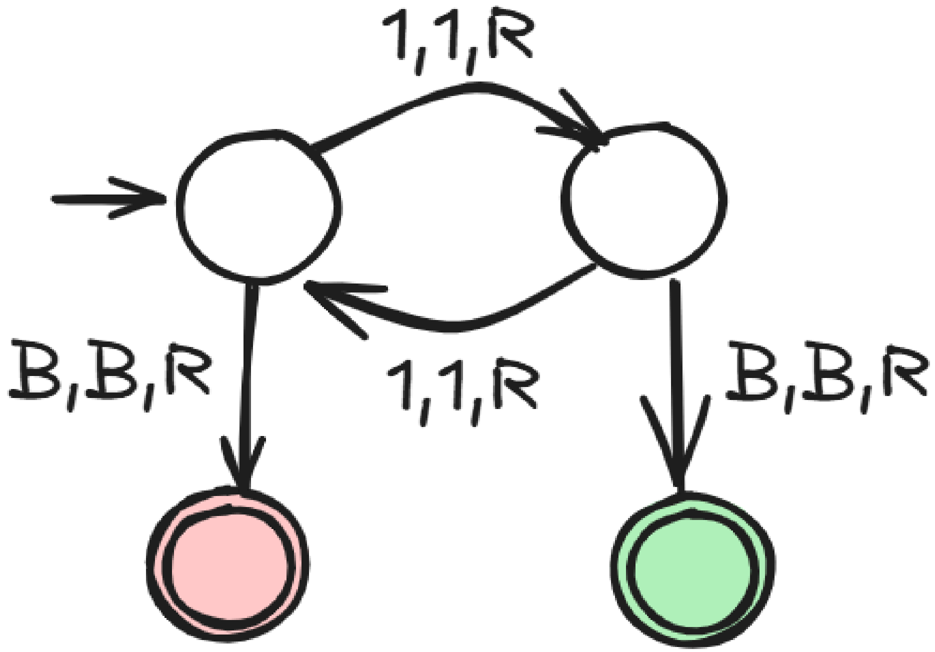
Formalna definicija TS

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F, q_R \rangle$$

- $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $B \notin \Sigma$ (blank) je privzeti simbol na traku
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
- q_F je stanje sprejetja, **stroj se takoj ustavi**
- q_R je stanje zavrnitve, **stroj se takoj ustavi**

Podajanje TS

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_0, 1, R)$$
$$\delta(q_0, B) = (q_R, B, R)$$
$$\delta(q_1, B) = (q_A, B, R)$$



