上节课内容回顾

1. 平面汇交力系

可传递性+力合成—作用线汇交一点

2. 平面汇交力系的平衡

几何法：力多边形封闭
解析法：*x*与*y*方向投影的合力为零

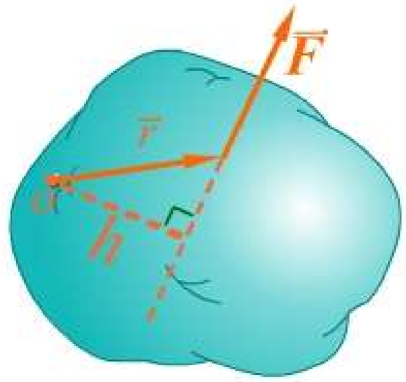
3. 解题基本思路

确定要分析的刚体，画受力图
找二力杆与三力汇交点，尽可能多确定未知力的方向
平衡的条件

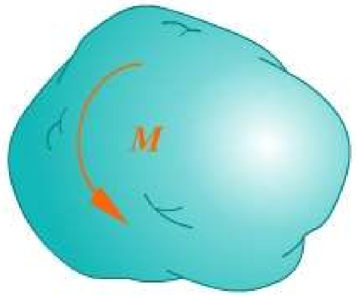
4. 力矩

作用在刚体上的力对一个点的转动效果
力矩的计算（力大小*矩心到作用线的垂直距离）
平面力矩是个标量（正负判据）
解析法（投影在*x*与*y*轴分别算）

力矩



力偶
力偶矩
平面力偶系合成

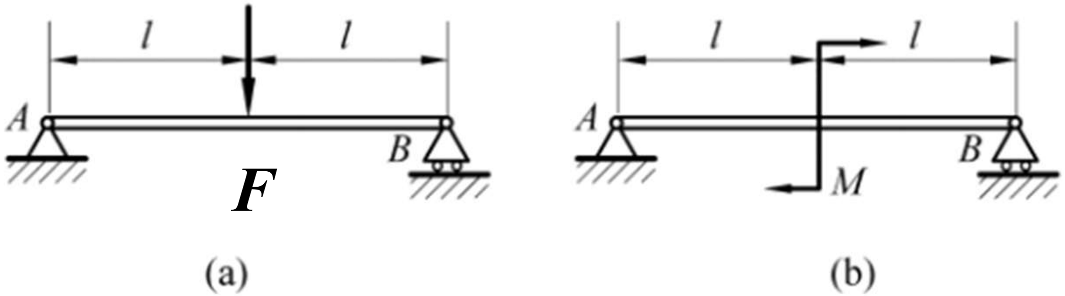


力与力偶是两个独立的静力学要素：

力偶是一对等值方向不共线的平行力

力只能由力平衡，力偶只能由力偶平衡

如图所示外力F与力偶**M**分别作用在梁**AB**上，判断（**a**）与（**b**）中支座**A**的约束力是否相同



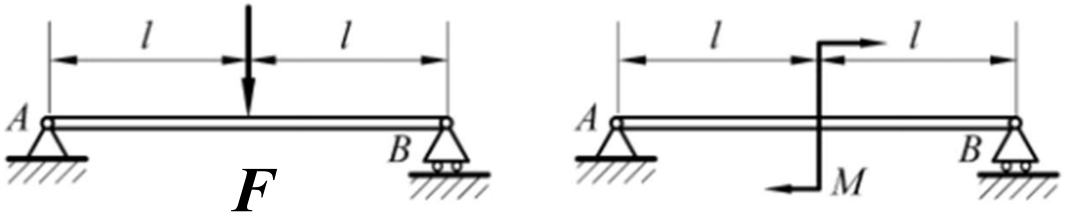
A 相同

B 只有***M*=*Fl***，才相同

C 不相同

D 通过改变力偶**M**的位置，使得两者约束力相同

如图所示外力F与力偶**M**分别作用在梁**AB**上，判断（**a**）与（**b**）中支座**A**的约束力是否相同



(a) (b)

不相同

（**a**）可以做简单的受力图以及平衡分析，得知$F_A=F/2$, 方向朝上。

（**b**）同样做受力分析与平衡分析，可知$F_A=-M/2l$，方向朝下。

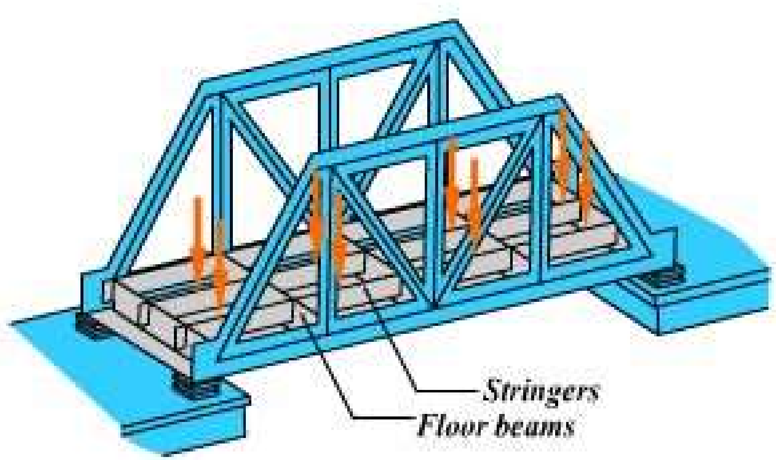
因此（**a**）与（**b**）中**A**点的约束力不能相同。此外，力偶在平面内可以任意转移，因此，改变**M**位置不能改变**A**处约束力。

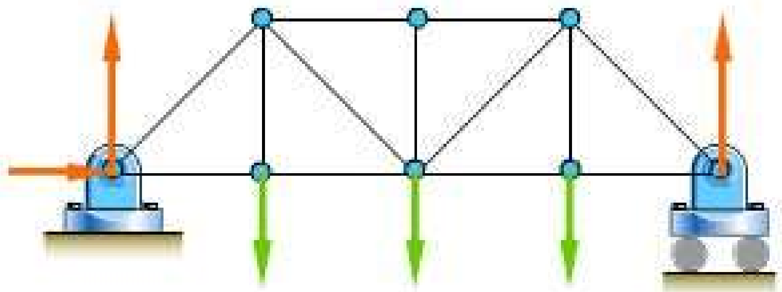
可以使得**A**处约束力相同的方法是$M=2Fl$，意味着M需要从顺时针改为逆时针。

平面任意力系

当力系中各力的作用线处于同一平面内且任意分布时，称其为平面任意力系.

平面任意力系实例



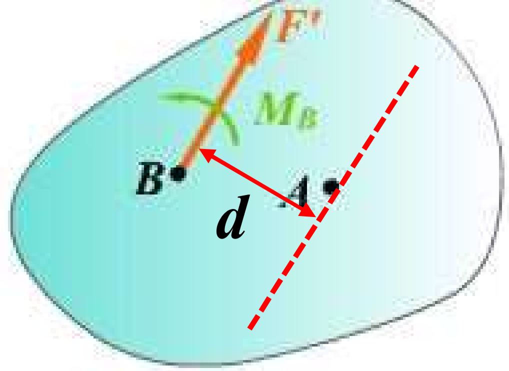


平面平行力系是平面任意力系的特例，各力互相平行但不相交.

一. 力的平移定理

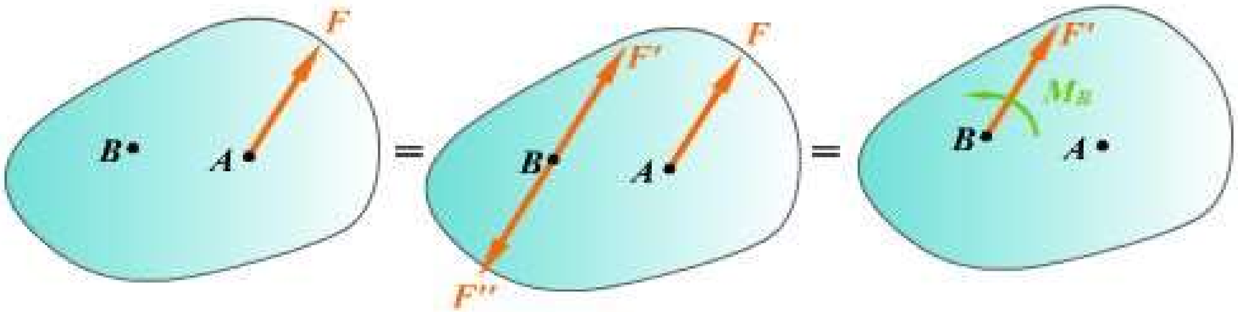
可以把作用在刚体上点 A 的力 F 平行移到任一点 B，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩.

