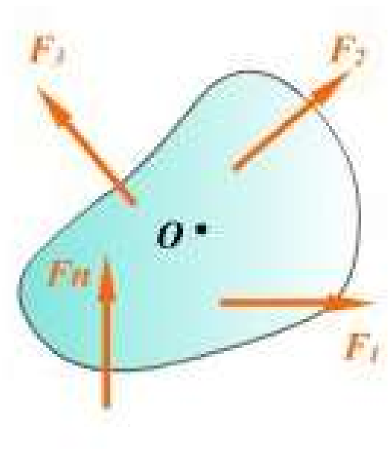
平面力系小结



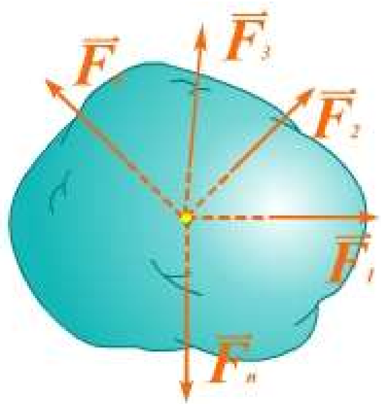
1. 另一个静力学基本要素：力偶（力偶矩）

描述力对刚体绕固定点O转动效果的描述：力矩

2. 两个定理：
力的平移定理—主矢与主矩
合力矩定理—合力求力系的力矩

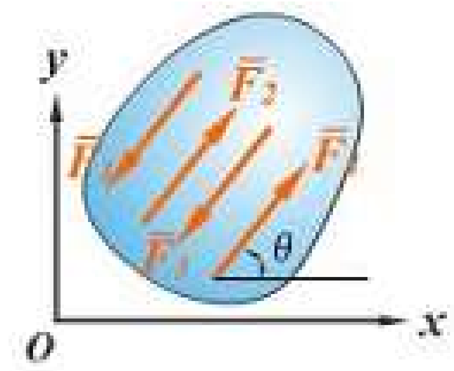
3. 平面力系的平衡方程（主矢，主矩均为0，3个平衡方程）
多物体系平衡（整体与局部）
桁架（二力杆+节点法/截面法）

平面汇交力系



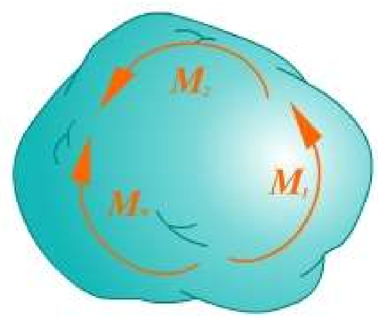
平衡方程（2个）：
力矩平衡自动满足（共点）
合力为0（力多边形封闭，或两个方向投影的力为0）

平面平行力系



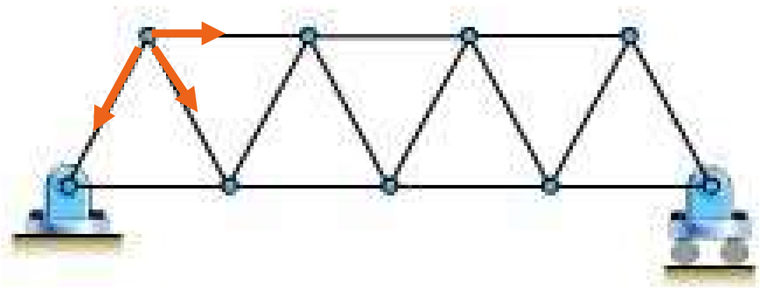
平衡方程（2个）：
一个方向力平衡自动满足（平行）
平行力系方向合力为0，力偶矩为0

平面力偶系

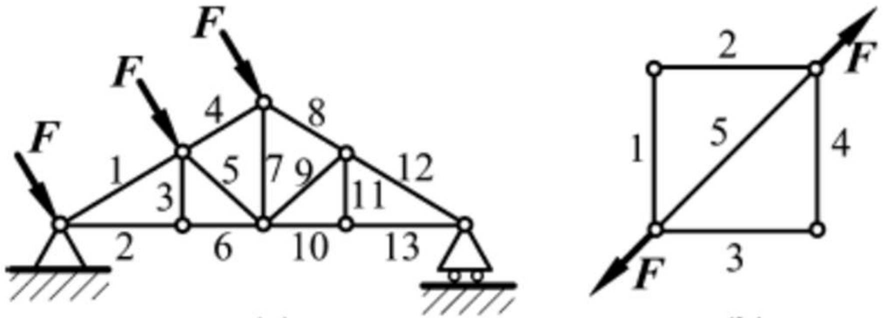


平衡方程 （1个）：
合力为0平衡自动满足（只有力偶）
合力偶矩为0

平面桁架结构：杆件都是二力杆，节点都是平面汇交力系



零力杆：杆件中内力为0（在当前加载条件下可以拆除）



(a)　　(b)

(b)零力杆：1, 2, 3, 4

对1与2节点列平衡方程，只能杆力为0

(a)零力杆：3, 11, 9

杆1, 2, 4, 8, 12, 13肯定不为0

杆2, 3, 6的节点y方向只有3，所以3为零力杆，同理11

杆8，9, 11, 12节点11为零力杆，则9必为零力杆

第三章　空间力系

张拉整体结构（Tensegrity）

力系中各个力的作用线不在同一个平面—空间力系

本章主要内容：

1. 掌握空间汇交力系的合成与平衡，力在空间直角坐标系上的投影，力对点的矩和力对轴的矩的计算。
2. 了解空间任意力系的简化过程和掌握简化结果。
3. 能应用空间任意力系平衡方程求解单个物体的平衡问题。
4. 掌握重心的计算。

当空间力系中各力作用线汇交于一点时，称其为空间汇交力系.

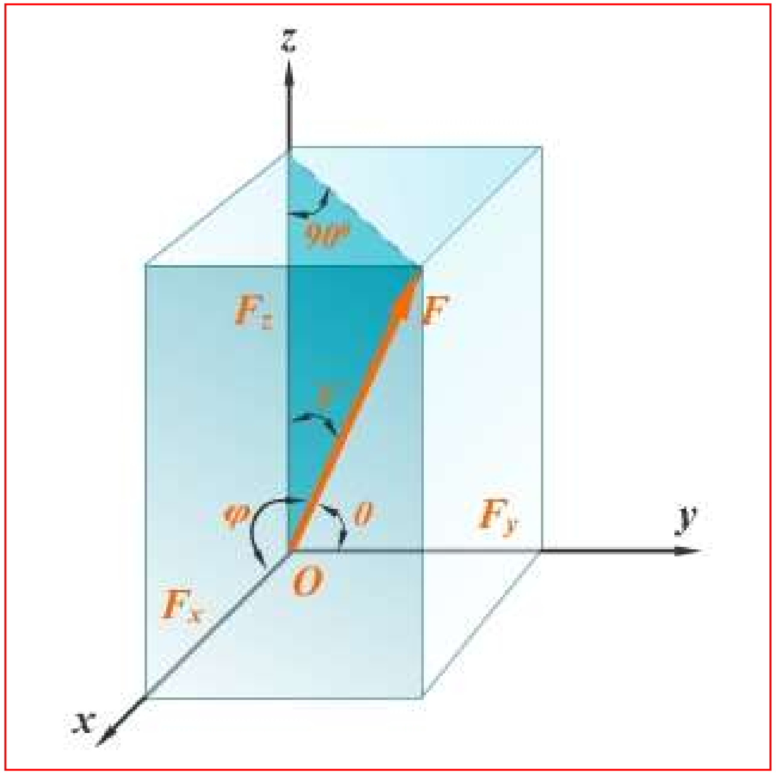
一. 力在直角坐标轴上的投影

直接投影法

$$F_x = F\cos\varphi$$

$$F_y = F\cos\theta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$



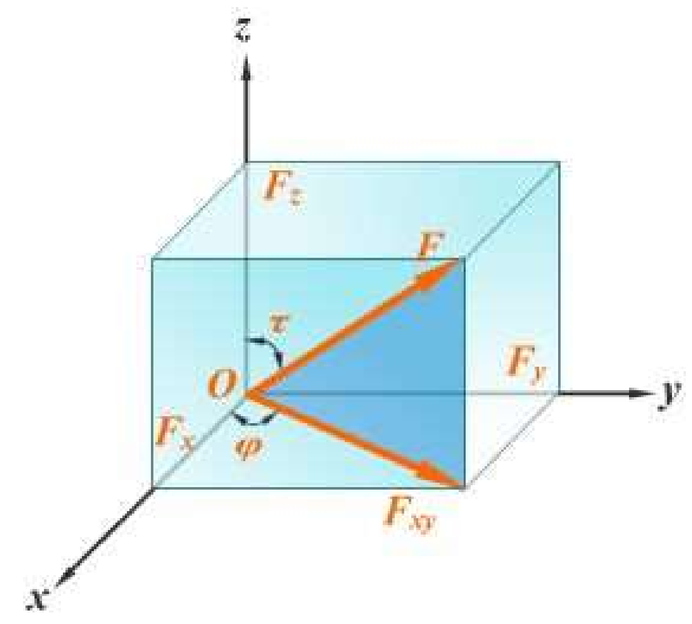
间接（二次）投影法

$$F_{xy} = F\sin\tau$$

$$F_x = F\sin\tau\cos\varphi$$

$$F_y = F\sin\tau\sin\varphi$$

$$F_z = F\cos\tau$$



二. 空间汇交力系的合力与平衡条件

空间汇交力系的合力 $\vec{F}_{\mathrm{R}} = \sum \vec{F}_i$

合矢量（力）投影定理

$$F_{\mathrm{R}x} = \sum F_{ix} = \sum F_x \quad F_{\mathrm{R}y} = \sum F_{iy} = \sum F_y \quad F_{\mathrm{R}z} = \sum F_{iz} = \sum F_z$$

合力的大小 $F_{\mathrm{R}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$

方向余弦

$$\cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_{\mathrm{R}}} \quad \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_{\mathrm{R}}} \quad \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{k}) = \frac{\sum F_z}{F_{\mathrm{R}}}$$

§3–1 空间汇交力系

空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

空间汇交力系平衡的充分必要条件是：

该力系的合力等于零，即 $\vec{F}_{\mathrm{R}} = 0$

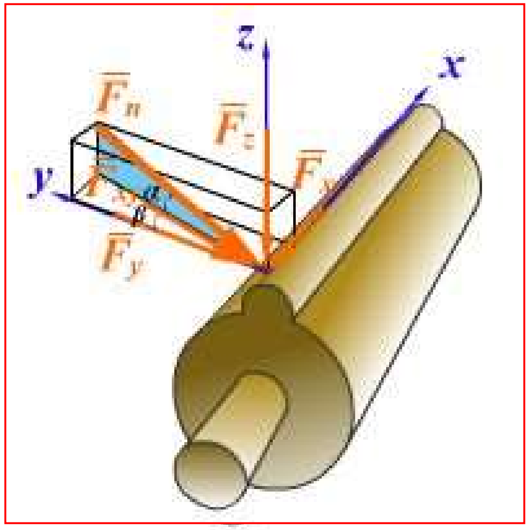
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

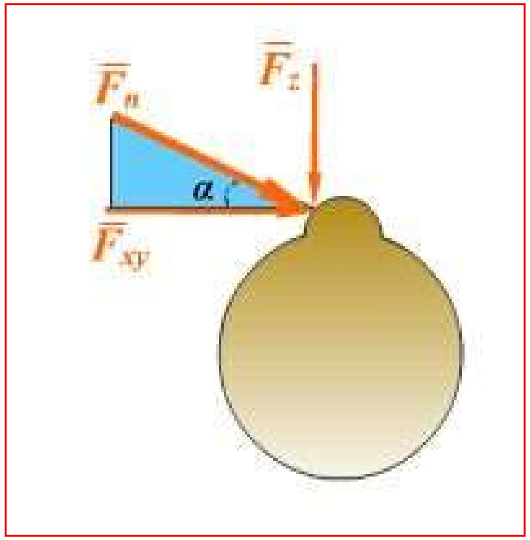
--称为空间汇交力系的平衡方程

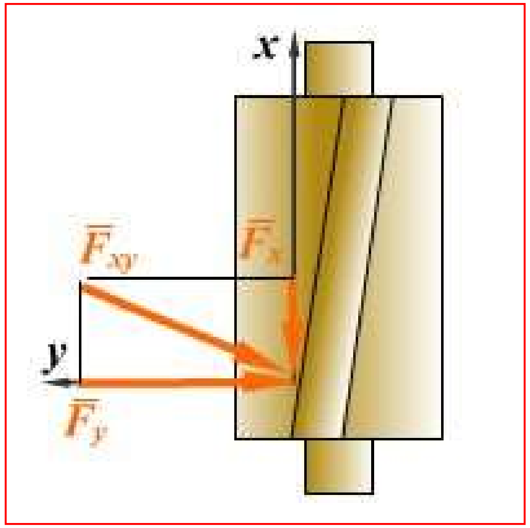
空间汇交力系平衡的充要条件：该力系中所有各力在三个坐标轴上的投影的代数和分别为零.

例3-1　已知：$\vec{F}_n, \beta, \alpha$

求：力 $\vec{F}_n$ 在三个坐标轴上的投影.