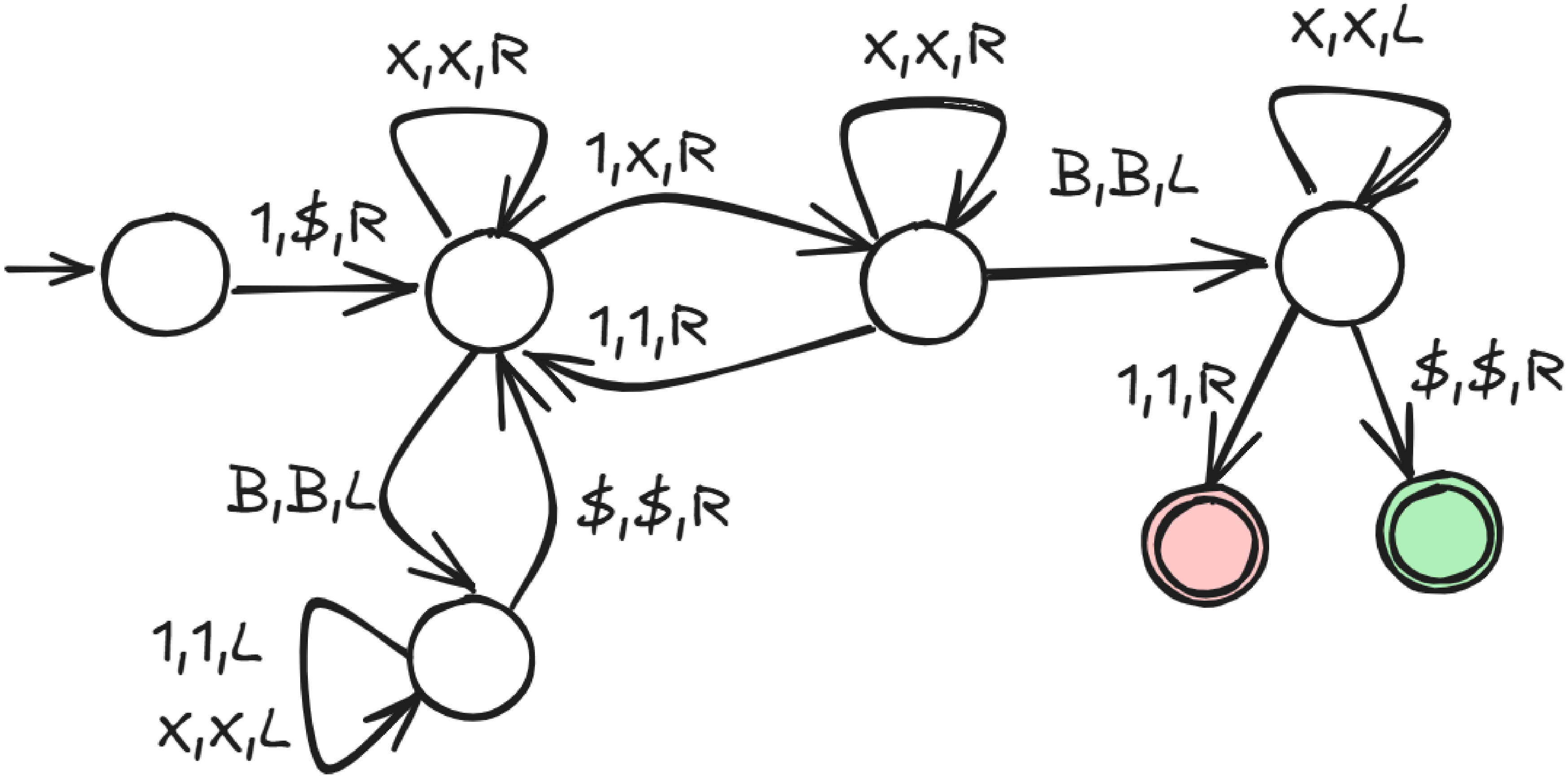
Primer reševanja problema s TS

$$L = \{a^n b^n\}$$

Številski problem

$$L = \{a^{2^n}\}$$

Rešitev



Trenutni opisi (konfiguracije) TS

$$\alpha q a \beta$$

- α - vsebina traku levo od glave
- q trenutno stanje
- a simbol trenutno pod glavo
- β - vsebina traku desno od glave

Prehodi med konfiguracijami

$$\alpha q a \beta \vdash \alpha b r \beta$$

Če obstaja $\delta(q, a) = (r, b, R)$

(podobno, če bi imeli premik levo)

Ključne konfiguracije

Začetna

$q_0 w$

Ustavitveni konfiguraciji

1. $\alpha q_F \beta$ - besedo sprejmemo
2. $\alpha q_R \beta$ - besedo zavrnemo

Jezik Turingovega stroja

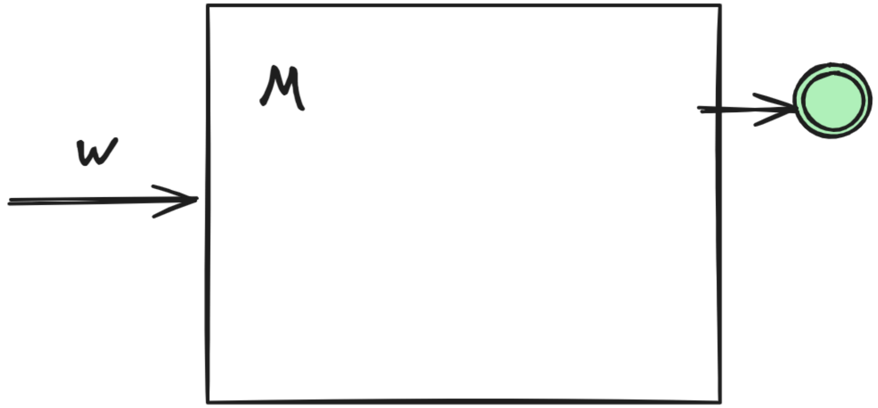
$$L = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \overset{*}{\vdash} \alpha q_F \beta\}$$

Polodločljivost jezika

Def Jezik L je **polodločljiv**, če

$\exists M, L(M) = L, \forall w \in L : q_0 w \overset{*}{\vdash} \alpha q_F \beta$