加减平衡力系



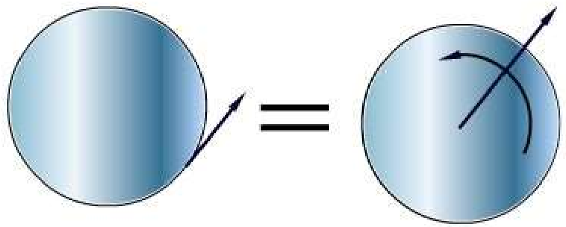
$$M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$

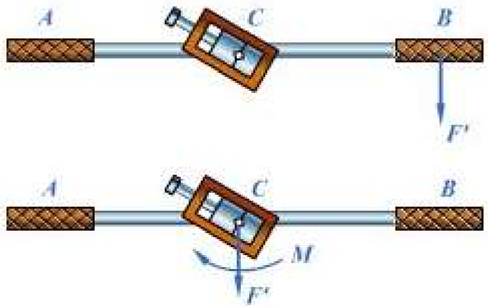
d是力偶臂长度，不是AB距离



公理3+
力偶定义

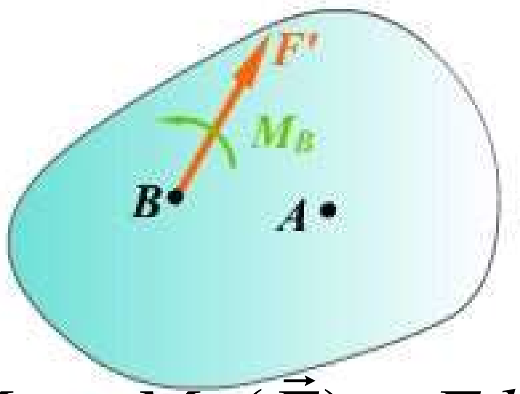
实例





一. 力的平移定理

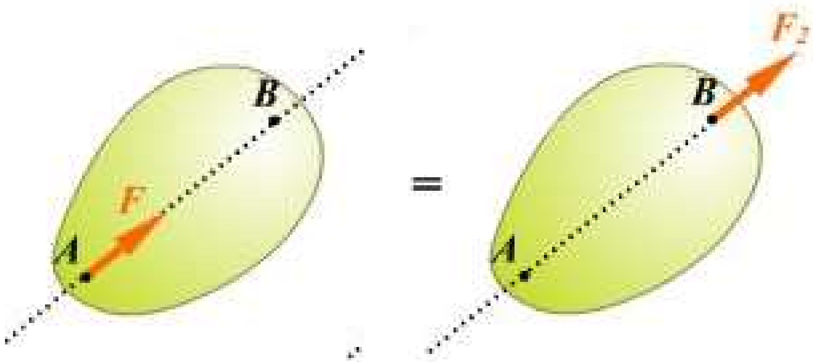
可以把作用在刚体上点 A 的力 F 平行移到任一点 B，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩.



$$M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$

推理1 力的可传性（平移定理的特殊情况）

作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。



$$M_B = M_B(\vec{F}) = 0$$

$$(d = 0)$$

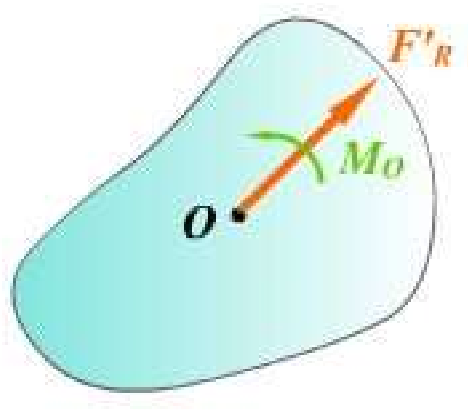
作用在刚体上的力的三要素为大小、方向和作用线.

二. 平面任意力系向作用面内一点简化·主矢和主矩

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1 \qquad M_1 = M_O(\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 \qquad M_2 = M_O(\vec{F}_2)$$

$$\vec{F}_n' = \vec{F}_n \qquad M_n = M_O(\vec{F}_n)$$

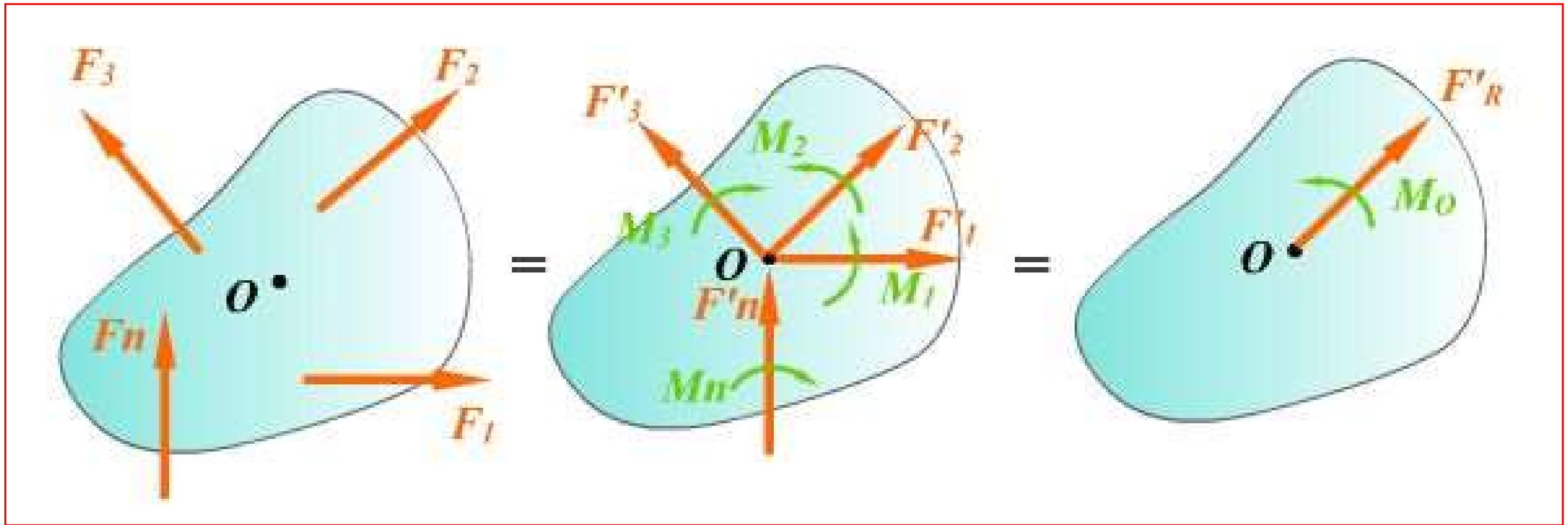


$$\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i' = \sum \vec{F}_i$$

$$M_O = \sum M_i = \sum M_O(\vec{F}_i)$$

主矢 $\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i$ 主矩 $M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$

§2-3 平面任意力系的简化



平面任意力系向作用面内任一点简化，可得一个力和一个力偶。

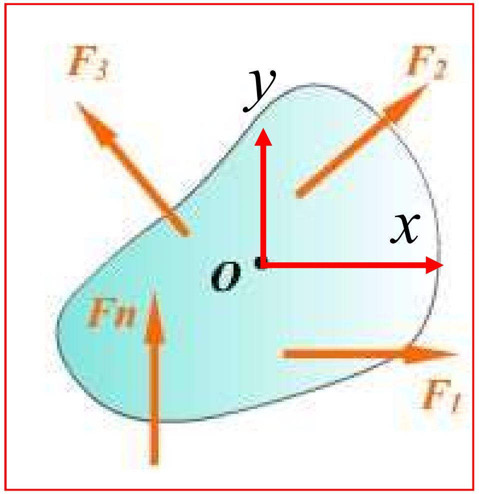
力为力系的主矢，大小与简化中心无关，但是作用线通过简化中心；力偶为力系对*O*点的主矩，作用点任意，但是大小一般与简化中心有关。**（力的平移定理）**

主矢 $\vec{F}'_R = \sum \vec{F}_i$　　　主矩 $M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$

主矢与主矩的计算方法 － 先选定简化中心

$$F'_{Rx}=\sum F'_{ix}=\sum F_{ix}=\sum F_x$$

$$F'_{Ry}=\sum F'_{iy}=\sum F_{iy}=\sum F_y$$



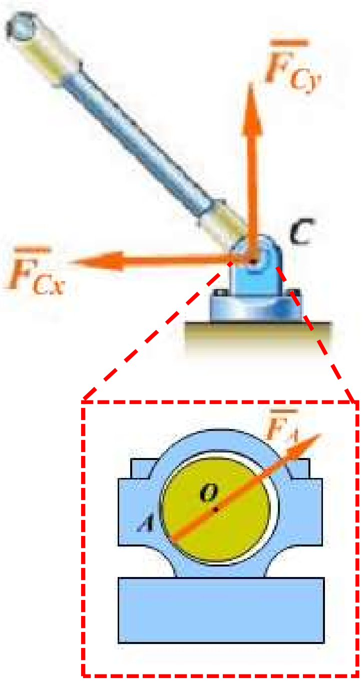
主矢大小 $F'_R=\sqrt{(\sum F_{ix})^2+(\sum F_{iy})^2}$

