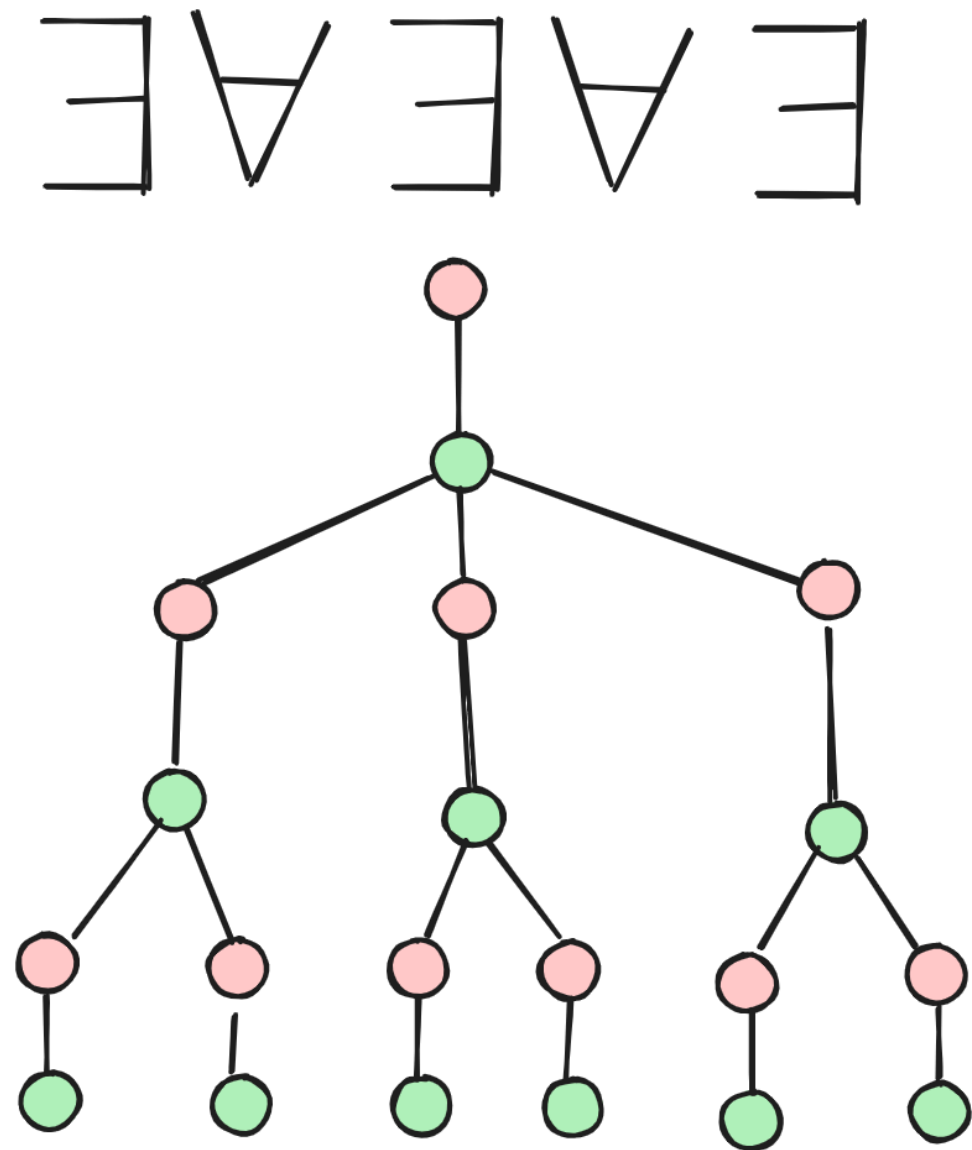


Prostorska zahtevnost

Uroš Čibej



Pregled

- Primeri problemov
- Definicija razredov prostorske zahtevnosti
- $PSPACE$ in $NPSPACE$
- NP in $PSPACE$
- Savitchev izrek

