第1课时　等比数列前n项和公式

学习目标

XUEXIMUBIAO

1.掌握等比数列的前n项和公式及公式证明思路.

2.会用等比数列的前n项和公式解决有关等比数列的一些简单问题.

内容索引

NEIRONGSUOYIN

自主学习

题型探究

达标检测

1

PART ONE

自主学习

知识点一　等比数列的前n项和公式

已知量	首项、公比与项数	首项、公比与末项
求和公式	$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1),\\ na_1(q=1)\end{cases}$	$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1),\\ na_1(q=1)\end{cases}$

知识点二　错位相减法

1.推导等比数列前n项和的方法叫__________法.

2.该方法一般适用于求一个______数列与一个______数列对应项积的前n项和，即若$\{b_n\}$是公差$d\neq 0$的等差数列，$\{c_n\}$是公比$q\neq 1$的等比数列，求数列$\{b_n\cdot c_n\}$的前n项和S_n时，也可以用这种方法.

答案

思考　如果$S_n=a_1+a_2q+a_3q^2+\cdots+a_nq^{n-1}$，其中$\{a_n\}$是公差为$d$的等差数列，$q\neq 1$.两边同乘以$q$，再两式相减会怎样?

答案

知识点三　使用等比数列求和公式时注意事项

(1)一定不要忽略$q=1$的情况；

(2)知道首项 a_1、公比 q 和项数 n，可以用 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$；知道首尾两项 a_1，a_n 和 q，可以用 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$；

(3)在通项公式和前n项和公式中共出现了五个量：a_1，n，q，a_n，S_n.知道其中任意三个，可求其余两个.

1.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=b$，公比为q，则前3项和为$\dfrac{b(1-q^3)}{1-q}$.(　　)

2.求数列$\{n\cdot 2^n\}$的前n项和可用错位相减法.(　　)

3.$\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.(　　)

4.等比数列前n项和S_n不可能为0.(　　)

答案 返回

2

PART TWO

题型探究

题型一　等比数列前n项和公式的直接应用

例1　求下列等比数列前8项的和：

(1)$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…；

解答

(2)$a_1=27$，$a_9=\dfrac{1}{243}$，$q<0$.

解答

反思感悟　求等比数列前n项和，要确定首项、公比或首项、末项、公比，应特别注意$q=1$是否成立.

跟踪训练1 (1)求数列$\{(-1)^{n+2}\}$的前100项的和;

解答

(2)在 14 与$\frac{7}{8}$之间插入 n 个数，组成所有项的和为$\frac{77}{8}$的等比数列，求此数列的项数.

解答

题型二　前n项和公式的综合利用

例2　在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$S_3=6$，求a_3和q.

解答

反思与感悟 (1)$a_n=a_1q^{n-1}$，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\left(\text{或}S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}\right)$两公式共有 5 个量.解题时，有几个未知量，就应列几个方程求解.

(2)当 $q=1$ 时，等比数列是常数列，所以 $S_n=na_1$；当 $q\neq1$ 时，等比数列的前 n 项和 S_n 有两个公式.当已知 a_1，q 与 n 时，用 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$比较方便；当已知 a_1，q 与 a_n 时，用 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$比较方便.

跟踪训练2　已知等比数列$\{a_n\}$是递增数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和.若a_1，a_3是方程$x^2-5x+4=0$的两个根，则$S_6=$__63__.

解析　答案

题型三　利用错位相减法求数列的前n项和

例 3　求数列$\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$的前 n 项和.

解答

反思感悟 一般地，如果数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是公比不为1的等比数列，求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和时，可采用错位相减法.

跟踪训练3　求和：$S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n\ (x \neq 0)$.

解答

分期付款模型

典例 小华准备购买一部售价为5 000元的手机，采用分期付款方式，并在一年内将款全部付清.商家提出的付款方式为：购买2个月后第1次付款，再过2个月后第2次付款，…，购买12个月后第6次付款，每次付款金额相同，约定月利率为0.8%，每月利息按复利计算，求小华每期付款金额是多少.(参考数据：$1.008^{12}\approx1.10$)

解答

素养评析　本题考查数学建模素养，现在购房、购车越来越多采用分期付款方式，但有关方不一定都会计算，所以建立一个老少皆宜的模型来套用是必要的，在建立模型过程中，要把制约因素抽象为符号表示，并通过前若干项探索规律，抓住这些量之间的关系建立关系式.

3

PART THREE

达标检测

1.等比数列1，x，x^2，x^3，…的前n项和S_n等于

A.$\dfrac{1-x^n}{1-x}$

B.$\dfrac{1-x^{n-1}}{1-x}$

C.$\begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x}, & x\neq 1且x\neq 0 \\ n, & x=1 \end{cases}$

D.$\begin{cases} \dfrac{1-x^{n-1}}{1-x}, & x\neq 1且x\neq 0 \\ n, & x=1 \end{cases}$

2.设等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，前n项和为S_n，则$\dfrac{S_4}{a_2}$等于

A.2　　B.4　　C.$\dfrac{15}{2}$　　D.$\dfrac{17}{2}$

3.等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，若$a_1=81$，$a_5=16$，则它的前5项的和是

A.179　　B.211　　C.243　　D.275

4.某厂去年产值为a，计划在5年内每年比上一年产值增长10%，从今年起5年内，该厂的总产值为____________.

5.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n = n\cdot 2^n$，则$S_n =$ ________________.

解析 答案

课堂小结

KETANGXIAOJIE

1.在等比数列的通项公式和前n项和公式中，共涉及五个量：a_1，a_n，n，q，S_n，其中首项a_1和公比q为基本量，且“知三求二”．

2.前n项和公式的应用中，注意前n项和公式要分类讨论，即当$q \neq 1$和$q=1$时是不同的公式形式，不可忽略$q=1$的情况.

3.一般地，如果数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列且公比为q，求数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前n项和时，可采用错位相减法求和.

返回

本课结束