知识回顾

物体的受力分析和受力图

画受力图步骤：

1. 取所要研究物体为研究对象，解除约束，获得分离体

2. 画出所有主动力

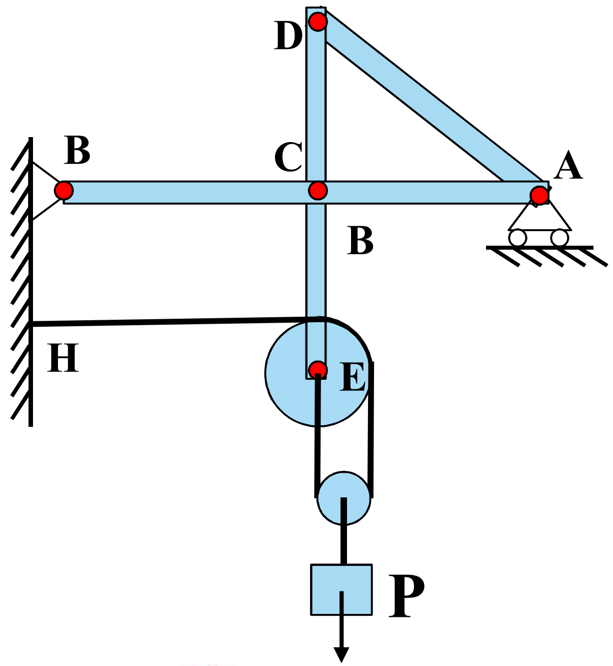
3. 按约束性质画出所有约束（被动）力

Q1：多刚体体系的内力与外力

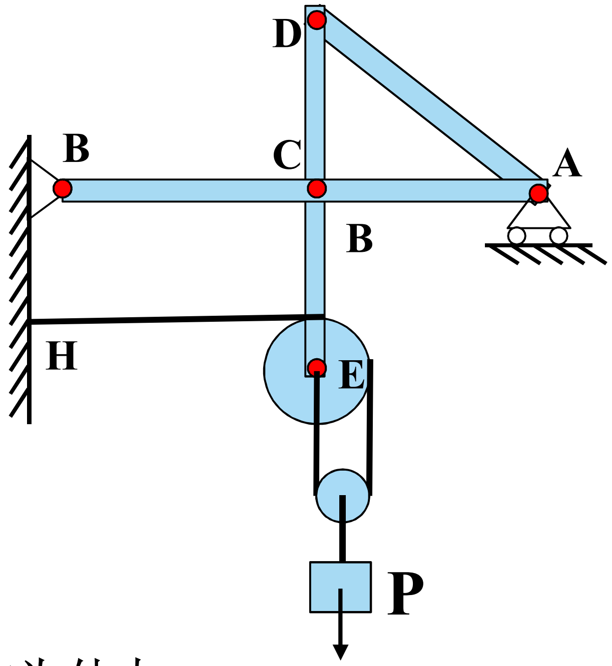
内力：刚体系内部的作用力与反作用力

外力：刚体系外的力（可以由约束提供）

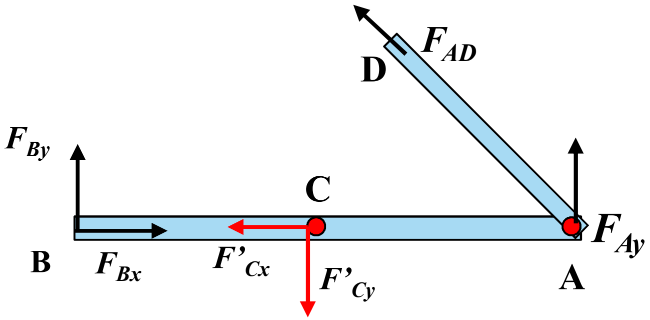
单个刚体的内力？　不存在！



Q1：多刚体体系的内力与外力



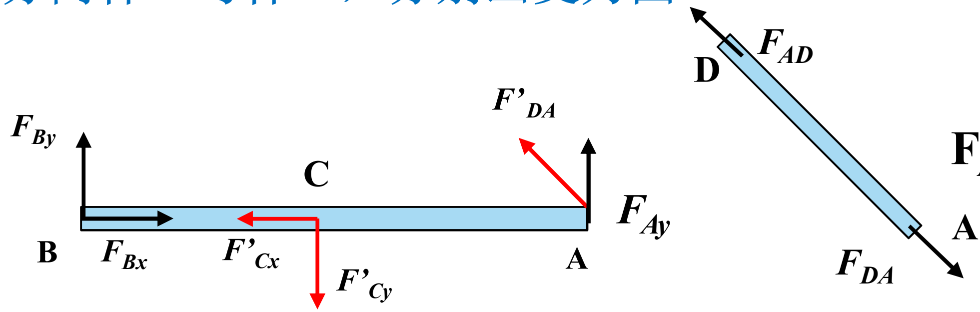
杆AB与杆AD作为一个刚体系



F_{Ay}是外力（约束提供）

F_{DA}与F'_{DA}是一对内力

分离杆AB与杆AD，分别画受力图



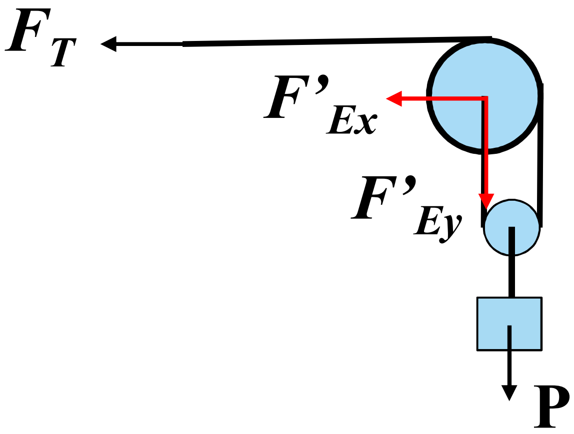
F_{Ay}与F'_{DA}均为外力

问题：AB杆中A端受到的滚动支座约束力F_{Ay}与AD杆作用力F'_{DA}是否可以在受力图里画成一个外力？

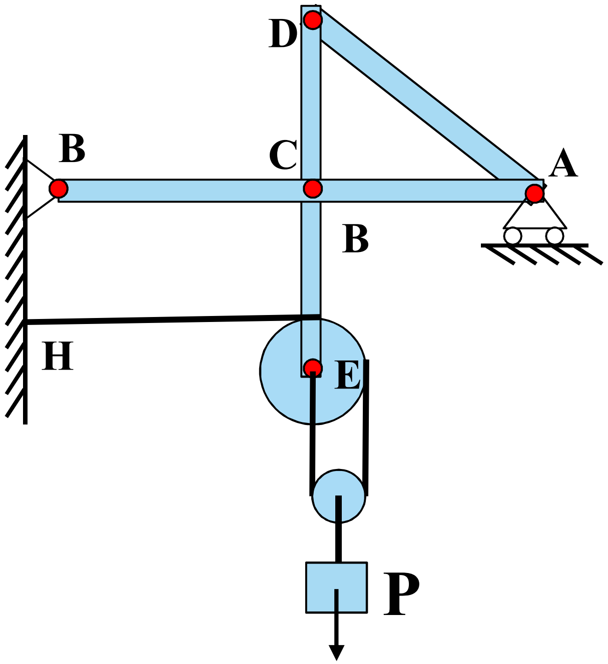
不可以。因为点A同时受到两个约束（滚动支座与铰链A），F_{Ay}与F'_{DA}均为外力，是刚体AB受到的两个不同的外力

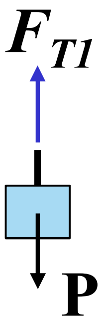
Q2：如何拆解滑轮做受力分析

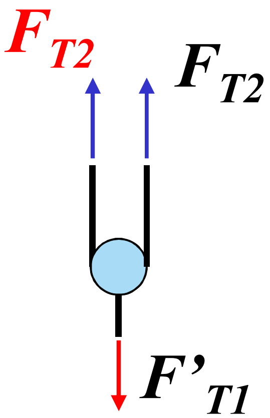
滑轮的受力图为

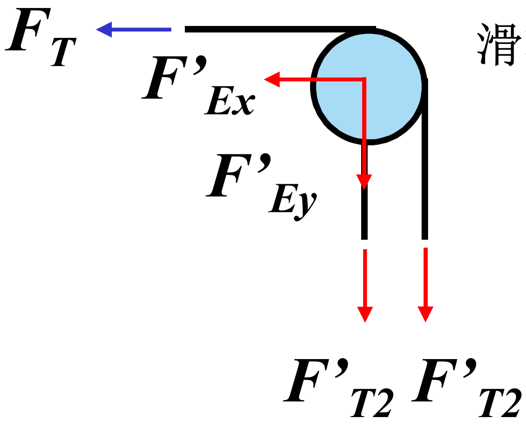


我们一般都留一段绳索不截断，所以绳索上的力一般画在滑轮上







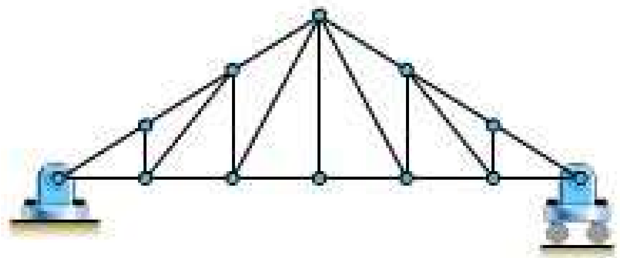


滑轮E受力图

第二章　平面力系

本节课主要内容：

1. 掌握平面汇交力系合成与平衡的方法
2. 能熟练计算力在坐标轴上的投影、平面力对点之矩
3. 掌握平面力偶系的合成与平衡。
4. 掌握平面任意力系的简化方法和简化结果，能熟练地计算主矢和主矩。
5. 能熟练地应用平面任意力系的平衡条件和平衡方程求解单个物体和简单物系的平衡问题
6. 了解求简单静定桁架内力的节点法和截面法