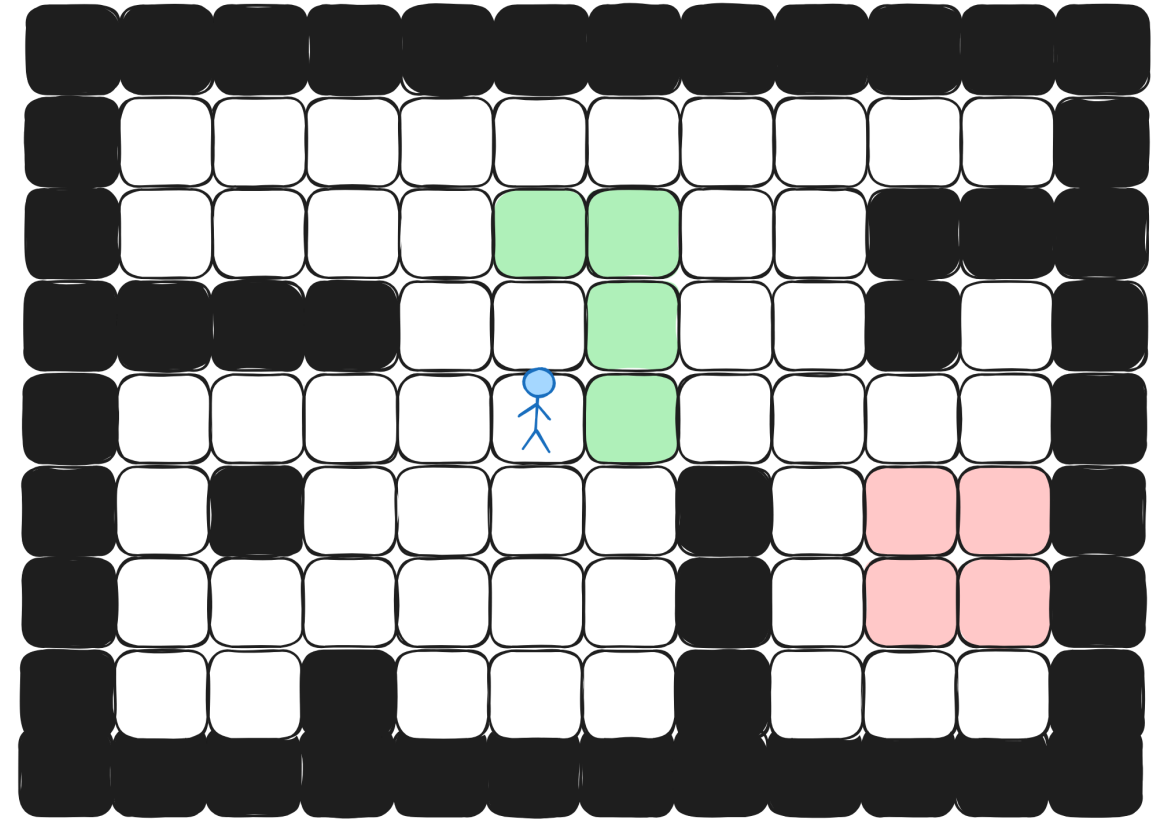
Literatura

- Sipser razdelek 8

Primeri problemov

- Igre z enim igralcem
 - Sokoban
 - Klotski
- Igre z dvema igralcema
 - Hex
 - Posložena geografija
- TQBF - resnične kvantificirane Boolove formule

Sokoban



Formalna definicija

$$P = (G, B, T, s)$$

- $G \subset \mathbb{Z}^2$ (množica prostih celic- ostalo so zidovi)
- $B \subseteq G$ (začetne pozicije zabojev)
- $T \subseteq G$ (ciljne celice)
- $s \in G \setminus B$ (začetna pozicija možica)

Stanje in premik

- stanje igre $\sigma = (s', B')$
- $\sigma \xrightarrow{d} \sigma'$ - sprememba stanja pri enem premiku
- Igra $P = (G, B, T, s)$ je **rešljiva**, če $\exists(d_1, d_2, \dots, d_m)$, da velja