解：

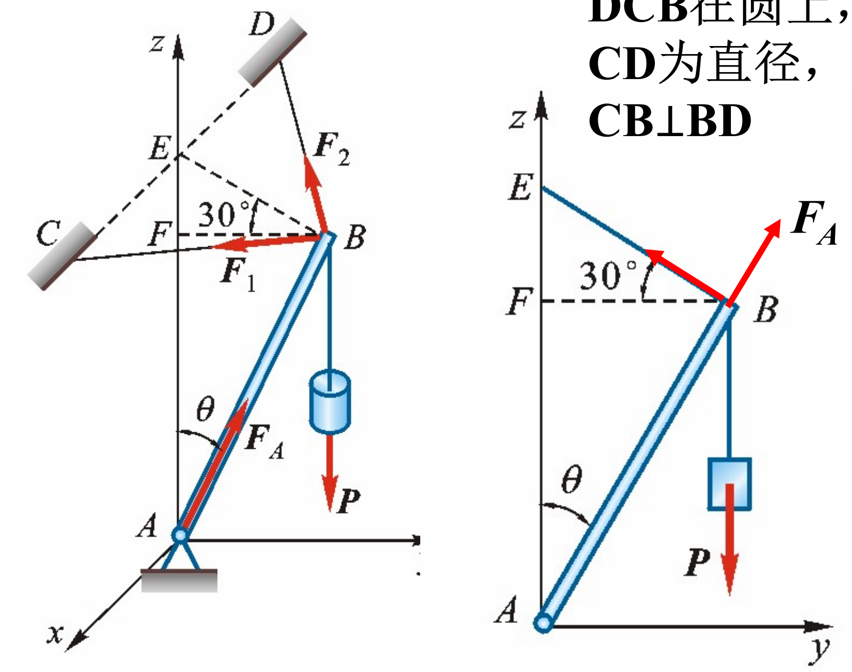
$$F_z = -F_n \sin\alpha \qquad F_{xy} = F_n \cos\alpha$$

$$F_x = -F_{xy} \sin\beta = -F_n \cos\alpha \sin\beta$$

$$F_y = -F_{xy} \cos\beta = -F_n \cos\alpha \cos\beta$$

例3-2 已知：物重P=10kN，CE=EB=DE；$\theta = 30^0$

求：杆受力及绳拉力



解： **AB**杆为二力杆，**B**处为空间汇交力系

$$\sum F_x = 0$$

$$F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_A \sin 30^\circ - F_1 \cos 45^\circ \cos 30^\circ - F_2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 0$$

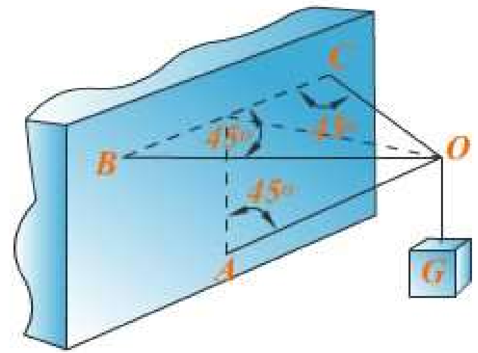
$$\sum F_z = 0$$

$$F_1 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_A \cos 30^\circ - P = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = F_2 = 3.54\text{kN} \qquad F_A = 8.66\text{kN}$$

例3-3 已知：P=1000N ,各杆重不计.

求：三根杆所受力.



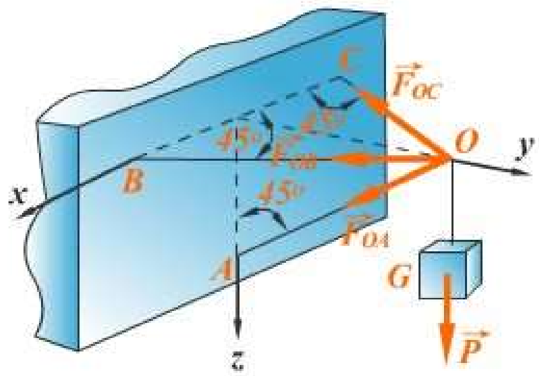
解： 各杆均为二力杆，取球铰O，画受力图。

$$\sum F_x=0 \quad F_{OB}\sin 45^\circ - F_{OC}\sin 45^\circ = 0$$

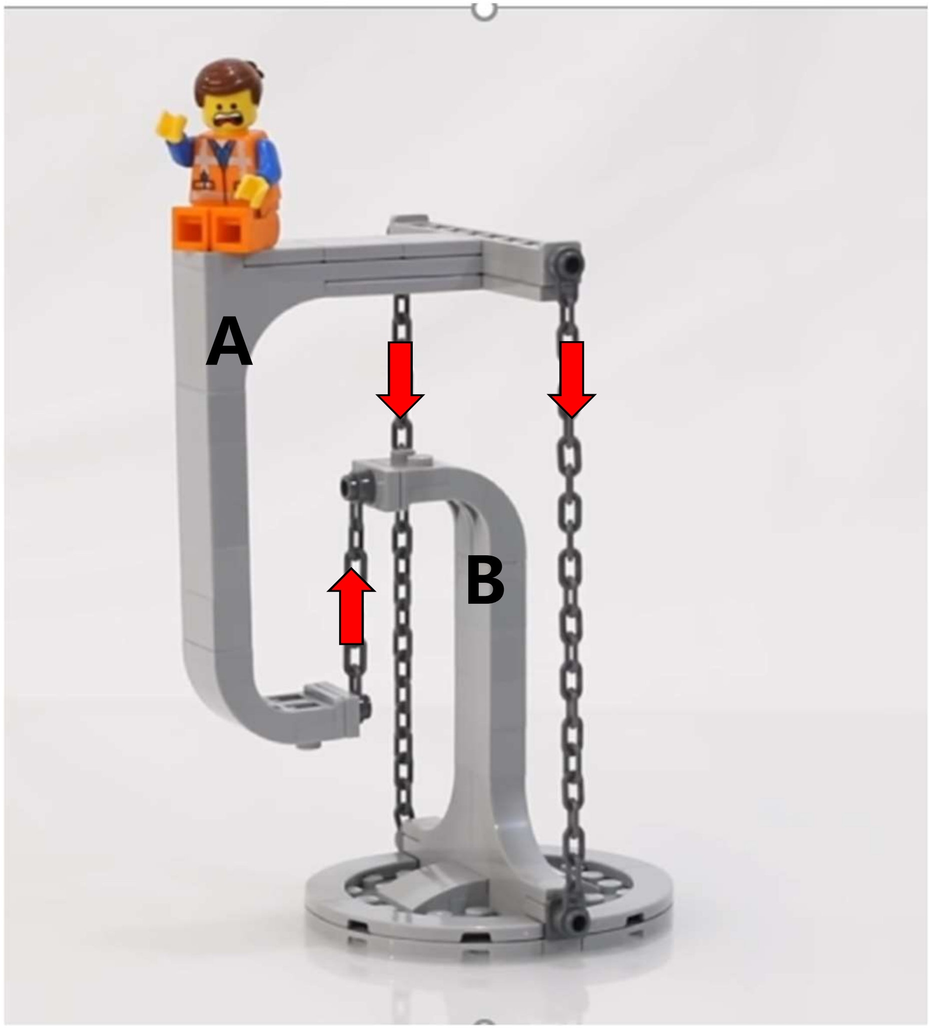
$$\sum F_y=0 \quad -F_{OB}\cos 45^\circ - F_{OC}\cos 45^\circ - F_{OA}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_z=0 \quad F_{OA}\sin 45^\circ - P = 0$$

$$F_{OA} = -1414\text{N} \qquad F_{OB} = F_{OC} = 707\text{N}（拉）$$



这是空间汇交力系吗？



刚体A与刚体B，三根绳索组成的刚体系

绳索张力互相平行
不是空间汇交力系

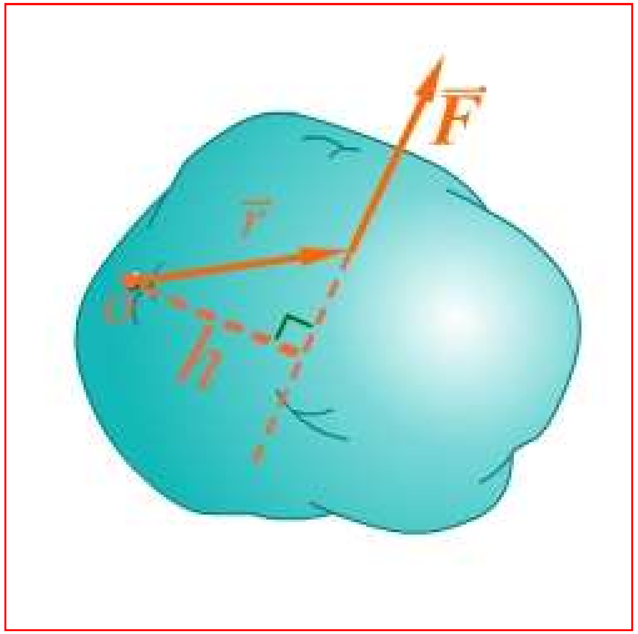
一. 力对点的矩以矢量表示 ——力矩矢

三要素:

（1）大小:力$\vec{F}$与力臂的乘积

（2）转向:转动方向

（3）作用面：力矩作用面.



平面力矩：

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

平面力对点之矩是一个代数量，它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积，它的正负：力使物体绕矩心逆时针转向时为正，顺时针为负. 常用单位$\mathrm{N \cdot m}$或$\mathrm{kN \cdot m}$

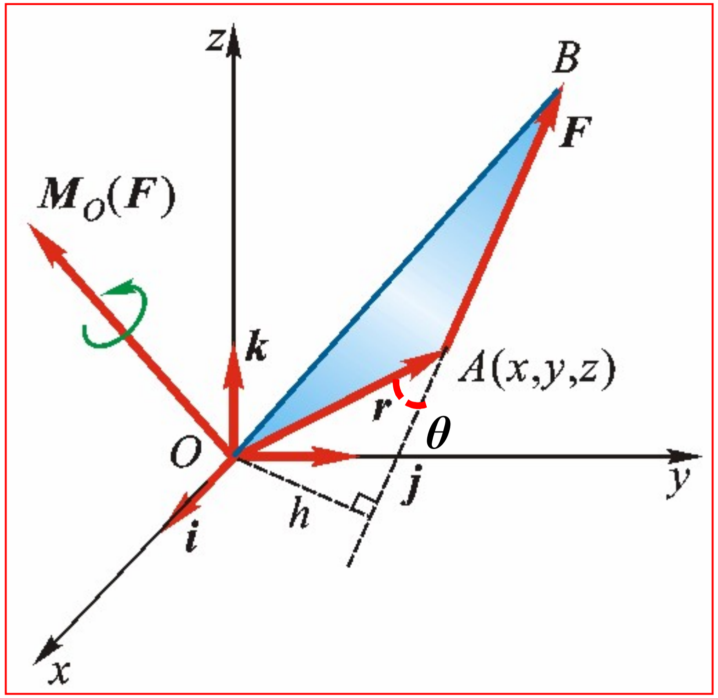
一. 力对点的矩以矢量表示 ——力矩矢

三要素：

（1）大小:力$\vec{F}$与力臂的乘积

（2）转向向:转动方向

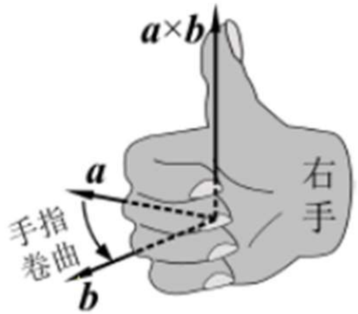
（3）作用面：力矩作用面的法向.



空间力矩：

大小：$F \cdot h = F \cdot r\sin\theta = 2S_{\Delta ABO}$

方向：垂于与**r**与**F**组成的平面，方向满足右手法则（作用面的法向）



$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\times(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$$

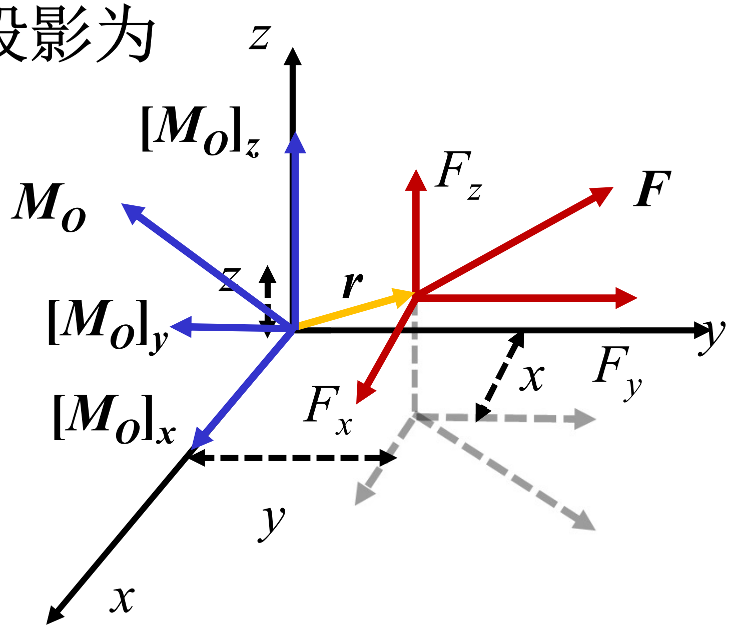
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

