NP - polnost

Uroš Čibej

Pregled

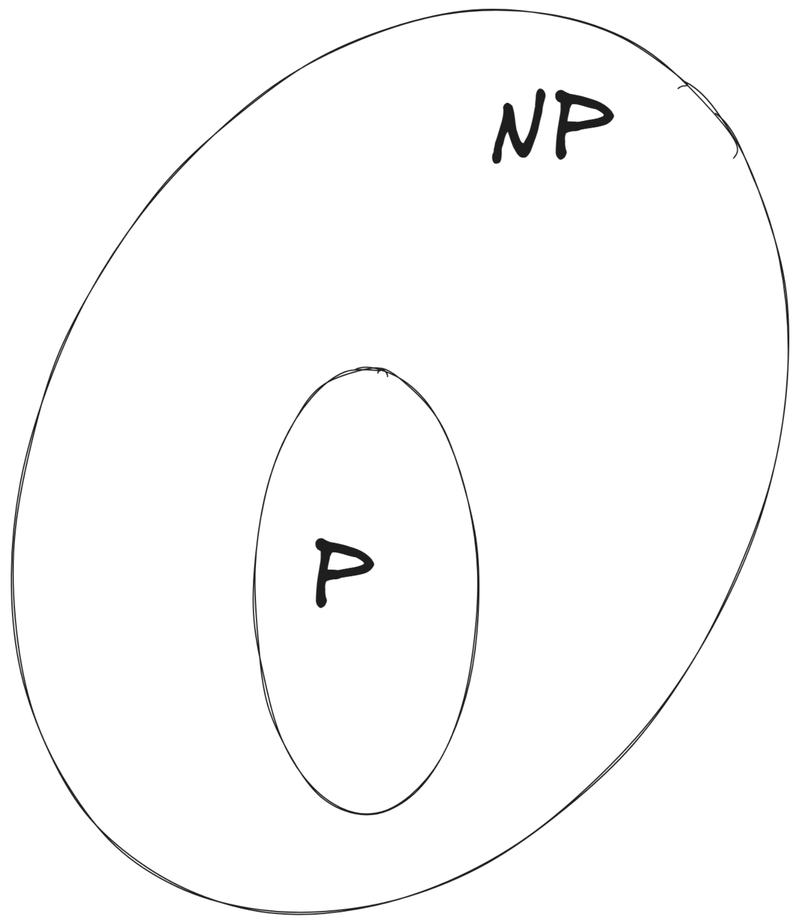
- Polinomske prevedbe
- NP-polnost
- Modeliranje s SAT
- Cook-Levinov izrek

Literatura

- Sipser razdelek 7

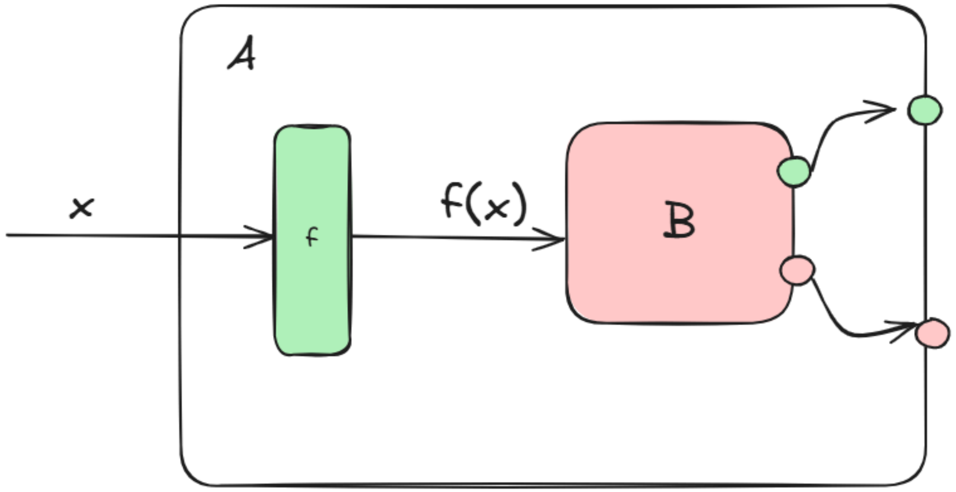
Ponovimo: $P \stackrel{?}{=} NP$

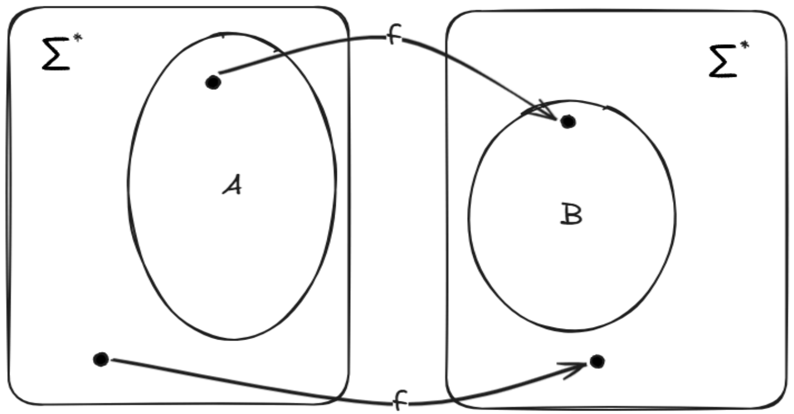
- Ali je preverjanje rešitve enako zahtevno kot generiranje rešitve?
- Ali je izčrpno preiskovanje (eksponentno) edini pristop, ki deluje za določene vrste problemov?
- Se moramo pri določenih problemih zadovoljiti z neoptimalnimi rešitvami?



Polinomske prevedbe

$\leq_p$





$$A \leq_p B : w \in A \iff f(w) \in B$$

f mora biti polinomsko izračunljiva funkcija

Posledica polinomske prevedbe

$$A \leq_p B \land B \in P \implies A \in P$$

Koncept NP-polnosti

Problem B je NP-poln, če

1. $B \in NP$
2. $\forall A \in NP : A \leq_p B$

Izrek. Če B je NP-poln in $B \in P \implies P = NP$

Problem SAT (satisfiability)