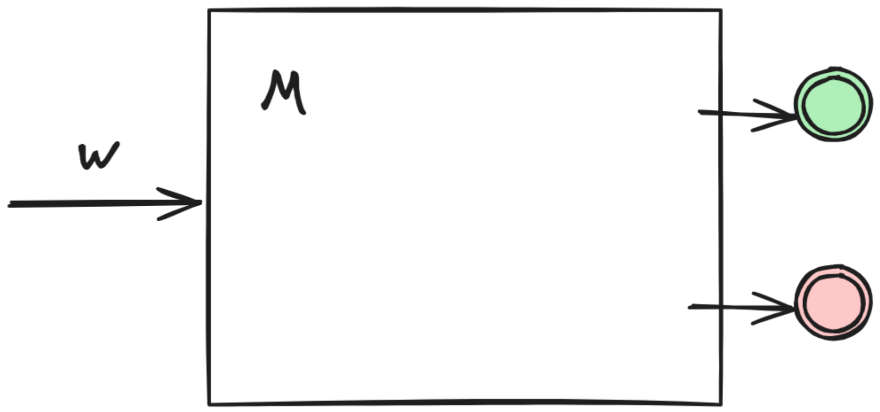
(zanima nas samo obnašanje za $w \in L$)



Odločljivost jezika

Def Jezik L je **odločljiv**, če
$\exists M, L(M) = L,$

1. $\forall w \in L : q_0 w \overset{*}{\vdash} \alpha q_F \beta$
2. $\forall w \notin L : q_0 w \overset{*}{\vdash} \alpha q_R \beta$



Razširitve in ekvivalence modelov

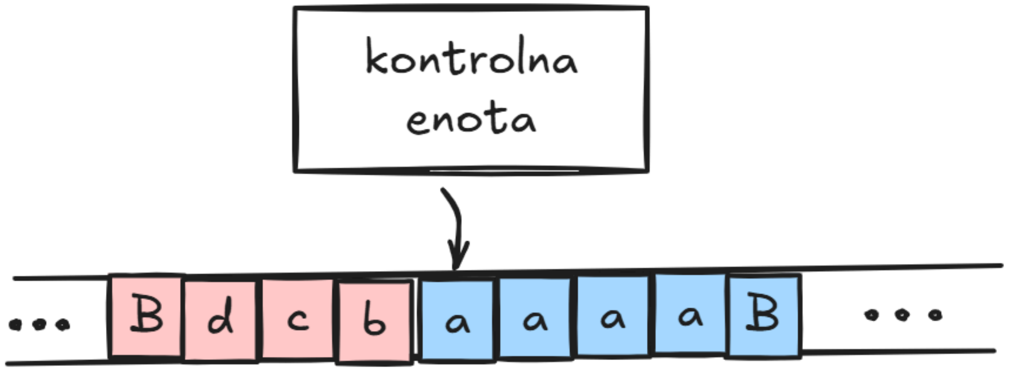
- Neskončen trak v obe smeri
- Več trakov
- Nedeterminizem

