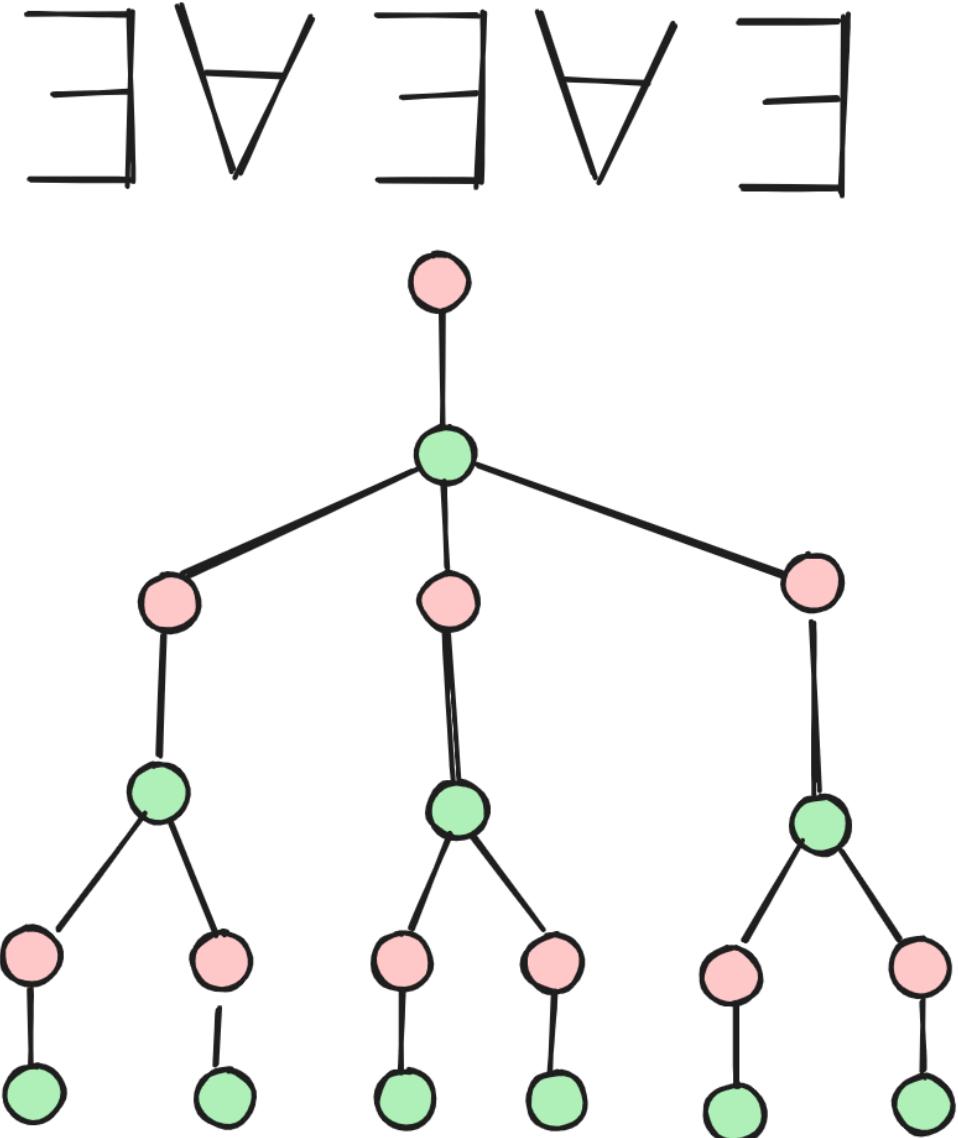


# Prostorska zahtevnost

Uroš Čibej



# Pregled

- Primeri problemov
- Definicija razredov prostorske zahtevnosti
- *PSPACE* in *NPSPACE*
- *NP* in *PSPACE*
- Savitchev izrek

