NP-polni (kombinatorični) problemi

Uroš Čibej

1,2,3,4,5
2,1,3,4,5
3,1,2,4,5
1,3,2,4,5
2,3,1,4,5
3,2,1,4,5
3,2,4,1,5
2,3,4,1,5
4,3,2,1,5
3,4,2,1,5
2,4,3,1,5
4,2,3,1,5
4,1,3,2,5
1,4,3,2,5
3,4,1,2,5
4,3,1,2,5
1,3,4,2,5
3,1,4,2,5
2,1,4,3,5

1,2,4,3,5
4,2,1,3,5
2,4,1,3,5
1,4,2,3,5
4,1,2,3,5
5,1,2,3,4
1,5,2,3,4
2,5,1,3,4
5,2,1,3,4
1,2,5,3,4
2,1,5,3,4
2,1,3,5,4
1,2,3,5,4
3,2,1,5,4
2,3,1,5,4
1,3,2,5,4
3,1,2,5,4
3,5,2,1,4
5,3,2,1,4

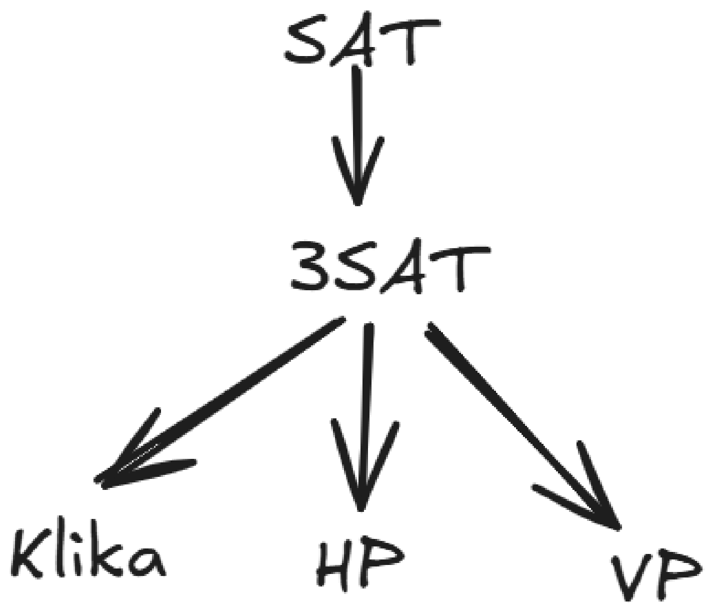
2,3,5,1,4
3,2,5,1,4
5,2,3,1,4
2,5,3,1,4
1,5,3,2,4
5,1,3,2,4
3,1,5,2,4
1,3,5,2,4
5,3,1,2,4
3,5,1,2,4
4,5,1,2,3
5,4,1,2,3
1,4,5,2,3
4,1,5,2,3
5,1,4,2,3
1,5,4,2,3
1,5,2,4,3
5,1,2,4,3

2,1,5,4,3
1,2,5,4,3
5,2,1,4,3
2,5,1,4,3
2,4,1,5,3
4,2,1,5,3
1,2,4,5,3
2,1,4,5,3
4,1,2,5,3
1,4,2,5,3
5,4,2,1,3
4,5,2,1,3
2,5,4,1,3
5,2,4,1,3
4,2,5,1,3
2,4,5,1,3
3,4,5,1,2

4,3,5,1,2
5,3,4,1,2
3,5,4,1,2
4,5,3,1,2
5,4,3,1,2
5,4,1,3,2
4,5,1,3,2
1,5,4,3,2
5,1,4,3,2
4,1,5,3,2
1,4,5,3,2
1,3,5,4,2
3,1,5,4,2
5,1,3,4,2
1,5,3,4,2
3,5,1,4,2
5,3,1,4,2
4,3,1,5,2
3,4,1,5,2
1,4,3,5,2
4,1,3,5,2