Vhod: Množica logičnih spremenljivk $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ in logični izraz s temi spremenljivkami:

$$\Phi$$

Vprašanje: Ali obstaja dodelitev vrednosti spremenljivkam $\tau : X \to \{0, 1\}$, da je

$$\Phi[\tau] = 1$$

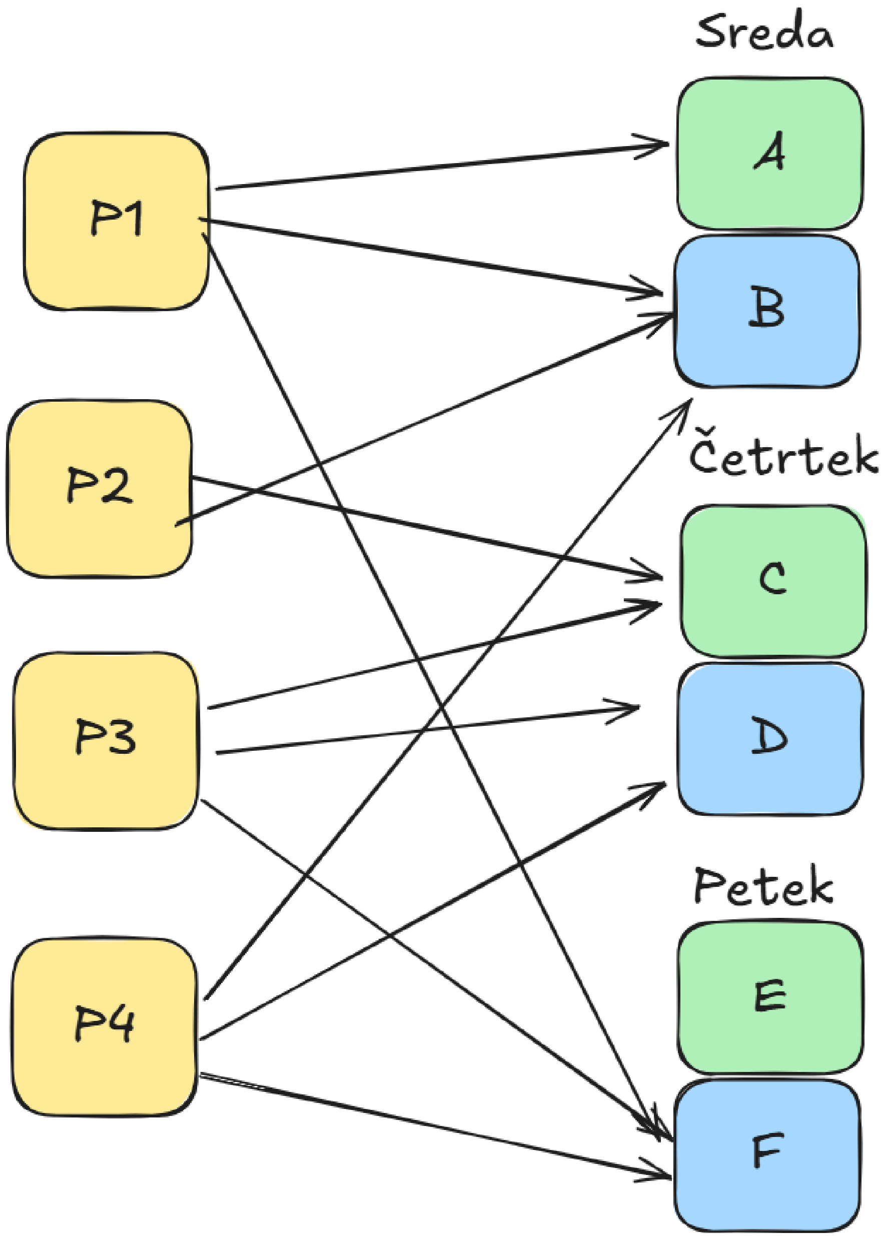
Primer

$$\begin{aligned}
\Phi = \quad C_1 :& \quad (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \\
\wedge C_2 :& \quad (\neg x_1 \vee x_4) \\
\wedge C_3 :& \quad (\neg x_2 \vee x_4) \\
\wedge C_4 :& \quad (\neg x_3 \vee x_5) \\
\wedge C_5 :& \quad (\neg x_4 \vee \neg x_5) \\
\wedge C_6 :& \quad (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \\
\wedge C_7^* :& \quad (\neg x_4)
\end{aligned}$$

Modeliranje s SAT

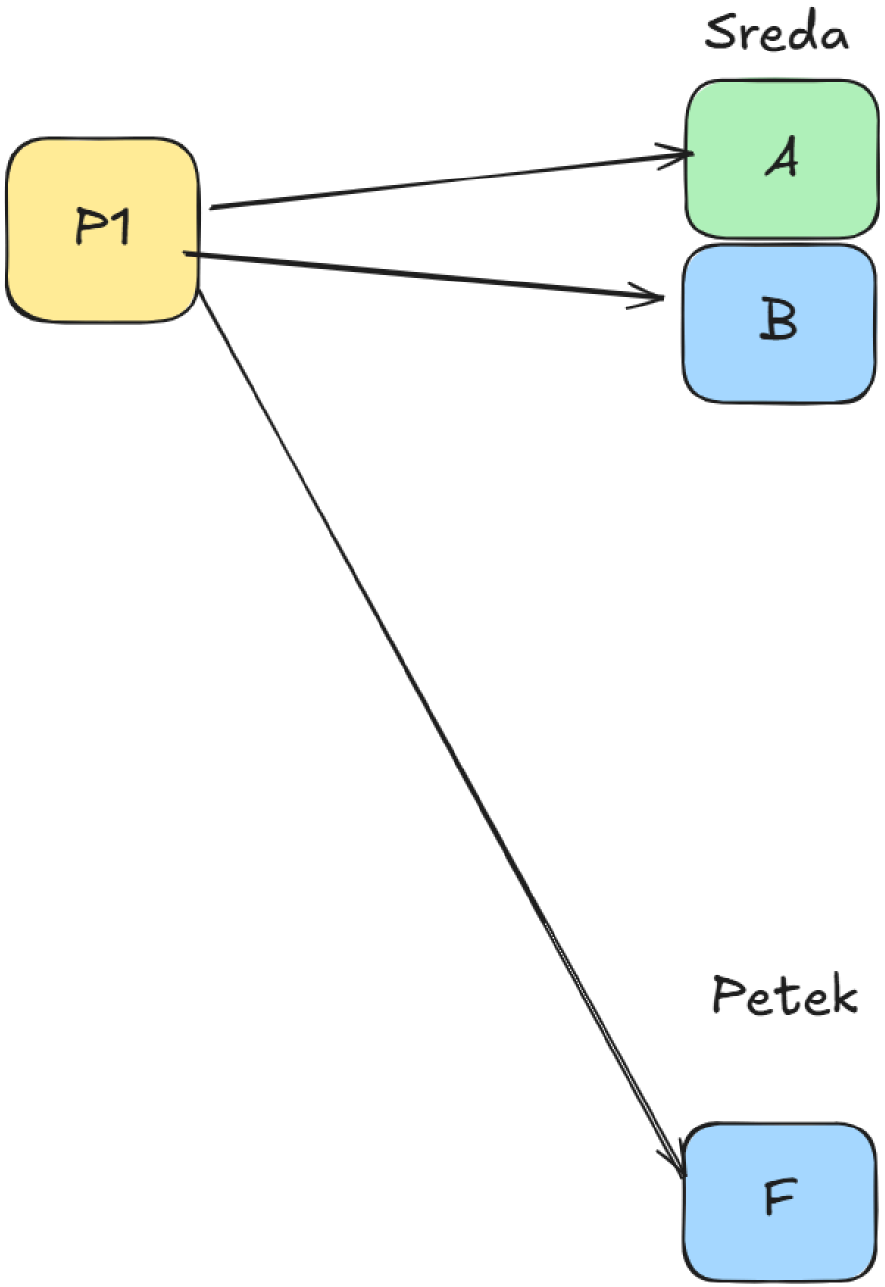
"Urnik"