桁架中杆件都是二力杆

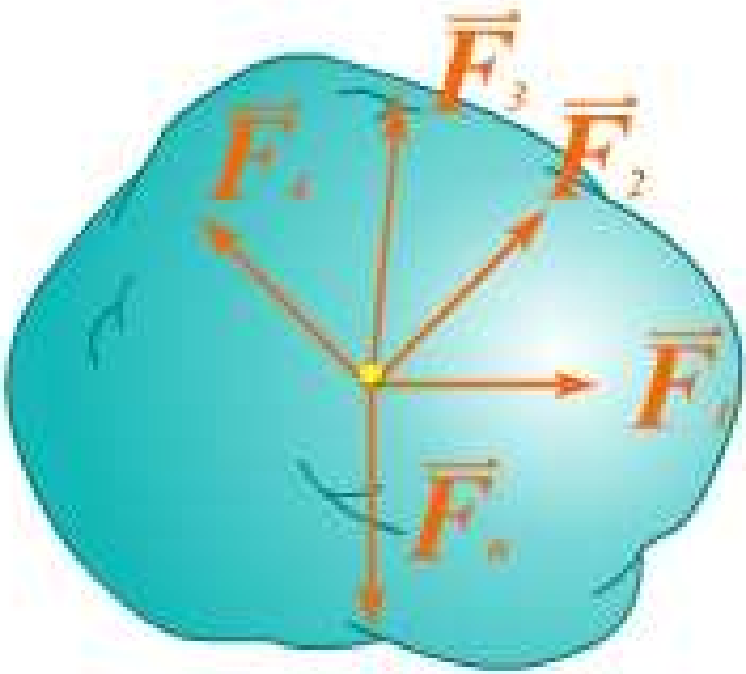
平面力系分类

- 平面汇交（共点）力系

（同一平面+力作用线相交于一点的力）

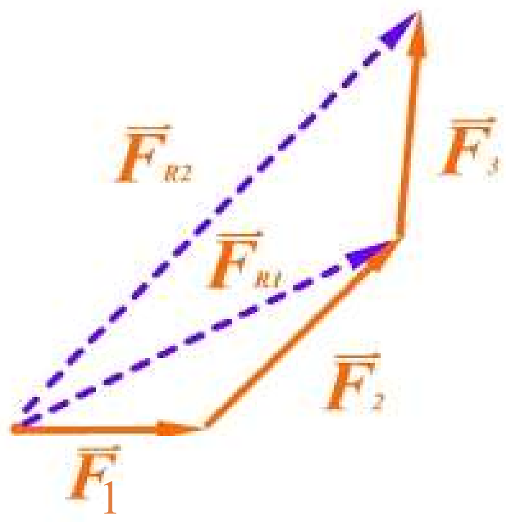
- 平面力偶系 （特殊互相平行力）
- 平面平行力系 （一般互相平行力）
- 平面任意力系 （一般情况力）

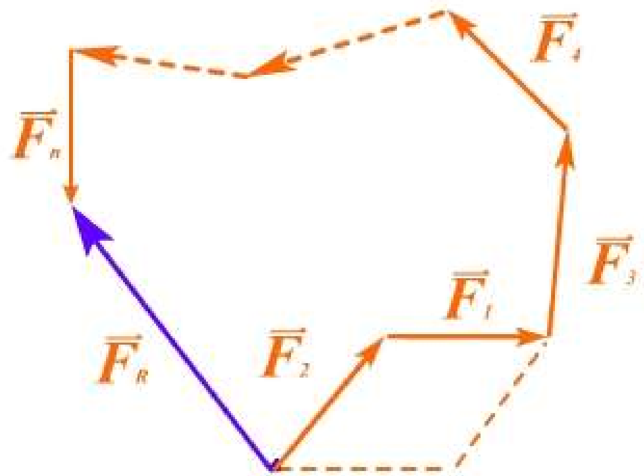
一、平面汇交力系合成的几何法——力多边形规则



$$\vec{F}_{R1}=\vec{F}_1+\vec{F}_2 \qquad \text{（公理1）}$$

$$\vec{F}_{R2}=\vec{F}_{R1}+\vec{F}_{R3}=\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i$$





$$\vec{F}_R=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\sum\vec{F}_i$$

力多边形
（矢量加法与顺序无关）

力多边形规则：

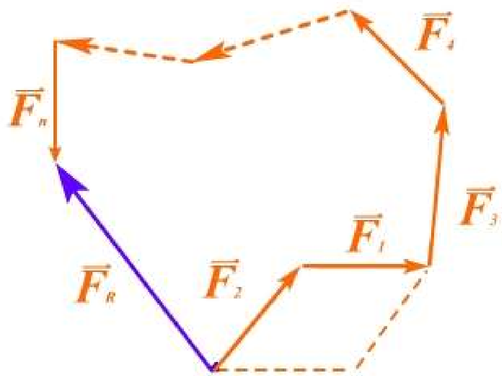
平面汇交力系可简化为一合力，其合力的大小和方向等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

（公理1的自然推广，或者是矢量加法的推广）

二、平面汇交力系平衡的几何条件

平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：

该力系的合力等于0



平衡条件（矢量形式）

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

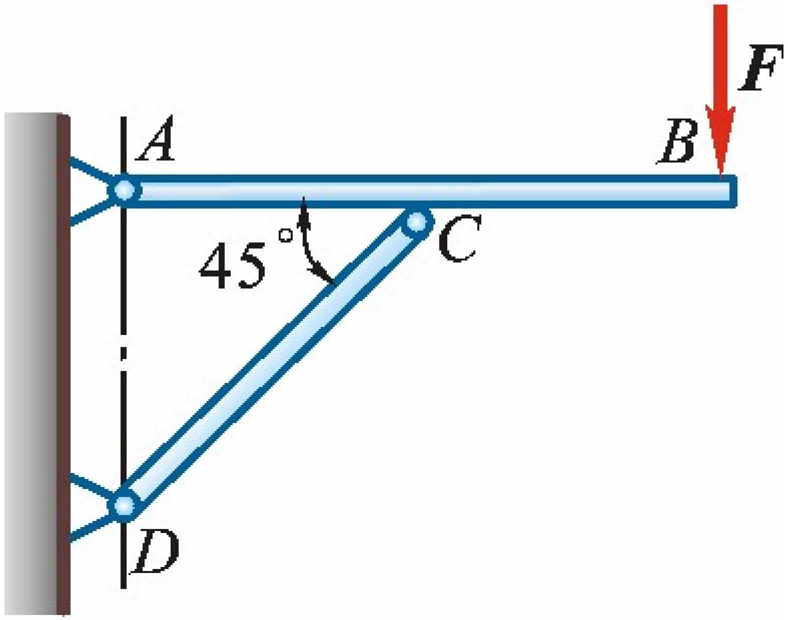
平衡条件（几何条件）

该力系的力多边形自行封闭.

例2-1（平面汇交力系平衡的几何法）

已知：$AC = CB, F = 10\,\mathrm{kN}$，各杆自重不计；

求：CD杆及铰链A的受力.



AB杆与CD杆上平面力系均平衡

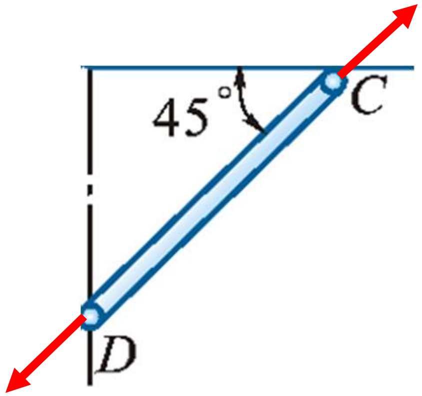
CD：二力杆

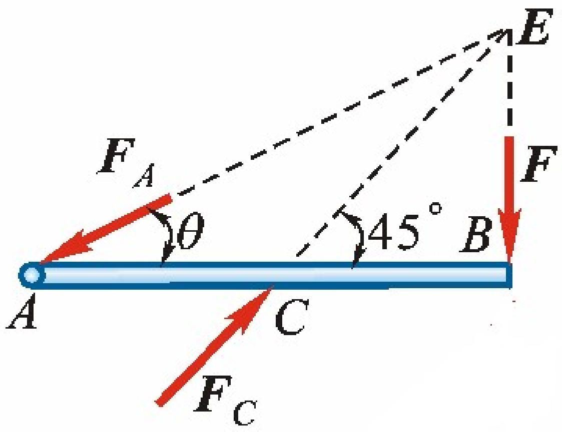
AB：平面力系

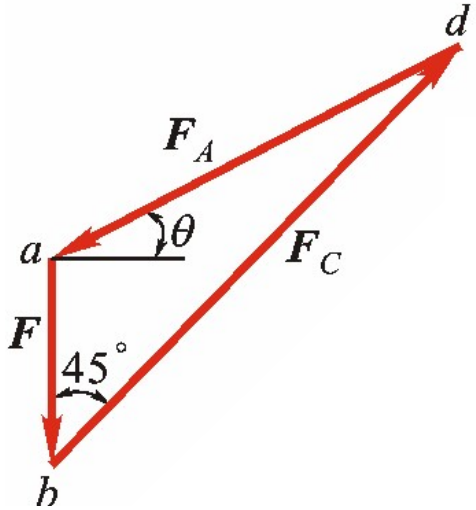
解： *CD* 为二力杆，取 *AB* 杆，画受力图.

杆 *AB* 满足三力平衡汇交.

用几何法，画封闭力三角形.