Pregled

- Dokazovanje NP-polnosti
    - $3SAT$
    - klika
    - vozliščno pokritje
    - Hamiltonova pot
    - Vsota podmnožice



Literatura

- Sipser razdelek 7

Ponovimo:

Polinomske prevedbe $\leq_p$

$A \leq_p B : w \in A \iff f(w) \in B$

f mora biti polinomsko izračunljiva funkcija

3SAT (koliko lahko problem poenostavimo)

1. Oblika KNO

$$\bigwedge c_i, c_i = l_1 \lor l_2 \lor \ldots \lor l_k$$

2. Oblika 3-KNO

$$\bigwedge c_i, c_i = l_1 \lor l_2 \lor l_3$$

Enakost formul Φ in Φ'

$$\forall \tau : \Phi[\tau] = \Phi'[\tau]$$

Logična ekvivalenca formul

$$\Phi \in SAT \iff \Phi' \in SAT$$

Prevedba

$$\Phi \rightarrow \Phi'$$

- Φ je v KNO
- Φ' je v 3-KNO

$$c_i = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k$$

1. $k = 1$
2. $k = 2$
3. $k > 3$

$k = 1$

$$c_i = l_1$$

vpeljemo dve novi spremenljivki s_1 in s_2 n c_i nadomestimo z

$$c_i' = (l_1 \vee s_1 \vee s_2) \wedge (l_1 \vee s_1 \vee \overline{(}s_2)) \wedge (l_1 \vee \overline{s_1} \vee s_2) \wedge (l_1 \vee \overline{s_1} \vee \overline{s_2})$$

$k = 2$

$$c_i = l_1 \vee l_2$$

vpeljemo eno novo spremenljivko s_1 in c_i nadomestimo z

$$(l_1 \vee l_2 \vee s_1) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \overline{s_1})$$

$k > 3$

$$c_i = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k$$

vpeljemo $k - 3$ novih spremenljivk $s_1, \ldots, s_{k-3}$

$$c_i' = (l_1 \vee l_2 \vee s_1) \wedge (\overline{s_1} \vee l_3 \vee s_2) \wedge (\overline{s_2} \vee l_3 \vee s_3) \wedge \ldots \wedge (\overline{s_{k-4}} \vee l_{k-2} \vee s_{k-3}) \wedge (\overline{s_{k-3}} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

Primer

$$\Phi \;=\; (x \vee y \vee z \vee w) \;\wedge\; (\overline{x} \vee y)$$

Zakaj ne 2-SAT?

Problem klike ($Clique$)

Vhod: $G = \langle E, V \rangle, k$

Vprašanje: Ali obstaja $V' \subseteq V, |V'| \geq k$,

$$\forall u, v \in V' : v \neq u, (u, v) \in E$$

Prevedba $3SAT$ na $Clique$

Vhod: $\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$
$C_i = (\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3})$

Izhod: $G = (V, E), m$
$V = \{v_{ij} \mid \ell_{ij} \text{ j-ti literal klavzule } C_i\}$

$$E = \big\{ \{v_{ij}, v_{pq}\} \bigm| i \neq p \text{ in } \ell_{ij} \neq \neg \ell_{pq} \big\}.$$

Primer

$$\varphi = (x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \ \land \ (\neg x_1 \lor x_2 \lor x_3) \ \land \ (x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3)$$

Izrek

$$\Phi \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in Clique$$

$\Longrightarrow$

Formula ima dodelitev spremenljivkam, da je vrednost formule 1.