- X_{pt} - predmet p se izvaja v terminu t



Vsaj ena

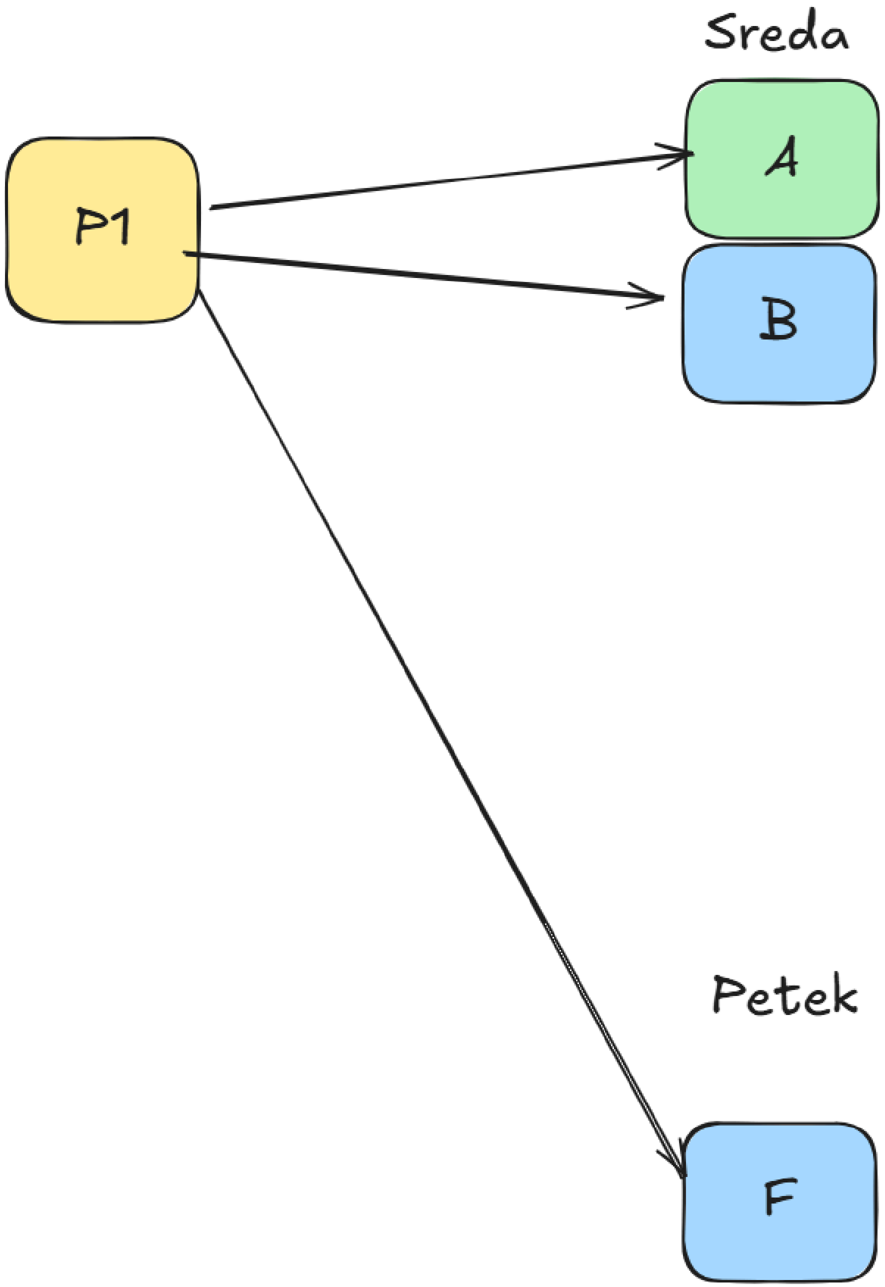
(At Least One)



Vsaj ena

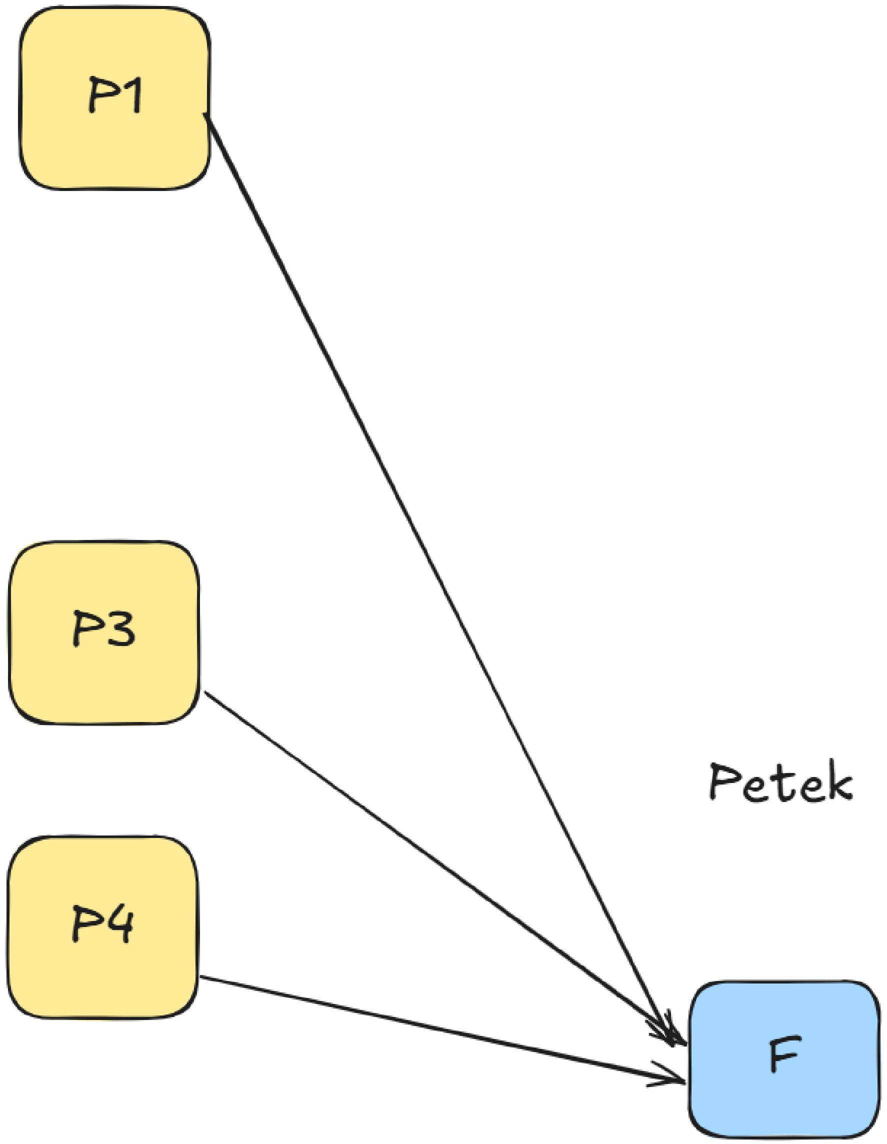
(At Least One)

$$X_{1A} \vee X_{1B} \vee X_{1F}$$



Največ ena

(At Most One)



