hypergraph についての補足

柏原 功誠@理学部 1 回

— 概要 —
hypergraph の概念は [1] において導入されているが，もう少し良い定式化があるのではないかと考えた．ここにその一端をお見せしよう．

目次

1. 準備

Set を**有限**集合全体が成す圏(集まり)とし (通常の定義とは**太字**の部分が異なる)，$\mathfrak{P}(V)$ を $V \in \mathsf{Set}$ の部分集合全体の集合とする． $\mathrm{id}_V : V \to V$ を恒等写像とする

また， $V \in \mathsf{Set}$，$r \in \mathbb{N}$ に対して， V の濃度(元の個数)が r である部分集合全体を

$$\binom{V}{r} \coloneqq \{e \in \mathfrak{P}(V) \mid \#e = r\}$$

とする．

部分集合族 $E \subset \mathfrak{P}(V)$ と $\varphi : V \to V'$ に対して， φ による E の像を

$$\varphi(E) \coloneqq \{\varphi(e) \mid e \in E\} \subset \mathfrak{P}(V')$$

と定める．

2. hypergraph の定義

hypergraph とは普通の(2-)graph を拡張した概念である．ここでは hypergraph を定義する前に通常の graph が頂点集合とその部分集合族の組として表されることを見よう．
ただし，ここで言う graph とは単純無向有限 graph，即ち多重辺を許さず頂点集合が有限なものに限っていることに注意されたい．

定義 2.1【(2-)graph】　頂点集合 $V \in \mathsf{Set}$ と 辺集合 $E \subset \binom{V}{2}$ の組

$$G = (V, E)$$

を **graph** という． このとき， V の元 v を頂点， E の元 e を辺と呼ぶ．

ここで各 $e \in E$ は 2 元集合なので，二つの異なる頂点 v, w を用いて $e = \{v, w\}$ と書ける． この時頂点 v と w に辺が引かれていると考えることで，次のような図が書ける．

例 2.2【三角形】 三角形 K_3 は

$$V = [3] = \{1, 2, 3\},\ E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$$

とすることで実現できる．

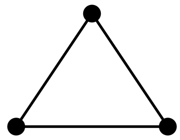

図 1: 三角形 K_3 の一例

辺全体を部分集合族で定めたことにより，同じ頂点をもつ辺は自動的に同一視されることに注意してほしい(結果的に多重辺は無くなっている)．

以上の定義においては E は $\binom{V}{2}$ の部分集合，即ち辺集合の各元 e は 2 元集合であった． ここを $E \subset \mathfrak{P}(V)$ まで緩める，つまり辺 e が 2 点以上のものを考えることで，hypergraph の定義を得る．

定義 2.3【hypergraph】 **頂点集合** $V \in \mathsf{Set}$ と**辺集合** $E \subset \mathfrak{P}(V)$ の組

$$G = (V, E)$$

を **hypergraph** という． このとき，V の元 v を頂点，E の元 e を辺と呼ぶ．また，

$$V(G) = V,\ E(G) = E$$

を hypergrph のそれぞれ頂点集合，辺集合を与える対応とする．

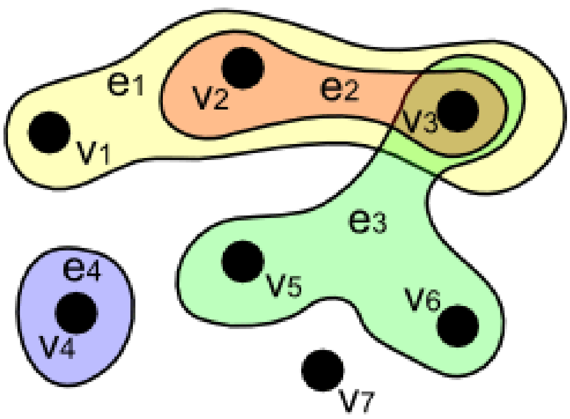

図 2: hypergraph の例 (Wikipedia “hypergraph” より)

> ⚠ **Warning**
>
> [1] では $E \subset \mathfrak{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ と定義しているのは，空グラフ $(V, \emptyset)$ と $(V, \{\emptyset\})$ が紛らわしいからであろう (一般に，$\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ は集合として異なる)．だだ，一般論を展開する上では上記のような定義を採用したほうが自然であると考えた．この違いがもたらす影響を筆者は全て把握できてはいない (以降に出てくる具体例は全て [1] の定義を満たすので安心してほしい).