1. V vsaki klavzuli je vsaj en literal 1, v kliko izberemo pripadajoče vozlišče grafa (imamo torej m vozlišč)
2. Vsa vozlišča so povezana med sabo, ker vsa pripadajo različnim klavzulam in noben par ni $(x, \neg x)$

Imamo torej kliko velikosti m

$\Longleftarrow$

Graf ima kliko velikosti m

1. vsak par vozlišč pripada različnim klavzulam (vsaka klavzula ima natanko eno vozliše v kliki)
2. x in $\neg x$ nista istočasno v nobeni kliki, zato lahko dodelimo vrednost 1 vsem vozliščem (literalom)

Vrednost izraza pri tej dodelitvi je 1

Problem vozliščnega pokritja

Vhod: $G = \langle E, V \rangle, k$

Vprašanje: Ali obstaja $V' \subseteq V, |V'| \leq k$,

$$\forall (u, v) \in E : u \in V' \vee v \in V'$$

Primer problema

Prevedba $3SAT$ na VC (drugače od Sipserja)

Vhod: $\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$
$C_i = (\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3})$

Izhod: $G = (V, E), 2m$
$V = \{v_{ij} \mid \ell_{ij} \text{ j-ti literal klavzule } C_i\}$

$E = \left\{ \{v_{ij}, v_{pq}\} \;\middle|\; i = p \text{ ali } \ell_{ij} = \neg \ell_{pq} \right\}.$

Primer

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \;\wedge\; (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \;\wedge\; (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Izrek

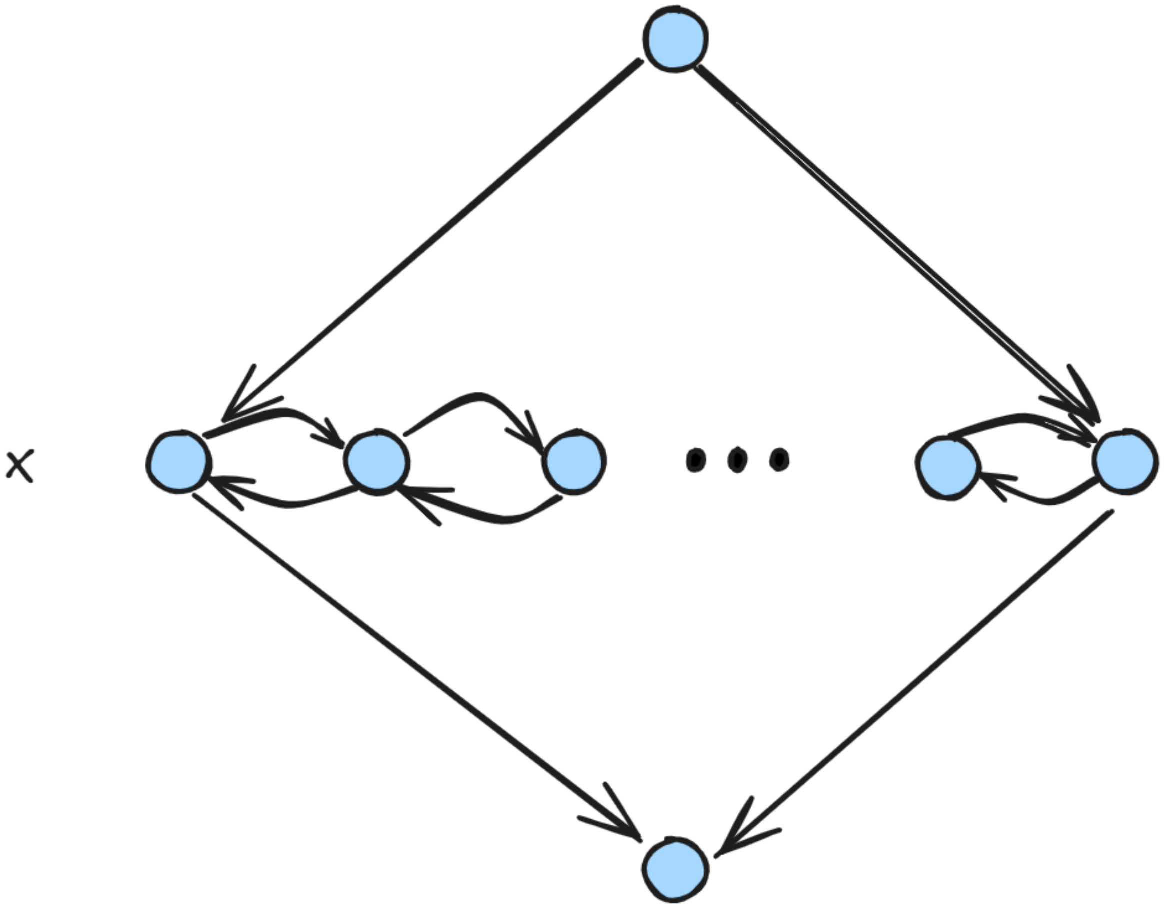
$$\Phi \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in VC$$