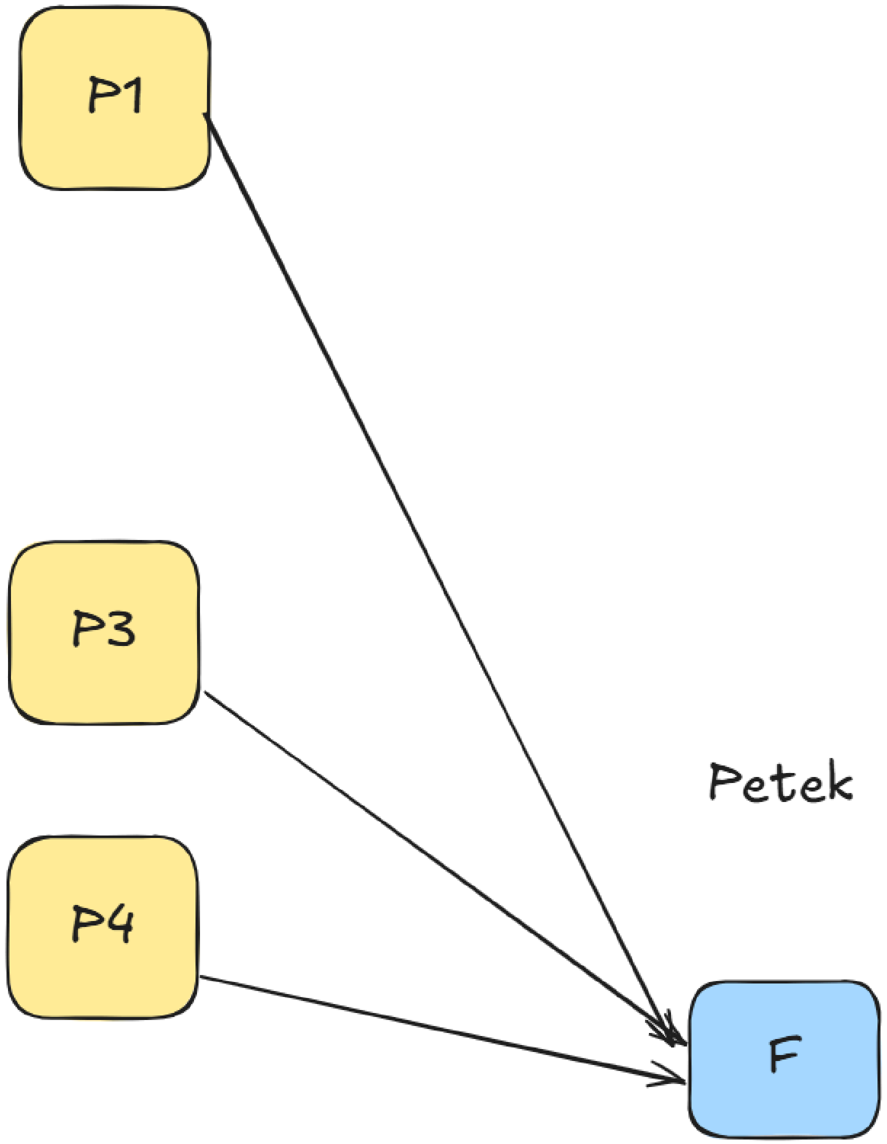
Največ ena

(At Most One)

$\neg(X_{1F} \wedge X_{3F}) \wedge \neg(X_{1F} \wedge X_{4F}) \wedge \neg(X_{3F} \wedge X_{4F})$

V KNO

$(\neg X_{1F} \vee \neg X_{3F}) \wedge (\neg X_{1F} \vee \neg X_{4F}) \wedge (\neg X_{3F} \vee \neg X_{4F})$