$$(s, B) \xrightarrow{d_1, d_2, \dots, d_m} (s', B'); B' = T$$

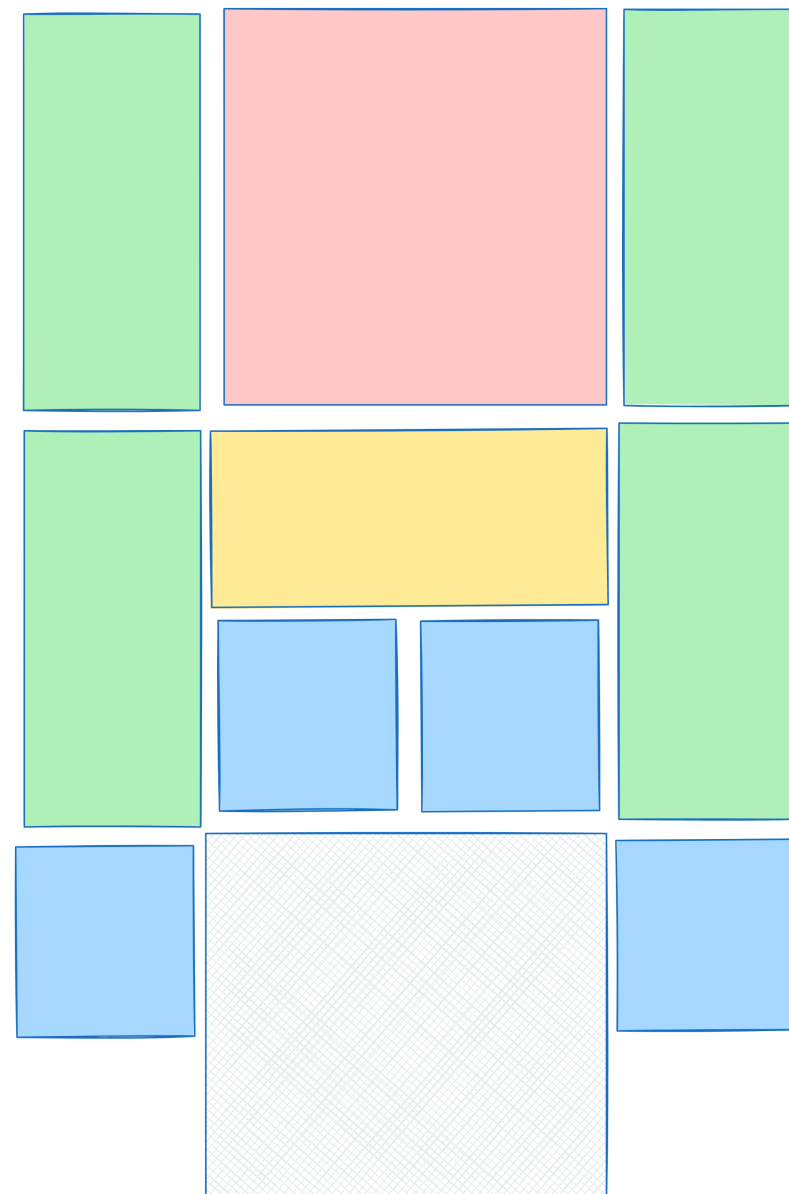
Odločitveni problem Sokoban

Vhod: $P = (G, B, T, s)$

Vprašanje: Ali je P rešljiv?

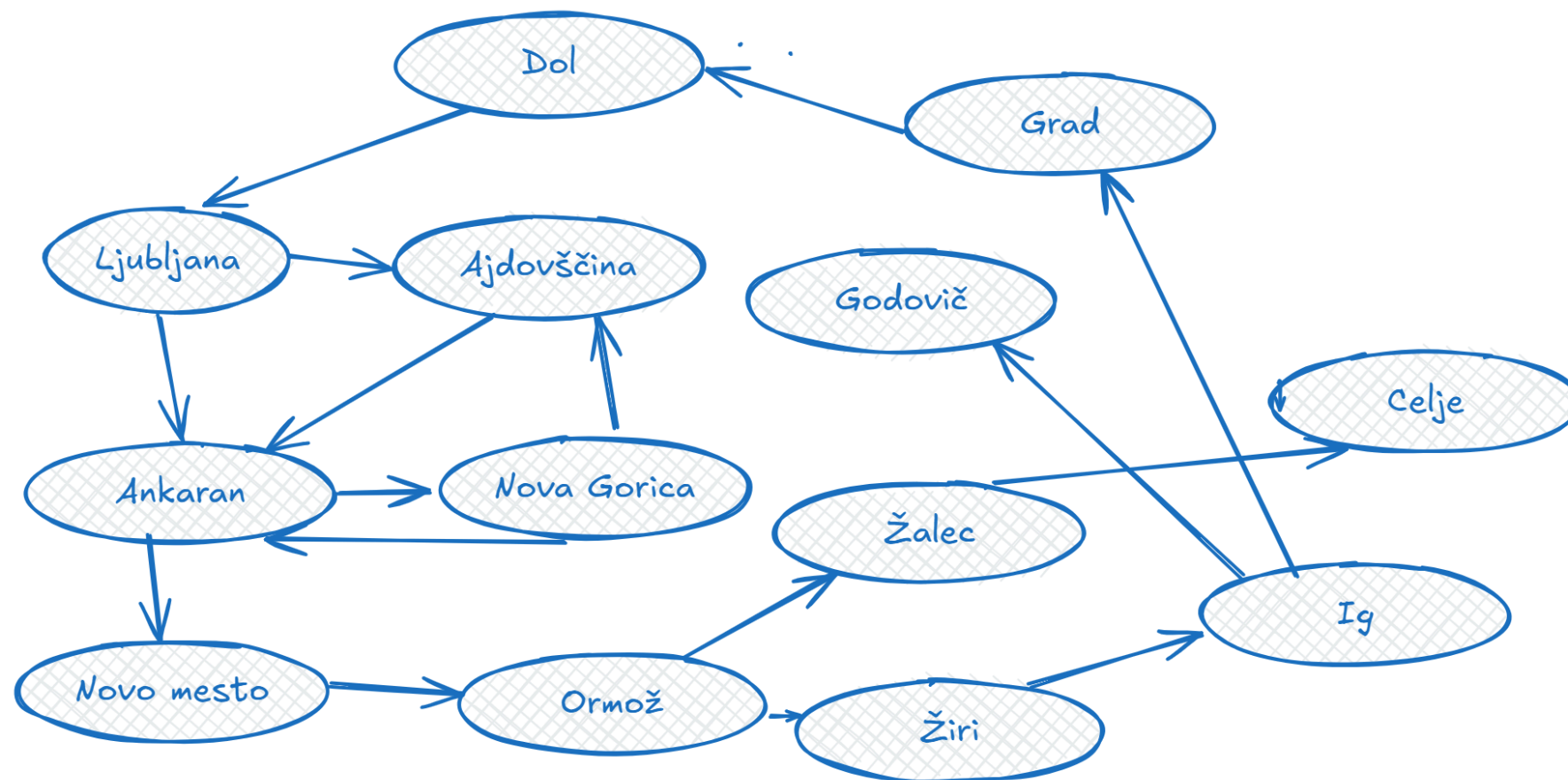
Sokoban $\in NP$?