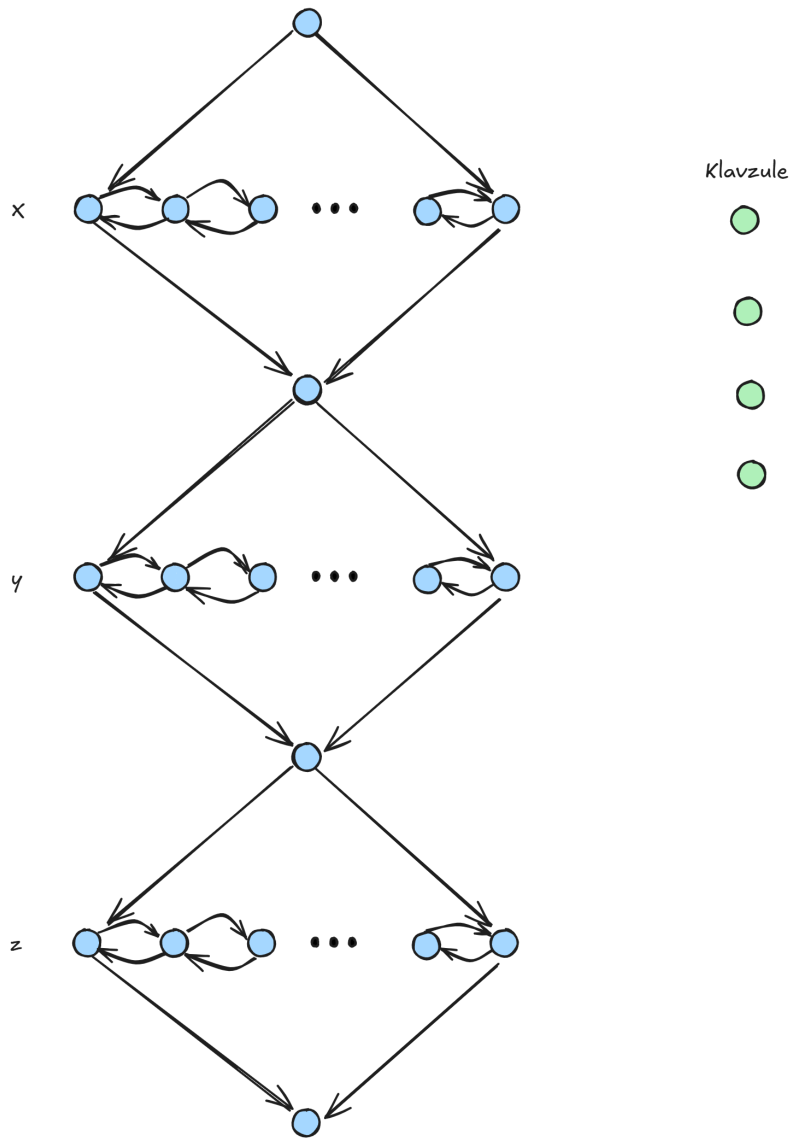
Hamiltonova pot

Vhod: Usmerjen graf $G = (V, E)$ in začetno in končno vozlišče $s, t \in V$.