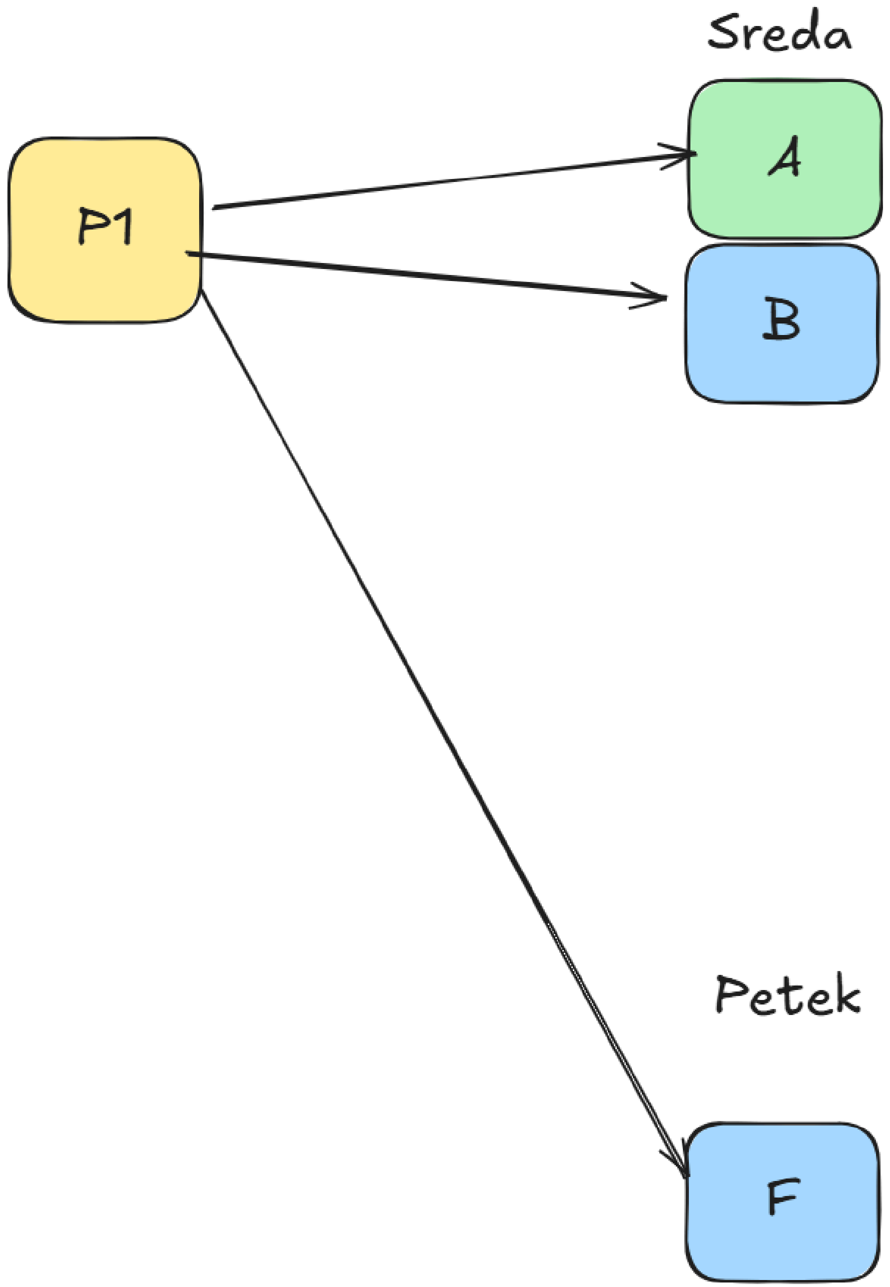


Natanko ena

vsaj ena **in** največ ena

$$X_{1A} \lor X_{1B} \lor X_{1F}$$

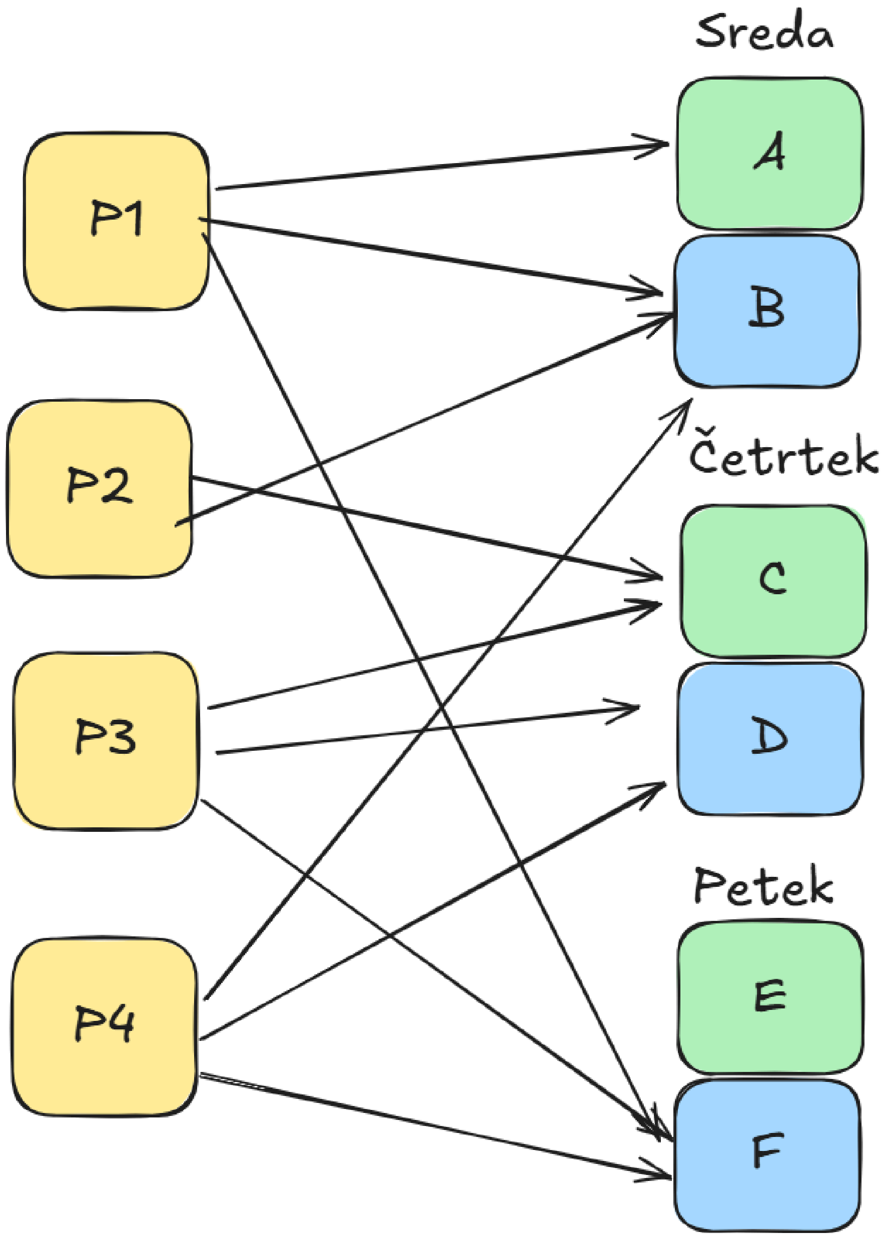
$$(\neg X_{1A} \lor \neg X_{1B}) \land (\neg X_{1A} \lor \neg X_{1F}) \land (\neg X_{1B} \lor \neg X_{1F})$$



Celotna formula

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{SAT}} = \mathbf{ALO_P} \wedge \mathbf{AMO_P} \wedge \mathbf{AMO_T}$$

$$\mathbf{ALO_P} = \begin{array}{c|l} \hline P_i & \text{vsaj eden} \\ \hline P_1 & X_{1,A} \vee X_{1,B} \vee X_{1,F} \\ P_2 & X_{2,B} \vee X_{2,C} \\ P_3 & X_{3,C} \vee X_{3,D} \vee X_{3,F} \\ P_4 & X_{4,B} \vee X_{4,D} \vee X_{4,F} \\ \hline \end{array}$$

