hypergraph についての補足

柏原 功誠@理学部 1 回

— 概要 —
hypergraph の概念は [1] において導入されているが，もう少し良い定式化があるのではないかと考えた．ここにその一端をお見せしよう．

1. 準備

Set を**有限**集合全体が成す圏(集まり)とし (通常の定義とは**太字**の部分が異なる)，$\mathfrak{P}(V)$ を $V \in \mathbf{Set}$ の部分集合全体の集合とする．また，$V \in \mathbf{Set}$，$r \in \mathbb{N}$ に対して，V の濃度(元の個数)が r である部分集合全体を

$$\binom{V}{r} \coloneqq \{e \in \mathfrak{P}(V) \mid \#e = r\}$$

とする．

部分集合族 $E \subset \mathfrak{P}(V)$ と $\varphi : V \to V'$ に対して，φ による E の像を

$$\varphi(E) \coloneqq \{\varphi(e) \mid e \in E\} \subset \mathfrak{P}(V')$$

と定める．

2. hypergraph の定義

hypergraph とは普通の(2-)graph の拡張である. ここでは hypergraph を定義する前に通常の graph が頂点集合とその部分集合族の組として表されることを見よう．ただし，ここで言う graph とは単純無向有限 graph，即ち多重辺を許さず頂点集合が有限なものに限っていることに注意されたい.

定義 2.1【graph】 頂点集合 $V \in \mathbf{Set}$ と 辺集合 $E \subset \binom{V}{2}$ の組

$$G = (V, E)$$

を **graph** という．

例 2.2【三角形】 三角形 K_3 は

$$V = \{1, 2, 3\},\ E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$$

とすることで実現できる．

辺全体を部分集合族で定めたことにより，同じ頂点をもつ辺は自動的に同一視されることに注意してほしい(結果的に多重辺は無くなっている).

以上の定義においては E は $\binom{V}{2}$ の部分集合，即ち辺集合の各元 e は 2 点集合であった．ここを $E \subset \mathfrak{P}(V)$ まで緩める，つまり辺 e が 2 点以上のものを考えることで，hypergraph の定義を得る．

定義 2.3【hypergraph】 頂点集合 $V \in \mathbf{Set}$ と 辺集合 $E \subset \mathfrak{P}(V)$ の組

$$G = (V, E)$$

を **hypergraph** という． このとき， E の元 e を辺と呼ぶ．

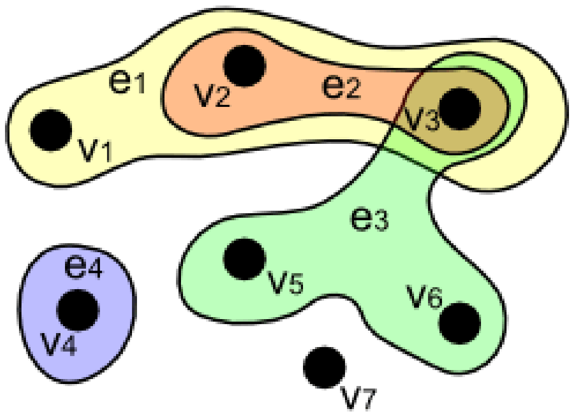

Figure 1: hypergraph の例 (Wikipedia “hypergraph” より)

⚠ **Warning**

[1] では $E \subset \mathfrak{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ と定義しているのは，空グラフ $(V, \emptyset)$ と $(V, \{\emptyset\})$ が紛らわしいからであろう (一般に，$\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ は集合として異なる)． ただ，一般論を展開する上では上記のような定義を採用したほうが自然であると考えた．この違いがもたらす影響を筆者は全て把握できてはいない (以降に出てくる具体例は全て [1] の定義を満たすので安心してほしい).

3. k 部 r - graph (その一)

この章では，厳密な定義は後回しで k 部 r - graph を理解することを目標とする．特に，重要な例として， 3 部 2 - graph をとりあげる．

まず，$r \in \mathbb{N}$ に対して r - graph とは各辺の濃度が r である hypergraph のことである:

定義 3.1【hypergraph】 頂点集合 $V \in \mathbf{Set}$ と 辺集合 $E \subset \binom{V}{r}$ の組

$$G = (V, E)$$

を **r - graph** という． このとき， E の元 e を辺と呼ぶ．

Bibliography

[1] 関真一朗, “グリーン・タオの定理.”