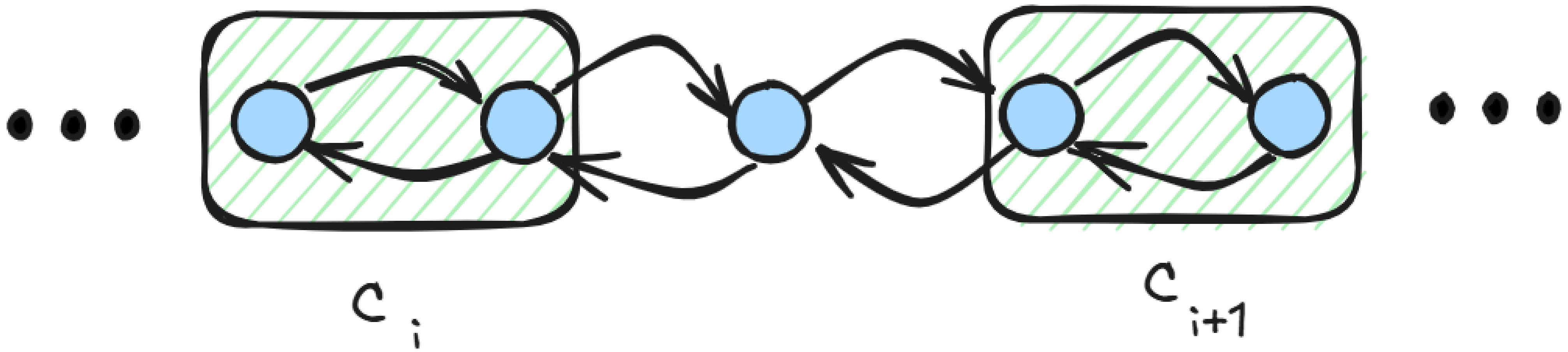
Vprašanje: Ali obstaja zaporedje različnih vozlišč:
$s = v_1, v_2, \ldots, v_{|V|} = t$, da velja
$(v_i, v_{i+1}) \in E$ za $i = 1, \ldots, |V| - 1$?

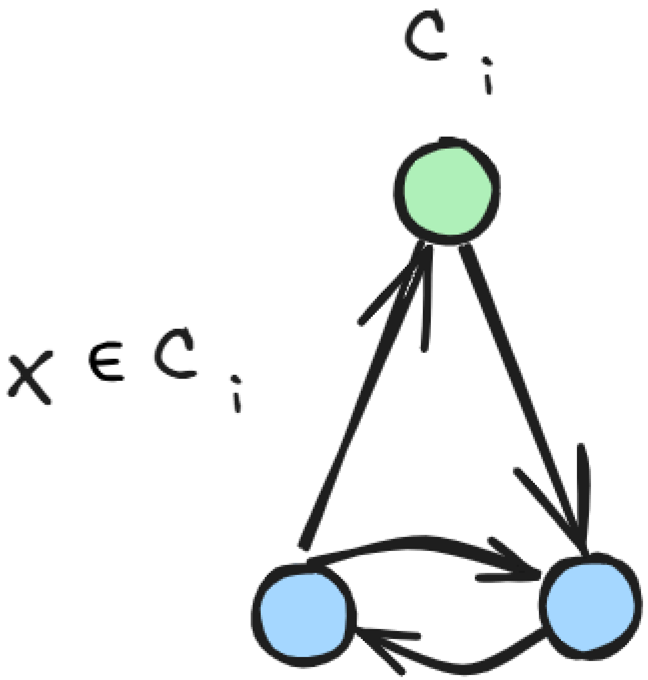
Pomožni grafek (cikcak, cakcik)