⇒ 力对点O的矩在三个坐标轴上的投影为

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y$$

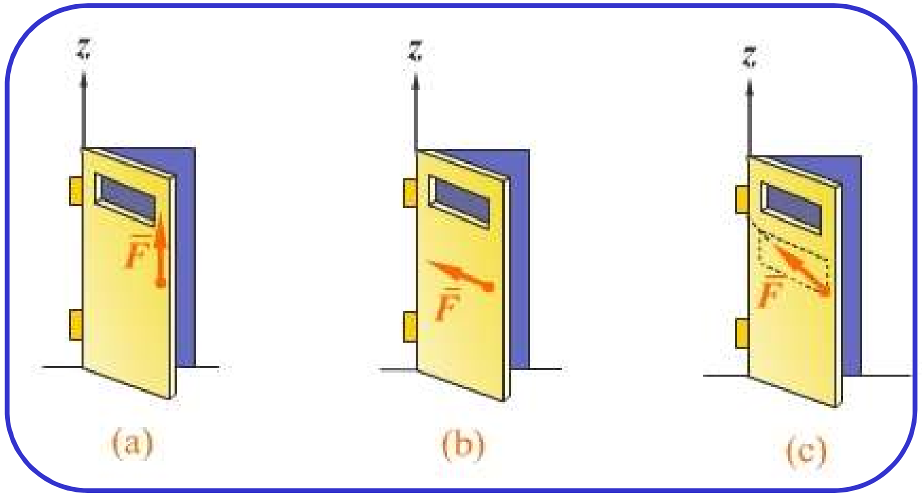
$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_x$$



二. 力对轴的矩

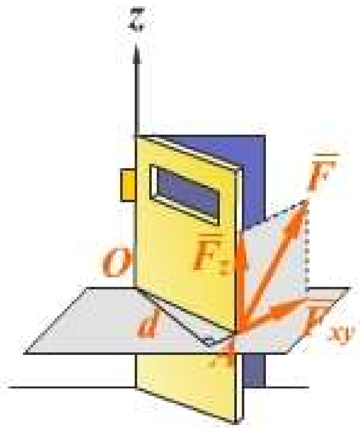
为了度量力对刚体定轴转动的作用效果，引入力对轴的矩



力对z轴的力矩为0

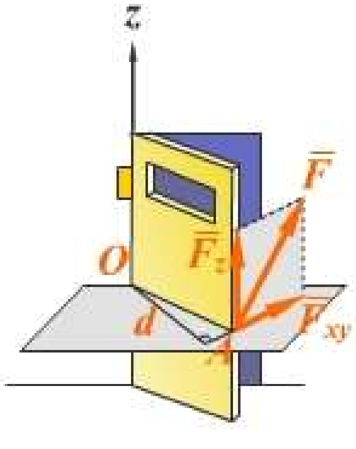
力对轴的力矩为0条件：
1. 力与轴相交（h=0）；
2. 力与轴平行（F_{xy}=0）

力对轴的矩是力使刚体绕该轴转动效果的度量，是一个代数量，其绝对值等于该力在垂直于该轴的平面上的投影对于这个平面与该轴的交点的矩大小。

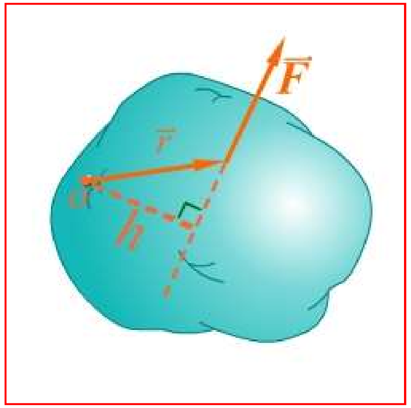


$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

二. 力对轴的矩



$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$$



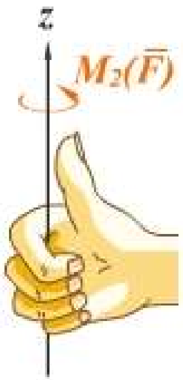
空间力对轴的矩是一个代数量，其正负规定：

1. 右手法则, 与坐标轴同向（大拇指方向）为正，反向为负

2. 从z轴正向朝负向看，逆时针为正，顺时针为负

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

右手法则:右手四个手指弯曲方向从$\boldsymbol{r}$指向$\boldsymbol{F}$（或者想象$\boldsymbol{F}$产生的转动方向），大拇指方向为力矩$\boldsymbol{M}$的正方向

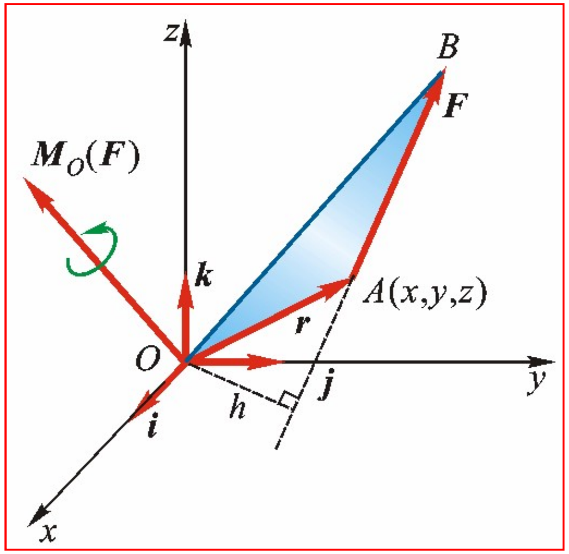


三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

空间力对点的矩：矩心到该力作用点的矢径与该力的矢量积
（向量, 方向由右手法则判断）

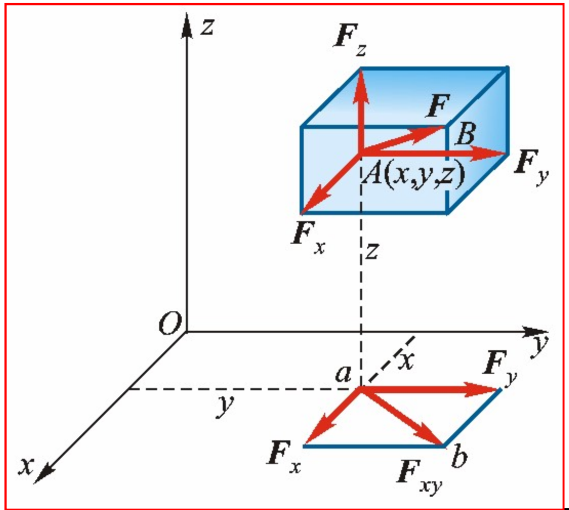
$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\times(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\vec{i}+(zF_x-xF_z)\vec{j}+(xF_y-yF_x)\vec{k}$$



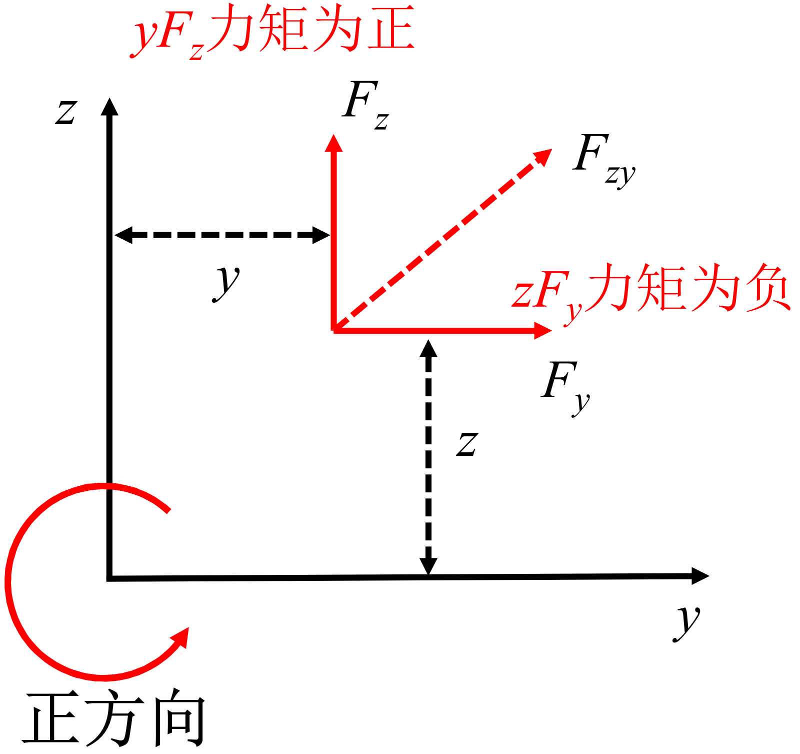
空间力对轴的矩：将空间力投影到与轴垂直平面，平面力对与轴相交的点矩。
（标量, 正负由轴的正向决定）

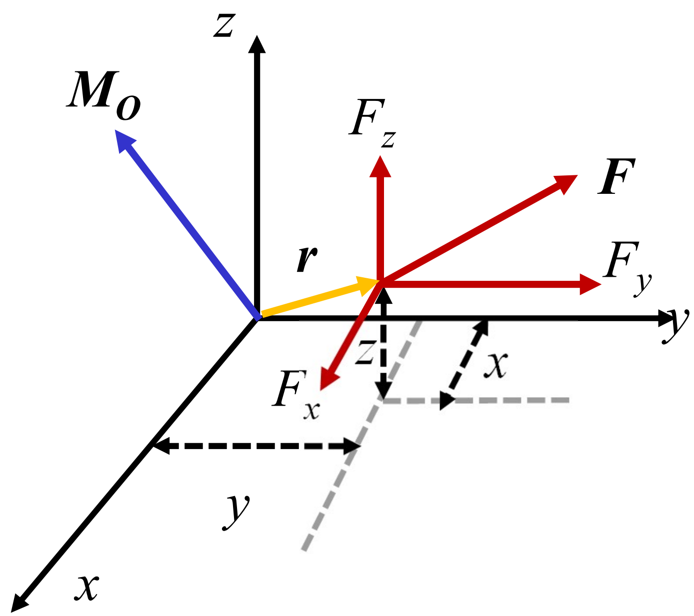
$$M_x(\vec{F}),M_y(\vec{F}),M_z(\vec{F})$$



三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$\boldsymbol{F}$对$\boldsymbol{x}$轴的矩：$M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}_y) + M_x(\vec{F}_z)$

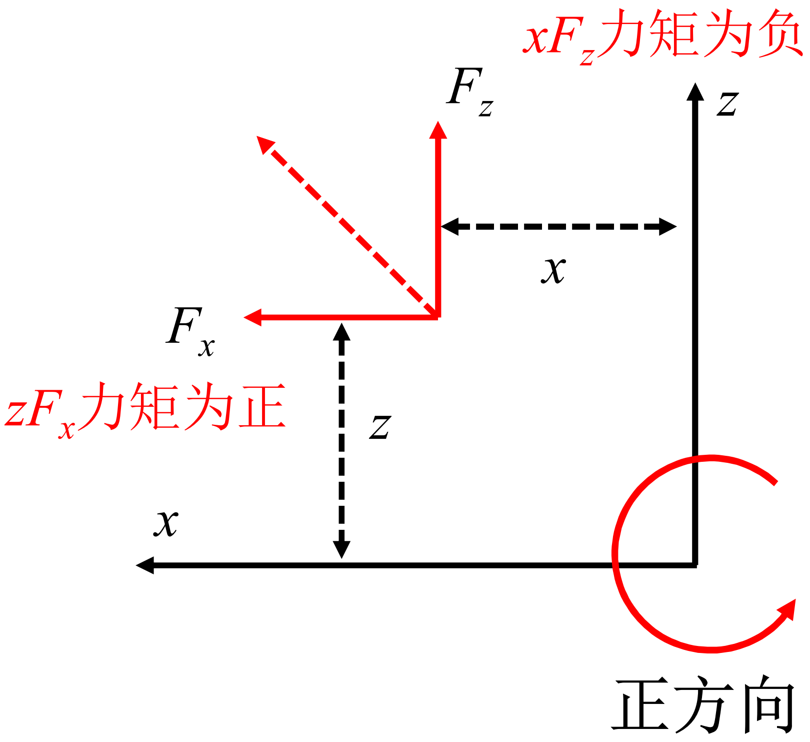




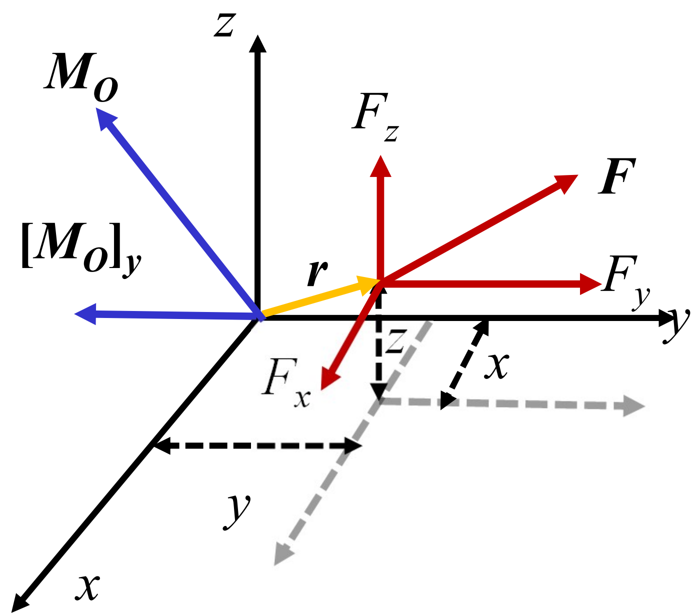
$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y$$