平衡条件：
力多边形（三角形）
必须封闭。

按比例量得 $F_C = 28.3\text{kN}, F_A = 22.4\text{kN}$

例2-2

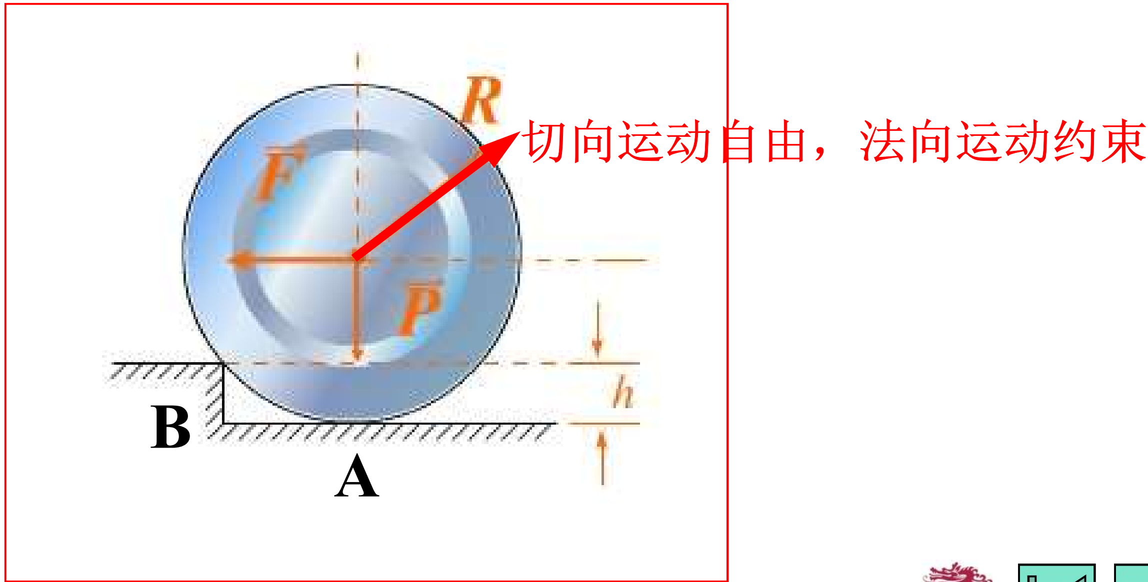
已知： $P=20\,\text{kN}, R=0.6\,\text{m}, h=0.08\,\text{m}$

求：

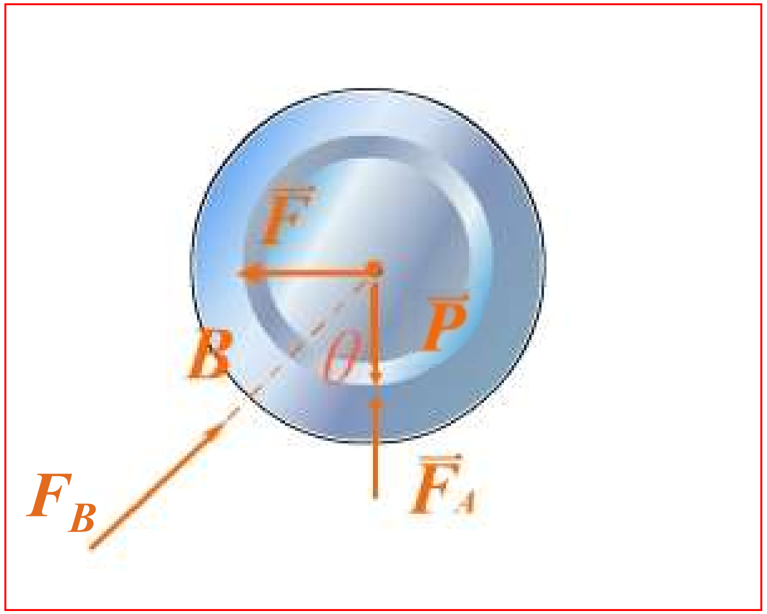
1. 水平拉力 $\vec{F}=5\,\text{kN}$ 时，碾子对地面及障碍物的压力？

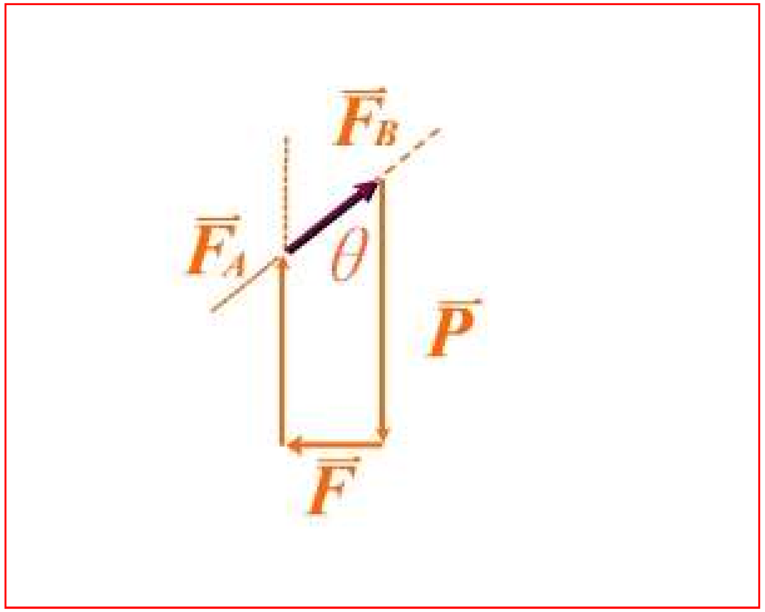
2. 欲将碾子拉过障碍物，水平拉力 $\vec{F}$ 至少多大？

3. 力 $\vec{F}$ 沿什么方向拉动碾子最省力，及此时力 $\vec{F}$ 多大？



解：1. 取碾子，画受力图. 2. 分析受力，所有力作用线穿过圆心.





用几何法，按比例画封闭力四边形

$$\theta = \arccos\frac{R-h}{R} = 30^\circ$$

$$F_B \sin\theta = F$$

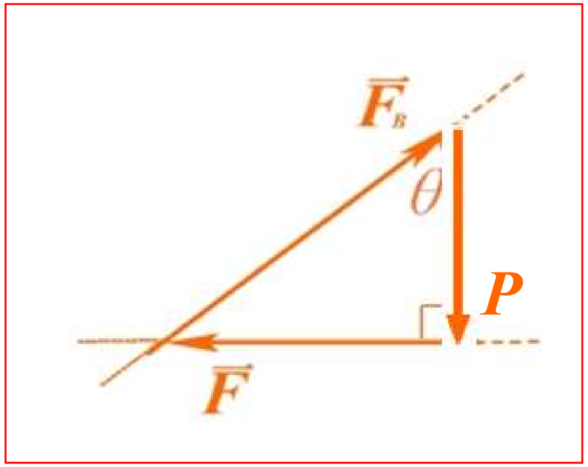
$$F_A + F_B \cos\theta = P$$

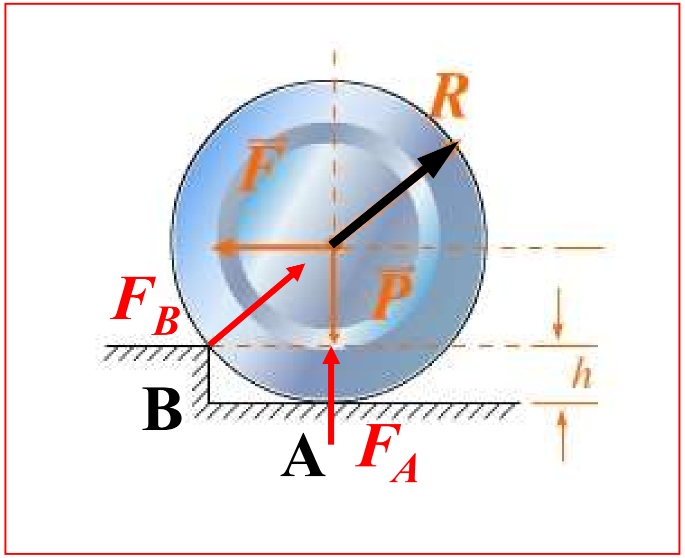
$$F_A = 11.4\text{kN}$$

$$F_B = 10\text{kN}$$

2. 碾子拉过障碍物，碾子脱离A点约束

应有$F_A = 0$



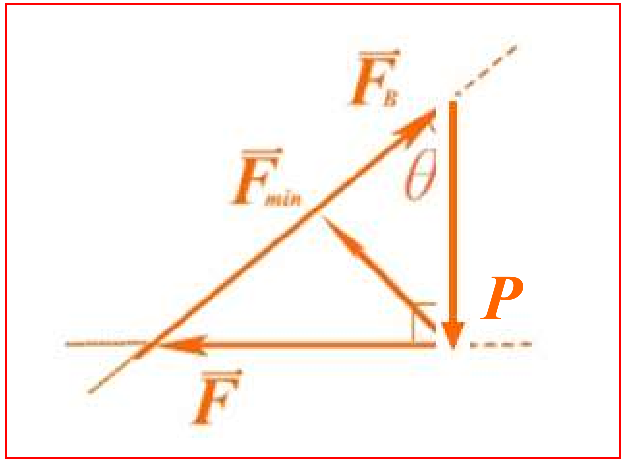


用几何法解得

$$F = P \cdot \tan\theta = 11.55\text{kN}$$

3. 力$\vec{F}$沿什么方向拉动碾子最省力

封闭的力三角形中点到直线的距离最小



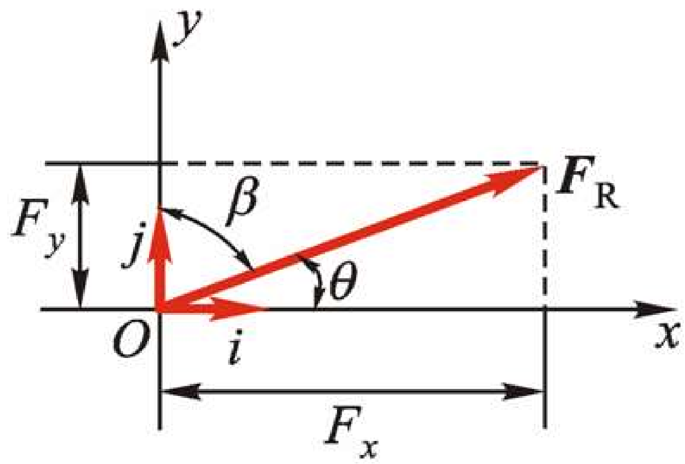
解得 $F_{\min} = P \cdot \sin\theta = 10\,\text{kN}$