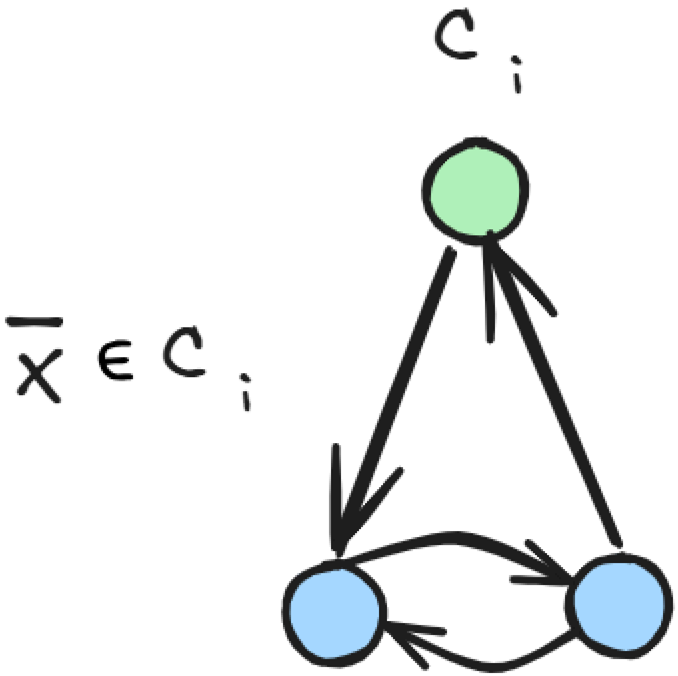



x
y
z
Klavzule

Povezave s klavzulami




c_i
$x \in c_i$


c_i
$\bar{x} \in c_i$

Primer

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \; \wedge \; (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \; \wedge \; (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Izrek

$$\Phi \in 3SAT \iff G \in HP$$

$$\Longrightarrow$$

Formula ima dodelitev spremenljivkam, da je vrednost formule 1.

1. V vsakem diamantu $x_i = 1$ določa pot cikcak, $x_i = 0$ pa cakcik
2. Omogočen je obisk vseh vozlišč c_i, ker je vsaj ena spremenljivka, ki ima omogočen sproten skok.

Imamo torej Hailtonovo pot

$$\Longleftarrow$$

Graf ima Hamiltonovo pot

1. Vse poti so **normalne**: obiščejo vozlišče c_i in se vrnejo nazaj v isti diamant (če se ne vrnejo gotovo izpustijo del vozlišč)
2. Vsako **normalno** pot lahko prevedemo v dodelitev spremenljivkam, cikcak $x_i = 1$, cakcik $x_i = 0$. S tem zadovoljimo vse klavzule.