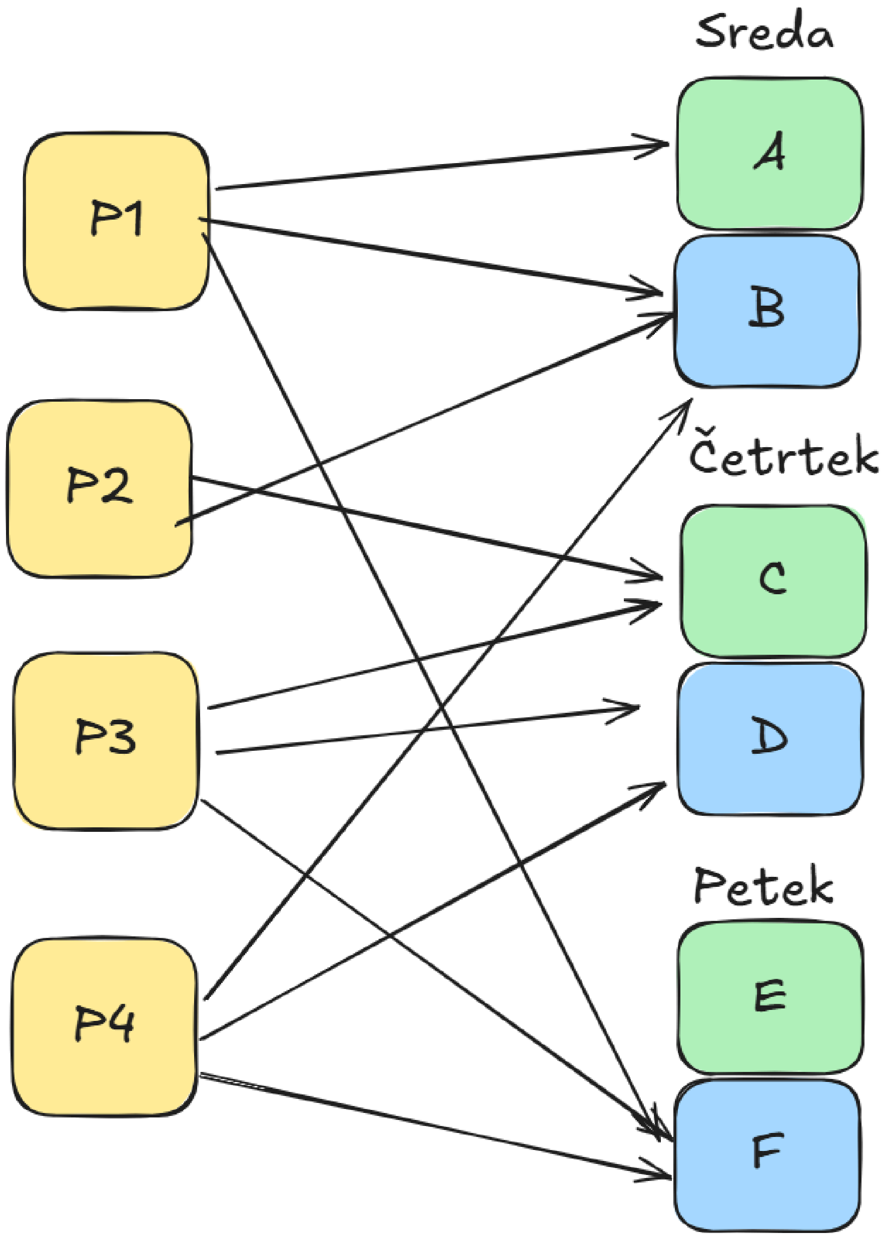


Celotna formula

$$\Phi_{\mathrm{SAT}} = \mathbf{ALO_P} \wedge \mathbf{AMO_P} \wedge \mathbf{AMO_T}$$

$\mathbf{AMO_P} =$

P_i	*Največ en*
P_1	$(\neg X_{1,A} \vee \neg X_{1,B}) \wedge (\neg X_{1,A} \vee \neg X_{1,F}) \wedge (\neg X_{1,B} \vee \neg X_{1,F})$
P_2	$(\neg X_{2,B} \vee \neg X_{2,C})$
P_3	$(\neg X_{3,C} \vee \neg X_{3,D}) \wedge (\neg X_{3,C} \vee \neg X_{3,F}) \wedge (\neg X_{3,D} \vee \neg X_{3,F})$
P_4	$(\neg X_{4,B} \vee \neg X_{4,D}) \wedge (\neg X_{4,B} \vee \neg X_{4,F}) \wedge (\neg X_{4,D} \vee \neg X_{4,F})$