3. k 部 r - graph (その一)

この節では，厳密な定義は後回しで k 部 r - graph を理解することを目標とする．特に，重要な例として，3 部 2 - graph を取り上げる．

まず，$r \in \mathbb{N}$ に対して r - graph とは各辺の濃度が r である hypergraph のことである:

定義 3.1【r-graph】 頂点集合 $V \in \mathsf{Set}$ と 辺集合 $E \subset \binom{V}{r}$ の組

$$G = (V, E)$$

を r - **graph** という． このとき， E の元 e は濃度が r の V の部分集合である．

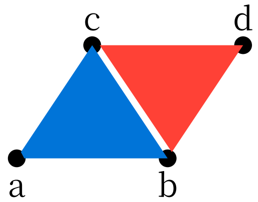

図 3: 3 - graph ($V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{e_1 = \{a, b, c\}, \ e_2 = \{b, c, d\}\}$)

特に，通常の意味での graph とは 2 - graph のことである． 以下，単に graph といえば hypergraph の事を指し，通常の意味での graph は 2 - graph と呼んで区別する．

では，次に graph の頂点に"色を塗る"ことを考えよう．ただし，次の規則に従うものとする:

彩色の規則: 各辺の頂点は互いに異なる色で塗る．

例えば 図 3 の 3 - graph は次のようにして 3 色に塗り分けられる:

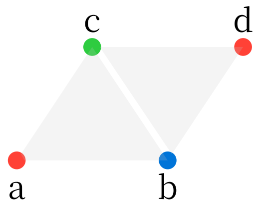

図 4: 図 3 の 3 - graph の 3 色を用いた彩色

逆に，色が塗られた頂点集合が与えられたとき，異なる色の頂点を選んで辺を引けば彩色された graph が得られる．（これは [1] での k 部 r - graph データに対応する．）

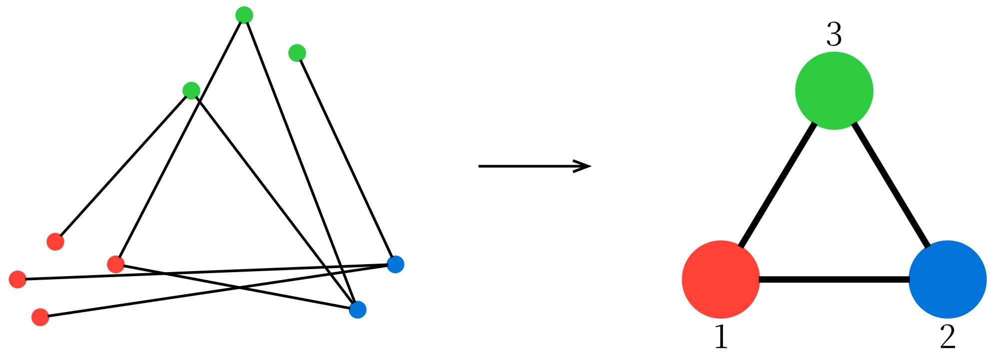

図 5: 3 部 2 - graph G_0 の例

ここで，k 色で彩色可能な r - graph ことを k 部 r - graph と呼ぶこととする (厳密な定義は後述).