三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

***F*对*y*轴的矩：** $M_y(\vec{F}) = M_y(\vec{F}_x) + M_y(\vec{F}_z)$

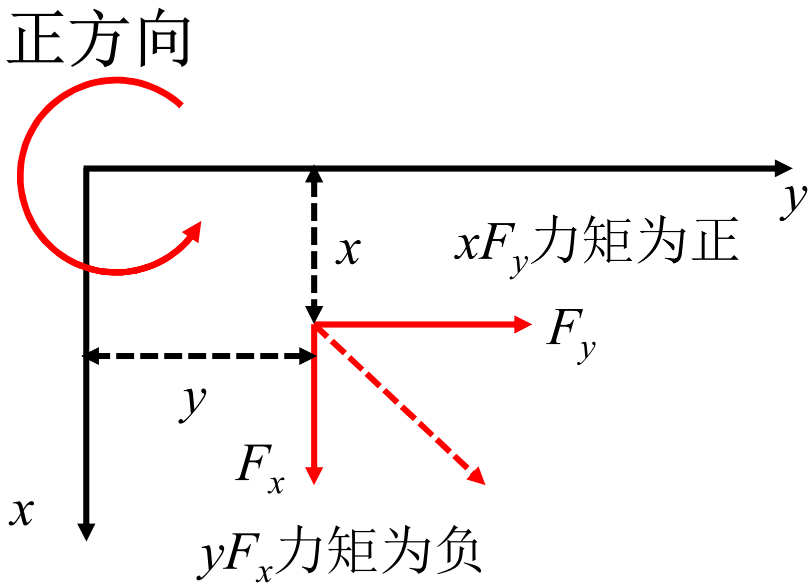


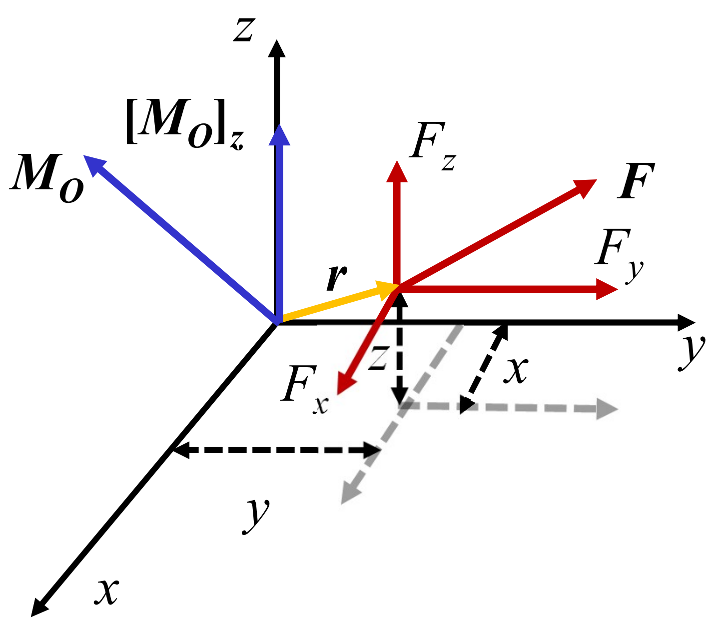
$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z$$



三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

F对z轴的矩：$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_x) + M_z(\vec{F}_y)$





$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

三. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

空间力对轴的矩

$$M_x(\vec{F}) = F_z \cdot y - F_y \cdot z$$

$$M_y(\vec{F}) = F_x \cdot z - F_z \cdot x$$

$$M_z(\vec{F}) = F_y \cdot x - F_x \cdot y$$

空间力对点的矩

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

$$= \left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x \vec{i} + \left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y \vec{j} + \left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z \vec{k}$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y = M_x(\vec{F})$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z = M_y(\vec{F})$$

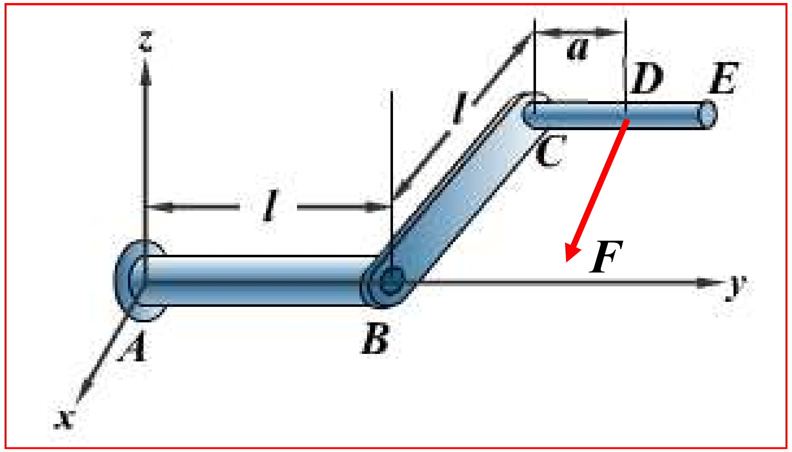
$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_x = M_z(\vec{F})$$

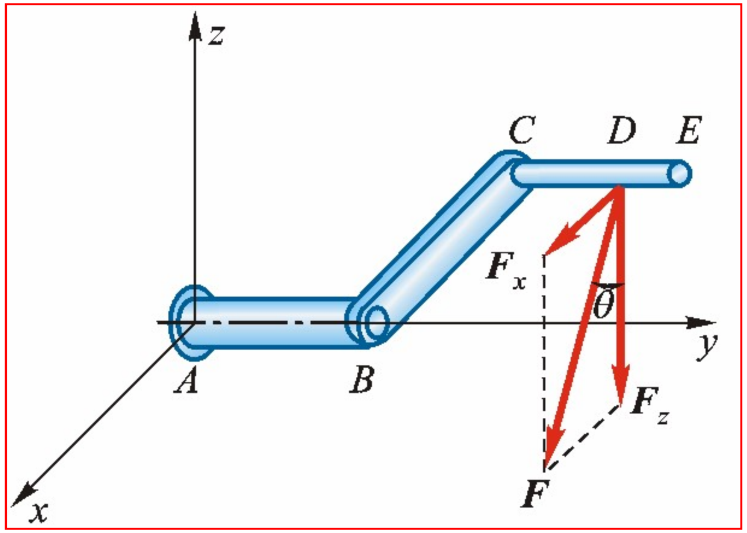
空间力对点的力矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于空间力对该轴的矩。

例3-4

已知：已知曲柄在*xy*平面上

求：$M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$





矢径 $\boldsymbol{r}=(-l, l+a, 0)$ (曲柄在*xy*平面内）

力 $\boldsymbol{F}=(F\sin\theta, 0, -F\cos\theta)$

力$\boldsymbol{F}$对A点的力矩$\boldsymbol{M_O(F)}$

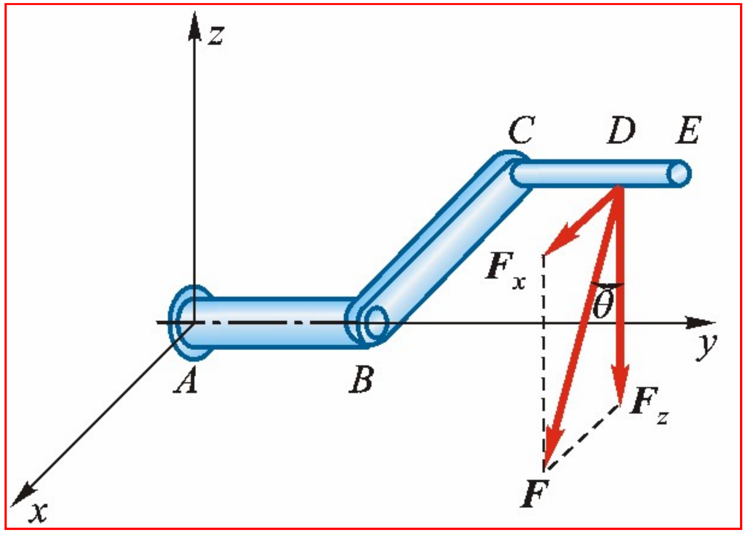
$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -l & l+a & 0\\ F\sin\theta & 0 & -F\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=(yF_z-zF_y)\vec{i}+(zF_x-xF_z)\vec{j}+(xF_y-yF_x)\vec{k}$$

$$=\underbrace{-F(l+a)\cos\theta}_{M_x(\vec{F})}\vec{i}\underbrace{-Fl\cos\theta}_{M_y(\vec{F})}\vec{j}\underbrace{-F(l+a)\sin\theta}_{M_z(\vec{F})}\vec{k}$$

例3-4

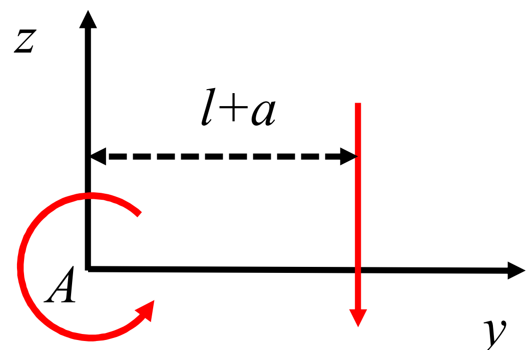


已知： F, l, a, θ

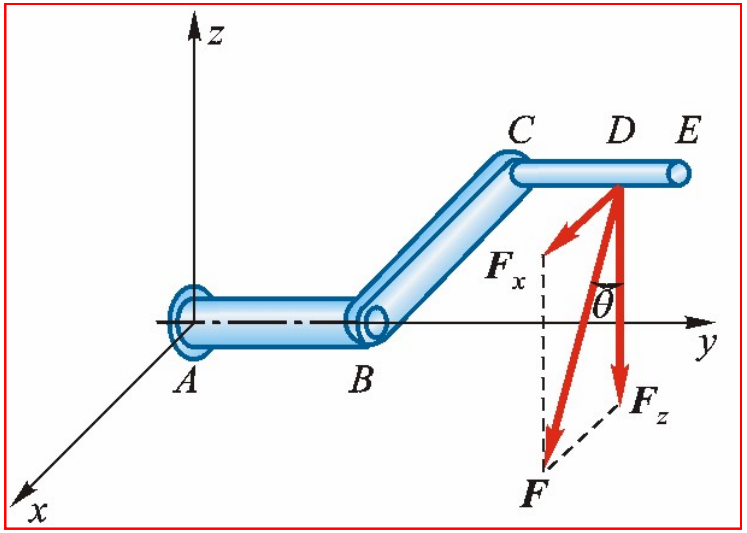
求：$M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$

解：把力 $\vec{F}$ 分解如图

$$M_x(\vec{F}) = -F(l+a)\cos\theta$$



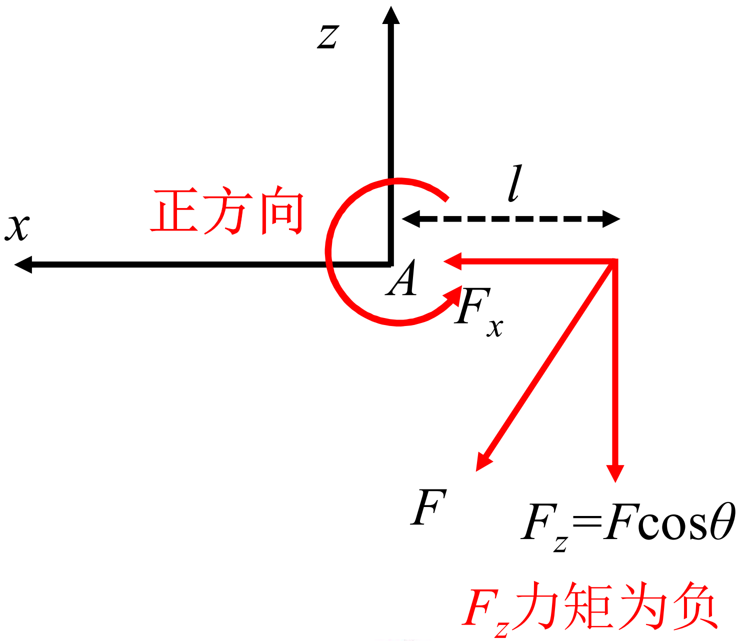
例3-4



已知： F, l, a, θ

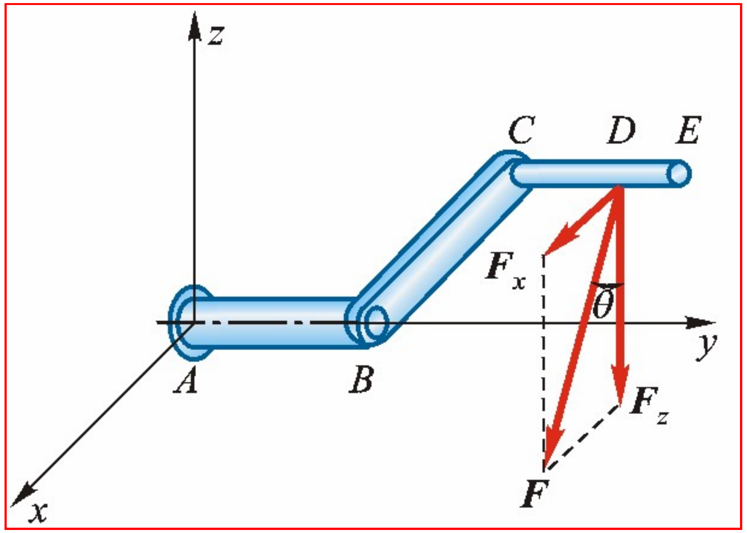
求： $M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$