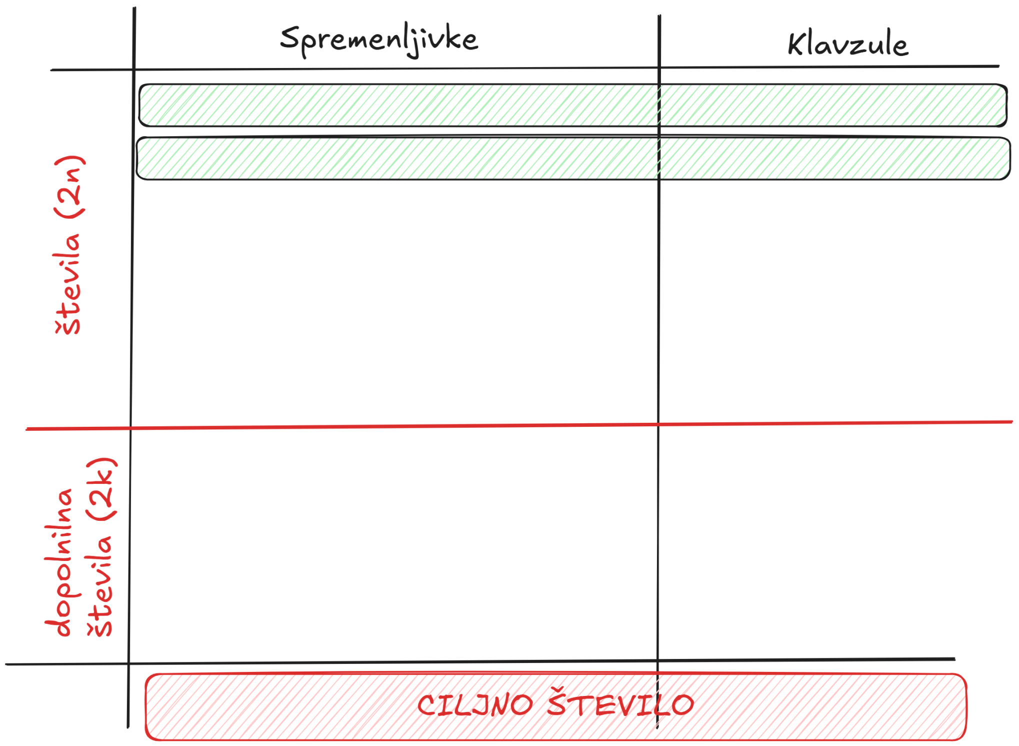
Vrednost izraza pri tej dodelitvi je 1

Vsota podmnožice (SS)

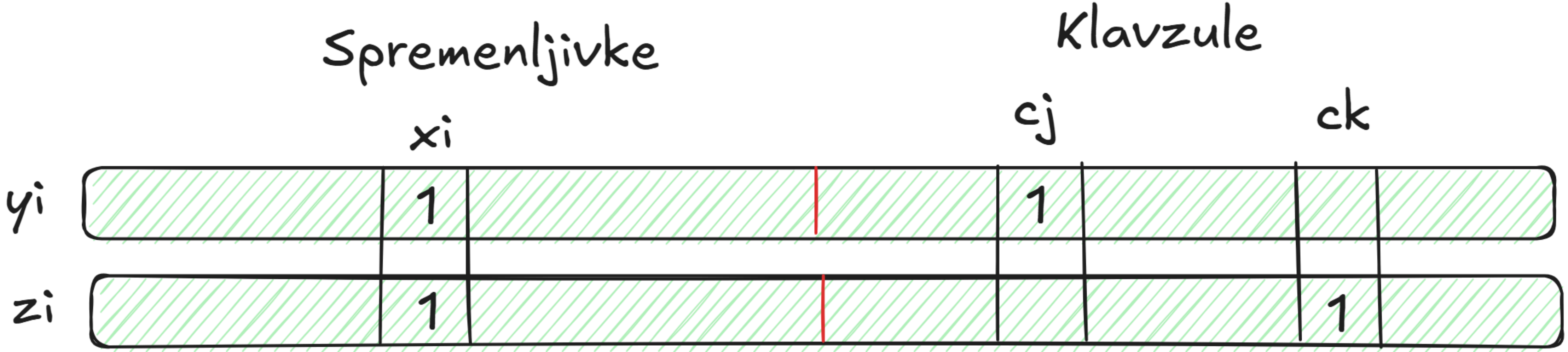
Vhod: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, a_i \in \mathbb{N}$ in naravno število t

Vprašanje: Ali obstaja podmnožica $A' \subseteq A$, da $\sum_i a_i = t$?