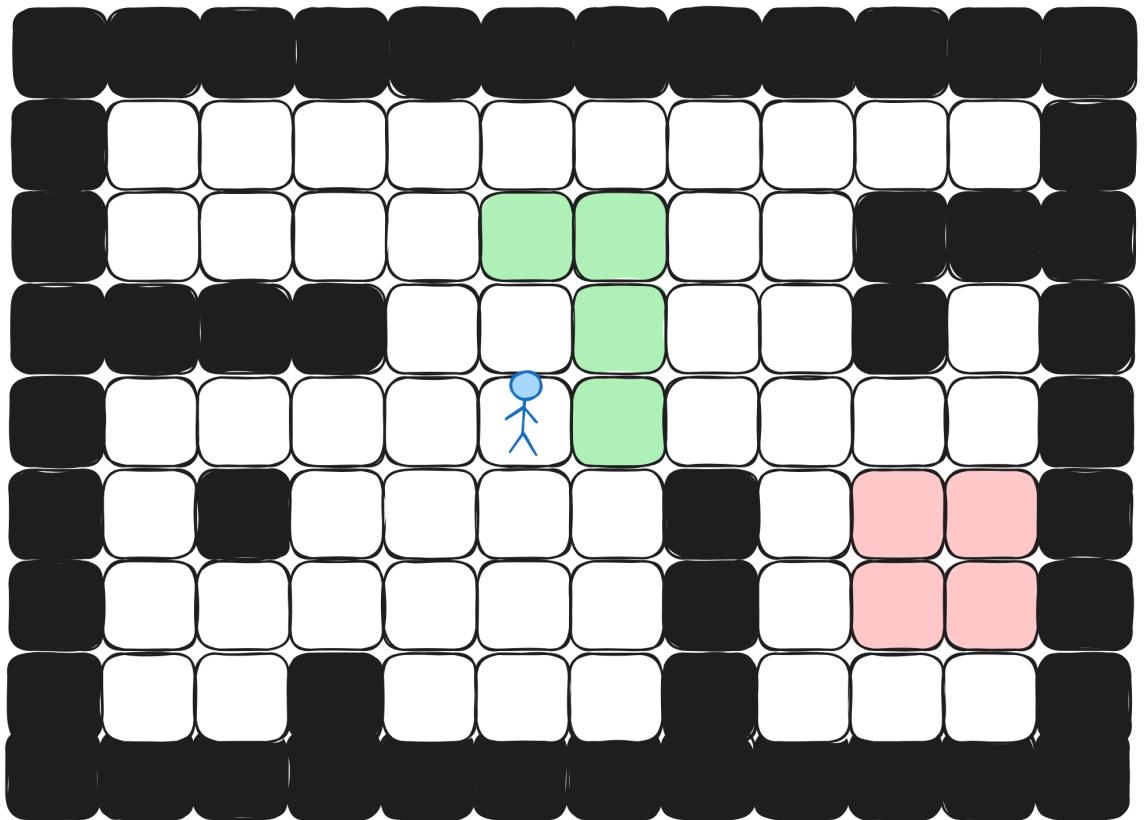
# Literatura

- Sipser razdelek 8

# Primeri problemov

- Igre z enim igralcem
  - Sokoban
  - Klotski
- Igre z dvema igralcema
  - Hex
  - Poslošena geografija
- TQBF - resnične kvantificirane Boolove formule

# Sokoban



# Formalna definicija

$$P = (G, B, T, s)$$

- $G \subset \mathbb{Z}^2$  (množica prostih celic - ostalo so zidovi)
- $B \subseteq G$  (začetne pozicije zabojev)
- $T \subseteq G$  (ciljne celice)
- $s \in G \setminus B$  (začetna pozicija možica)

## Stanje in premik

- stanje igre  $\sigma = (s', B')$
- $\sigma \xrightarrow{d} \sigma'$  - sprememba stanja pri enem premiku
- Igra  $P = (G, B, T, s)$  je **rešljiva**, če  $\exists(d_1, d_2, \dots, d_m)$ , da velja