解：把力 $\vec{F}$ 分解如图



$$M_y(\vec{F}) = -Fl\cos\theta$$

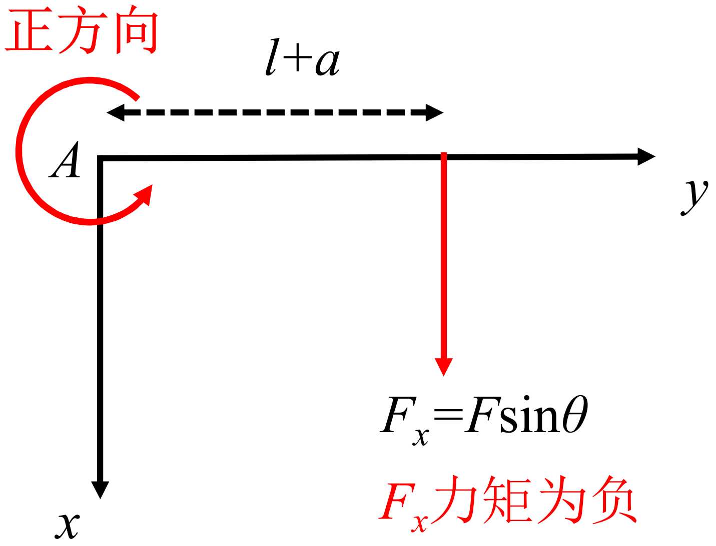
例3-4



已知： F, l, a, θ

求：$M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$

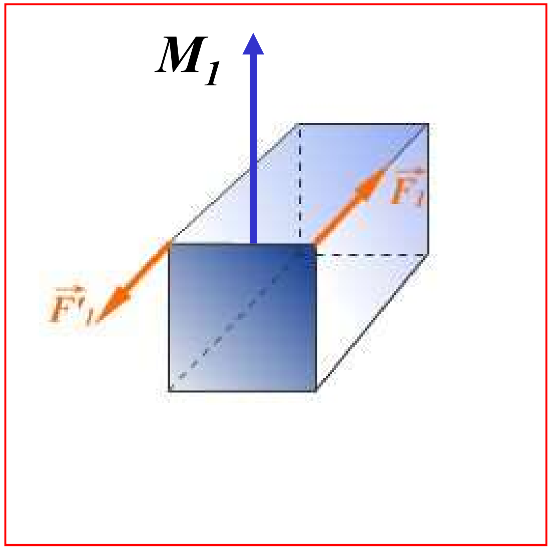
解： 把力 $\vec{F}$ 分解如图

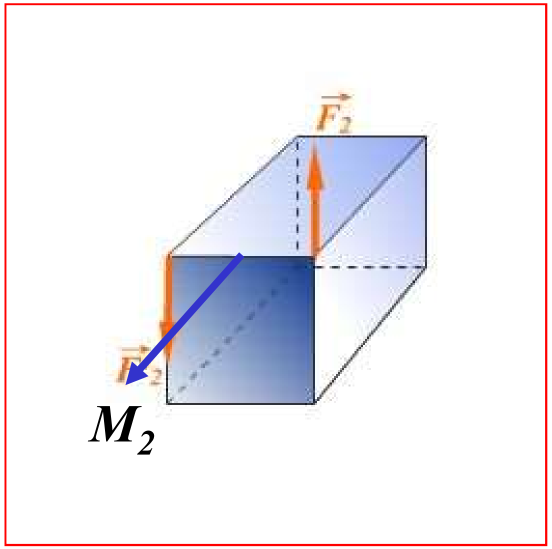


$$M_z(F) = -F(l+a)\sin\theta$$

一. 力偶矩以矢量表示——力偶矩矢

$$F_1 = F_2 = F_1' = F_2'$$





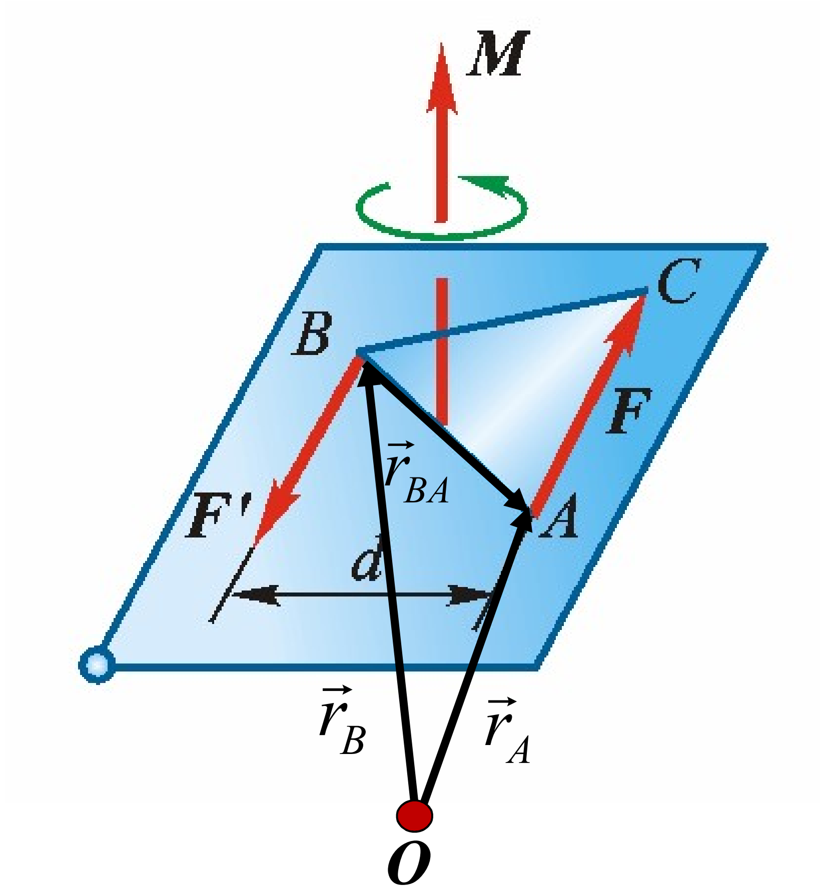
空间力偶的三要素

（1） 大小：力与力偶臂的乘积；

（2） 转向：转动方向；

（3） 作用面：力偶作用的平面。

空间力偶***F***与***F’***对空间任意点***O***的力偶矩



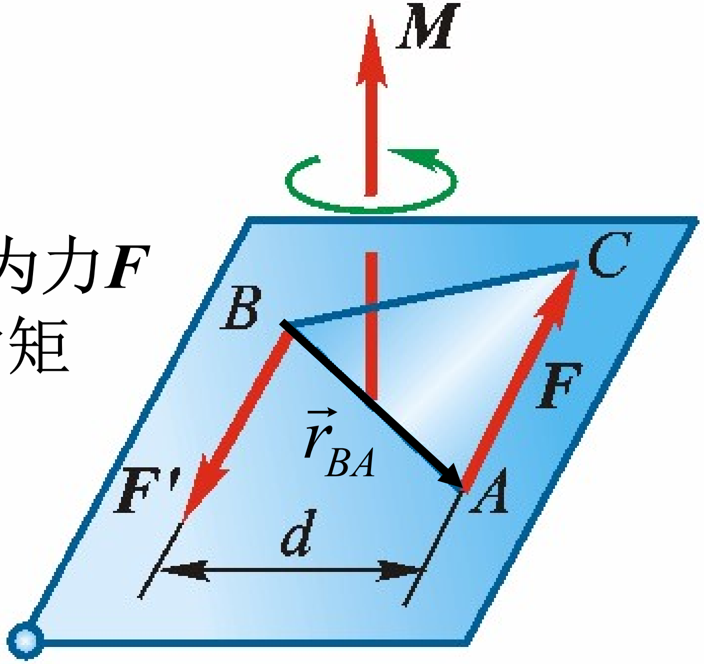
$$\vec{M}_O\left(\vec{F},\vec{F}'\right)=\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)+\vec{M}_O\left(\vec{F}'\right)$$

$$=\vec{r}_A\times\vec{F}+\vec{r}_B\times\vec{F}'$$

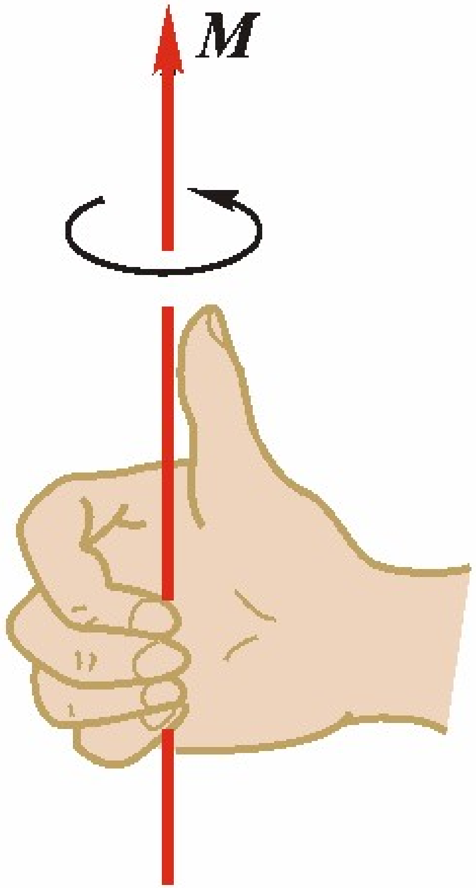
$$=\vec{r}_A\times\vec{F}-\vec{r}_B\times\vec{F}$$

$$=\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B\right)\times\vec{F}$$

$$=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}=\vec{M}$$



可以理解为力$\boldsymbol{F}$对点B的力矩



$$\vec{M}=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}$$

力偶矩：$\boldsymbol{r}_{BA}$为两个力的作用点的矢径
-空间力偶对空间任意点的力偶矩矢与矩心位置**O**无关
（空间力对点的矩与矩心有关！）

空间力偶可以平移到与其作用面平行的任意平面上而不改变力偶对刚体的作用效果（矢量沿作用线）

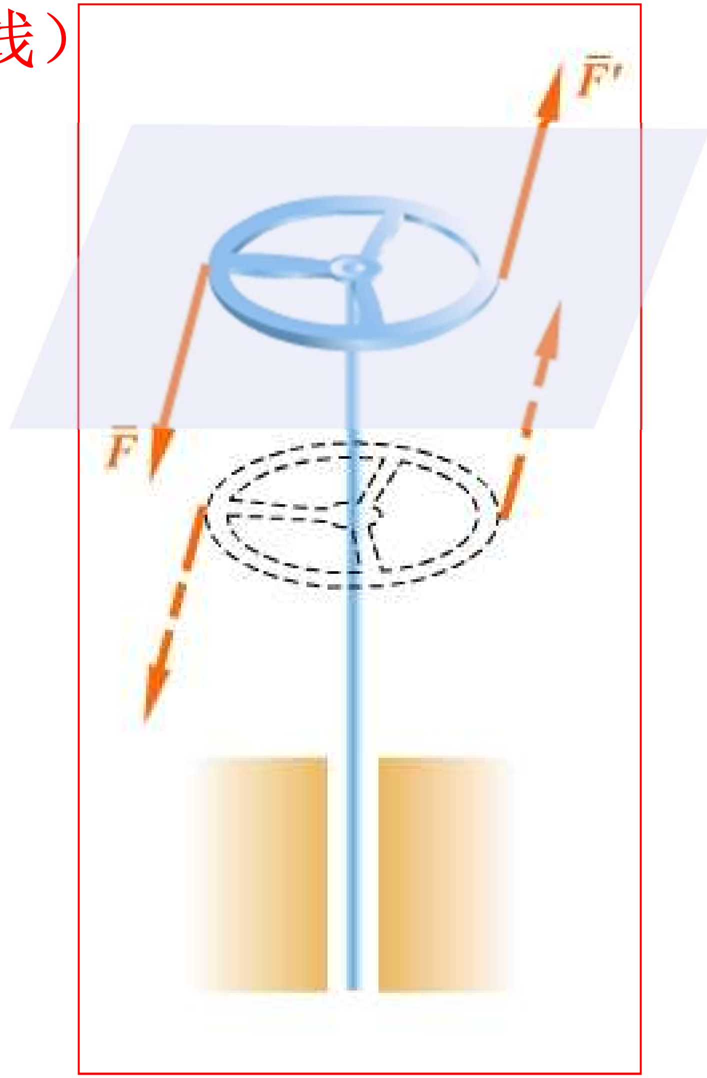
只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意移转，且可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变