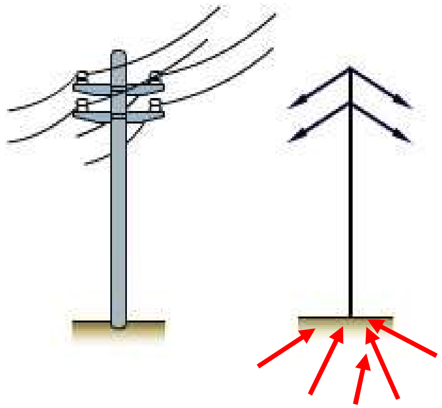
方向 $\cos(\vec{F}'_R,\vec{i})=\dfrac{\sum F_{ix}}{F'_R}$ $\cos(\vec{F}'_R,\vec{j})=\dfrac{\sum F_{iy}}{F'_R}$

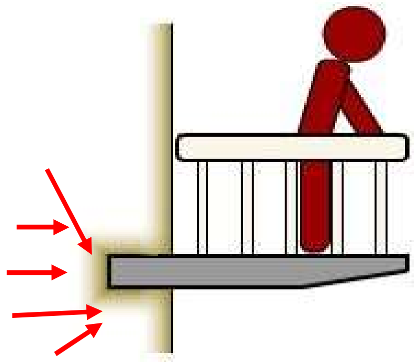
作用点 作用于简化中心上

主矩 $\boldsymbol{M_O}=\sum \boldsymbol{M_O}(\vec{F}_i)$

平面固定端约束：平面任意力系向一点简化实例







平面固定铰链支座

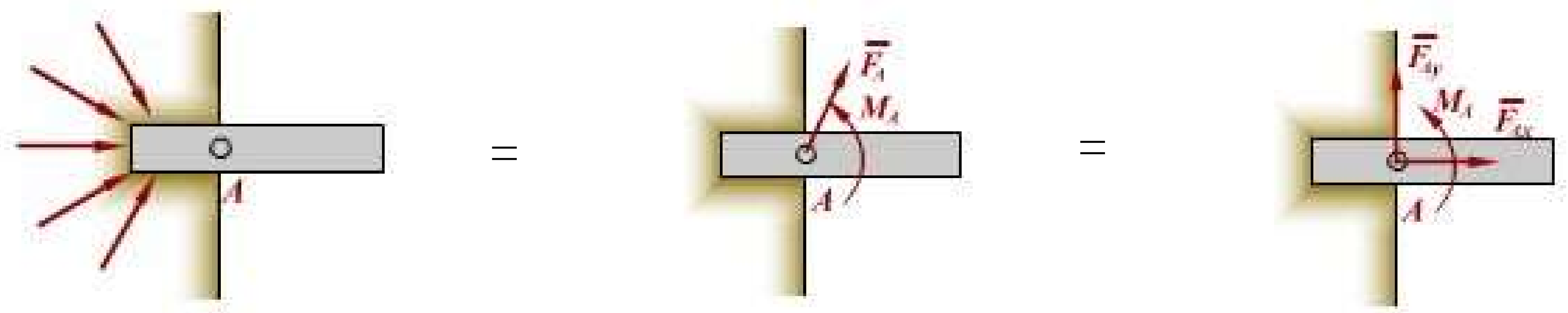
约束位移，自由旋转

简化结果一般为主矢、主矩均不为0

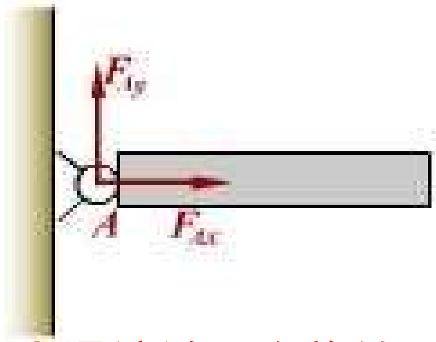
约束力系的主矢约束平面运动，主矩约束转动

不能移动+不能旋转

固定端的约束力为平面任意力系往一点简化的结果

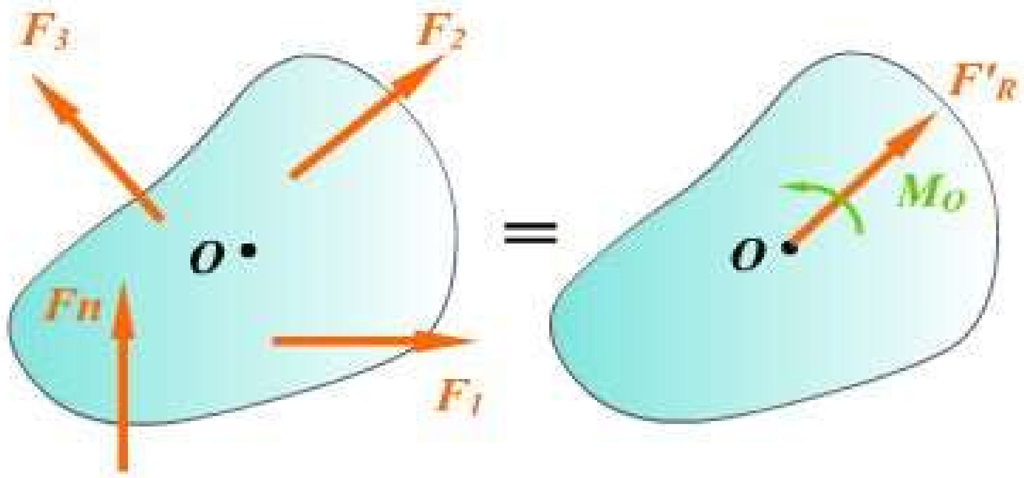


≠



光滑铰链，会旋转

三. 平面任意力系的简化结果分析



几个简化结果？

$(1)\ \vec{F}_R' \neq 0 \quad M_O \neq 0$ → 可以继续简化，为什么？

$(2)\ \vec{F}_R' \neq 0 \quad M_O = 0$

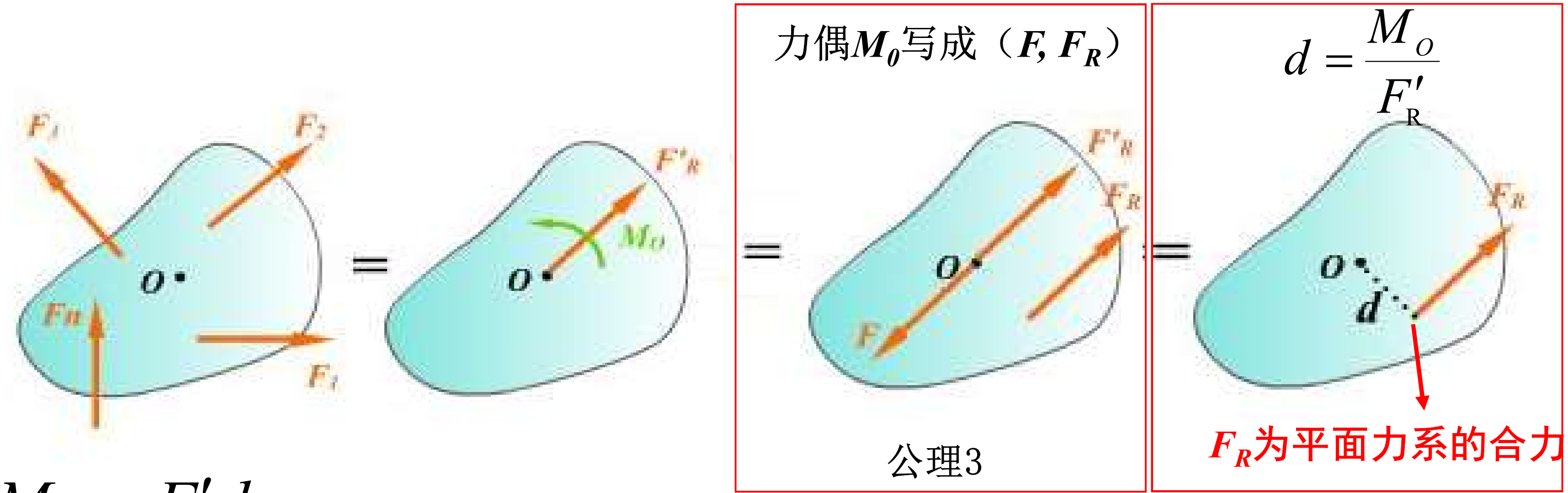
变为情况（2）

$(3)\ \vec{F}_R' = 0 \quad M_O \neq 0$

$(4)\ \vec{F}_R' = 0 \quad M_O = 0$

§2-3 平面任意力系的简化

$\vec{F}_R' \neq 0 \quad M_O \neq 0$ ⟹ F_R为平面任意力系的合力，作用线离简化中心O距离为 $d = M_O / |F_R'|$



