第二章　§2.4　等比数列

第1课时　等比数列的概念及通项公式

学习目标

XUEXIMUBIAO

1.通过实例，理解等比数列的概念.

2.掌握等比中项的概念并会应用.

3.掌握等比数列的通项公式并了解其推导过程.

内容索引

NEIRONGSUOYIN

自主学习

题型探究

达标检测

1

PART ONE

自主学习

知识点一　等比数列的概念

1.定义：如果一个数列从第_项起，每一项与它的___一项的__等于_____常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的____，通常用字母q表示($q\neq 0$).

2.递推公式形式的定义：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n>1)\left(或\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q，n\in\mathbf{N}^*\right)$.

3.等比数列各项均______为0.

答案

知识点二　等比中项与等差中项的异同

对比项	等差中项	等比中项
定义	若a，A，b成等差数列，则A叫做a与b的等差中项	若a，G，b成______数列，则G叫做a与b的______中项
定义式	$A-a=b-A$	$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$
公式	$A=\frac{a+b}{2}$	$G=\pm\sqrt{ab}$
个数	a与b的等差中项唯一	a与b的等比中项有___个，且互为______
备注	任意两个数a与b都有等差中项	只有当$ab>0$时，a与b才有等比中项

答案

知识点三　等比数列的通项公式

若等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q，则___=_______$(n\in \mathbf{N}^*)$.

答案

1.若$a_{n+1}=qa_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$q\neq0$，则$\{a_n\}$是等比数列.(　　)

2.任何两个数都有等比中项.(　　)

3.等比数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…中，第 10 项为$\frac{1}{2^9}$.(　　)

4.常数列既是等差数列，又是等比数列.(　　)

答案　返回

2

PART TWO

题型探究

题型一　等比数列的判定

命题角度1　已知数列前若干项判断是否为等比数列

例1　判断下列数列是否为等比数列.

(1)1，3，3^2，3^3，…，3^{n-1}，…；

是等比数列

解答

(2) $-1, 1, 2, 4, 8, \cdots$;

不是等比数列

(3) a^1, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$.

不是等比数列

解答

反思感悟　判定等比数列，要抓住3个要点：

①从第二项起.②要判定每一项，不能有例外.③每一项与前一项的比是同一个常数，且不能为0.

跟踪训练1 下列各组数成等比数列的是

①$1, -2, 4, -8$； ②$-\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4$；

③x, x^2, x^3, x^4； ④$a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$.

A.①② B.①②③ C.①②④ D.①②③④

解析 答案

命题角度2　已知递推公式判断是否为等比数列

例2　已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$.

(1)证明：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

代入n=1，2，3，...

∴a_n+1为等比数列

证明

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

$a_n=2^n-1$

解答

反思感悟　等比数列的判定方法

(1)定义法：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geqslant 2$，$q$ 是不为 0 的常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列.

(2)等比中项法：$a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}(n\geqslant 2$，$a_n$，$a_{n-1}$，$a_{n+1}$ 均不为 0)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

跟踪训练2 数列$\{a_n\}$满足$a_1=-1$，且$a_n=3a_{n-1}-2n+3(n=2,3,\cdots)$.

(1)求a_2，a_3，并证明数列$\{a_n-n\}$是等比数列；

a2=-4

a3=-15

代入n=2，3，4，...即可

解答

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

$a_n = n - 2\times3^{n-1}$

解答

题型二　等比数列通项公式的应用

例3　在等比数列$\{a_n\}$中.

(1)已知$a_2=4$，$a_5=-\dfrac{1}{2}$，求a_n；

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

解答

(2)已知 $a_3+a_6=36$，$a_4+a_7=18$，$a_n=\frac{1}{2}$，求 n.

q = 0 . 5

n = 9

解答

反思感悟　等比数列通项公式及应用应注意两点

(1)a_1和q是等比数列的基本元素，只要求出这两个基本元素，其余的元素便可求出.

(2)等比数列的通项公式涉及4个量a_1，a_n，n，q，知任意三个就可以求出另外一个.

跟踪训练3　在等比数列$\{a_n\}$中：

(1)已知$a_1=3$，$q=-2$，求a_6；

$a_6=-96$

(2)已知$a_3=20$，$a_6=160$，求a_n.

$a_n=5\cdot 2^{n-1}$

解答

方程的思想在等比数列中的应用

典例1 有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是16，第二个数与第三个数的和是12，求这四个数.

解答

典例2 设四个实数依次成等比数列，其积为2^{10}，中间两项的和是4，则这四个数为多少?

解答

素养评析 (1)解决这类题目通常用方程的思想，列方程首先应引入未知数，三个数或四个数成等比数列的设元技巧：

①若三个数成等比数列，可设三个数为$\frac{a}{q}$，a，aq或a，aq，$aq^2(q\neq0)$.

②若四个数成等比数列，可设为$\frac{a}{q}$，a，aq，aq^2或$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，$aq^3(q\neq0)$.

(2)像本例，明确运算对象，选择运算方法，求得运算结果充分体现数学运算的数学核心素养.

返回

3

PART THREE

达标检测

1.等比数列$\{a_n\}$的公比$|q|>1$，$\{a_n\}$中有连续四项在集合$\{-54, -24, -18, 36, 81\}$中.则$q$等于

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

2.等比数列$x, 3x+3, 6x+6$，…的第4项等于

A. -24　　B.0　　C.12　　D.24

3.若等比数列的首项为4，末项为128，公比为2，则这个数列的项数为

A.4　　B.8　　C.6　　D.32

4.45和80的等比中项为__60或-60__.

5.若$\{a_n\}$为等比数列，且$3a_4=a_6-2a_5$，则公比是$\underline{\quad 3或-1 \quad}$.

1.等比数列的判断或证明

(1)利用定义：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(与 n 无关的常数).

(2)利用等比中项：$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*$，且数列各项均不为零).

2.两个同号的实数 a，b 才有等比中项，而且它们的等比中项有两个$(\pm\sqrt{ab})$，而不是一个$(\sqrt{ab})$，这是容易忽视的地方.

3.等比数列的通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$共涉及a_1，q，n，a_n四个量，已知其中三个量可求得第四个量.

返回

本课结束