三、平面汇交力系合成的解析法

合力 $\vec{F}_R$ 在x 轴，y轴投影分别为

$$F_{Rx} = F_R \cos\theta$$

$$F_{Ry} = F_R \cos\beta$$

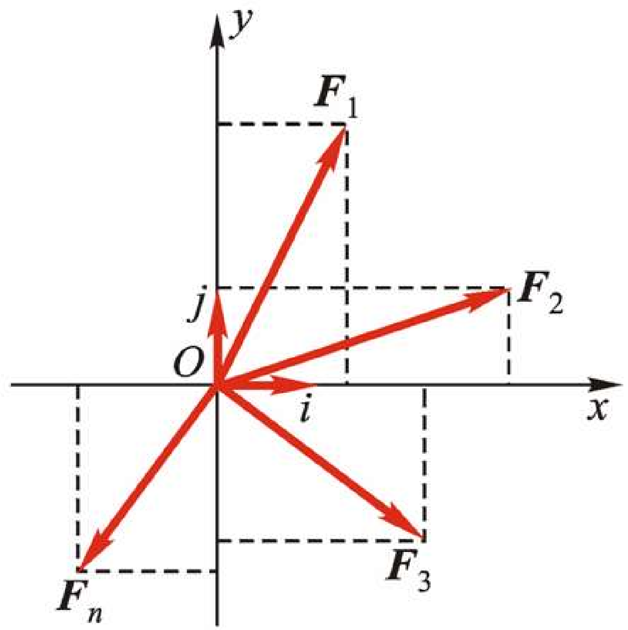


合力等于各力矢量和

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$

合矢量投影等于各分力矢量投影和

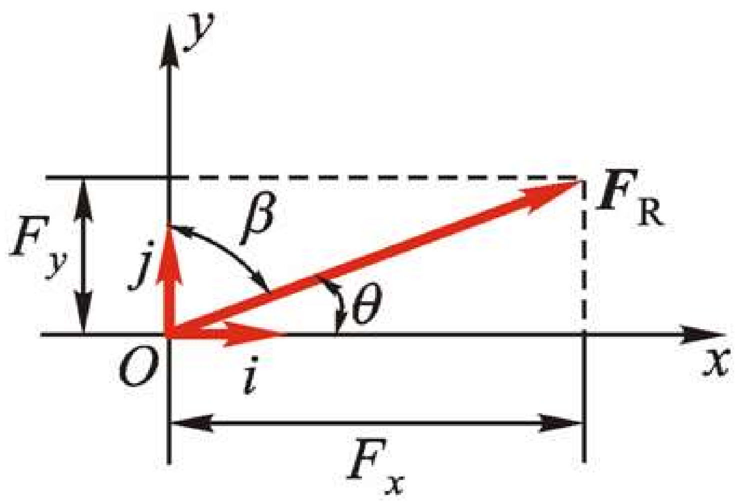
$$F_{Rx} = \sum F_{ix} \qquad F_{Ry} = \sum F_{iy}$$



合力的大小为： $F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$

方向为： $\cos(\vec{F}_R, \vec{i}) = \dfrac{\sum F_{ix}}{F_R}$

$\cos(\vec{F}_R, \vec{j}) = \dfrac{\sum F_{iy}}{F_R}$



作用点为力的汇交点.

四、平面汇交力系的平衡方程

平衡条件: $\vec{F}_R = 0$

平衡方程: $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$

判断下面说法是否正确：

1. 合力一定比分力大 （错误）
2. 三力汇交于一点，但不共面，能形成平衡力系（错误）

1. 因为力按矢量合成得到合力（不是标量相加），所以合力并不一定比分力大。
2. 三力汇交于一点，但不共面，肯定不是平衡力系（推论2）。然而，即使共面且汇交于一点，也不一定是平衡力系（还需要力的大小满足两个不互相平行的方向投影的合力为0）

例2-3 已知：图示平面共点力系，$F_1=200\text{N}, F_2=300\text{N}$,
$F_3=100\text{N}$, $F_4=250\text{N}$. 求：此力系的合力.

解： 用解析法

$$F_{\text{R}x}=\sum F_{ix}=F_1\cos30^\circ-F_2\cos60^\circ-F_3\cos45^\circ+F_4\cos45^\circ=129.3\text{N}$$

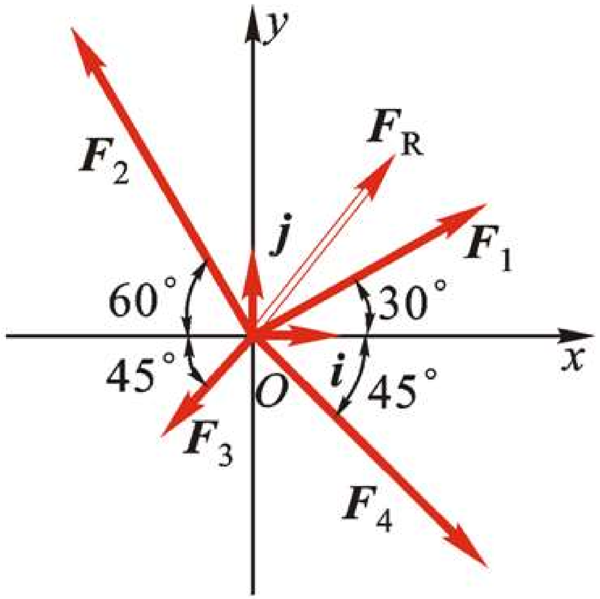
$$F_{\text{R}y}=\sum F_{iy}=F_1\sin30^\circ+F_2\sin60^\circ-F_3\sin45^\circ-F_4\sin45^\circ=112.3\text{N}$$

$$F_{\text{R}}=\sqrt{F_{\text{R}x}^2+F_{\text{R}y}^2}=171.3\text{N}$$

$$\cos\theta=\frac{F_{Rx}}{F_R}=0.7548$$

$$\cos\beta=\frac{F_{Ry}}{F_R}=0.6556$$

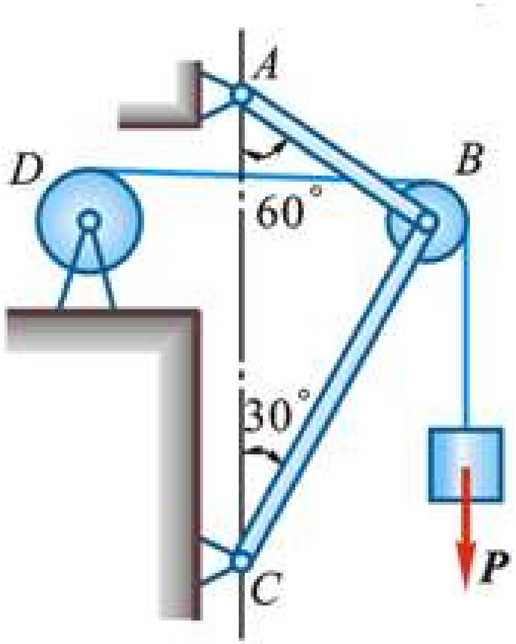
$$\theta=40.99^\circ, \beta=49.01^\circ$$



例2-4（多刚体系平面力系平衡）

已知：系统如图，不计杆、轮自重，忽略滑轮大小，$\boldsymbol{P}$=20kN;

求：系统平衡时，杆$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BC}$受力.



思路：求平衡时候每个杆受力

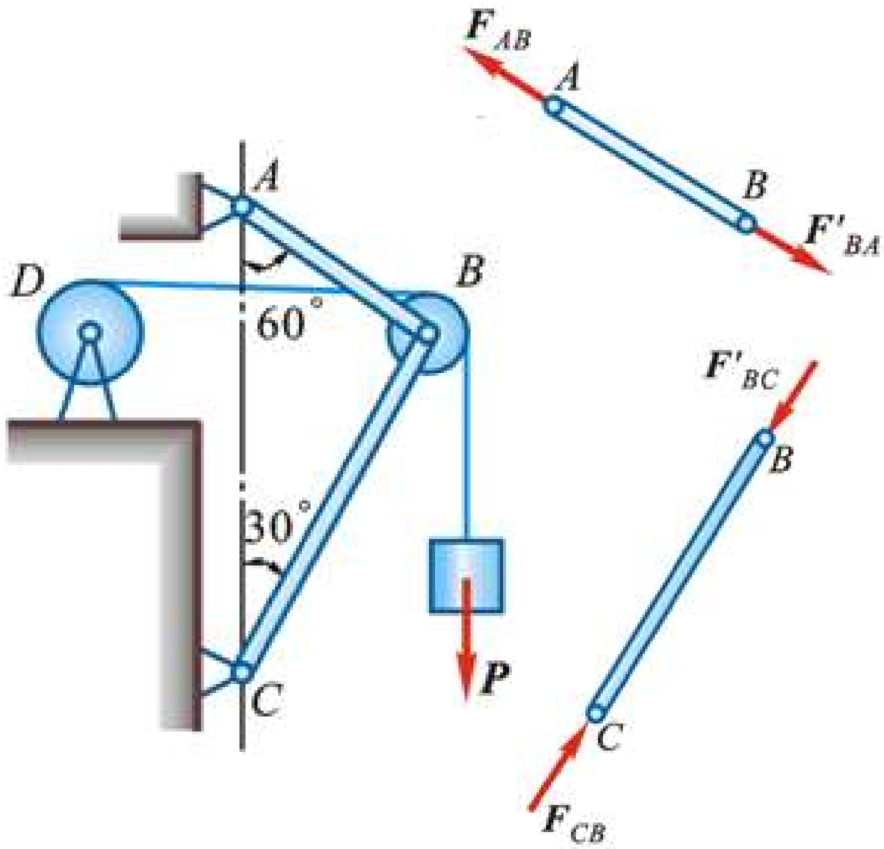
1. 画每个刚体的受力图

--杆AB，杆BC，滑轮B

绳索：沿绳索张力不变

2. 平面汇交力系平衡分析

解：对*AB*、*BC*杆以及滑轮B，画受力图.



该选取哪里进行平衡分析？

AB与BC （二力杆）

重物？ （二力平衡-绳索）

柔索？ （张力相等条件）

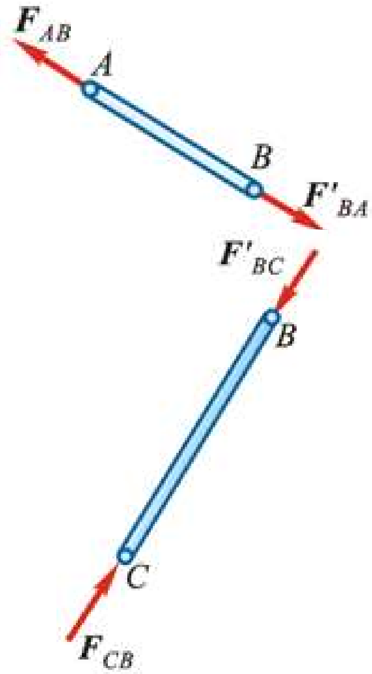
滑轮D？ （不需要）

滑轮B （通过平面力系平衡求得杆的力）

力作用线汇交点

求：系统平衡时，杆*AB*，*BC*受力.