$$M_O = F_R' d$$
$$F_R = F_R' = F$$

⟹

$$M_O(\overline{F}_R) = M_O = \sum M_O(\overline{F}_i)$$

合力对O的力矩　　　力系对O的力矩

合力矩定理：平面任意力系的合力对作用面内任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩代数和

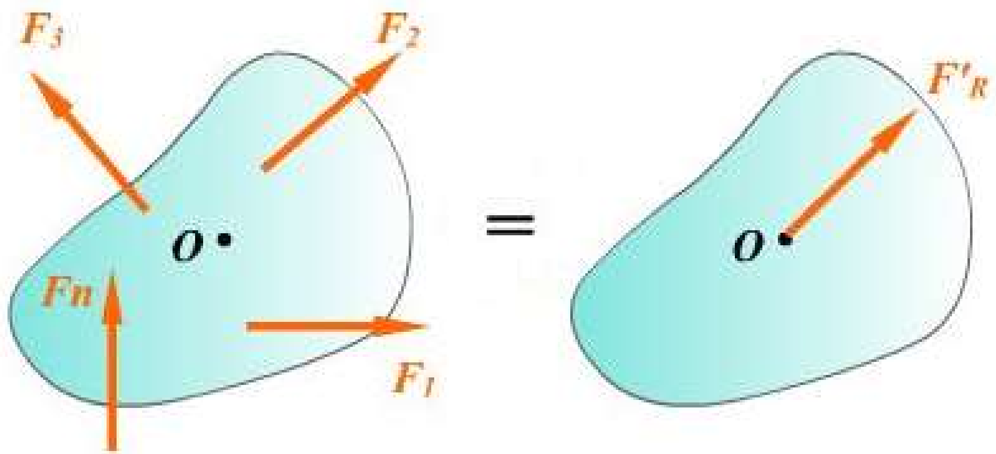
（平面力系往一点简化成合力，则主矩为0）

三. 平面任意力系的简化结果分析

$\vec{F}_R' \neq 0 \quad M_O = 0$ ⟹ 在O点的主矩为0

合力：平面力系向作用面内点简化后主矩为0，对应的主矢为平面力系的合力

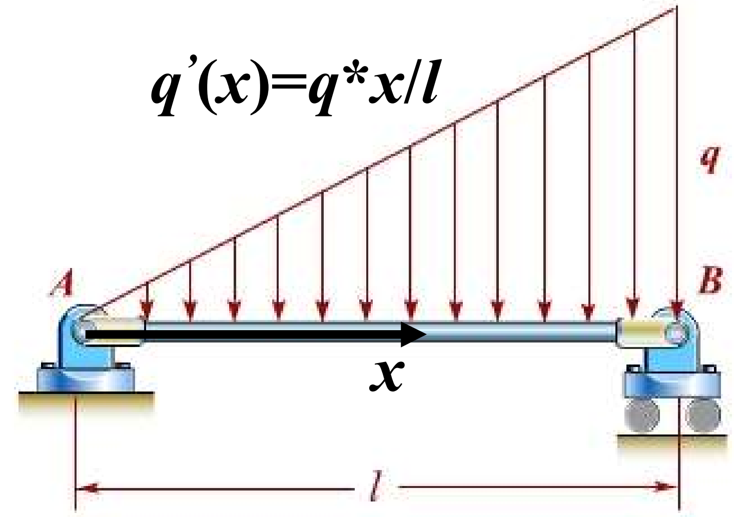
--平面力系可以简化为一个合力



例2-9（分布力力矩计算）

已知：$q,l;$

求：合力及合力作用线位置.



解： 建立坐标系

微元**dx**上的力为：

$$q'dx = \frac{x}{l}\cdot qdx$$

选取A为简化中心，

$$F_R = \int_0^l \frac{x}{l}\cdot qdx = \frac{1}{2}ql \quad \text{主矢}$$

$$M_A = \int_0^l \frac{x}{l}\cdot q\cdot xdx = \boxed{\frac{1}{3}ql^2} \quad \text{主矩}$$

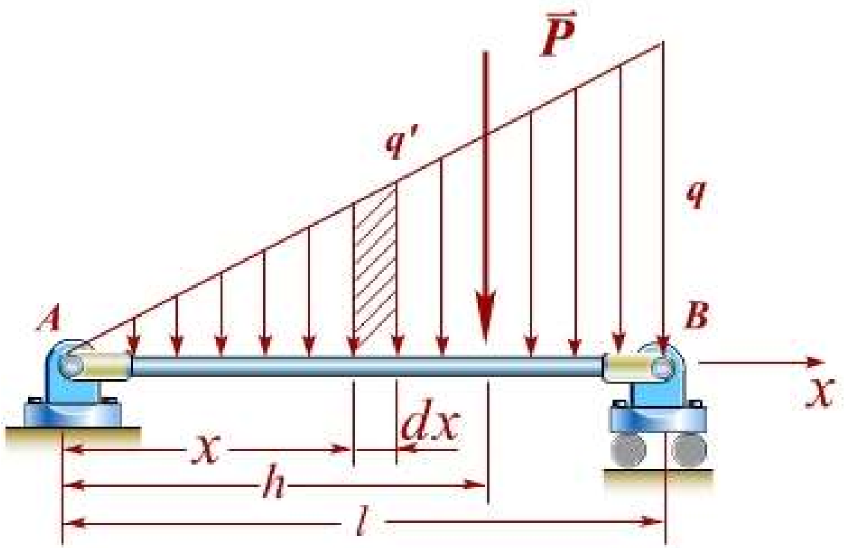
往A点简化主矢、主矩均不为0

合力的作用点的主矩为0

例2-9（分布力力矩计算）

已知：q,l;

求：合力及合力作用线位置.



解： 合力大小为主矢大小

$$P = F_R = \int_0^l \frac{x}{l} \cdot q dx = \frac{1}{2} q l$$

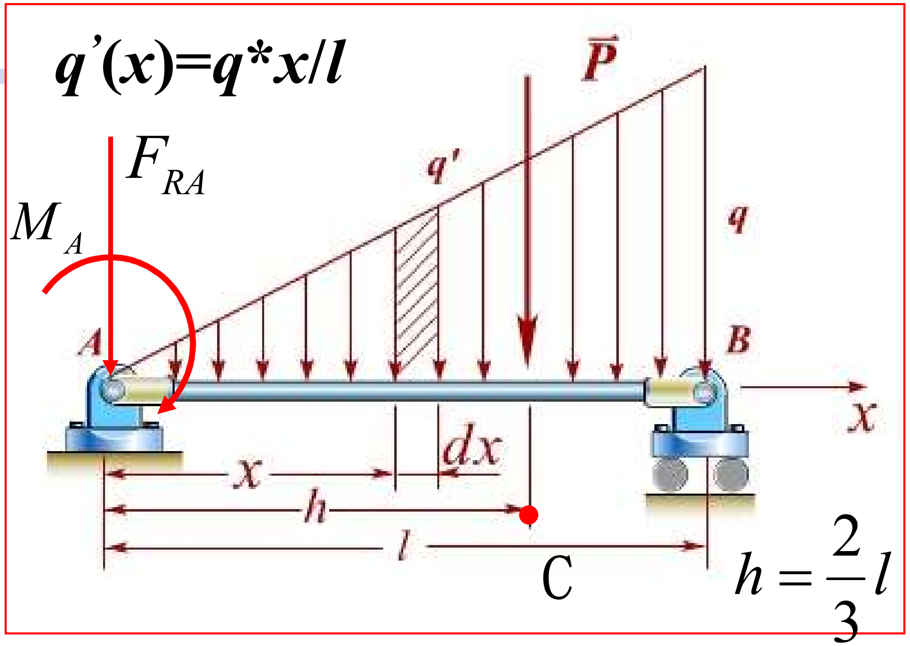
合力矩定理：

合力对固定点的力矩等于分力对固定点的力矩

$$P \cdot h = \int_0^l q' \cdot x dx = \int_0^l \frac{x^2}{l} q dx = \frac{q l^2}{3}$$

因为 $P = \dfrac{1}{2} q l$ 得 $h = \dfrac{2}{3} l$

分布力：平面平行力系



主矢：向A点简化

$$F_{RA}=\int_0^l \frac{x}{l}\cdot q dx=\frac{1}{2}ql$$

主矩：向A点简化

$$M_A=\int_0^l q'dx\cdot x=\int_0^l \frac{x^2}{l}qdx=\frac{ql^2}{3}$$

向C点简化的主矢为平面平行力系的合力，作用在C点的合力P对刚体任意点的力矩等于分力的力矩之和

主矢：向C点简化

$$F_{RC}=\int_0^l \frac{x}{l}\cdot q dx=\frac{1}{2}ql$$

主矩：向C点简化

$$M_C=\int_0^{\frac{2}{3}l} q'\cdot\left(\tfrac{2}{3}l-x\right)dx-\int_{\frac{2}{3}l}^{l} q'\cdot\left(x-\tfrac{2}{3}l\right)dx$$