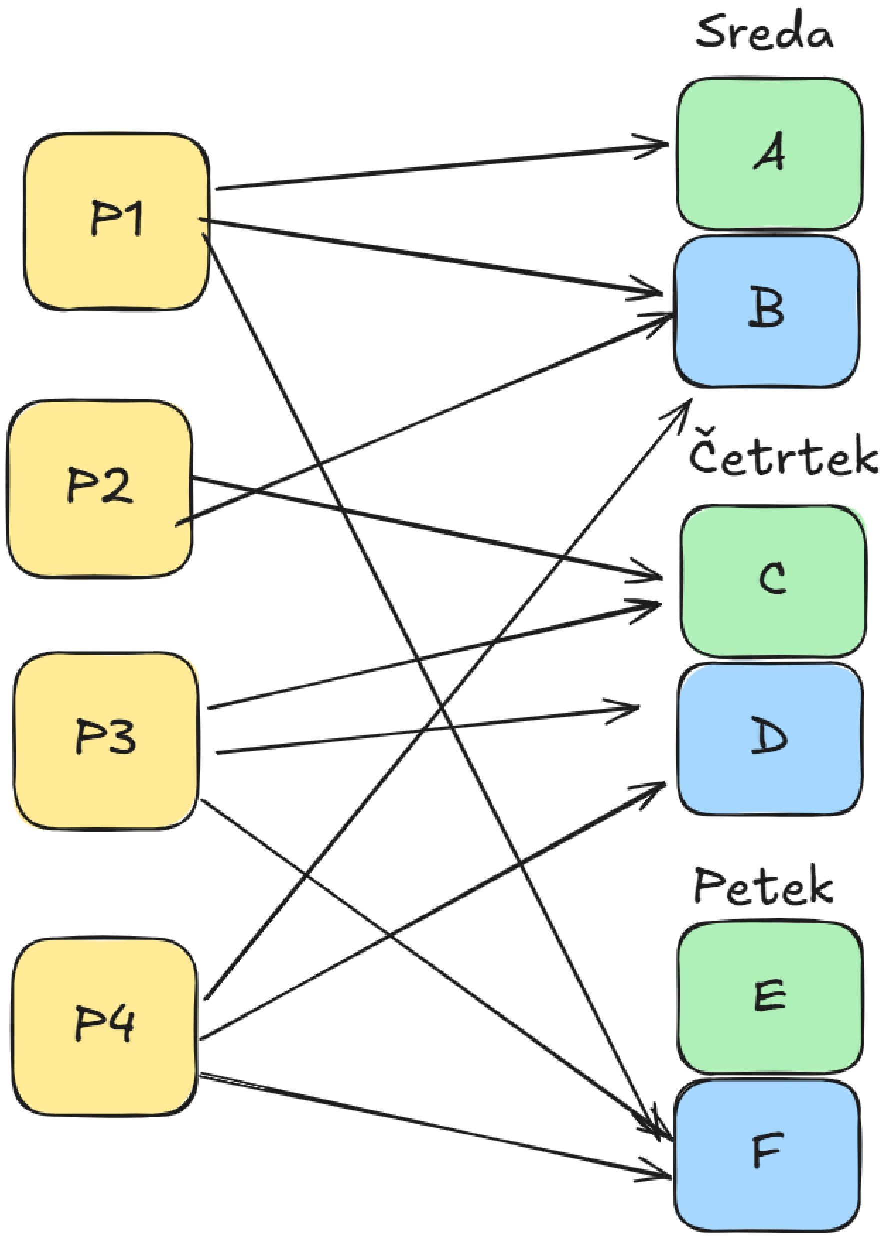


Celotna formula

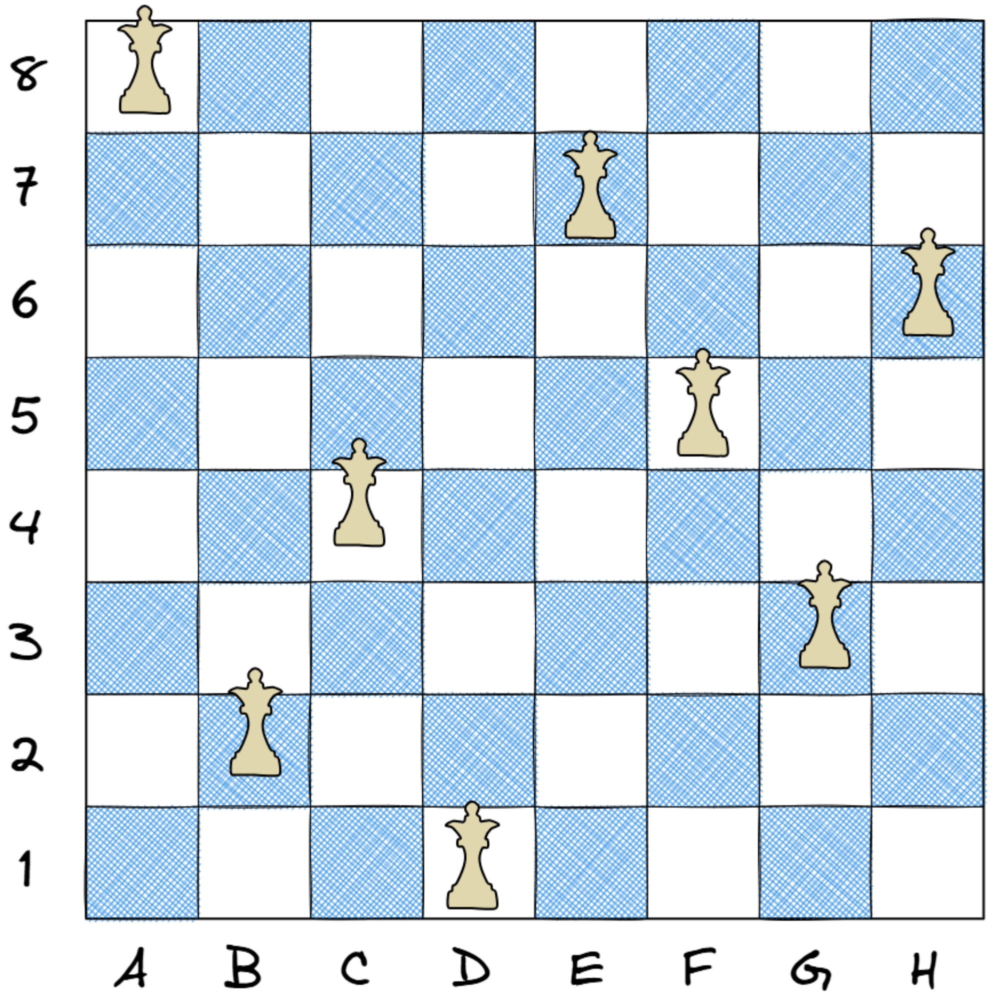
$$\Phi_{\mathrm{SAT}} = \mathbf{ALO}_{\mathbf{P}} \wedge \mathbf{AMO}_{\mathbf{P}} \wedge \mathbf{AMO}_{\mathbf{T}}$$

$\mathbf{AMO}_{\mathbf{T}} =$

Termin t	Največ ena
B	$(\neg X_{1,B} \vee \neg X_{2,B}) \wedge (\neg X_{1,B} \vee \neg X_{4,B}) \wedge (\neg X_{2,B} \vee \neg X_{4,B})$
C	$(\neg X_{2,C} \vee \neg X_{3,C})$
D	$(\neg X_{3,D} \vee \neg X_{4,D})$
F	$(\neg X_{1,F} \vee \neg X_{3,F}) \wedge (\neg X_{1,F} \vee \neg X_{4,F}) \wedge (\neg X_{3,F} \vee \neg X_{4,F})$



N-kraljic

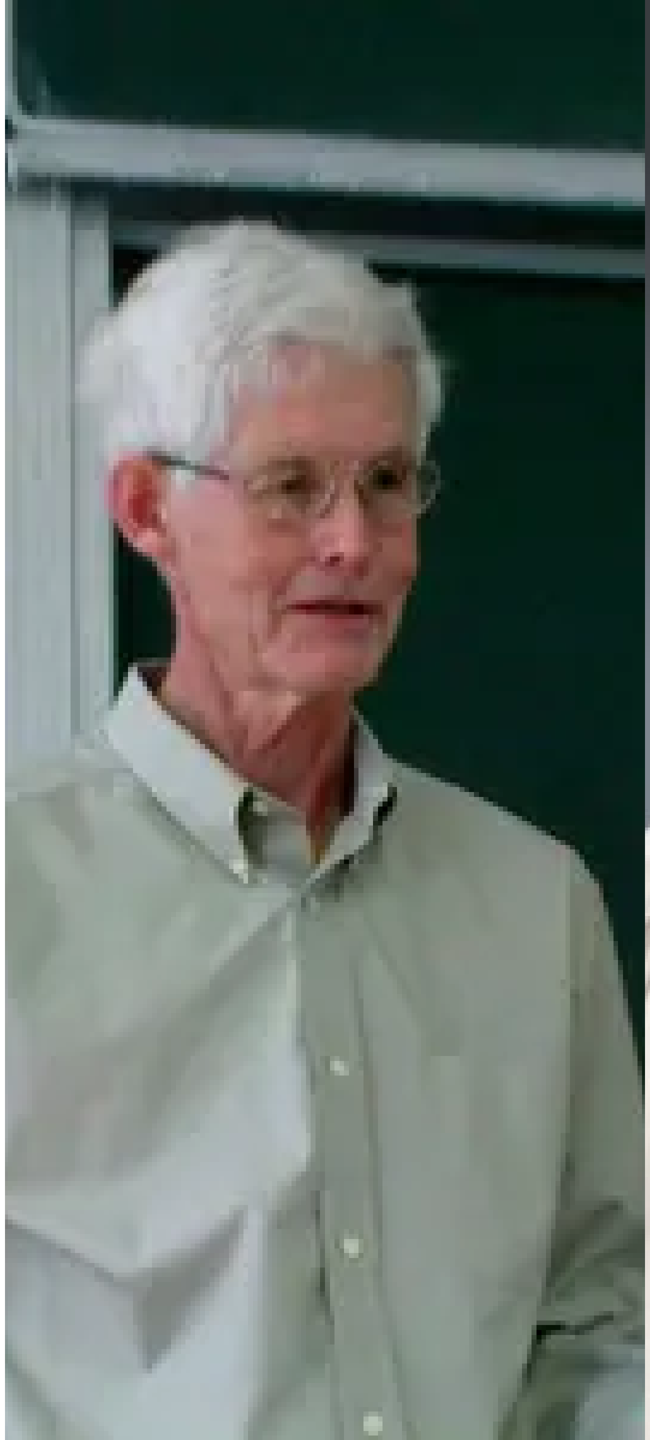


SAT kraljice

1. spremenljivke q_{ij} (kraljica je na polju ij)
2. vsaka vrstica $ALO \wedge AMO$
3. vsak stolpec $ALO \wedge AMO$
4. vsaka diagonala AMO

Cook-Levinov izrek

- Stephen Cook (1971): The complexity of theorem proving procedures
- Leonid Levin (1973): Универсальные задачи перебора