杆*AB*，*BC*均处于平衡状态，杆力由主动力*P*产生（决定）



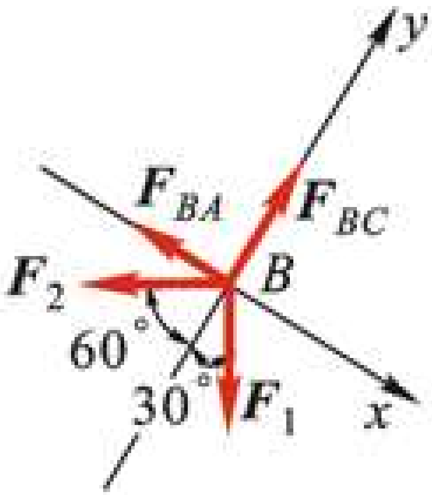
解： *AB*、*BC* 杆为二力杆，取滑轮*B*（或点*B*），画受力图. 建图示坐标系

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{BA} + F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{BC} - F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$F_1 = F_2 = P$$

$$F_{BA} = -7.321\text{kN} \qquad F_{BC} = 27.32\text{kN}$$

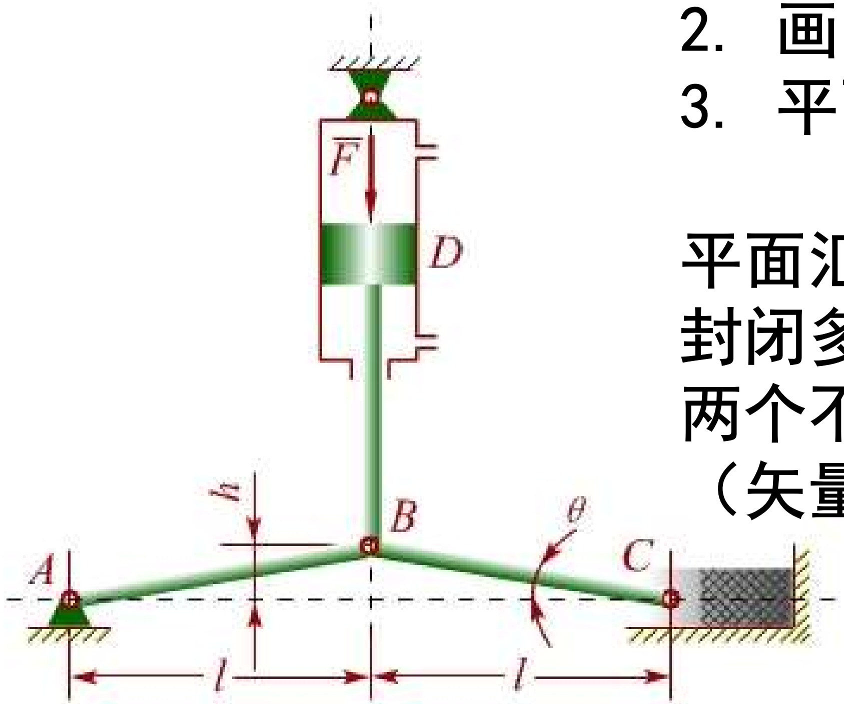


只要两个不互相平行的方向投影的合力为0，就满足平衡

例2-5（通过平衡刚体求解未知约束力）

已知： F=3kN，l=1500mm，h=200mm，忽略自重；

求：平衡时，压块C 对工件与地面的压力，AB 杆受力.



1. 找出需要分析的刚体；
2. 画受力图，分析刚体所受的所有力。
3. 平面汇交力系平衡条件

平面汇交力系平衡：
封闭多边形（几何法）
两个不互相平行的方向投影的合力为0（矢量法）

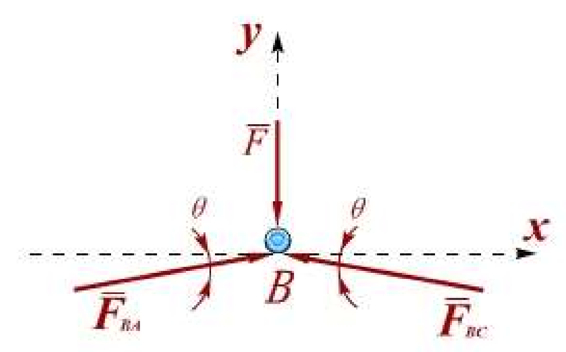
例2-5

已知： F=3kN， l=1500mm， h=200mm，忽略自重；

求：平衡时，压块C 对工件与地面的压力，AB 杆受力.

解： AB、BC 、BD 杆为二力杆.

取销钉B.



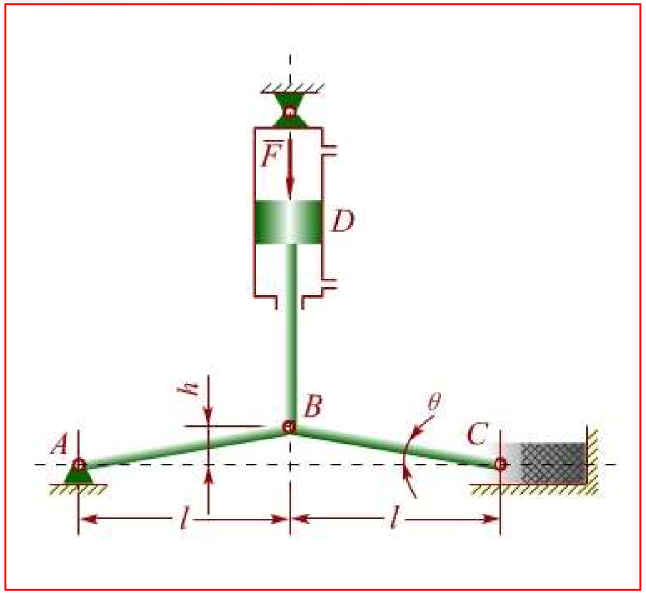
$$\sum F_x = 0 \quad F_{BA}\cos\theta - F_{BC}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BA} = F_{BC}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{BA}\sin\theta + F_{BC}\sin\theta - F = 0$$

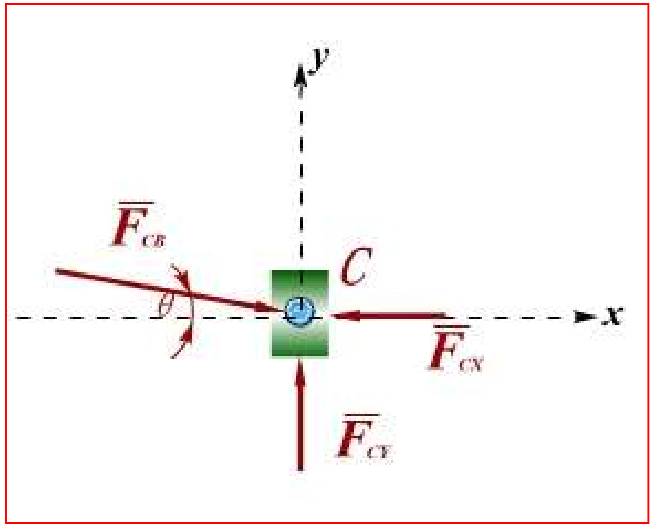
$$\Rightarrow \quad F_{BA} = F_{BC} = 11.35\text{kN}$$

选压块C，画受力图



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{CB}\cos\theta - F_{Cx} = 0$$

$$F_{Cx} = \frac{F}{2}\cot\theta = \frac{Fl}{2h} = 11.25\text{kN}$$



$$\sum F_y = 0 \qquad -F_{CB}\sin\theta + F_{Cy} = 0$$

$$F_{Cy} = 1.5\text{kN}$$

小结

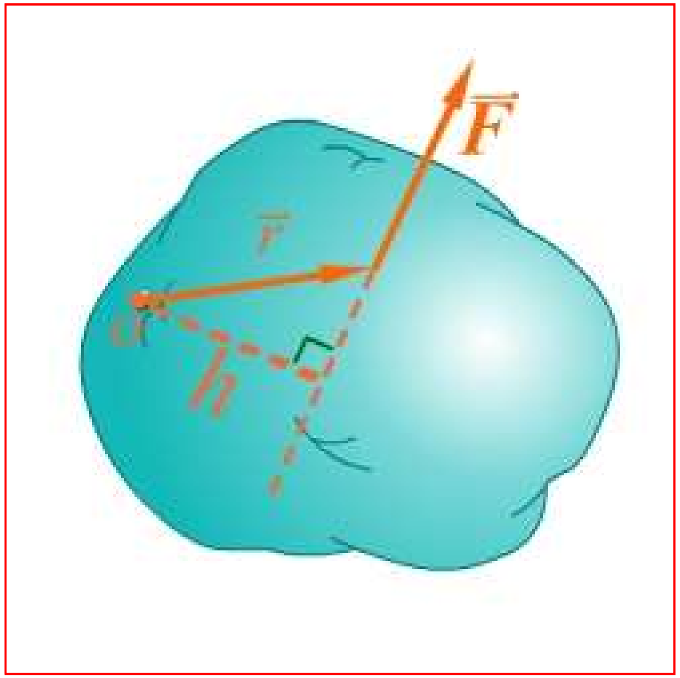
平面汇交力系平衡问题

1. 确定需要分析的刚体，画受力图
2. 先找二力杆的杆件（减少未知力数量）；
3. 确定力汇交点，并通过其他的平衡条件尽可能多确定未知力。
4. 平面汇交力系平衡条件

   封闭多边形（几何法）

   两个不互相平行的方向投影的合力为0（矢量法）

一、平面力对点之矩（力矩）



力矩是度量力对刚体转动效应

力矩作用面，O 称为矩心，O 到力的作用线的垂直距离 h 称为力臂

两个要素：

1. 大小：力 $\vec{F}$ 与力臂的乘积

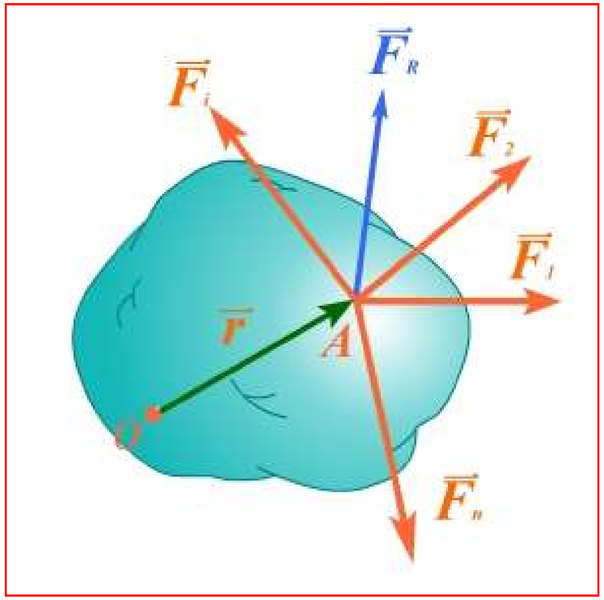
2. 方向：转动方向

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

平面力对点之矩是一个代数量，它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积，它的正负：力使物体绕矩心逆时针转向时为正，顺时针为负. 常用单位 $\mathrm{N \cdot m}$ 或 $\mathrm{kN \cdot m}$