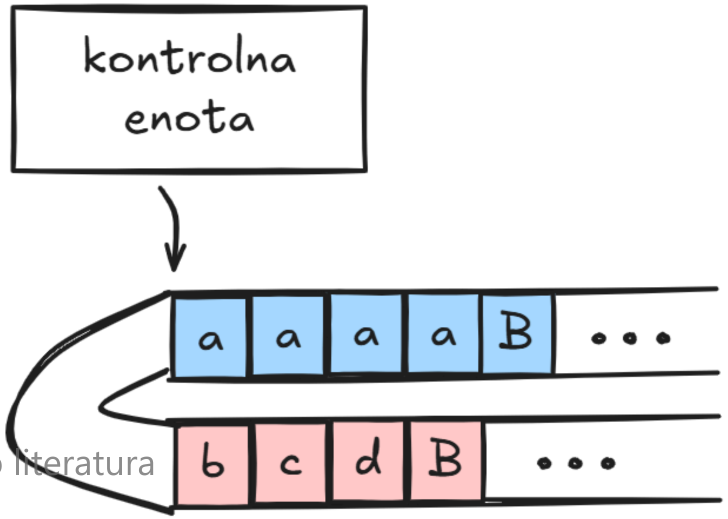
Neskončnost traku v obe smeri

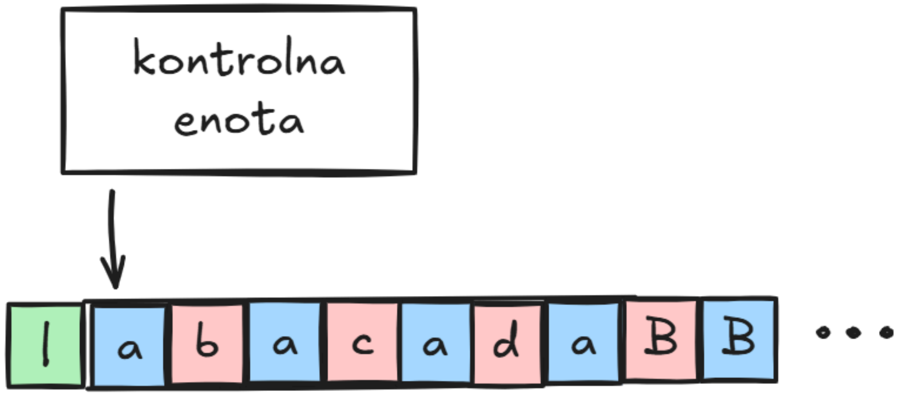
Primer

$$\delta(q_0, B) = (q_1, X, L)$$
$$\delta(q_1, B) = (q_0, X, R)$$
$$\delta(q_0, X) = (q_0, X, R)$$
$$\delta(q_1, X) = (q_1, X, L)$$

Simulacija z enosmerno neskončnim trakom







Večtračnost (definicija)

k-tračni Turingov stroj $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F, q_R \rangle$

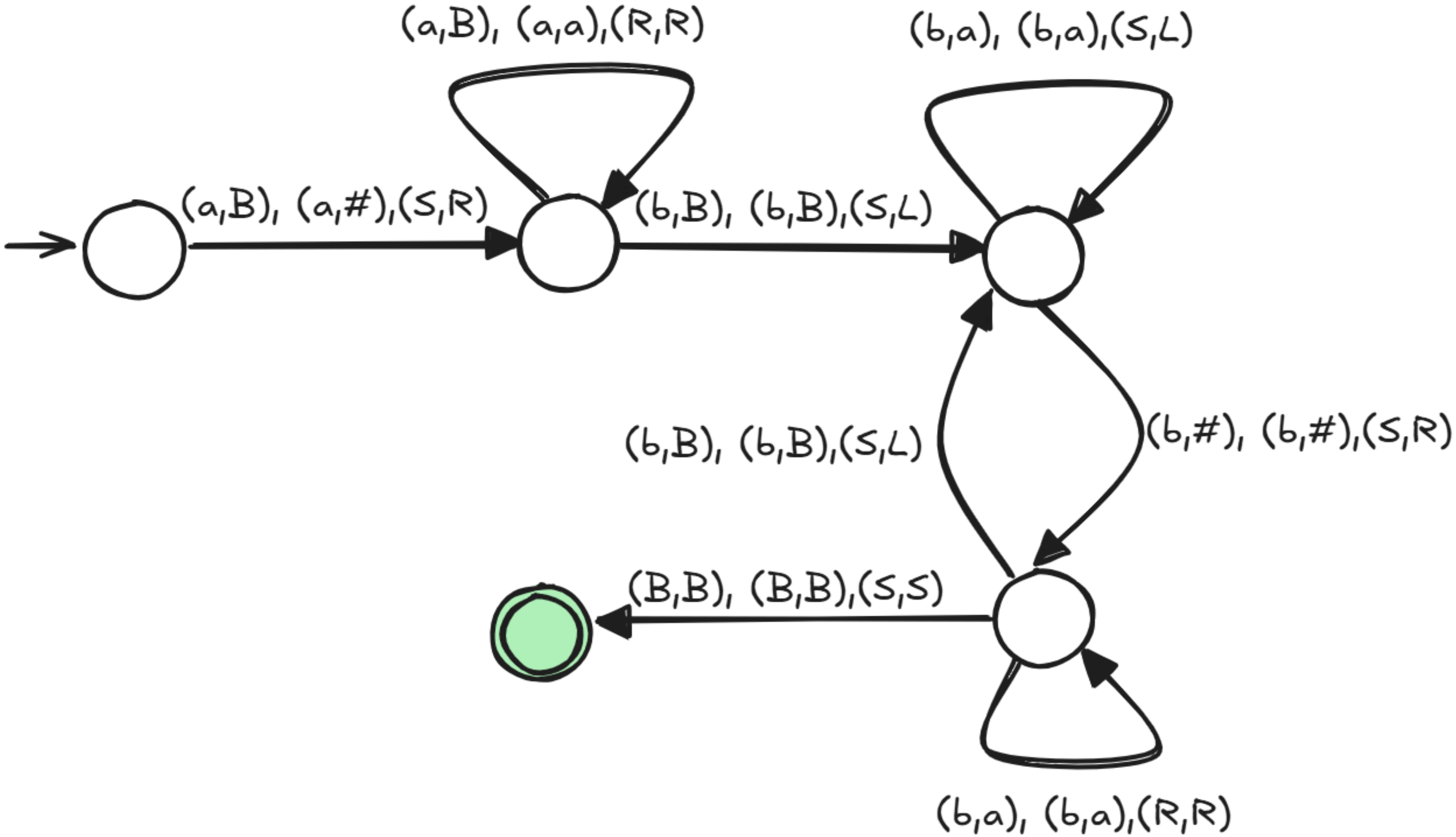
$$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