Izrek. SAT je NP-poln

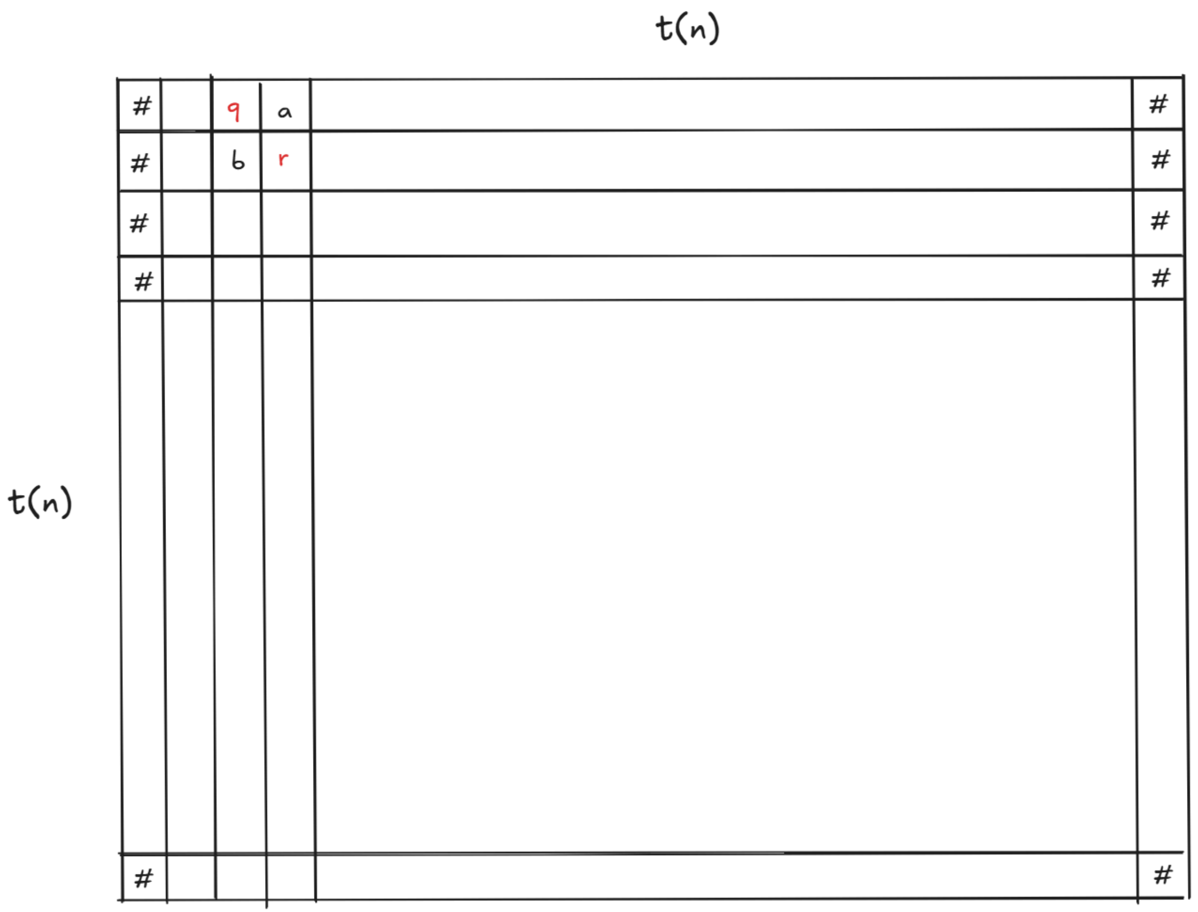
Obstaja veliko formulacij tega izreka, ta je verjetno najbolj kompaktna.

Oris dokaza

1. SAT $\in NP$
2. $\forall A \in NP : A \leq_p SAT$
    - $(M_A, w) \rightarrow \Phi$, če stroj M_A sprejme w, $\Phi \in SAT$

Tabela trenutnih opisov

- naj bo M NTS, da $L(M) = A$
- časovna zahtevnost M naj bo $t(n)$
- dolžina trenutnega opisa je največ $t(n)$
- s SAT modeliramo tako tabelo, ki opisuje veljavno vejo izračuna M



Znaki v tabeli

$$\Phi_{cell}$$

- $C = \Gamma \cup Q \cup \{\#\}$
- spremenljivke $x_{i,j,c}$: na poziji i, j v tabeli je znak $c \in C$
- v vsaki celici je natanko en znak iz C

$$ALO \wedge AMO$$

Začetni trenutni opis

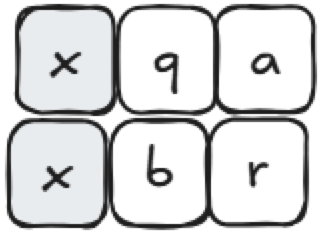
$$\Phi_{start} = x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\#}$$

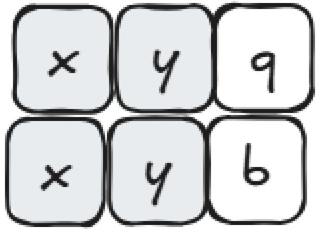
Detekcija sprejetja besede

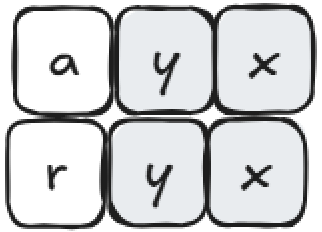
$$\Phi_{accept} = \bigvee_{i,j} x_{i,j,q_F}$$

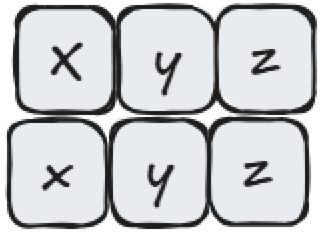
Veljavna okna

$$\delta(q, a) = \{(r, b, R)\}$$

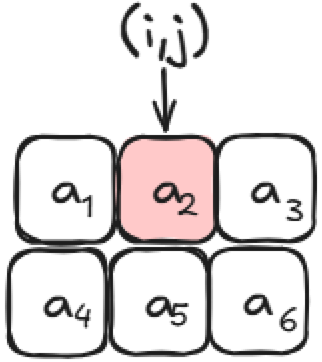








$$\Phi_{move} = \bigwedge_{(i,j)} (i, j) \text{ je eno izmed veljavnih oken}$$



$$\bigvee_{a \text{ je veljavno okno}} x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6}$$

Končni izraz

$$\Phi_{cell} \wedge \Phi_{start} \wedge \Phi_{accept} \wedge \Phi_{move}$$

Analiza pravilnosti

1. Prva vrstica je veljaven trenutni opis
2. vrstica i je veljaven trenutni opis $\implies$ vrstica $i+1$ je veljaven **naslednji** trenutni opis

Analiza časovne zahtevnosti

$t(n) = n^k, |C| = l$

1. Število spremenljivk $(n^k)^2 \times l = O(n^{2k})$
2. velikost $\Phi_{cell} = O(n^{2k})$
3. velikost $\Phi_{start} = O(n^k)$
4. velikost $\Phi_{accept} = O(n^{2k})$
5. velikost $\Phi_{move} = O(n^{2k})$

Stanje vprašanje $P = NP$?

- večina problemov $p \in (NP \setminus P)$ je tudi NP-polnih (naslednjič)
- **ogromno** poskusov za razreševanje tega vprašanja (naključnost, aproksimacija, vezja, preroki, …)
- seveda je trenutni konsenz $P \neq NP$, ampak nekaj optimizma kljub temu ostaja