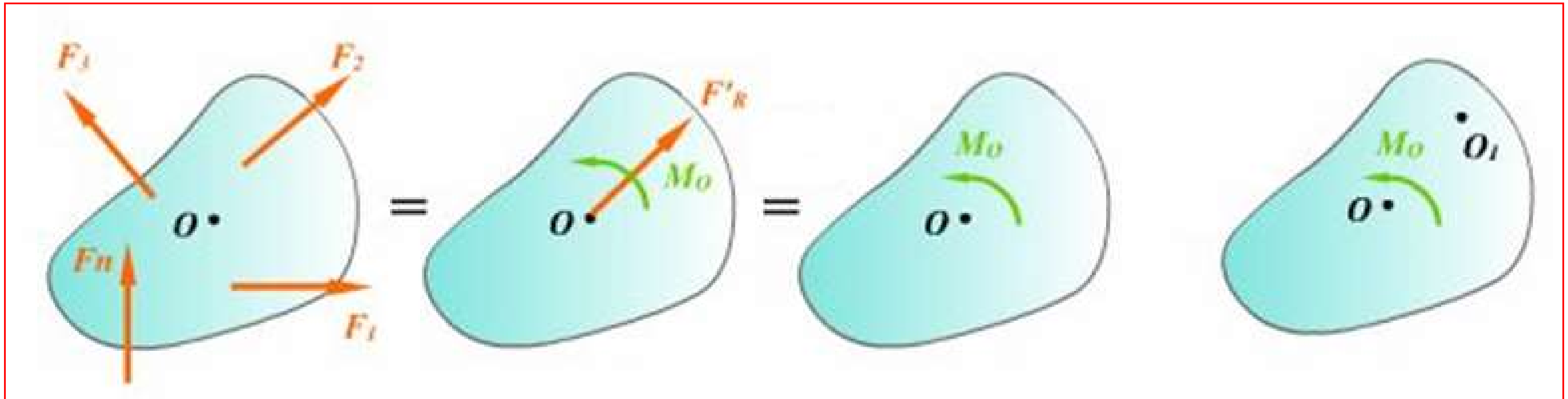
$$=\int_0^{\frac{2}{3}l} \frac{qx}{l}\cdot\left(\tfrac{2}{3}l-x\right)dx-\int_{\frac{2}{3}l}^{l} \frac{qx}{l}\cdot\left(x-\tfrac{2}{3}l\right)dx$$

$$=\frac{ql^2}{3}-\frac{ql^2}{3}=0$$

直接用C点的合力P代表分布力

$\overline{F}'_{\mathrm{R}} = 0 \qquad M_O \neq 0$ ⟶ 合力偶

与简化中心的位置无关



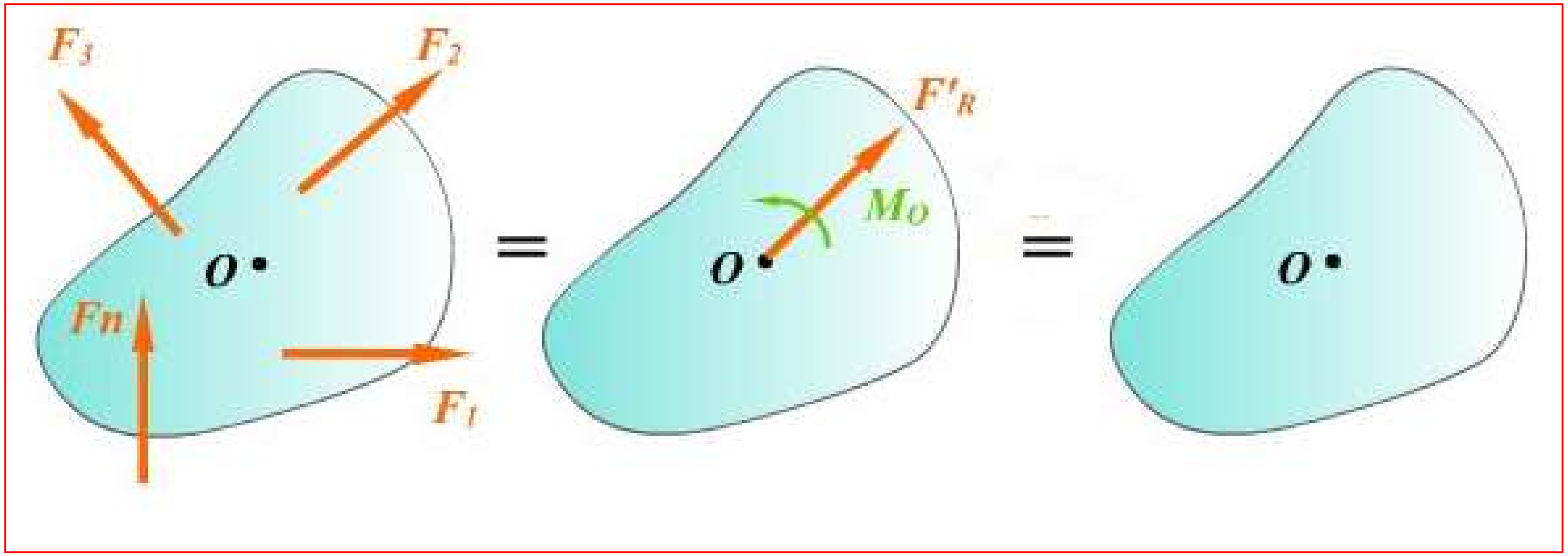
若以 O_1 点简化，如何?

不变。力的平移定理（零力）

$\overline{F}'_{\mathrm{R}} = 0 \quad M_O = 0 \longrightarrow$ 平衡

与简化中心的位置无关

平衡的刚体可以取任意点列平衡方程



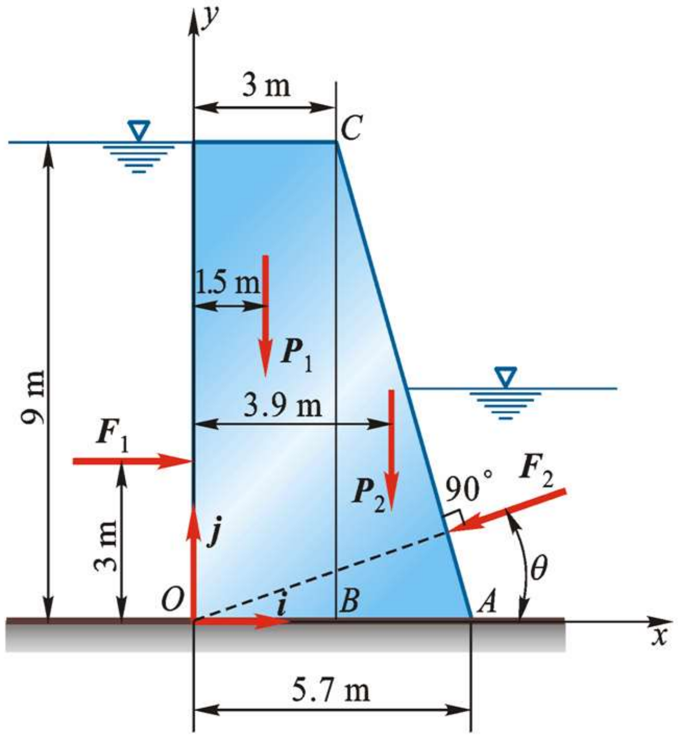
例2-10（平面力系的简化）

已知：$P_1 = 450\text{kN}, P_2 = 200\text{kN}, F_1 = 300\text{kN}, F_2 = 70\text{kN}$

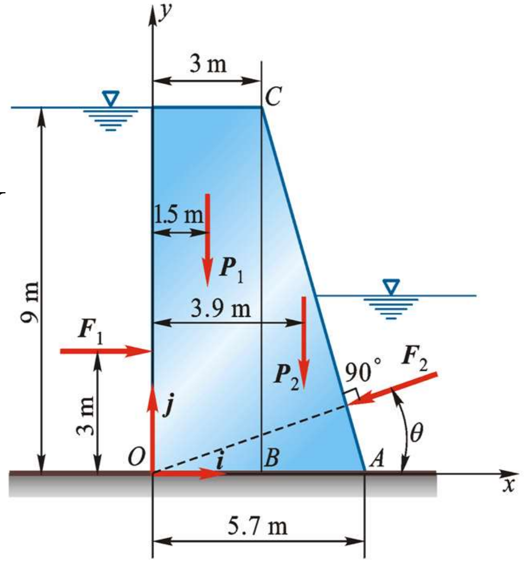
求：力系向 O 点的简化结果；

合力与OA的交点到点O的距离x；

合力作用线方程。



解：（1）向O点简化



主矢：$\sum F_x = F_1 - F_2\cos\theta = 232.9\text{kN}$

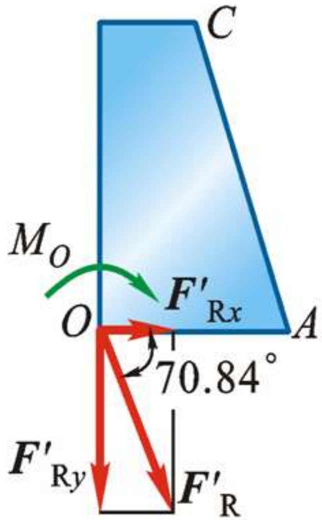
$$\sum F_y = -P_1 - P_2 - F_2\sin\theta = -670.1\text{kN}$$

$$F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4\text{kN}$$

$$\cos(\vec{F}_R', \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_R'} = 0.3283,$$

$$\cos(\vec{F}_R', \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R'} = -0.9446$$

$$\angle(\vec{F}_R', \vec{i}) = \pm 70.84^\circ, \angle(\vec{F}_R', \vec{j}) = 180^\circ \pm 19.16^\circ$$