Klotski



Igre z dvema igralcema

Posplošena geografija



Formalna definicija

$$P = (G, s)$$

- $G = (V, E)$ usmerjen graf
- $s \in V$ začetno vozlišče

Stanje in premik

- stanje igre: $\sigma = (v, S)$ - trenutno stanje in $S \subseteq V$ trenutno obiskana vozlišča
- premik: $(v, S) \xrightarrow{v'} (v', S \cup \{v'\})$
- veljaven premik: $(v, v') \in E, v' \notin S$

Zmagovalna strategija

$$Win(v, S) \iff \exists v' \in V : \left((v, S) \xrightarrow{v'} (v', S \cup \{v'\}) \right) \wedge \neg Win(v', S \cup \{v'\})$$

robni pogoj:

$$\neg Win(v, S) \quad \text{č e} \quad \{v' \in V \mid (v, v') \in E, v' \notin S\} = \emptyset$$

Odločitveni problem - Posplošena geografija

Vhod: $P = (G, s)$

Vprašanje: Ali drži $Win(s, \{s\})$? (ali obstaja zmagovalna strategija)

A diagram of a hexagonal lattice structure. The lattice is composed of white, red, and blue hexagonal cells. The top and bottom boundaries are marked by thick red horizontal bars. The left and right boundaries are marked by thick blue vertical bars. The lattice contains several red cells and a central cluster of blue cells.

Ključna lastnost teh iger

Trajanje iger je največ **polinomsko mnogo potez**

TQBF

vhod: popolnoma kvantificirana formula (v t.i. prenex obliki):

$$\Psi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

vprašanje: Ali je Ψ resnična?

Primer

$$\Psi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 [(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)]$$

Deterministična prostorska zahtevnost

M - vedno ustavljiv determinističen TS

Prostorska zahtevnost M je funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$f(n)$ predstavlja največje število celic traka, ki se jih dotakne M na nekem vhodu dolžine n .

Nedeterministična prostorska zahtevnost

M - vedno ustavljiv nedeterminističen TS

Prostorska zahtevnost M je funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$f(n)$ predstavlja največje število celic traka, ki se jih dotakne M v neki veji drevesa izračunov na nekem vhodu dolžine n .