二、合力矩定理与力矩的解析表达式

合力矩定理：平面汇交力系的合力对平面内任一点之矩等于所有各分力对于该点之矩的代数和。

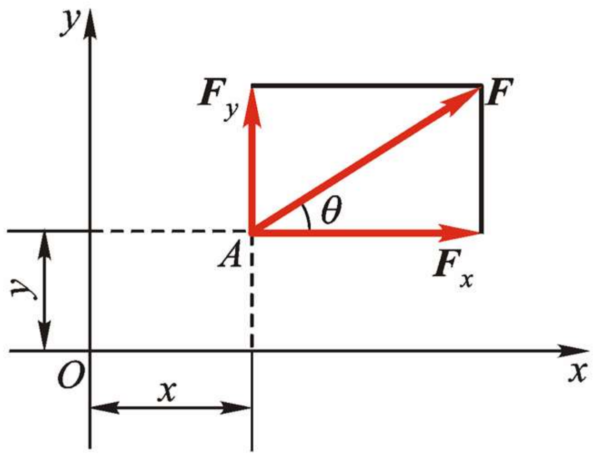


$$M_O(\vec{F}_R) = \sum M_O(\vec{F}_i)$$

该结论适用于任何合力存在的力系

合力存在条件是？作用线汇交与一点

$$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_y) - M_O(\vec{F}_x)$$
$$= x \cdot F \cdot \sin\theta - y \cdot F \cdot \cos\theta$$
$$= xF_y - yF_x$$



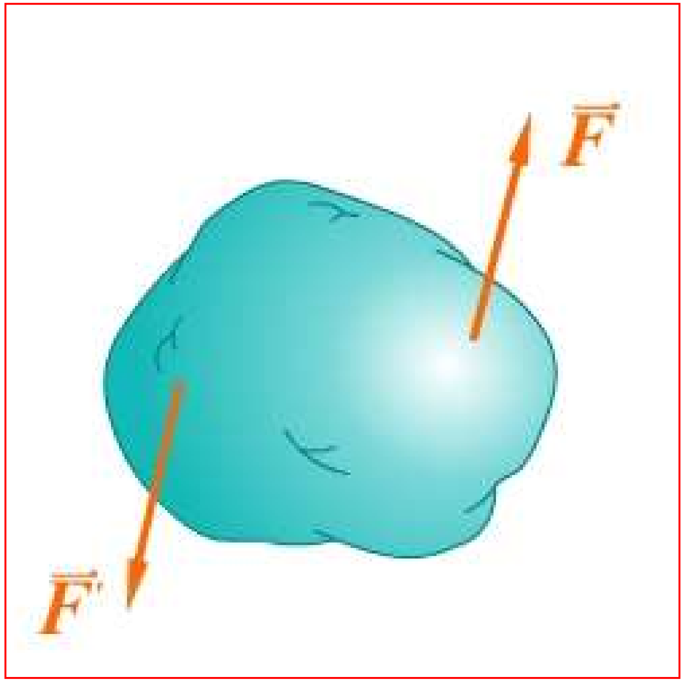
$$M_O(\vec{F}_R) = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

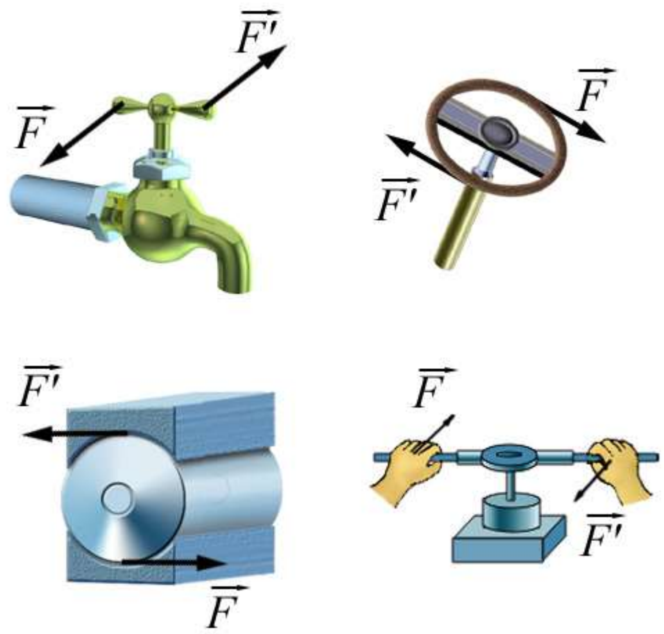
三、力偶和力偶矩

力+力偶是静力学两个基本要素

力偶：描述非共点力的作用效果（转动）

由两个等值、反向、不共线的平行力组成的力系称为力偶，记作 $(\vec{F},\vec{F}')$





§2-2 平面力对点之矩与平面力偶理论

力偶：由两个力组成的力系$\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$

作用效果：改变物体转动状态

定量描述（代数量）：力偶矩（两个力对点的力矩和）

力偶矩

力偶中两力所在平面称为力偶作用面.

力偶两力之间的垂直距离称为力偶臂.

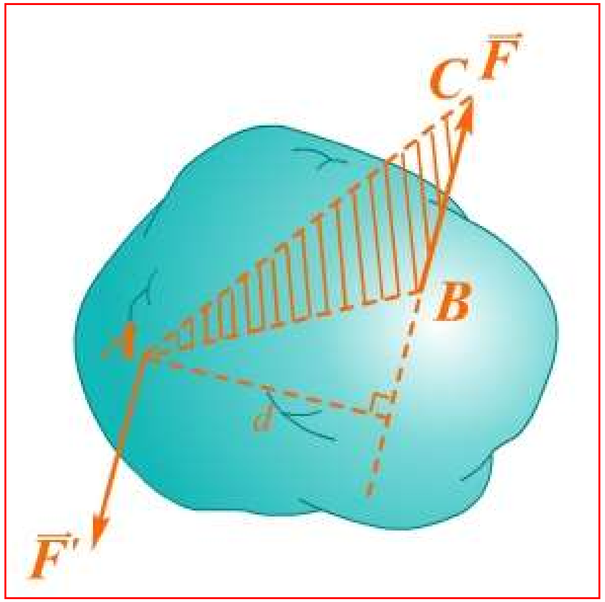
两个要素

a. 大小：力与力偶臂乘积

b. 方向：转动方向

力偶矩在平面是一个代数量

$$M=\pm F\cdot d=\pm 2\Delta ABC$$

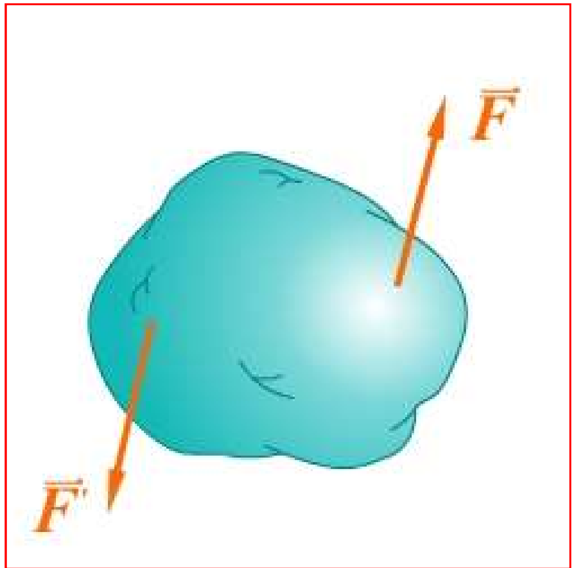


三、力偶和力偶矩

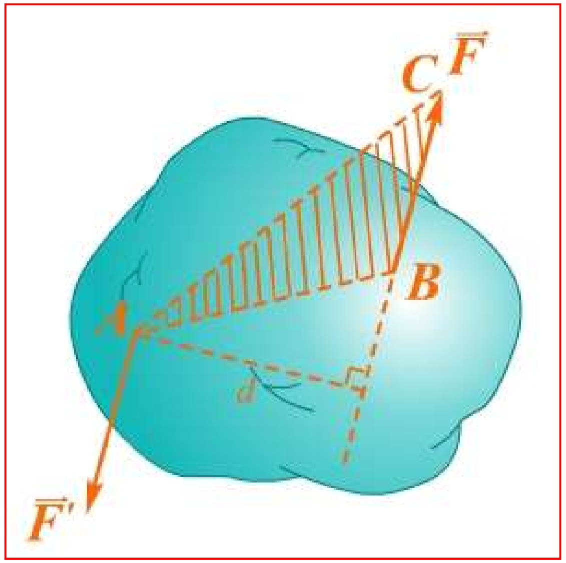
力偶：描述非共点力的作用效果（转动）

由两个等值、反向、不共线的平行力组成的力系称为力偶，记作 $(\vec{F},\vec{F}')$

力偶矩：$M=\pm F\cdot d$



力偶中两力所在平面称为力偶作用面.