（平面力偶矩）

力偶矩矢是矢量

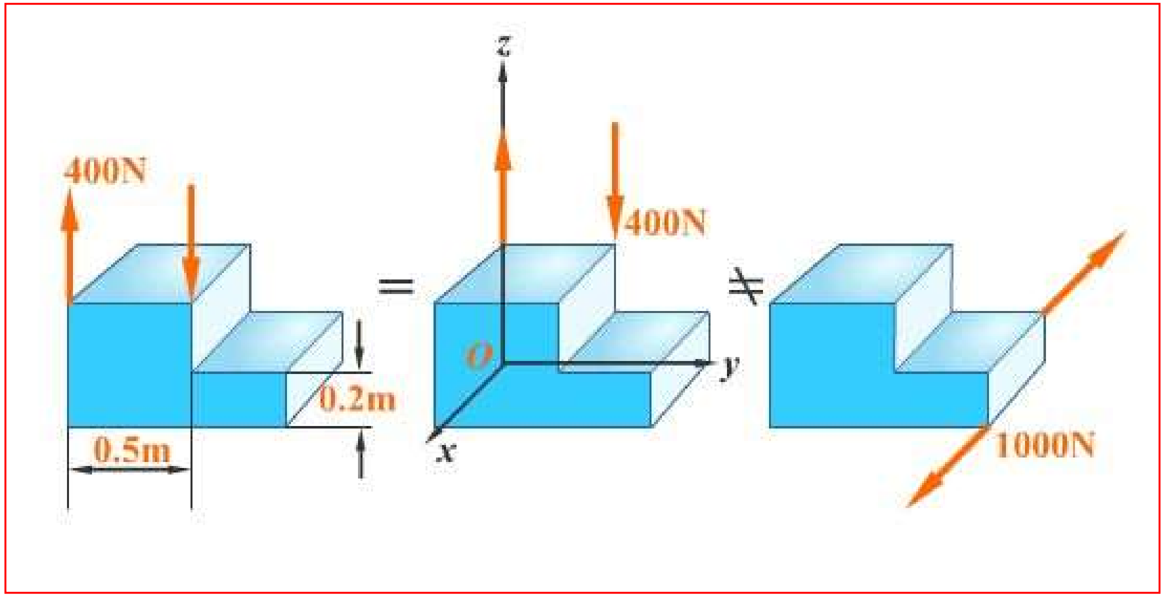
（大小、方向、作用面）

只要保持力偶矩矢大小与方向不变，可以在同一个刚体内自由移动



二. 力偶的等效定理

实例



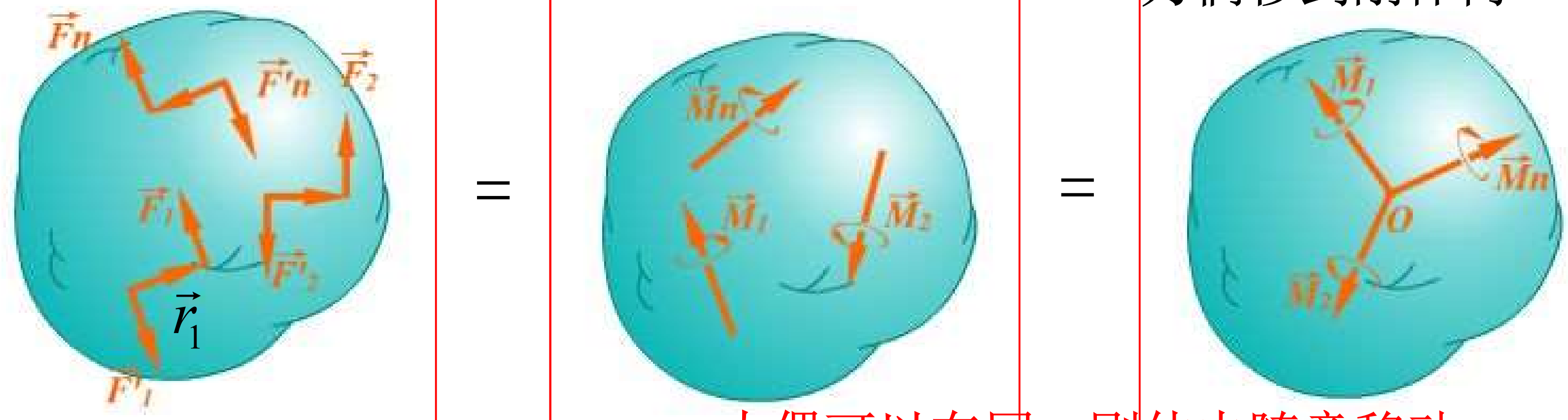
力偶矩大小：
***Fh*=400*0.5 Nm**
=1000*0.2 Nm

空间力偶的等效定理：作用在同一刚体上的两个力偶，如果其力偶矩相等，则它们彼此等效。

（与平面力偶相比，空间力偶需要考虑方向）

三．力偶系的合成与平衡条件

力偶移到刚体内一点



力偶可以在同一刚体内随意移动

$$\vec{M}_1=\vec{r}_1\times\vec{F}_1,\vec{M}_2=\vec{r}_2\times\vec{F}_2,\ldots\ldots,\vec{M}_n=\vec{r}_n\times\vec{F}_n$$

$$\boxed{\vec{M}=\sum\vec{M}_i}$$

$\vec{M}$为合力偶矩矢，等于各分力偶矩矢的矢量和.

$$M_x = \sum M_x \,, M_y = \sum M_y \,, M_z = \sum M_z$$

合力偶矩矢的大小和方向余弦

$$M = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum M_x}{M} \qquad \cos\beta = \frac{\sum M_y}{M} \qquad \cos\gamma = \frac{\sum M_z}{M}$$

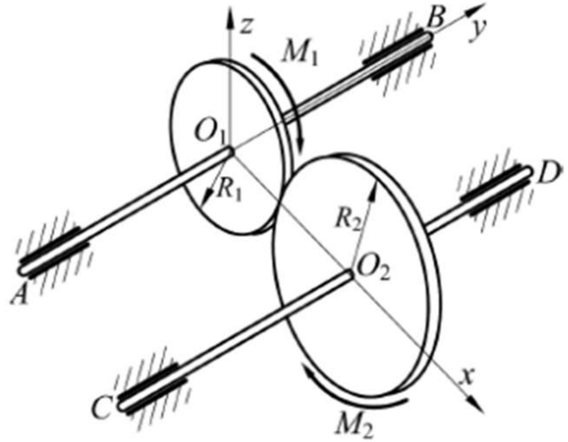
空间力偶系平衡的充分必要条件是 :合力偶矩矢等于零，即

$$\vec{M} = 0$$

$$\boxed{\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0}$$

--称为空间力偶系的平衡方程.

两齿轮半径$R_2=2R_1$，分别受到力偶矩M_1与M_2作用，达到平衡状态，下面说法正确的是



A $M_1=M_2$

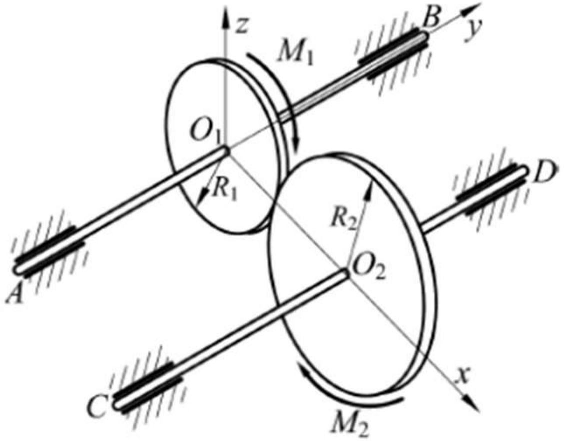
B 轴AB与CD上约束力大小相等

C 可以把力偶矩M_1从齿轮O_1移动到齿轮O_2

D 以上说法都不正确

两齿轮半径$R_2=2R_1$，分别受到力偶矩M_1与M_2作用，达到平衡状态，下面说法正确的是

两个齿轮互相啮合，两齿轮之间的接触力为作用力与反作用力，大小相等，方向相反。因此轴AB与CD上的约束力与接触力形成力偶，因此两个轴上约束力大小相等。



每个轴上的约束力与齿轮间的接触力形成力偶，分别与齿轮O_1与齿轮O_2上的力偶矩M_1与M_2平衡。因为$R_2=2R_1$，因此力偶矩$M_2=2M_1$

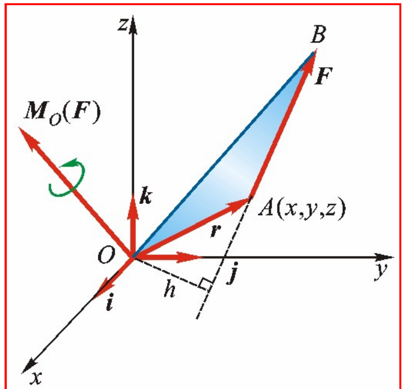
力偶矩在刚体内可以随意移动，不改变对刚体的作用效果，是自由矢量。但是这仅限于在同一个刚体内。齿轮O_1与齿轮O_2属于两个刚体，并不满足力偶矩随意移动的条件。

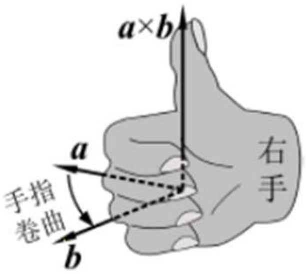
上节课内容回顾

1. 空间汇交力系:合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

$$\boxed{\sum F_x = 0} \quad \boxed{\sum F_y = 0} \quad \boxed{\sum F_z = 0}$$

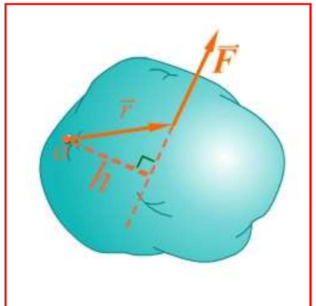
2. 空间力对点的矩





$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}}$$

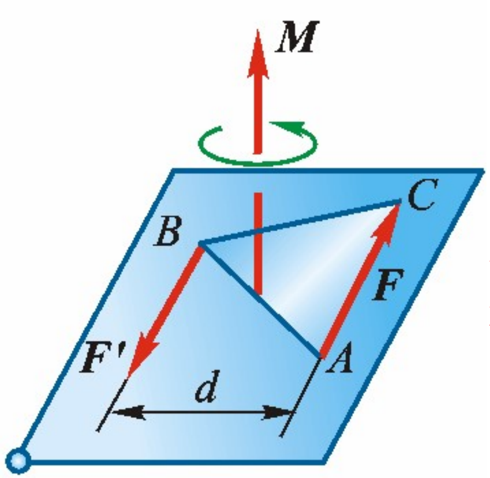
3. 空间力对轴的矩



标量, 正负由轴的正向决定

$$\boxed{M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h}$$

4. 空间力偶（系）



$$\boxed{\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}}$$

一对等值、反向、不共线的平行空间力**(*F*, *F'*)**

作用在同一刚体上的两个力偶，如果其力偶矩相等(大小、方向），则它们彼此等效

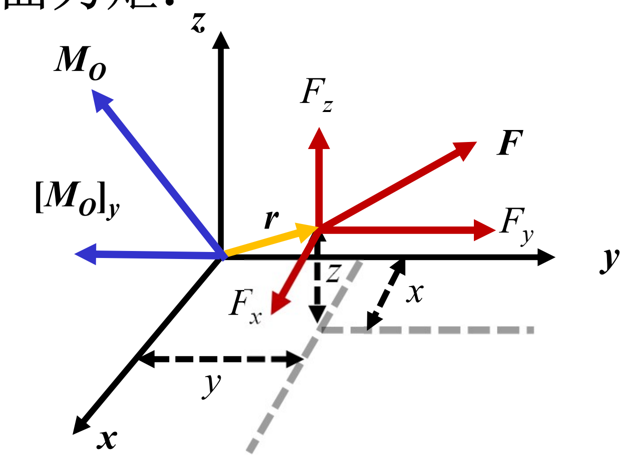
只要保持力偶矩矢大小与方向不变，可以在同一个刚体内自由移动

5. 如何计算空间力对轴的矩

对点的力矩叉乘： $\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$

$$=\underbrace{(yF_z-zF_y)}_{[M_O]_x}\vec{i}+\underbrace{(zF_x-xF_z)}_{[M_O]_y}\vec{j}+\underbrace{(xF_y-yF_x)}_{[M_O]_z}\vec{k}$$

平面力矩：



F_x—通过力臂z对y轴产生力矩zF_x

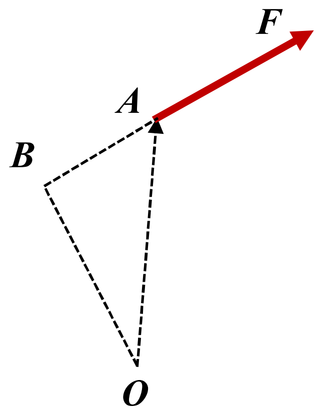
F_y—不对y轴产生力矩（平行）

F_z—通过力臂x对y轴产生力矩$-xF_z$

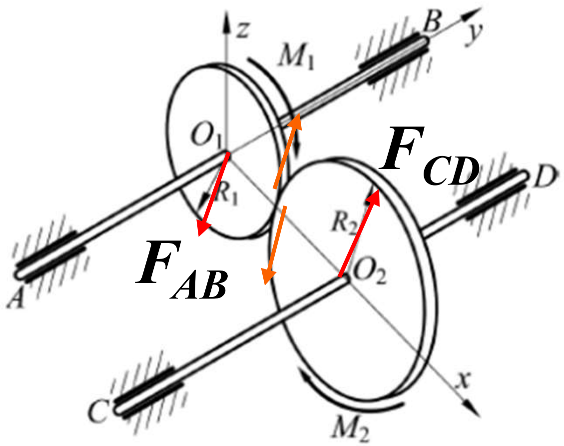
证明：空间力沿作用线在刚体内移动，不改变力对点的矩。

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}_{OB}\times\vec{F}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}_{OA}\times\vec{F}$$
$$=\left(\vec{r}_{OB}+\vec{r}_{AB}\right)\times\vec{F}$$
$$=\vec{r}_{OB}\times\vec{F}+\vec{r}_{AB}\times\vec{F}$$
$$=\vec{r}_{OB}\times\vec{F}$$