主矩：

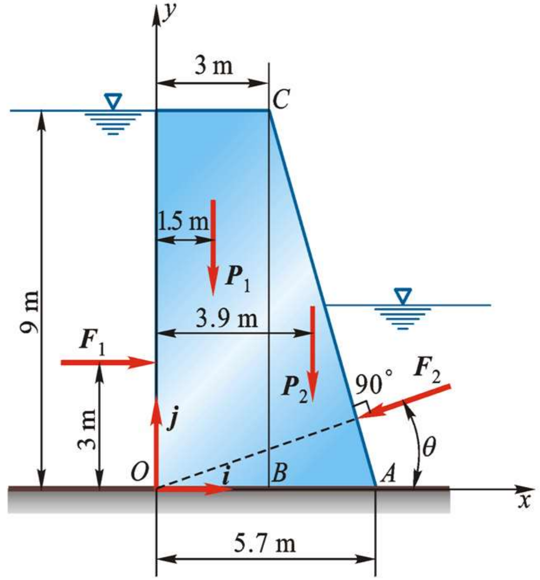
$$M_O = \sum M_O(\vec{F})$$

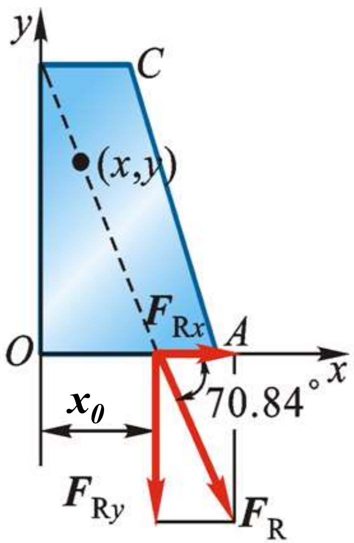
$$= -3F_1 - 1.5P_1 - 3.9P_2 = -2355\text{kN}\cdot\text{m}$$

（2）合力与OA的交点到点O的距离x;

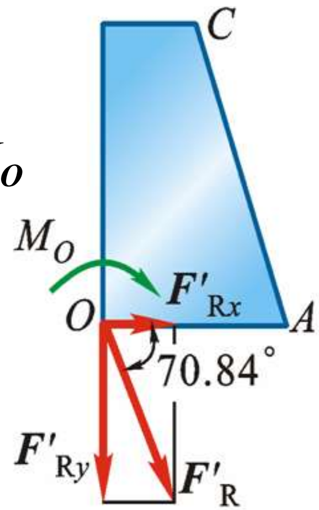
$$M_O = M_O(F_R) = M_O(F_{Rx}) + M_O(F_{Ry}) = 0 + F_{Ry}x$$

$$x_0 = \frac{M_O(F_R)}{F_{Ry}} = \frac{2355\text{kN}\cdot\text{m}}{670.1\text{kN}} = 3.514\text{m}$$





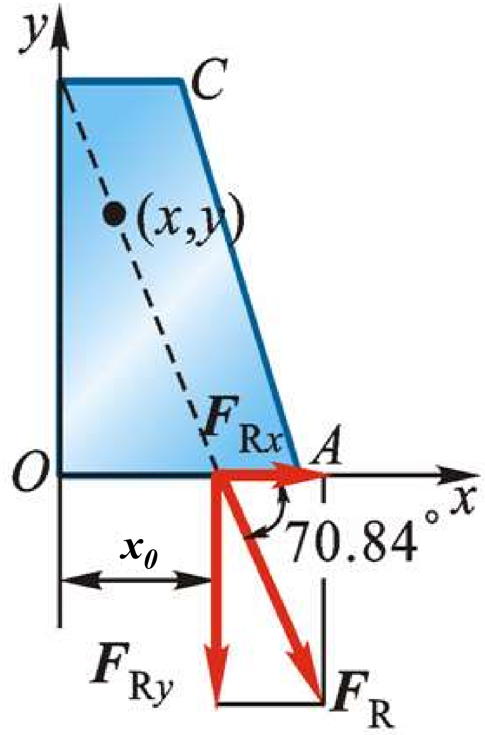
力的作用点：
1）把力偶$\boldsymbol{M_O}$画成一对力
2）移动后$\boldsymbol{F_R}$对$\boldsymbol{O}$点产生$\boldsymbol{M_O}$



（3）求合力作用线方程：

合力作用点为x_0=3.514m, y_0=0

合力与**x**轴夹角为：$\angle(\vec{F}_R',\vec{i})=-70.84^\circ$



作用线方程：$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$

$$k=\tan\left(-70.84^0\right)=-2.878$$

$$y=-2.878x+10.113$$

合力矩定理：合力的力矩=分力的力矩和

$$M_O=\sum M_O\left(\vec{F}_R\right)=x\cdot F_{Ry}-y\cdot F_{Rx}$$

方法二

$$-2355=x\left(-670.1\right)-y\left(232.9\right)$$

一. 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是：

$$\overline{F}'_{\mathrm{R}} = 0$$

力系的主矢和对任意点的主矩都等于零

$$M_O = 0$$

因为 $F'_{\mathrm{R}} = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$ $M_O = \Sigma M_O(\overline{F}_i)$

平面任意力系的平衡方程(分量形式)：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

平面任意力系平衡的解析条件是：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零.

平面任意力系的平衡方程另两种形式

$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0\end{cases}$$

二矩式

平面力系往刚体内两点A与B简化的主矩均为0

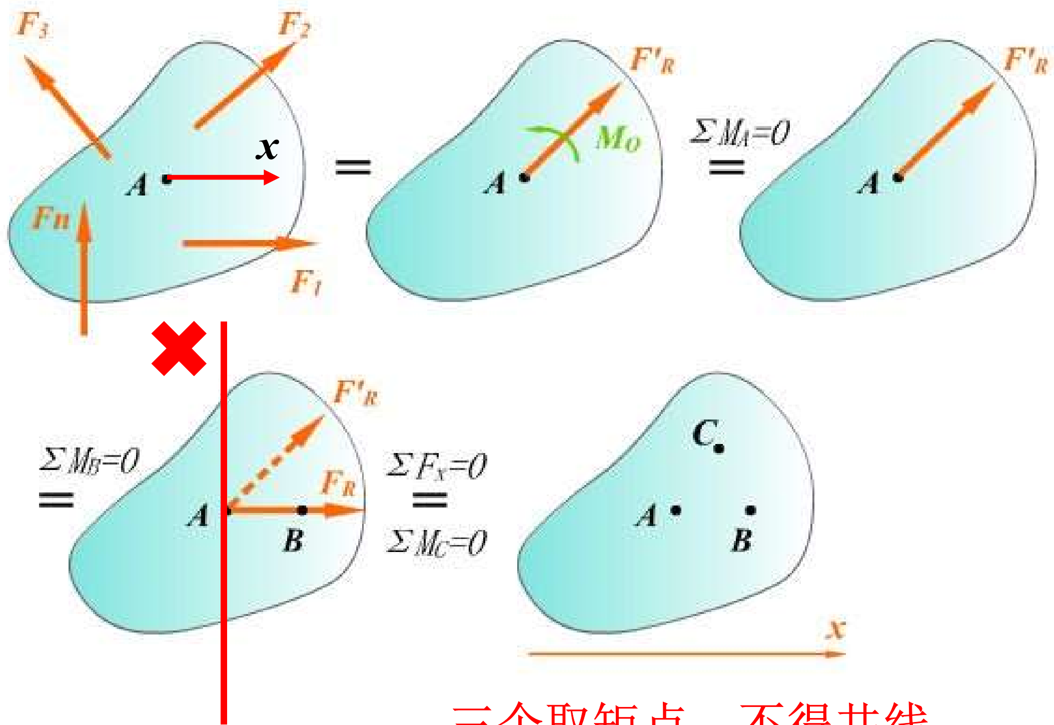
F'_{Ry}不在AB连线上(为什么？)