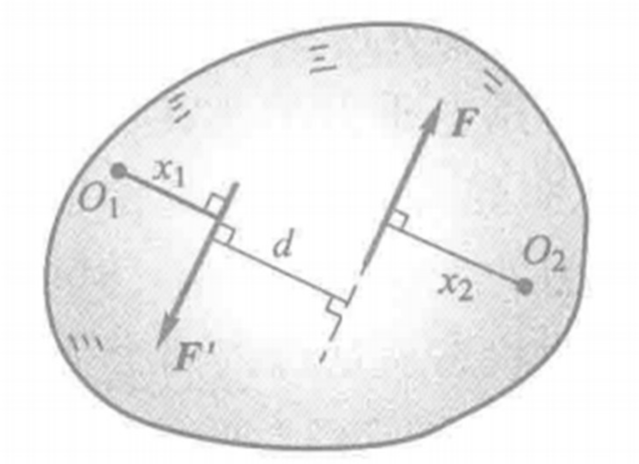


力+力偶是静力学两个基本要素

四、同平面内力偶的等效定理（力偶的矩心）

定理： 力偶对任意点取力矩都等于力偶矩，不因矩心的变化而改变。

（力偶的力偶矩不随着矩心的变化而变化，力矩怎样？）



对O_1计算力偶矩：$M_{O1}(F)+M_{O1}(F')=F\cdot(d+x_1)-F'\cdot x_1=Fd$

对O_2计算力偶矩：$M_{O2}(F)+M_{O2}(F')=-F\cdot x_2+F'\cdot(d+x_2)=Fd$

四、同平面内力偶的等效定理

定理： 力偶对任意点取力矩都等于力偶矩，不因矩心的变化而改变。

推论：

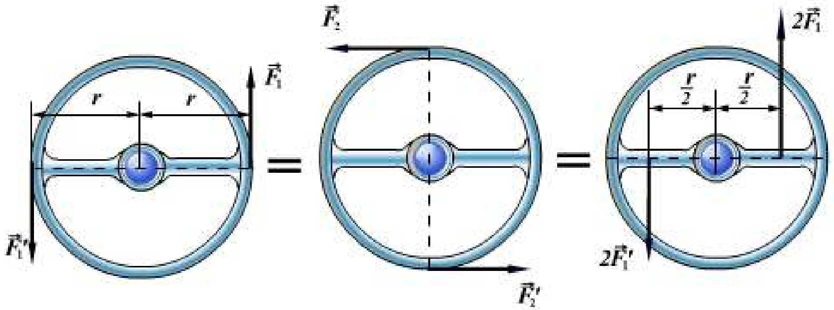
1. 任一力偶可在它的作用面内任意转移，而不改变它对刚体的作用。因此力偶对刚体的作用与力偶在其作用面内的位置无关。

刚体力偶只与作用面有关，与作用点无关

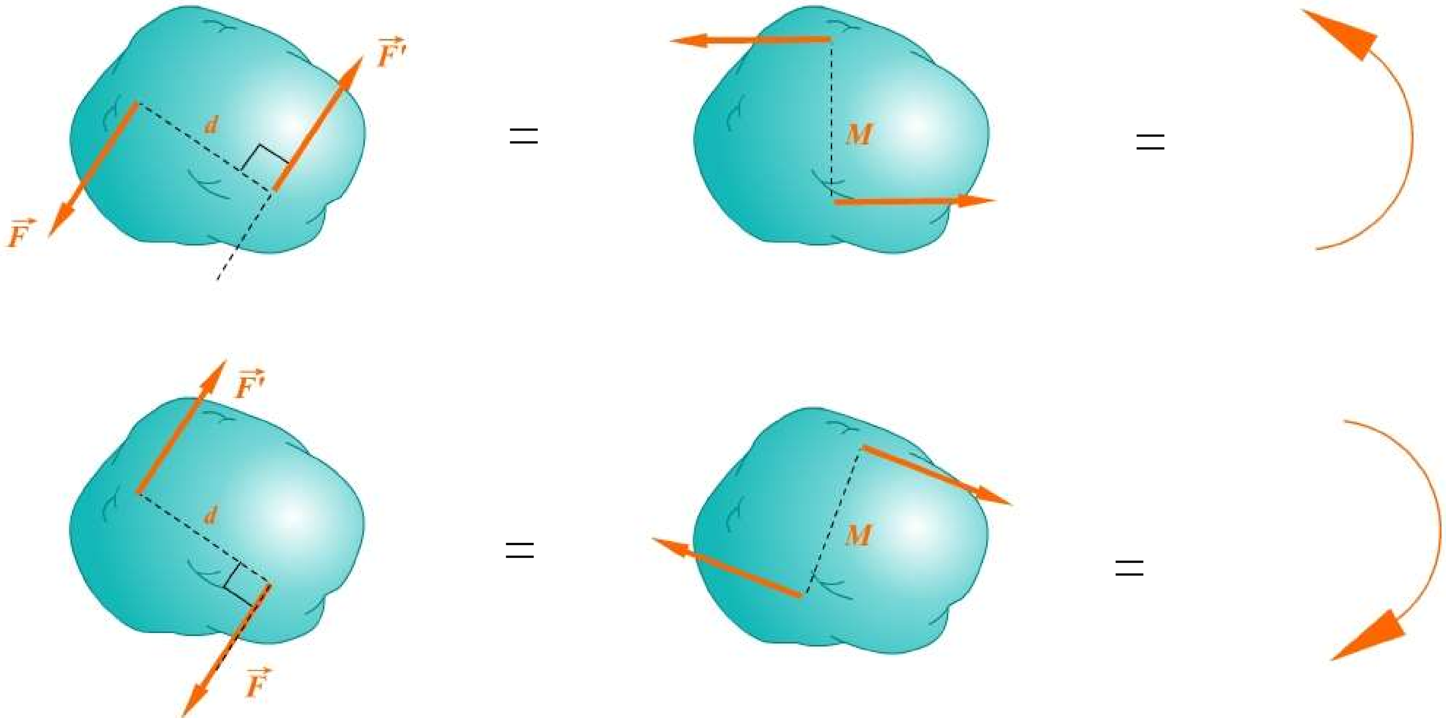
只要保持力偶矩不变，可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变.

2. 力偶中的力偶臂和力的大小都不是力偶的特征量，只有力偶矩是平面力偶作用的唯一度量。

§2-2 平面力对点之矩与平面力偶理论



只有力偶矩是平面力偶作用的唯一度量



$$M = Fd$$

$$M = -Fd$$

三种等效的表示方式

小结

力与力偶

1. 力：大小、方向与作用线
   力偶：大小、（转动）方向

2. 力在刚体内沿作用线传递
   力偶在作用平面自由移动

3. 力能组成平面汇交力系，平面平行力系，平面任意力系
   力偶能组成平面力偶系

4. 平面汇交力系：矢量加减
   平面力偶系：标量加减

力矩与力偶矩

1. 力矩：大小、方向
   力偶矩：大小、方向

2. 力矩：度量力对刚体绕矩心的转动效果,大小与矩心的位置相关。
   力偶矩：度量力偶对刚体的转动效果，力偶矩大小与作用面内位置无关。

多选题 1分

设置

以下关于平面情形下力偶(矩）与力矩的说法，正确的是（多选题）

A 在平面情形，两者都是标量，可以直接进行标量加减计算

B 一般规定力矩逆时针为正，顺时针为负，而力偶则不满足以上规定

C 力偶与力矩都是力对点的矩，是一样的物理量

D 力偶矩是衡量力偶对刚体转动状态的改变能力，力偶矩的大小可通过计算组成力偶的两个力对任意点的矩的标量和得到

提交

五、平面力偶系的合成和平衡条件

平面力偶系：
只有力偶作用，并且力偶都在同一平面内

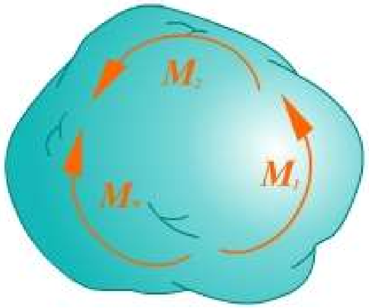
已知：$M_1, M_2, \cdots M_n;$

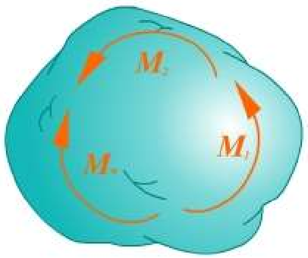
任选一段距离 d

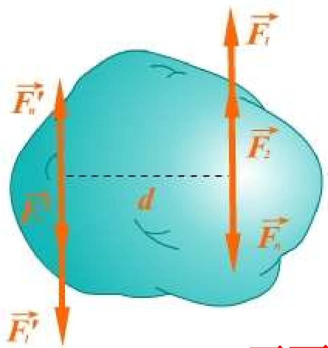
$$\frac{M_1}{d} = F_1 \qquad M_1 = F_1 d$$

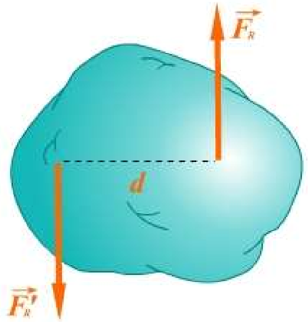
$$\frac{M_2}{d} = F_2 \qquad M_2 = F_2 d$$