ここまで"彩色"という曖昧な用語を用いてきたが，色を塗るというのは結局のところ頂点集合 V から色の集合 J への写像(全射)を与えることと等しい.
例えば 図 5 の 3 部 2 - graph G_0 において， $V(G_0)$ から $J = [3]$ への写像

$$\lambda : V(G_0) \to J(= [3])$$

は，赤色の点を $1 \in J$ に，青色の点を $2 \in J$ に，緑色の点を $3 \in J$ にそれぞれ対応させる． このとき， $j\ (\in J)$ 色の点全体は $V_j = \lambda^{-1}(j)$ と表される.

ただ，ここまでの議論には致命的な欠陥がある: 彩色の規則が全く反映されていない !! 特に $\lambda : V(G_0) \to J$ を適当に与えたとき，λ に対応する彩色が規則を満たす保障はどこにもない. 以下の節ではこの問題を解決するように k 部 r - graph を定義することに捧げられる．基本的なアイデアとしては，
・ J を graph K_3 と思い，
・ λ を “graph の間の写像” $\lambda : G_0 \to K_3$ とみなす

ことにより達成される.

4. graph map, r - graph map

前節で述べたように，この節では “graph の間の写像” graph map を定義する.

graph とは辺集合という構造を持った集合なので，その間の"写像"としては構造を保つ写像を考えたい．素朴に考えれば辺を辺に写すようなものが良いのだろうが，一般の(hyper)graph では元の個数についての制限がないので，もう少し条件を緩めてみる．つまり，辺を写した像がある辺に含まれていれば良いとする．ここまでの議論をまとめて，以下の定義を得る.

定義 4.1【graph map】 二つの graph G, G' に対して，G から G' への **graph map**

$$f : G \to G'$$

とは,
(i) 頂点集合の間の写像 $f : V(G) \to V(G')$ であって,
(ii) 全ての $e \in E(G)$ に対して，ある $e' \in E(G')$ が存在して $f(e) \subset e'$ を満たす

もののことを言う.

上の条件 (ii) は，式で書くと

$$\forall e \in E(G),\ \exists e' \in E(G'),\ f(e) \subset e'$$

であり，G の各辺を f で写した像が G' のある辺に含まれているということを意味する.

例 4.2

(i) 図 5 において，$\lambda : V(G_0) \to J = V(K_3)$ は graph map $\lambda : G_0 \to K_3$ となる. 実際，例えば赤色の点から青色の点への辺 e は，λ によって K_3 の辺 $e' = \{1, 2\}$ に移る ($\lambda(e) \subset e'$ が成り立つ). 他の色の間の辺も同様であるから，結局 $\lambda : G_0 \to K_3$ は graph map となる.

(ii) 二つの graph $G, H(\neq \emptyset)$ について，全ての G の頂点をある H の頂点 $h \in H$ に移す写像を

$$c_h : V(G) \to V(H),\ c_h(v) = h\ (\forall v \in V(G))$$

と定める．このとき，任意の $e \in E(G)$ に対して $c_h(e) = \{h\}$ であるから,「c_h が graph map となる」と「$h \in e'$ なる $e' \in E(H)$ が存在する」は同値であることがわかる.

(iii) graph G について，$\mathrm{id}_{V(G)} : V(G) \to V(G)$ は $\mathrm{id}_G(e) = e$ となるので，明らかに graph map となる．$\mathrm{id}_{V(G)}$ を id_G と書き，graph G の**恒等射**という．一方，一般の写像 $f : V(G) \to V(G)$ は常に graph map になるとは限らない.

例 4.3 graph $(X, O_X), (Y, O_Y)$ が位相空間となる (位相空間の公理を満たす)とき, (X, O_X) から (Y, O_Y) への graph map とは即ち連続写像のことである．実際

$$\forall U \in O_X, \exists V \in O_Y,\ f(U) \subset V$$
$$\iff \forall V \in O_Y,\ f^{-1}(V) \in O_X$$

が位相空間の一般論より従う．同様に，graph が(有限)加法族の構造を持つとき，その間の graph map とは可測関数のことである.

参考文献

[1] 関真一朗, "グリーン・タオの定理."