保证F'_{Ry}=0成立

两矩点**AB**连线，不得与***x***轴垂直

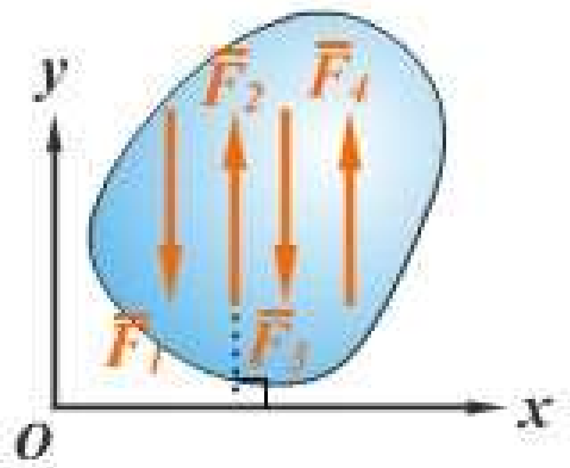
$$\begin{cases}\sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0\end{cases}$$

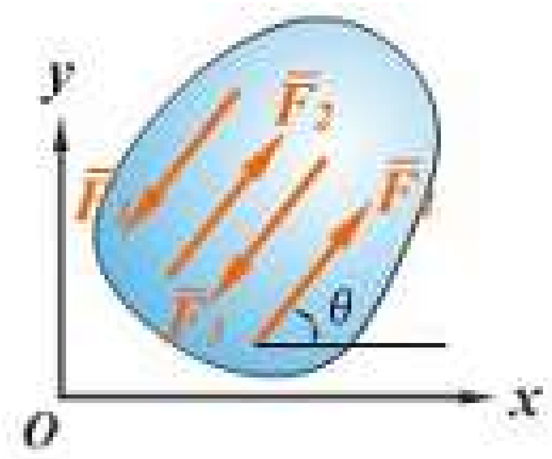
三矩式



三个取矩点，不得共线

二. 平面平行力系的平衡方程





$$\sum F_x = 0 \quad 0+0+0+\cdots=0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_1\cos\theta - F_2\cos\theta + F_3\cos\theta + \cdots = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_1\sin\theta - F_2\sin\theta + F_3\sin\theta + \cdots = 0$$

$$\boxed{\begin{cases}\sum F_y = 0\\ \sum M_A = 0\end{cases}}$$

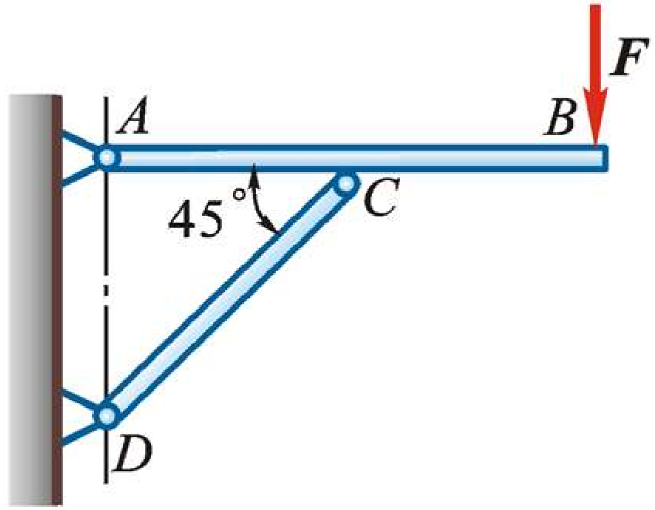
有一方向力平衡自然满足

两个方程即可

$$\boxed{\begin{cases}\sum M_A = 0\\ \sum M_B = 0\end{cases}}$$

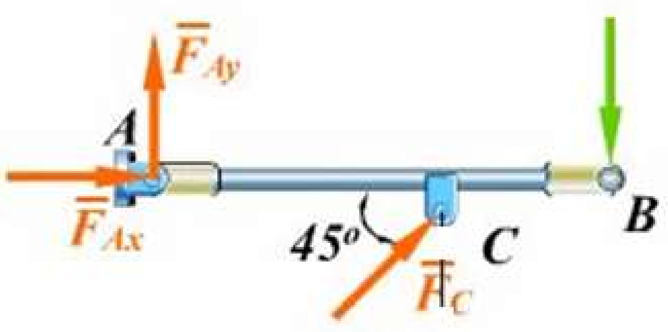
两点连线不得与各力平行

例2-11（直接用平衡条件）



已知：$AC = CB = l, F = 10\,\text{kN}$

求：铰链A 和DC 杆受力.



解： 取AB梁，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_C \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_C \sin 45^\circ - F = 0$$

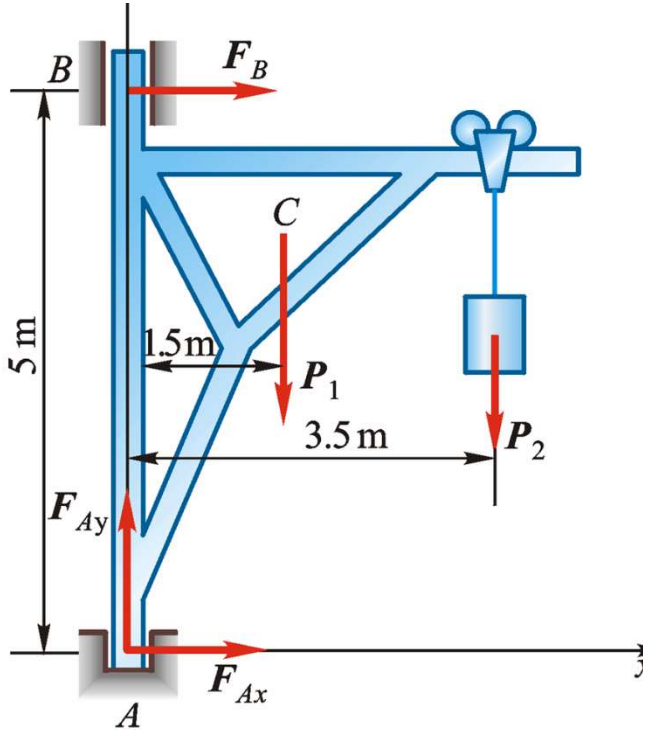
$$\sum M_A = 0 \qquad F_C \cos 45^\circ \cdot l - F \cdot 2l = 0$$

$$F_C = 28.28\text{kN}, F_{Ax} = -20\text{kN}, F_{Ay} = -10\text{kN}$$

例2-12（止推轴承约束）

已知： $P_1 = 10\text{kN},\ P_2 = 40\text{kN}$,尺寸如图。

求： 轴承 A, B 处的约束力.



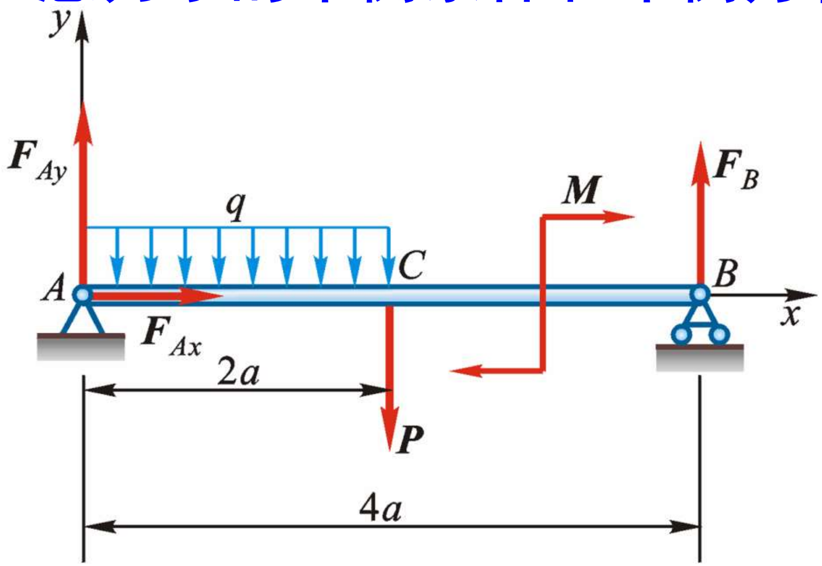
解： 取起重机，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad -F_B \cdot 5 - 1.5 \cdot P_1 - 3.5 \cdot P_2 = 0$$

$$F_{Ay} = 50\text{kN} \qquad F_B = -31\text{kN} \qquad F_{Ax} = 31\text{kN}$$



例2-13（分布力）

已知：$P, q, a, M = qa$。

求：支座 A,B 处的约束力.