$$\left|\frac{M_n}{d}\right| = F_n \qquad M_n = -F_n d$$







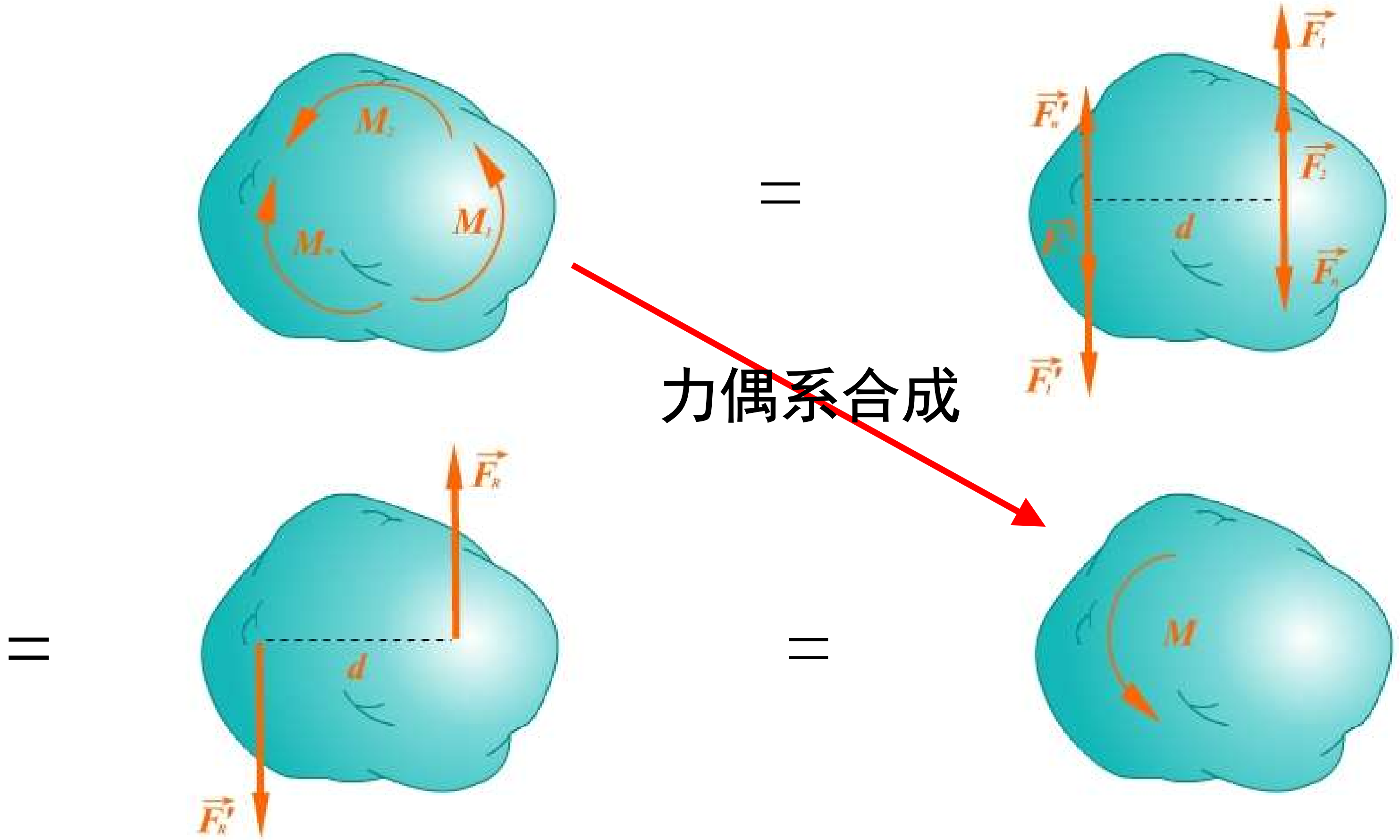


平面汇交力系-合力

$$F_{\mathrm{R}} = F_1 + F_2 + \cdots - F_n$$

（平面汇交力系）　$F_R = F'_{\mathrm{R}}$

$$F'_{\mathrm{R}} = F'_1 + F'_2 + \cdots - F'_n$$



§2-2 平面力对点之矩与平面力偶理论

$$M = F_R d = F_1 d + F_2 d + \cdots - F_n d = M_1 + M_2 + \cdots M_n$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum M_i$$

通过力的合成去定义力偶矩的合成

平面力偶系平衡的充要条件 $M = 0$，有如下平衡方程

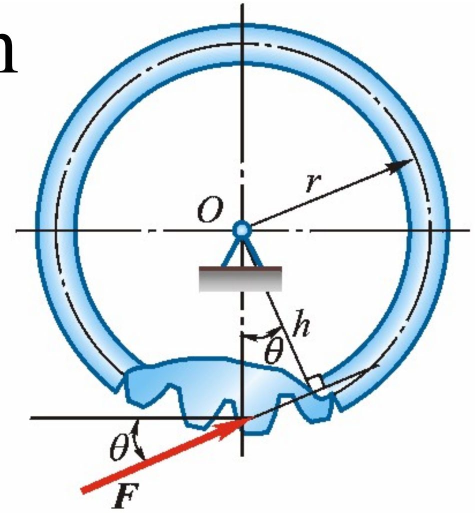
$$\sum M_i = 0$$

平面力偶系平衡的必要和充分条件是：所有各力偶矩的代数和等于零.

例2-6（简单力矩计算）

已知： $F=1400\text{N}$, $\theta=20^{\circ}$, $r=60\text{mm}$

求： $M_O(\vec{F})$

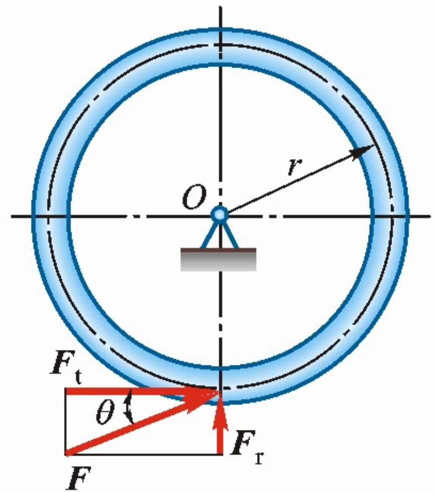


解：直接按定义

$$M_O\left(\vec{F}\right)=F\cdot h=F\cdot r\cdot\cos\theta$$

$$=78.93\text{N}\cdot\text{m}$$

按合力矩定理



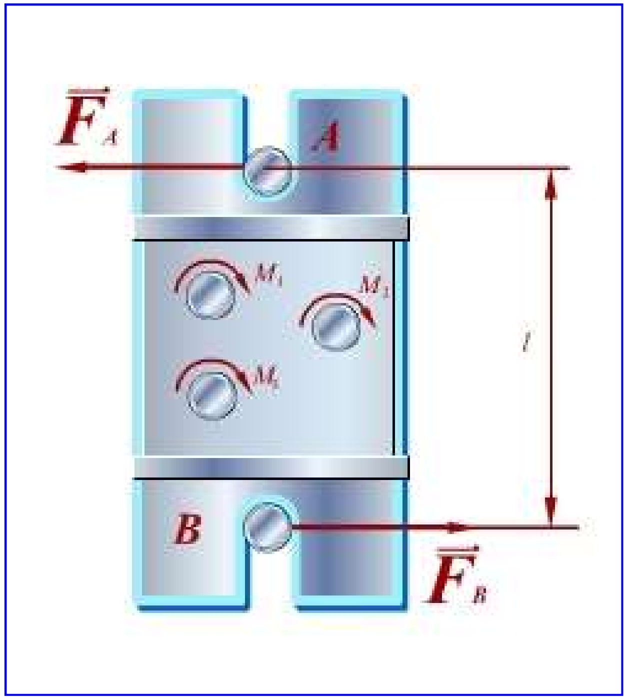
$$M_O\left(\vec{F}\right)=M_O\left(\vec{F}_t\right)+M_O\left(\vec{F}_r\right)$$

$$=F\cdot\cos\theta\cdot r=78.93\text{N}\cdot\text{m}$$

例2-7(平面力偶系平衡)

已知：$M_1 = M_2 = 10\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}, M_3 = 20\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}, l = 200\mathrm{mm}$；

求：　光滑螺柱 AB 所受水平力.



解： 由力偶只能由力偶平衡的性质，其受力图为

$$\sum M = 0$$

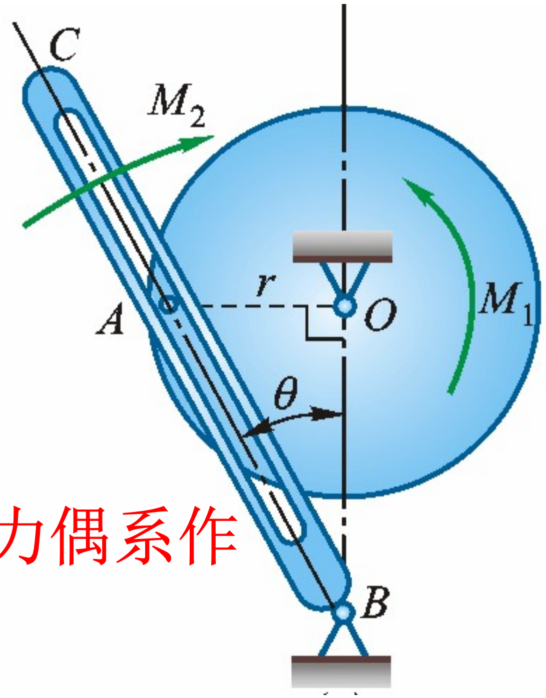
$$F_A l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

解得 $$F_A = F_B = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{l} = 200\mathrm{N}$$

例2-8(平面力偶系平衡)

已知 $M_1=2\text{kN}\cdot\text{m}, OA=r=0.5\text{m}, \theta=30^\circ;$

求：平衡时的 M_2 及铰链 O,B 处的约束力.



M_1与M_2均为力偶

杆BC与圆轮O在力偶系作用下平衡。

思考题：

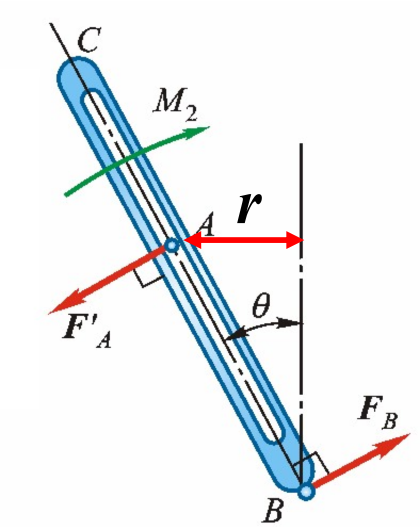
只受到力偶的杆件是二力杆吗？

不是，因为力偶也是主动力（系）

解： 力偶只能由力偶平衡的性质

取杆 BC，画受力图.

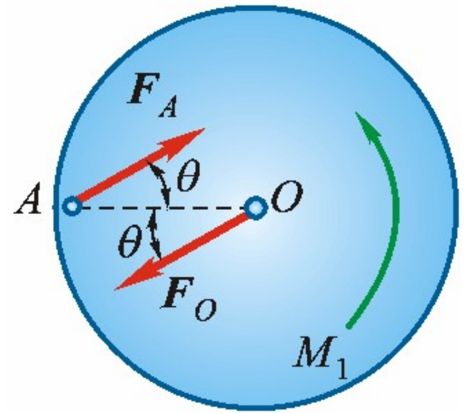
$$\sum M = 0 \quad F_A' \cdot \frac{r}{\sin\theta} - M_2 = 0$$



F'_A与F_B构成力偶

取圆轮0，画受力图.

$$\sum M = 0 \quad M_1 - F_A \cdot r\sin\theta = 0$$



F_A与F_O构成力偶

其中 $M_1 = 2\text{kN}\cdot\text{m}$

解得 $F_O = F_A = 8\text{kN}$

解得 $M_2 = 8\text{kN}\cdot\text{m}$

$F_B = F_A = 8\text{kN}$

作业

教材习题：2-4，2-5，2-7
2-8，2-9