两齿轮半径$R_2=2R_1$，受到力偶矩M_1与M_2作用达到平衡状态。



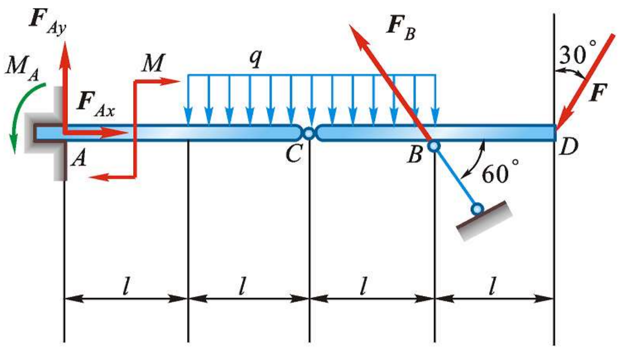
思路1：把两齿轮作为整体，只受到力偶矩M_1与M_2平衡，因此$M_1=M_2$
错误：没有分析AB与CD提供的约束力

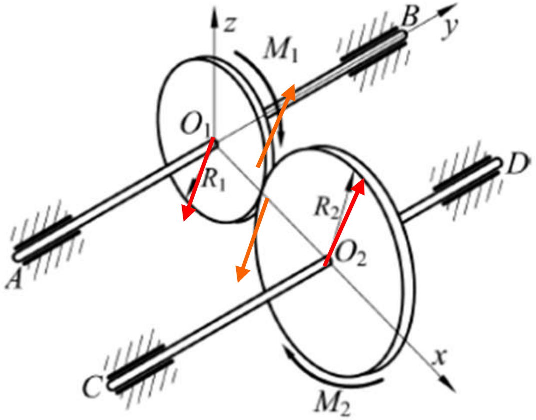
思路2：把两齿轮作为整体，受到力偶矩M_1与M_2，以及AB与CD提供的约束力F_{AB}与F_{CD}，组成的空间力偶系平衡。
正确，但是平衡方程不能提供M_1与M_2关系

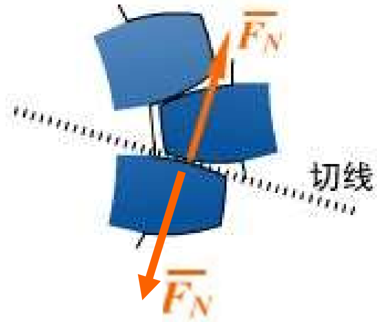
分析单个齿轮，齿轮间作用力与反作用力相等。
对齿轮O_1，受到力偶矩M_1与力偶(F_{AB}, F)作用平衡，$M_1=FR_1$
对齿轮O_2，受到力偶矩M_2与力偶(F_{CD}, F)作用平衡，$M_2=FR_2$

通过分别对两个刚体进行平衡分析，$M_1=0.5M_2$

思考题：为什么不把力偶M_1直接移动到齿轮O_2进行受力分析？







两个齿轮互相啮合，两齿轮之间的接触力为作用力与反作用力，大小相等，方向相反。因此两个齿轮间传递了约束力F_N。

牛顿第三定律（静力学第五公理）保证了两个刚体之间可以传递力，但是力偶作为静力学另一个基本元素（一对特殊的力），无法在刚体间直接传递。

力偶在同一个刚体内可以随意移动，不改变对刚体的作用效果。齿轮O_1与齿轮O_2属于两个刚体，并不满足力偶矩随意移动的条件。对局部刚体进行受力分析时候，必须在对同一个刚体内的力偶与受力进行平衡分析。

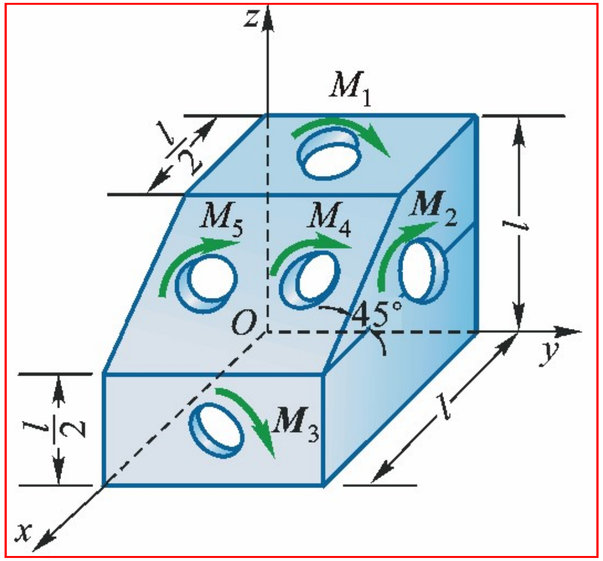
例3-5（空间力偶系平衡）

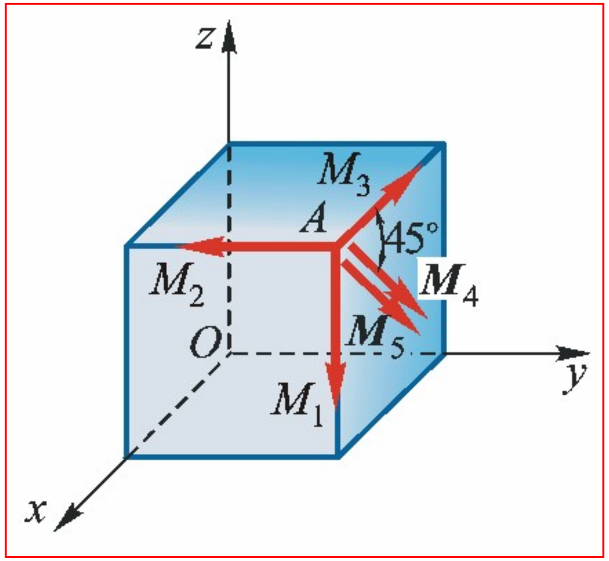
已知：在工件四个面上同时钻**5**个孔，每个孔所受切削力偶矩均为**80N·m.**

求：工件所受合力偶矩在x, y, z轴上的投影.

解：

把力偶用力偶矩矢表示，平行移到点A.





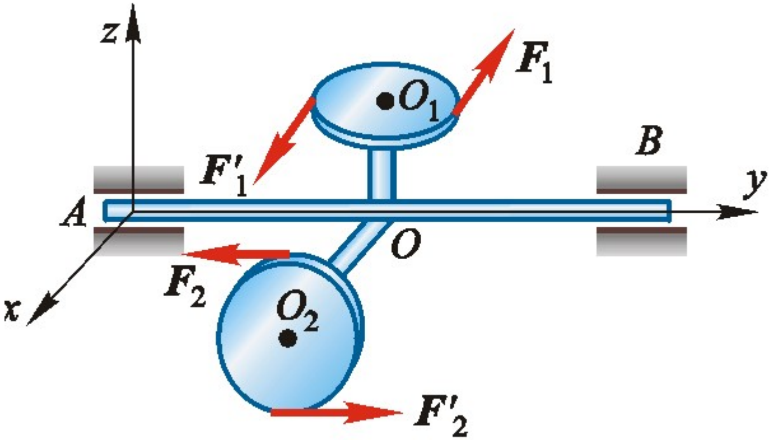
$$M_x = \sum M_{ix} = -M_3 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = \sum M_{iy} = -M_2 = -80\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = \sum M_{iz} = -M_1 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1\text{N}\cdot\text{m}$$

例3-6（空间力组成空间力偶系）

已知：两圆盘半径均为200mm，AB =800mm，圆盘面O_1垂直于z轴，圆盘面O_2垂直于x轴，两盘面上作用有力偶，F_1=3N，F_2=5N，构件自重不计.

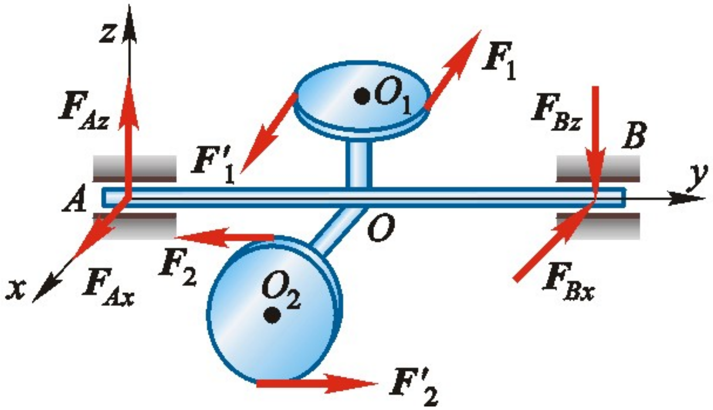


求:轴承***A***,***B***处的约束力.

解：取整体，受力图如图所示.

$$\sum M_x = 0 \quad F_2 \cdot 400 - F_{Bz} \cdot 800 = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad F_1 \cdot 400 + F_{Bx} \cdot 800 = 0$$



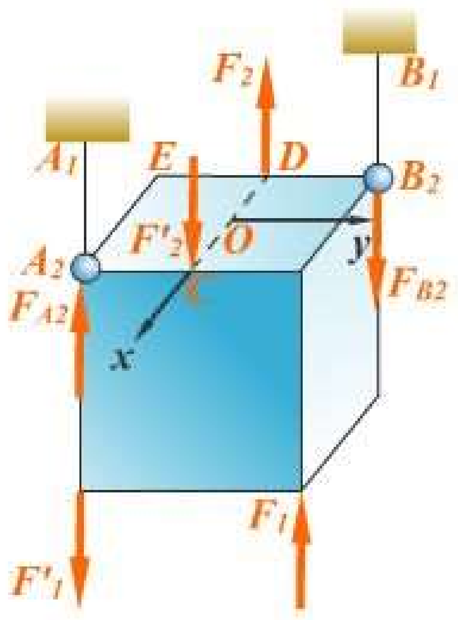
$$F_{Ax} = F_{Bx} = -1.5\text{N}$$
$$F_{Az} = F_{Bz} = 2.5\text{N}$$

例3-7（空间力偶系平衡）

已知：正方体上作用两个力偶 $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2')$,

$CD // A_2E$,不计正方体和直杆自重.

求：正方体平衡时，力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ 的关系和两根杆受力.



(a)

可以换成绳索吗？

解：两杆为二力杆，取正方体，画受力图建坐标系如图b

以矢量表示力偶，如图c

$$\sum M_x = 0 \quad M_1 - M_3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad M_2 - M_3 \sin 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = M_2$$

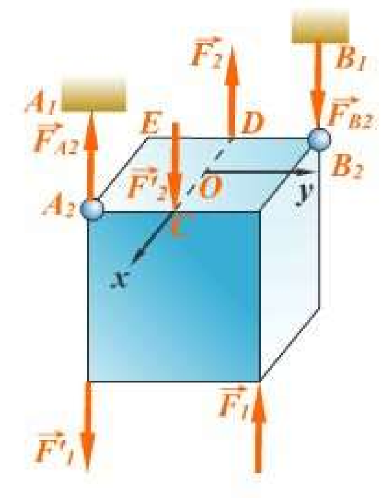
设正方体边长为a ,有

$$M_1 = F_1 \cdot a = M_2 = F_2 \cdot a$$

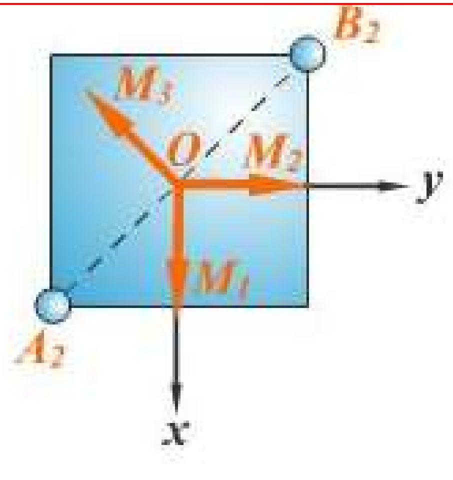
有 $F_1 = F_2$ $\quad M_3 = F_{A2} \cdot \sqrt{2}a$

$$\Rightarrow \quad F_{A2} = F_{B2} = F_1 = F_2$$

杆A_1A_2受拉，B_1B_2受压。

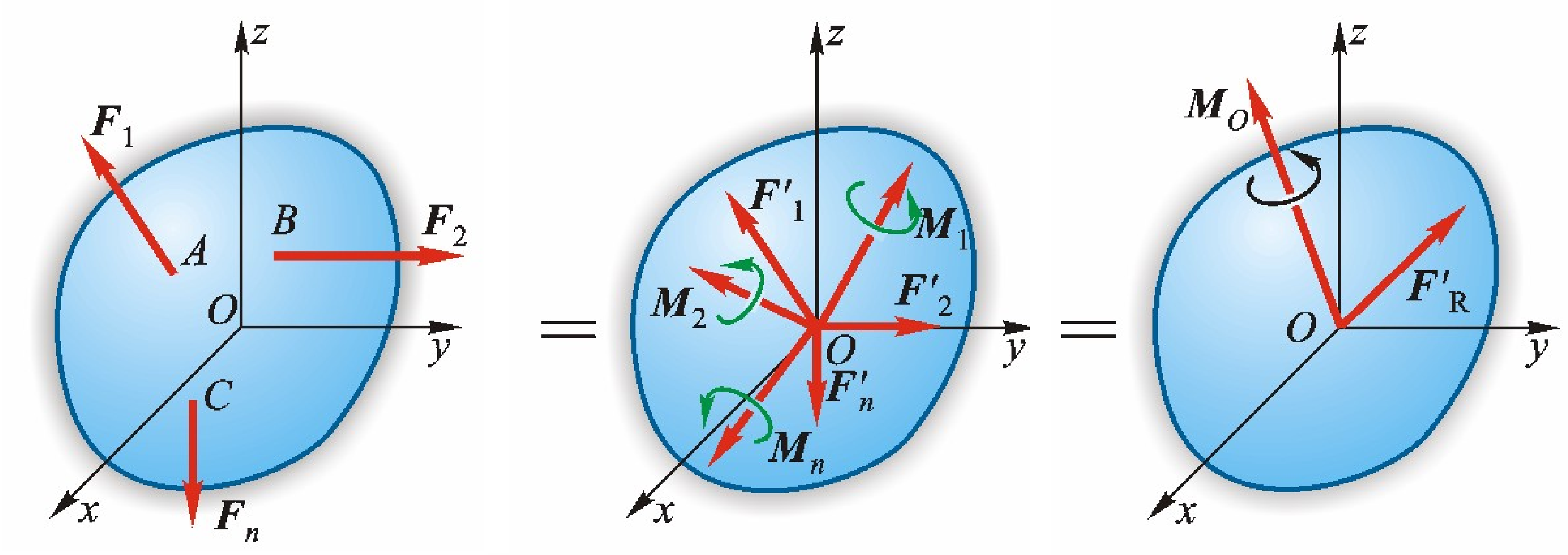


(b)



(c)

一. 空间任意力系向一点的简化



$$\vec{F}_i' = \vec{F}_i \qquad \vec{M}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

空间汇交与空间力偶系等效代替一空间任意力系.