$$(s, B) \xrightarrow{d_1, d_2, \dots, d_m} (s', B'); B' = T$$

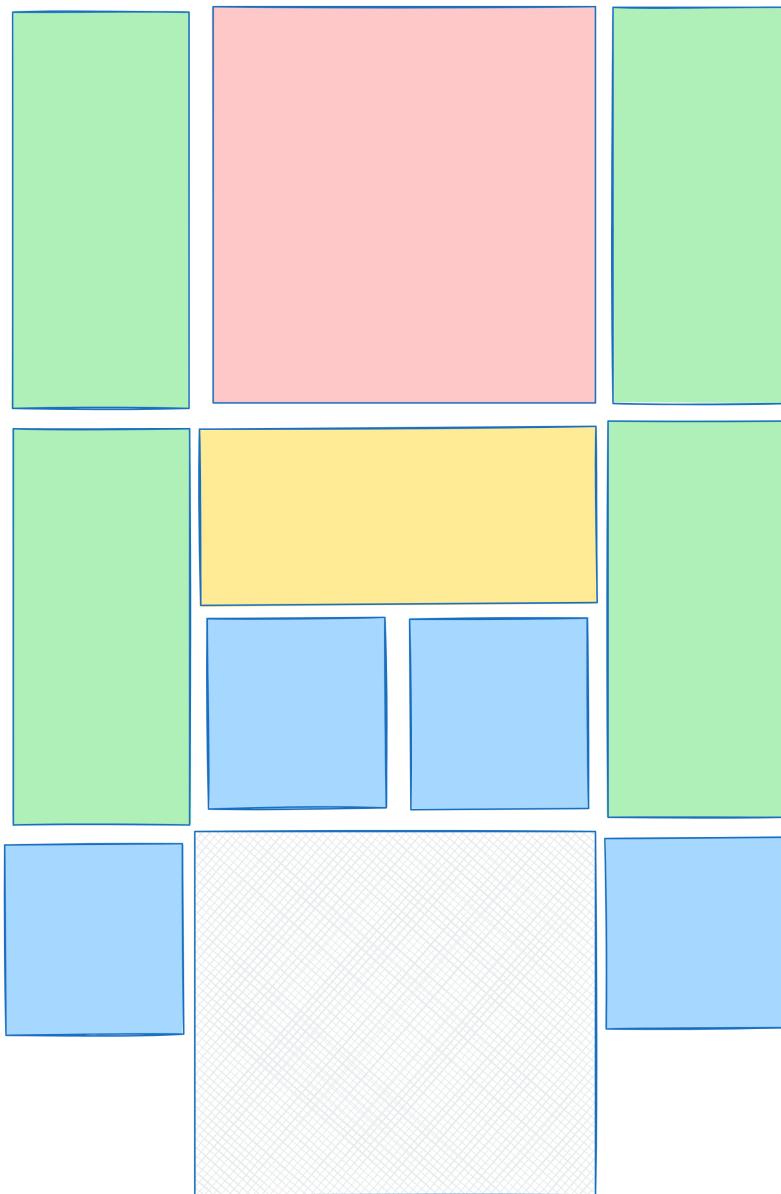
# Odločitveni problem Sokoban

Vhod:  $P = (G, B, T, s)$

Vprašanje: Ali je  $P$  rešljiv?