Večtračnost (primer)

$$L = \{a^k b^m \mid k \text{ deli } m\}$$

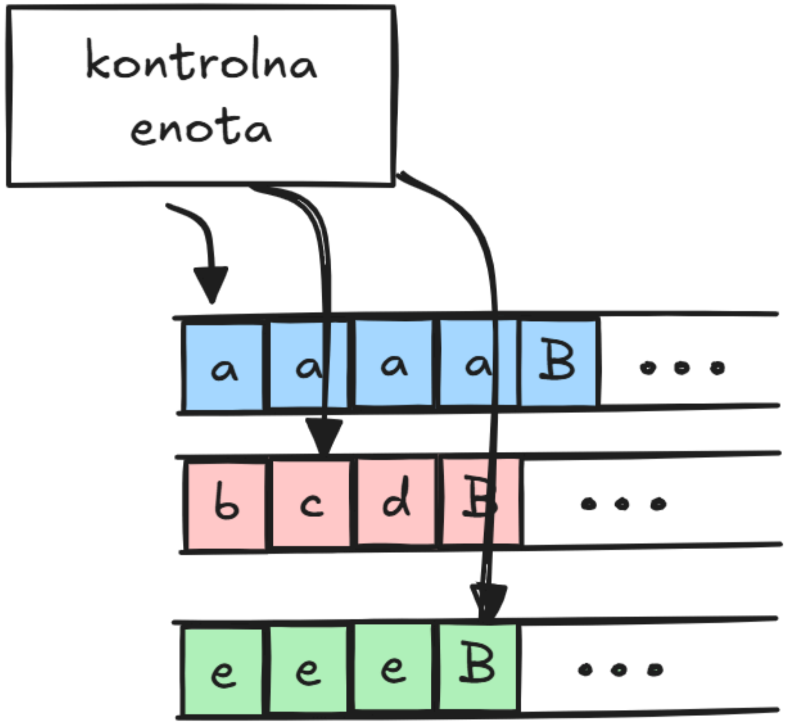
Ideja: **dvotračni TS**

- a-je prepišemo na drugi trak
- sprehajamo se hkrati čez a-je in čez b-je (drugi trak prevrtimo velikokrat nazaj)
- če na obeh trakovih **hkrati** pridemo na B, k deli m


(a,B), (a,a),(R,R)
(b,a), (b,a),(S,L)
(a,B), (a,#),(S,R)
(b,B), (b,B),(S,L)
(b,B), (b,B),(S,L)
(b,#), (b,#),(S,R)
(B,B), (B,B),(S,S)
(b,a), (b,a),(R,R)

Izrek Vsak večtračni Turingov stroj ima ekvivalenten enotračni Turingov stroj.