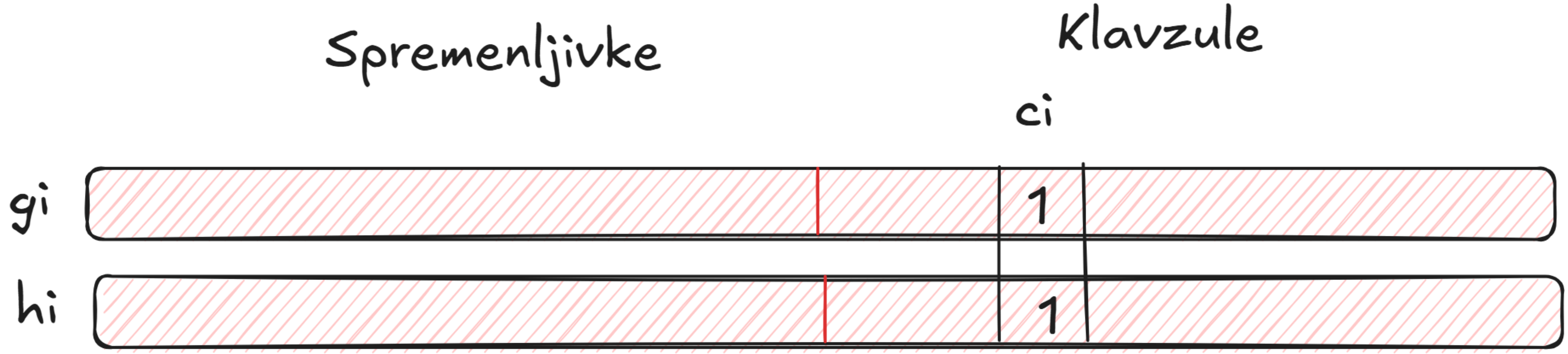
3SAT $\leq_p$ SS


Spremenljivke
Klavzule
števila (2n)
dopolnilna števila (2k)
CILJNO ŠTEVILO

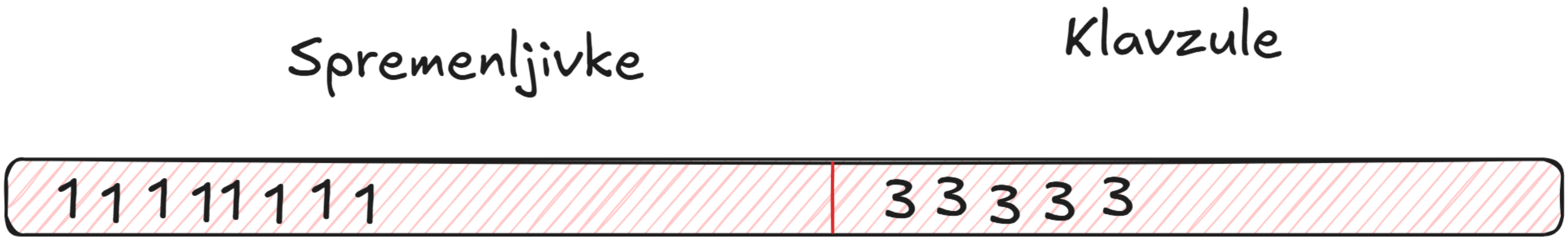
Vsaka spremenljivka



Dodatna števila



Ciljno število t



Primer

$$\phi = \underbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4)}_{C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)}_{C_3}$$

$\phi \in SAT \iff (A, t) \in SS$

$\implies$

$$x_i = 1 \implies y_i \in A$$
$$x_i = 0 \implies z_i \in A$$

(to zadosti enicam v prvem delu t)

$c_i = (l_1, l_2, l_3)$,
da dobimo 3 v stolpcu c_i

1. če vsi $l_i = 1$ (ne potrebujemo g_i in h_i)
2. će sta dva $l_i = 1$, vzamemo še g_i v A
3. če je zgolj en $l_i = 1$, vzamemo še g_i in h_i v A

$\Longleftarrow$

imamo A, ki se sešteje v t

1. za vsak stopec c_i je gotovo izbrana vsaj ena vrednost y_j ali z_j (sicer se ne sešteje v 3),
2. x_i (ali $\neg x_i$) dodelimo vrednost 1
3. gotovo nista hkrati $x_i = 1$ in $\neg x_i = 1$ (zaradi stolpca v prvem delu t)