解：取AB梁，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$

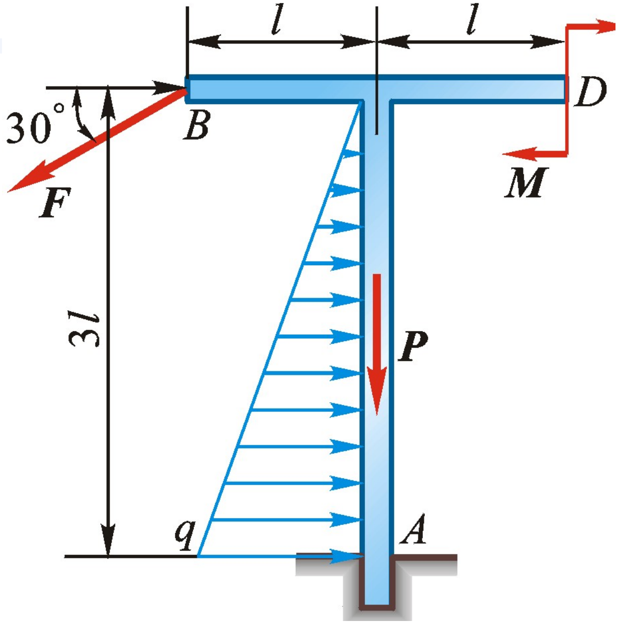
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$

可以选**B**计算吗？

可以，但是一般选取最多未知力的点列力矩平衡方程（**A**点）

例2—14（固定端约束）



已知：$P=100\text{kN}, M=20\text{kN}\cdot\text{m},$

$q=20\,\text{kN/m}, F=400\text{kN}, l=1\text{m}$

求：固定端 A 处约束力.

解： 取 T 型刚架，画受力图.

其中 $F_1=\dfrac{1}{2}q\times 3l=30\textbf{kN}$

$\sum F_x=0 \quad F_{Ax}+F_1-F\sin 60^\circ=0$

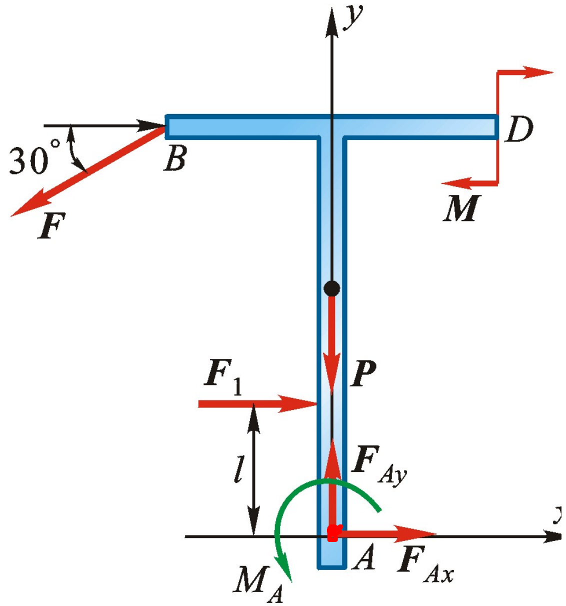
$\sum F_y=0 \quad F_{Ay}-P-F\cos 60^\circ=0$

$\sum M_A=0$

$M_A-M-F_1\cdot l+F\cos 60^\circ\cdot l+F\sin 60^\circ\cdot 3l=0$

⇨ $F_{Ax}=316.4\text{kN} \qquad F_{Ay}=300\text{kN}$

$M_A=-1188\text{kN}\cdot\text{m}$



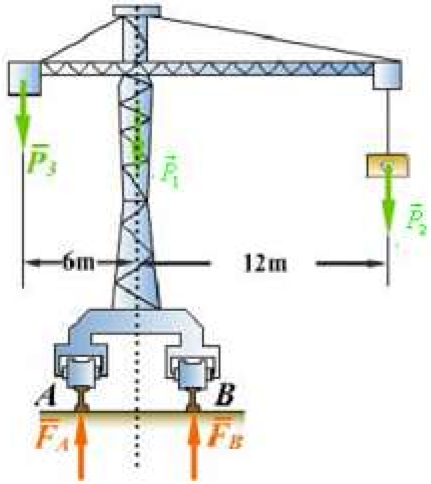
例2-15（翻倒问题）

已知： $P_1 = 700\text{kN}, P_2 = 200\text{kN},\ AB = 4\text{m}$

求： （1）起重机满载和空载时不翻倒，平衡载重 P_3；

（2）$P_3 = 180\text{kN}$，轨道 AB 给起重机轮子的约束力。

解： 取起重机，画受力图.



满载时， $\vec{F}_A = 0,$

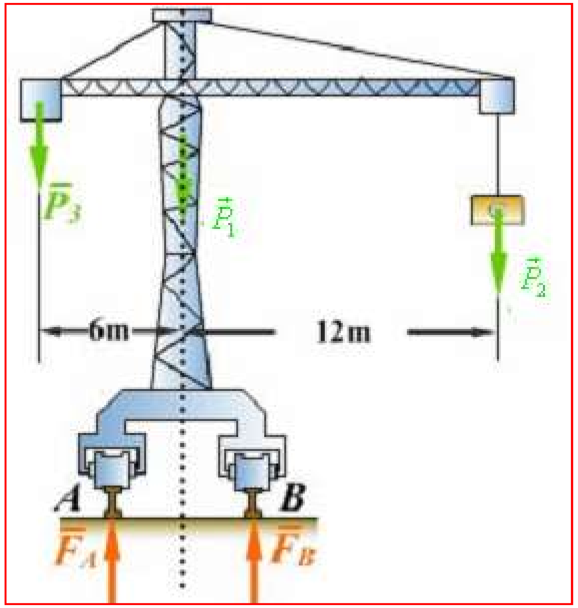
为不安全状况

$$\sum M_B = 0$$

$$P_{3\min} \cdot 8 + 2P_1 - 10P_2 = 0$$

$$P_{3\min} = 75\text{kN}$$

空载时，$\vec{F}_B = 0$, 为不安全状况



$$\sum M_A = 0 \qquad 4P_{3\max} - 2P_1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_{3\max} = 350\text{kN}$$

$$75\text{kN} \le P_3 \le 350\text{kN}$$

$P_3 = 180\text{kN}$ 时

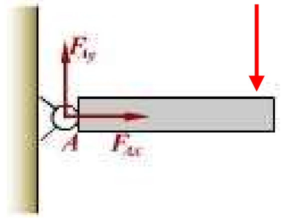
$$\sum M_A = 0 \quad 4P_3 - 2P_1 - 14P_2 + 4F_B = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad F_A + F_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$F_A = 210\text{kN} \qquad F_B = 870\text{kN}$$

§2-5 物体系的平衡·静定和超静定问题

刚体平衡的前提—静定问题

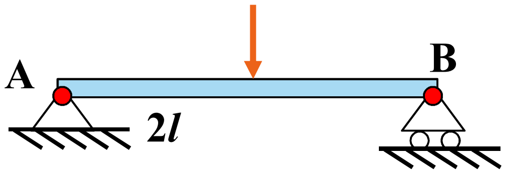


无法达到平衡，可动机构

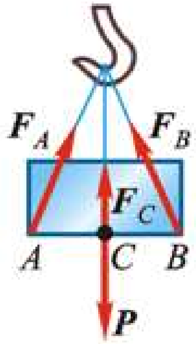
对n个刚体组成的刚体系，

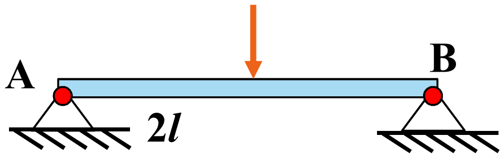
每个物体可以列出3个平衡方程（$\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$与$\sum M_O=0$）

共有3n个方程→最多可以求解3n个未知力/力偶矩



未知力数量等于平衡方程数，静定问题





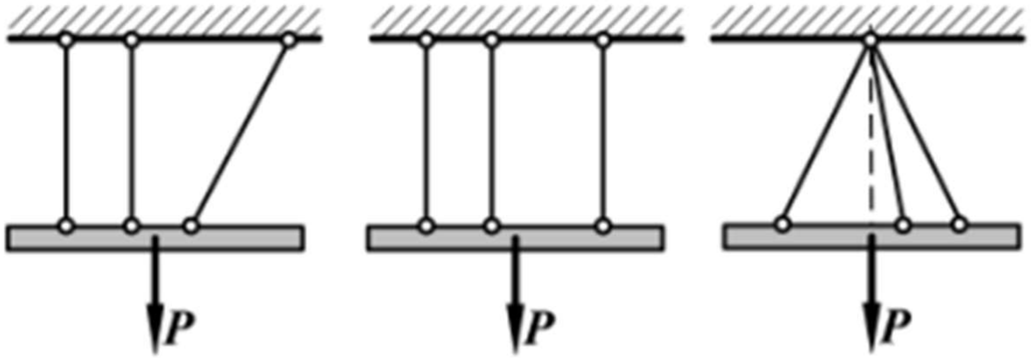
未知力数量大于平衡方程数，超静定问题

n=1, 3n=3个平衡方程

因为平面汇交力系，力矩平衡天然满足，只能求解2个未知力

平面任意力系，能求解**3**个未知力
平面汇交/平行力系，能求解**2**个未知力
平面力偶系，能求解**1**个未知力

练习：判断下列结构是否属于静定问题



(a)　　　(b)　　　(c)

(a)：属于　　三绳子组成了平面任意力系，3个未知数=3个独立方程

(b)：不属于　　三绳子组成了平面平行力系，3个未知数<2个独立方程

(c)：不属于　　三绳子组成了平面汇交力系，3个未知数<2个独立方程

作业

教材习题：2-11，2-14， 2-21