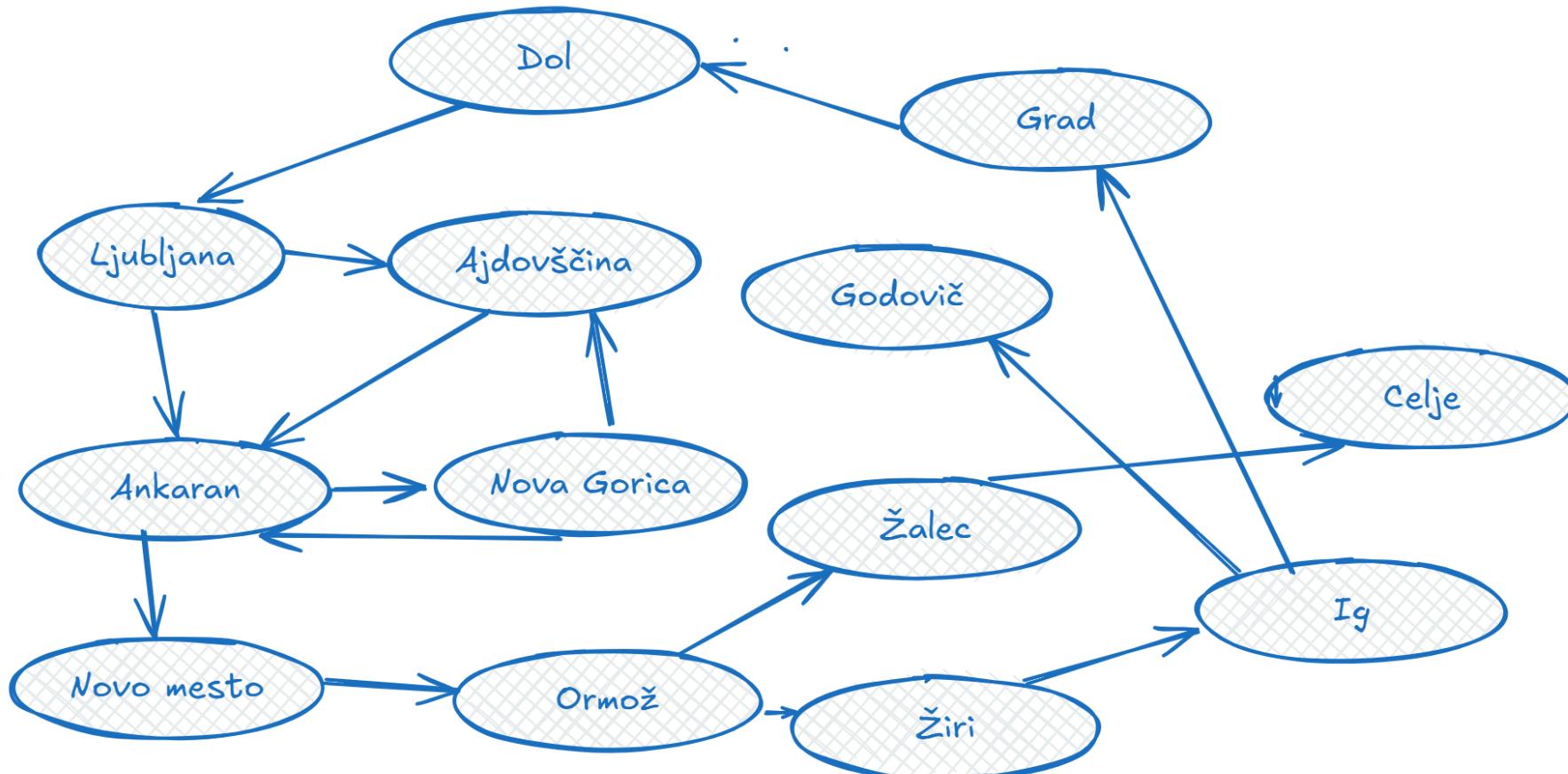
**Sokoban  $\in NP?$**

# Klotski



# Igre z dvema igralcema

# Posplošena geografija



# Formalna definicija

$$P = (G, s)$$

- $G = (V, E)$  usmerjen graf
- $s \in V$  začetno vozlišče

# Stanje in premik

- stanje igre:  $\sigma = (v, S)$  - trenutno stanje in  $S \subseteq V$  trenutno obiskana vozlišča
- premik:  $(v, S) \xrightarrow{v'} (v', S \cup \{v'\})\$$
- veljaven premik:  $(v, v') \in E, v' \notin S$

## Zmagovalna strategija

$$Win(v, S) \iff \exists v' \in V : \left( (v, S) \xrightarrow{v'} (v', S \cup \{v'\}) \right) \wedge \neg Win(v', S \cup \{v'\})$$

robni pogoj:

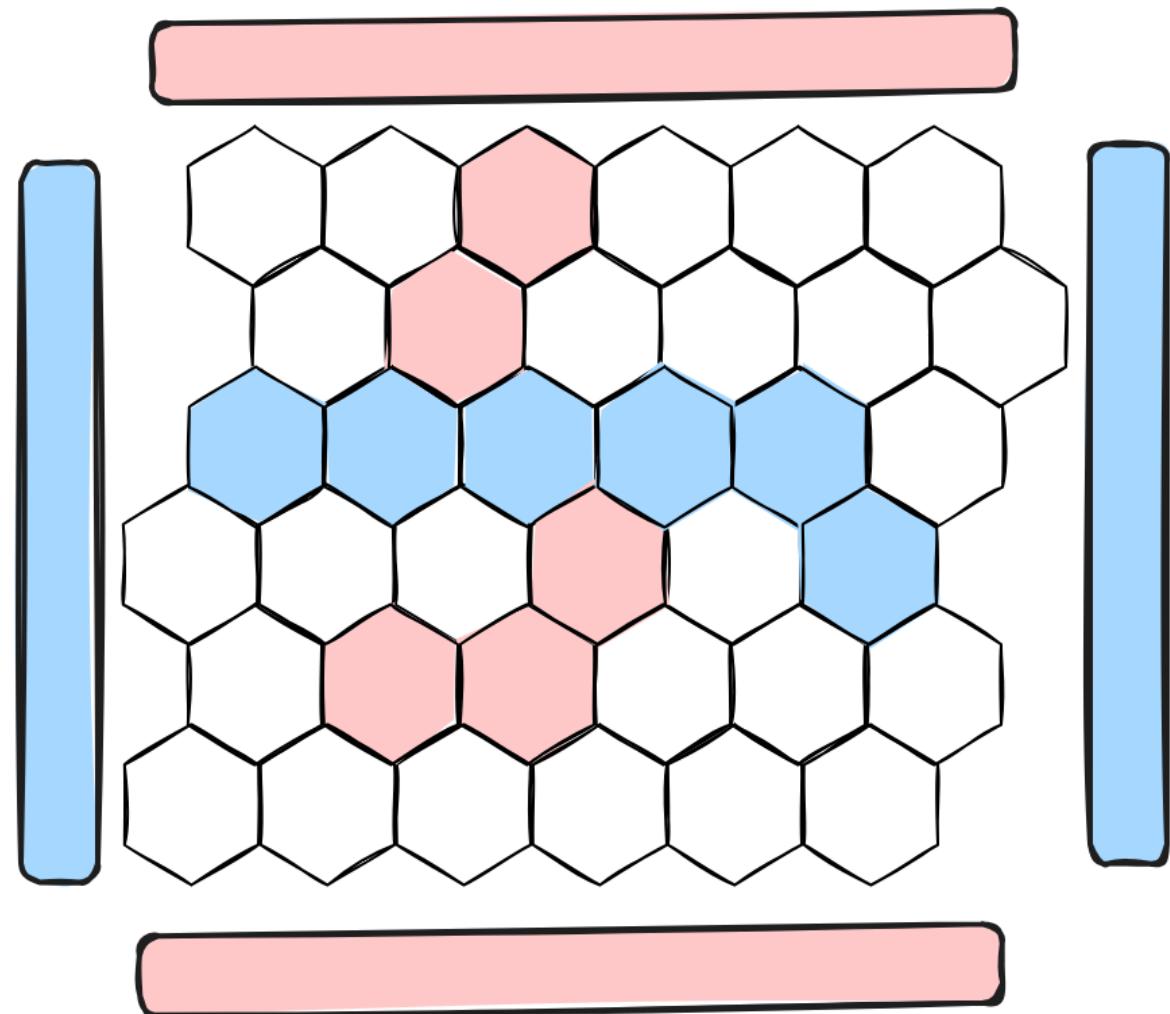
$$\neg Win(v, S) \quad \text{če} \quad \{v' \in V \mid (v, v') \in E, v' \notin S\} = \emptyset$$

# Odločitveni problem - Posplošena geografija

Vhod:  $P = (G, s)$

Vprašanje: Ali drži  $Win(s, \{s\})$ ? (ali obstaja zmagovalna strategija)

# Hex



## Ključna lastnost teh iger

Trajanje iger je največ polinomsko mnogo potez

# TQBF

**vhod:** popolnoma kvantificirana formula (v t.i. prenex obliki):

$$\Psi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

**vprašanje:** Ali je  $\Psi$  resnična?

# Primer

$$\Psi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 [(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)]$$

## Deterministična prostorska zahtevnost

$M$  - vedno ustavljen determinističen TS

Prostorska zahtevnost  $M$  je funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,

$f(n)$  predstavlja največje število celic traka, ki se jih dotakne  $M$  na nekem vhodu dolžine  $n$ .

# Nedeterministična prostorska zahtevnost

$M$  - vedno ustavljen nedeterminističen TS

Prostorska zahtevnost  $M$  je funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,

$f(n)$  predstavlja največje število celic traka, ki se jih dotakne  $M$  v neki veji drevesa izračunov na nekem vhodu dolžine  $n$ .