Razredi prostorske zahtevnosti

$$\{L \mid \exists M \text{ s prostorsko zahtevnostjo } O(f(n))\}$$

- če je M deterministični stroj je ta množica $SPACE(f(n))$
- če je M nedeterministični stroj je ta množica $NSPACE(f(n))$

Definicija $(N)PSPACE$

$$PSPACE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} SPACE(n^k)$$

$$NPSPACE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NSPACE(n^k)$$

$SAT \in PSPACE$

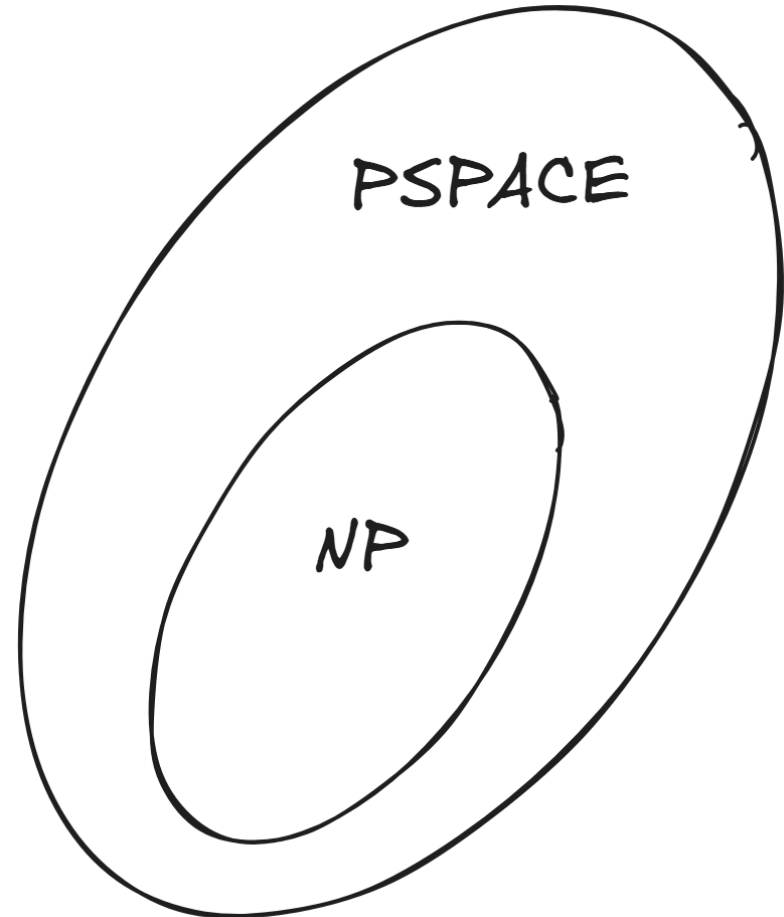
Vhod: formula ϕ

- za vsako možno dodelitev vrednost spremenljivk τ :
 - če $\phi[\tau] = 1$: vrni 1
- vrni 0

Poraba prostora tega algoritma je $O(n)$

$$NP \subseteq PSPACE$$

Ker smo NP definirali kot razred problemov s polinomsko preverljivim certifikatom, lahko v polinomskem prostoru sistematično generiramo vse certifikate (in jih tudi preverimo).



Savitchev izrek

Izrek: za vsako funkcijo $f(n) \geq \log(n)$

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f^2(n))$$

Ideja dokaza

Naivni pristop s simulacijo ne deluje (porabimo eksponentno mnogo prostora za režijo)

- Simulacija deluje na ideji **dosegljivosti trenutnih opisov**
- Vseh možnih trenutnih opisov je $2^{O(f(n))}$
- Z rekurzivnim algoritmom lahko preverimo če je trenutni opis T_2 dosegljiv iz trenutnega opisa T_1 v prostoru $O(f^2(n))$

Posledica Savitchevega izreka

$$PSPACE = NPSPACE$$

Sokoban $\in PSPACE$

1. Začetna konfiguracija σ_0 .
2. Nedeterministično izberemo d in spremenimo stanje $\sigma \xrightarrow{d} \sigma'$.
3. Uporabimo števec potez. Največ $2^{O(n)}$ stanj igre, če rešitev obstaja, ima največ $2^{O(n)}$ korakov.
4. Števec korakov potrebuje največ $O(n)$ bitov.
5. Če $B = T$, smo rešitev našli.

Kaj vemo o PSPACE?

- Poznamo najtežje (PSPACE-polne) probleme
- TQBF je *PSPACE* poln problem
- Vse omenjene igre so *PSPACE* polni problemi
- Če $P = NP$ "velik del" *PSPACE* postane rešljiv v polinomskem času

Še težji problemi?

- Šah (posplošeni)
- Go (posplošeni- določene verzije pravil)
- *EXPTIME*-polni problemi
- Vemo da $P \neq EXPTIME$