Simulacija z enim trakom



Opis simulacije

En korak večtračnega stroja

1. poiščemo glavo (in znak) na vsakem traku (zapomnimo si s stanjem katere znake smo videli)
2. glede na te simbole naredimo ustrezne zapise na posamezen trak in ustrezne premike glave

Nedeterminizem (definicija)

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F, q_R \rangle$$

$$\delta : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma}$$

Nedeterminizem (primer)

$$L = \{a^k \mid k \text{ je sestavljeno število }\}$$

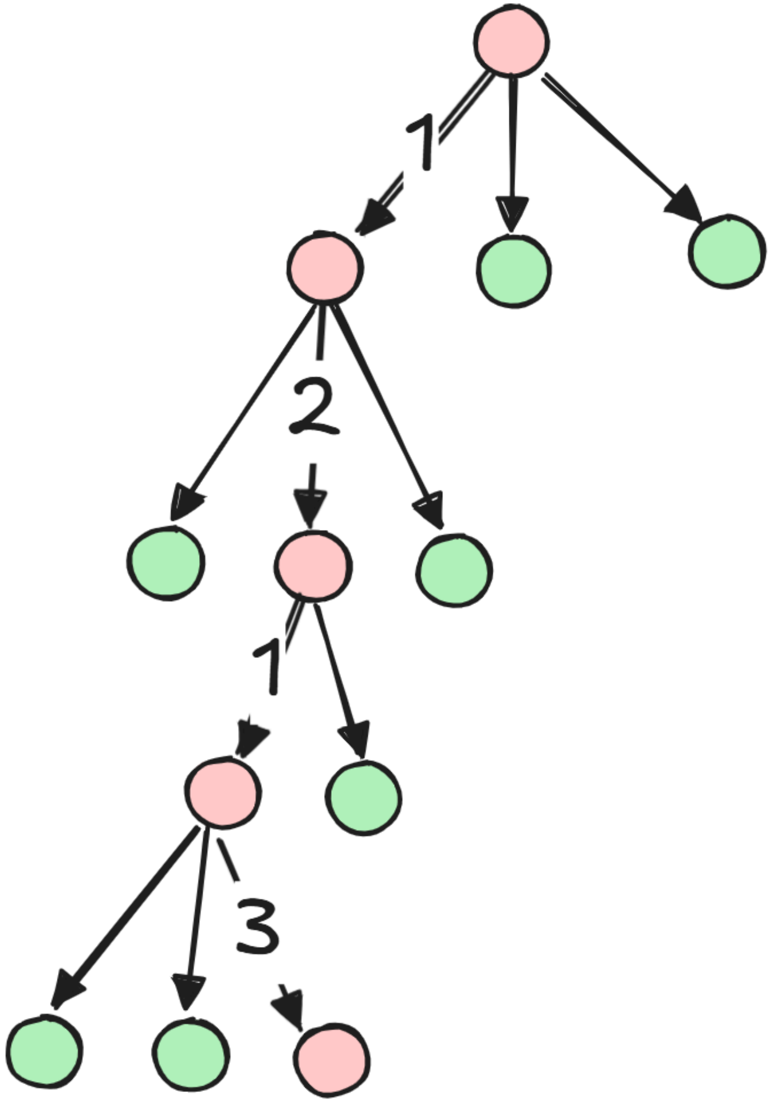
Ekvivalenca determinizma in nedeterminizma

Izrek: Za vsak nedeterministični TS M obstaja determinističen TS M', da velja $L(M) = L(M')$

Simulacija z determinizmom

1. Sled izvajanja nedeterminističnega stroja je drevo (potencialno neskončno)
2. Z determinizmom lahko **sistematično** preiskujemo to drevo (iščemo konfiguracijo, ki niz sprejme)

1. V drevesu izvajanja se osredinimo na eno pot
2. Pot je določena z zaporedjem števil, ki predstavljajo odločitev ob vsaki vejitvi v drevesu