## Razredi prostorske zahtevnosti

$$\{L \mid \exists M \text{ s prostorsko zahtevnostjo } O(f(n))\}$$

- če je  $M$  deterministični stroj je ta množica  $SPACE(f(n))$
- če je  $M$  nedeterministični stroj je ta množica  $NSPACE(f(n))$

## Definicija ( $N$ )PSPACE

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{SPACE}(n^k)$$

$$\text{NPSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{NSPACE}(n^k)$$

# $SAT \in PSPACE$

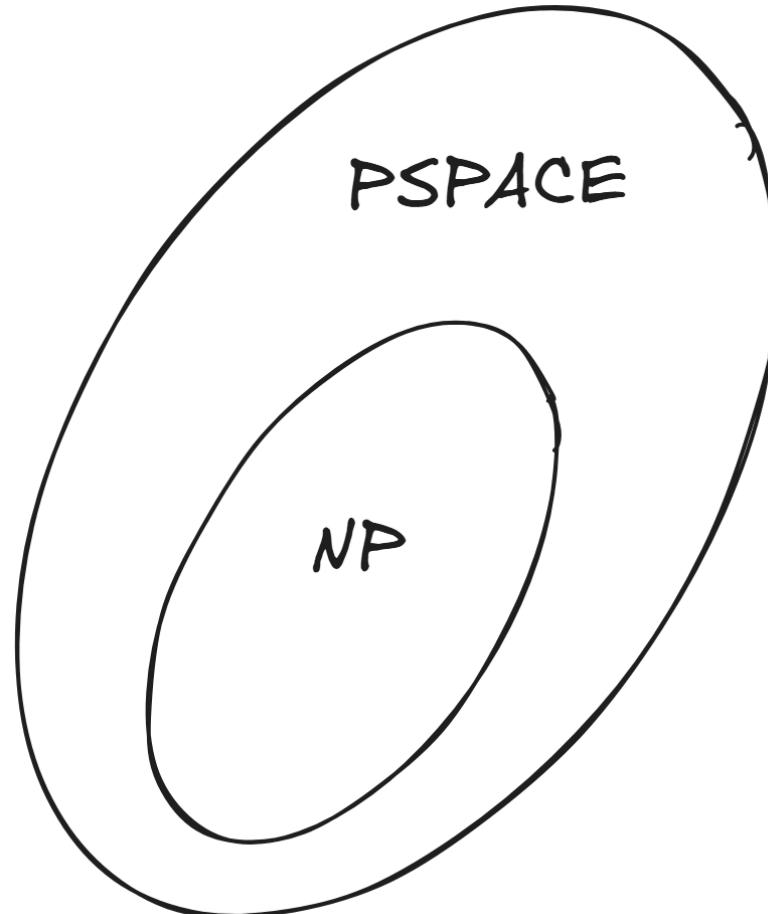
Vhod: formula  $\phi$

- za vsako možno dodelitev vrednost spremenljivk  $\tau$ :
  - če  $\phi[\tau] = 1$ : vrni 1
- vrni 0

Poraba prostora tega algoritma je  $O(n)$

$$NP \subseteq PSPACE$$

Ker smo  $NP$  definirali kot razred problemov s polinomsko preverljivim certifikatom, lahko v polinomskem prostoru sistematično generiramo vse certifikate (in jih tudi preverimo).



## Savitchev izrek

Izrek: za vsako funkcijo  $f(n) \geq \log(n)$

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f^2(n))$$

## Ideja dokaza

Naivni pristop s simulacijo ne deluje (porabimo eksponentno mnogo prostora za rezijo)

- Simulacija deluje na ideji **dosegljivosti trenutnih opisov**
- Vseh možnih trenutnih opisov je  $2^{O(f(n))}$
- Z rekurzivnim algoritmom lahko preverimo če je trenutni opis  $T_2$  dosegljiv iz trenutnega opisa  $T_1$  v prostoru  $O(f^2(n))$

## Posledica Savitchevega izreka

$$PSPACE = NPSPACE$$

# Sokoban $\in PSPACE$

1. Začetna konfiguracija  $\sigma_0$ .
2. Nedeterministično izberemo  $d$  in spremenimo stanje  $\sigma \xrightarrow{d} \sigma'$ .
3. Uporabimo števec potez. Največ  $2^{O(n)}$  stanj igre, če rešitev obstaja, ima največ  $2^{O(n)}$  korakov.
4. Števec korakov potrebuje največ  $O(n)$  bitov.
5. Če  $B = T$ , smo rešitev našli.

## Kaj vemo o PSPACE?

- Poznamo najtežje (PSPACE-polne) probleme
- TQBF je *PSPACE* poln problem
- Vse omenjene igre so *PSPACE* polni problemi
- Če  $P = NP$  "velik del" *PSPACE* postane rešljiv v polinomskem času

## Še težji problemi?

- Šah (posplošeni)
- Go (posplošeni- določene verzije pravil)
- *EXPTIME*-polni problemi
- Vemo da  $P \neq EXPTIME$