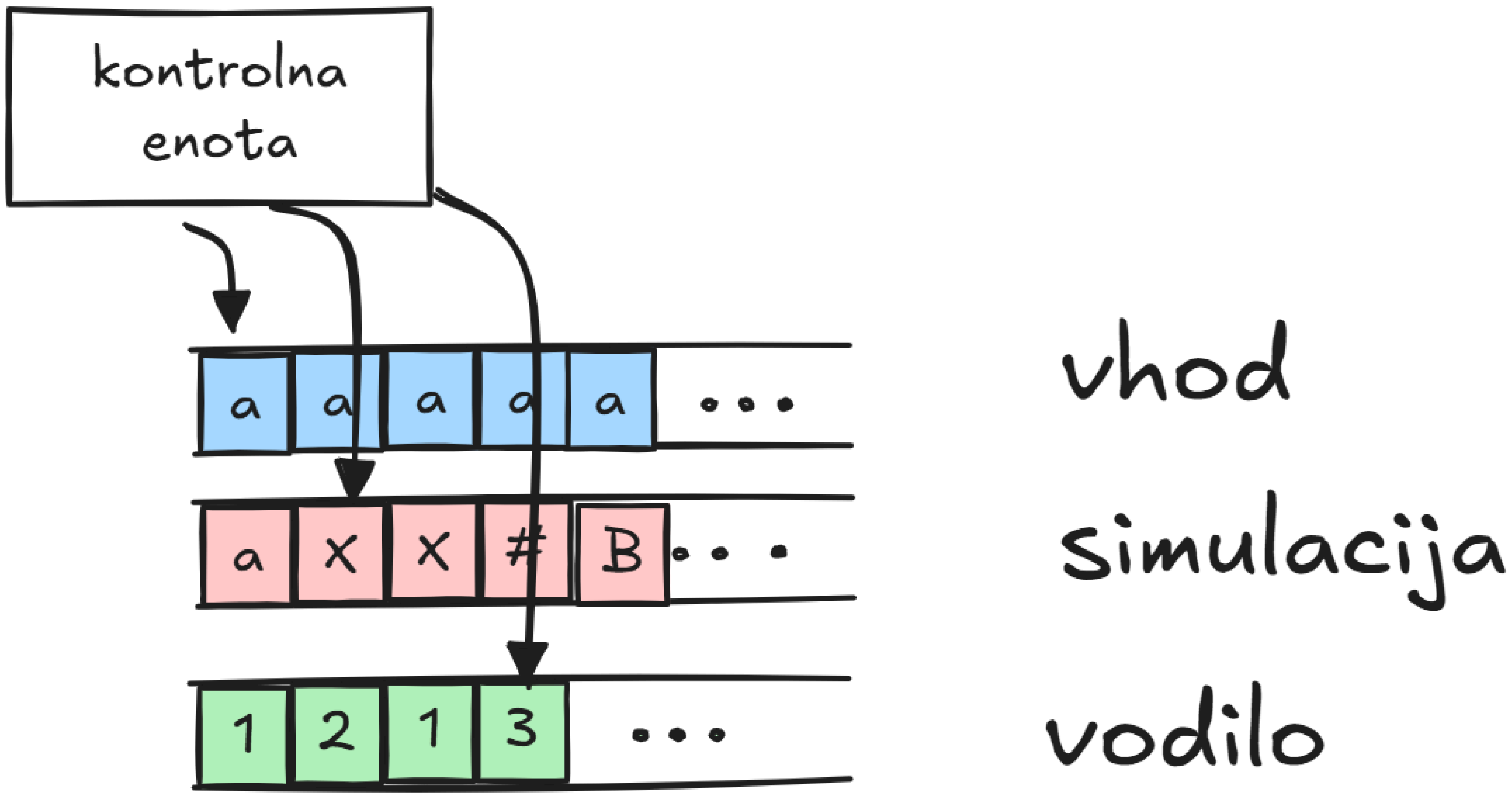


Nedeterministično:

$$\delta(q_0, a) = \{(q_0, a, R), (q_1, X, L)\}$$

Deterministično:

$$\delta(q_0, a, 1) = (q_0, a, 1, R, R)$$
$$\delta(q_0, a, 2) = (q_1, X, 2, L, R)$$


kontrolna enota
a
a
a
a
a
...
a
X
X
#
B
...
1
2
1
3
...
vhod
simulacija
vodilo

Opis simulacije

1. Prvi trak vsebuje vhod w (trak vedno samo beremo)
2. Prekopiramo vsebino traku 1 na trak 2
3. Simuliramo stroj na drugem traku, za vsako nedeterministično odločitev uporabimo tretji trak, da postane deterministična
4. Ko zmanjka simbolov na 3. traku povečamo vsebino 3. traku za 1 in gremo na točko 2.
5. Če je kadarkoli na traku konfiguracija, ki vhod sprejme, besedo sprejmemo

Church-Turingova teza

TS $\longleftrightarrow$ Algoritem

Zakaj zaupamo Church-Turingovi tezi?

- V teh modelih znamo izraziti vse kar intuitivno razumemo kot algoritem
- **OGROMNO** zelo različnih modelov računanja je ekvivalentnih TS
- teoretični rezultati, dobljeni iz teh modelov dobro odražajo praktične situacije