空间汇交力系的合力

$$\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$ → 主矢

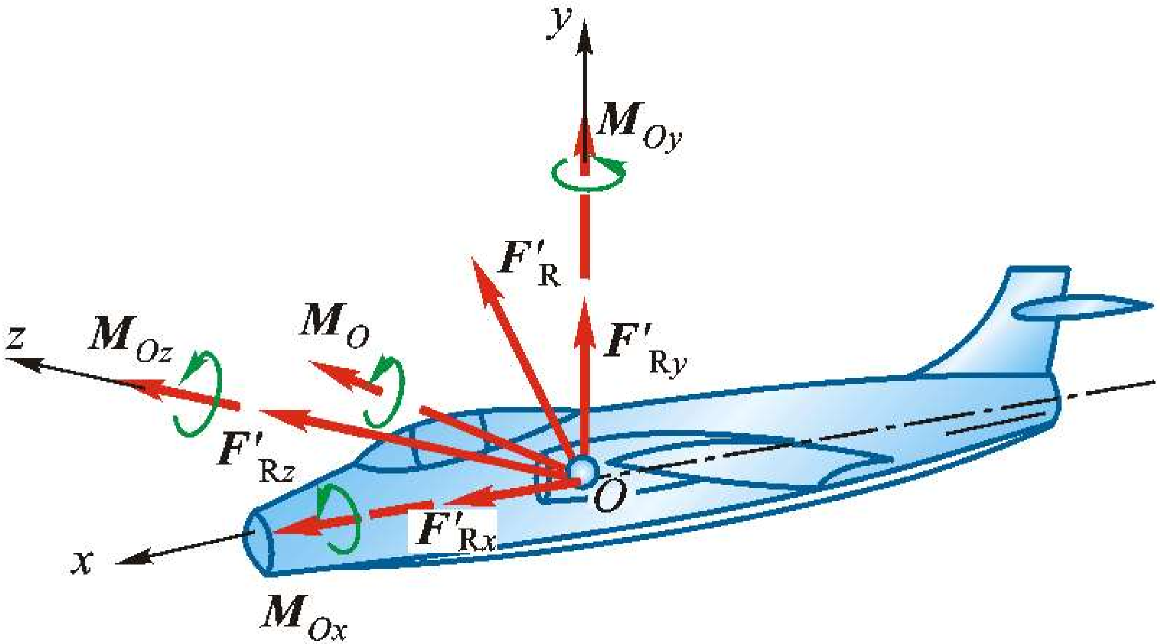
空间力偶系的合力偶矩

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$ → 主矩

由力对点的矩与力对轴的矩的关系，有

$$\vec{M}_O = \sum M_x(\vec{F})\vec{i} + \sum M_y(\vec{F})\vec{j} + \sum M_z(\vec{F})\vec{k}$$

§3–4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩



$\vec{F}'_{Rx}$	— 有效推进力	飞机向前飞行
$\vec{F}'_{Ry}$	— 有效升力	飞机上升
$\vec{F}'_{Rz}$	— 侧向力	飞机侧移
$\vec{M}_{Ox}$	— 滚转力矩	飞机绕**x**轴滚转
$\vec{M}_{Oy}$	— 偏航力矩	飞机转弯
$\vec{M}_{Oz}$	— 俯仰力矩	飞机仰头

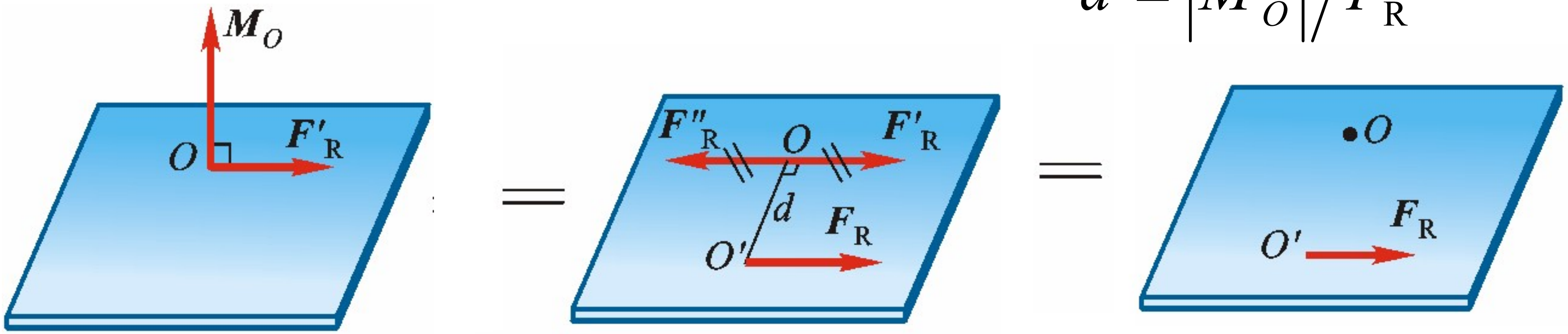
二．空间任意力系的简化结果分析（与平面区别？）

合力

$\vec{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0, \vec{M}_O = 0$ ⟶ 过简化中心合力

$\vec{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}'_{\mathrm{R}} \perp \vec{M}_O$ ⟶ 合力.合力作用线距简化中心为

$$d = \left|\vec{M}_O\right| / F'_{\mathrm{R}}$$



$$\vec{M}_O = \vec{d} \times \vec{F}_{\mathrm{R}} = \vec{M}_O(\vec{F}_{\mathrm{R}}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F})$$

合力矩定理：合力对某点(轴）之矩等于各分力对同一点（轴）之矩的矢量和.

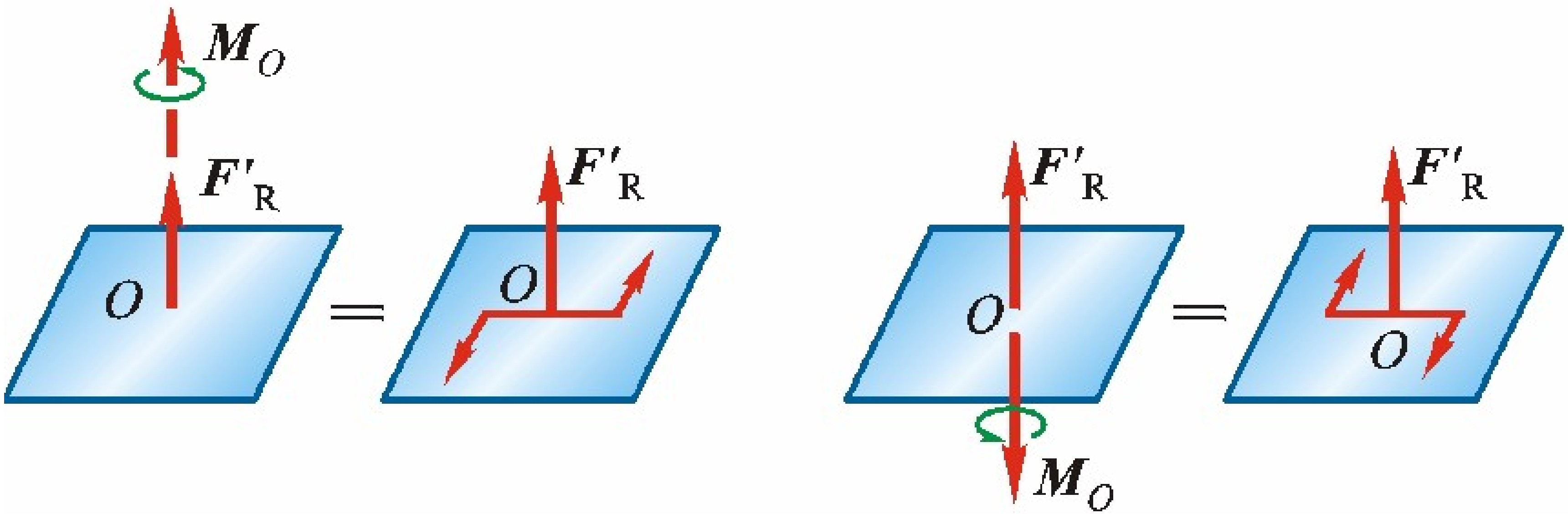
§3–4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩

合力偶

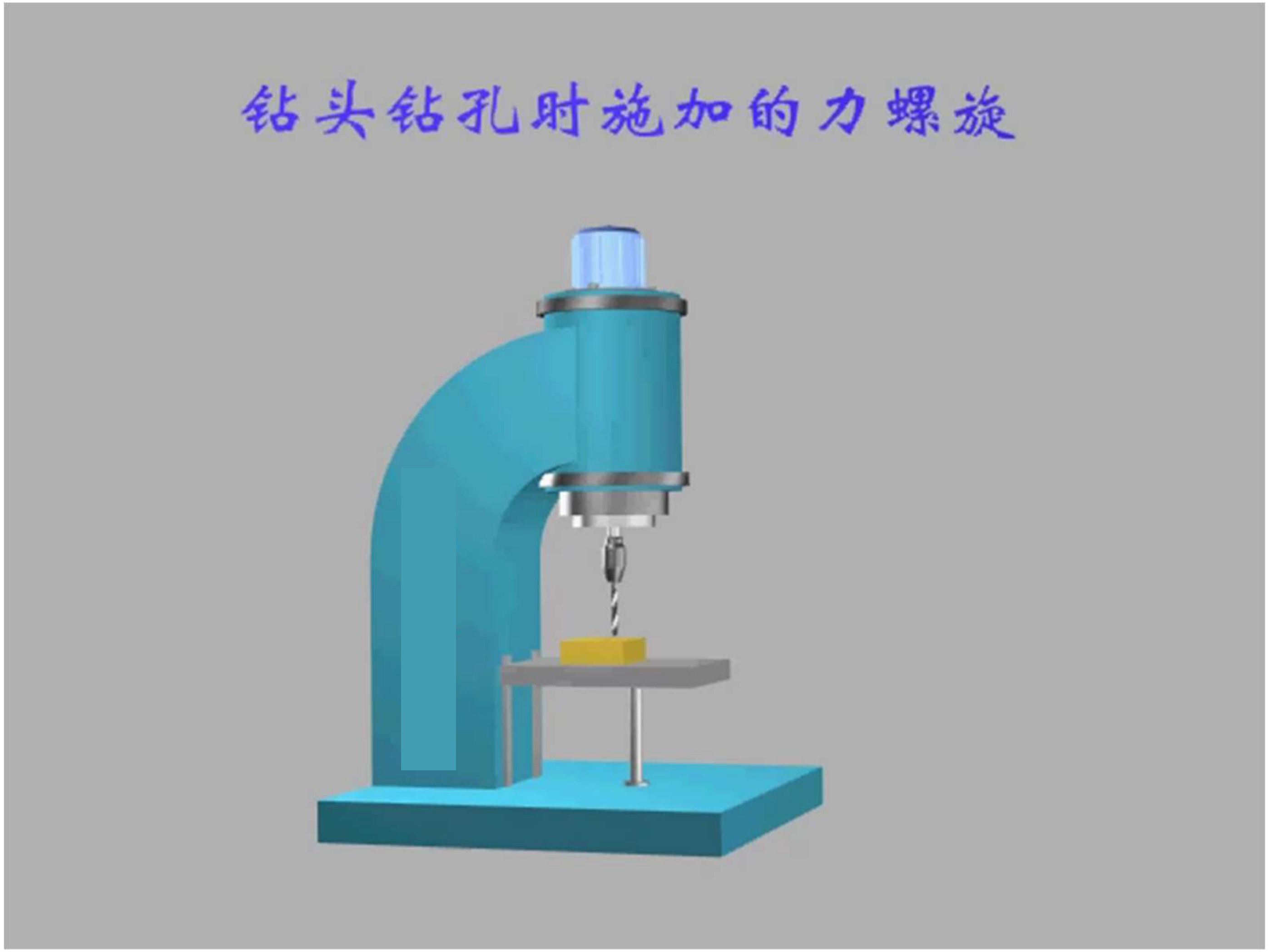
$\vec{F}_R' = 0, \vec{M}_O \neq 0$ ⟹ 一个合力偶，此时与简化中心无关。

力螺旋

$F_R' \neq 0, M_O \neq 0, F_R' // M_O$ ⟹ 中心轴过简化中心的力螺旋

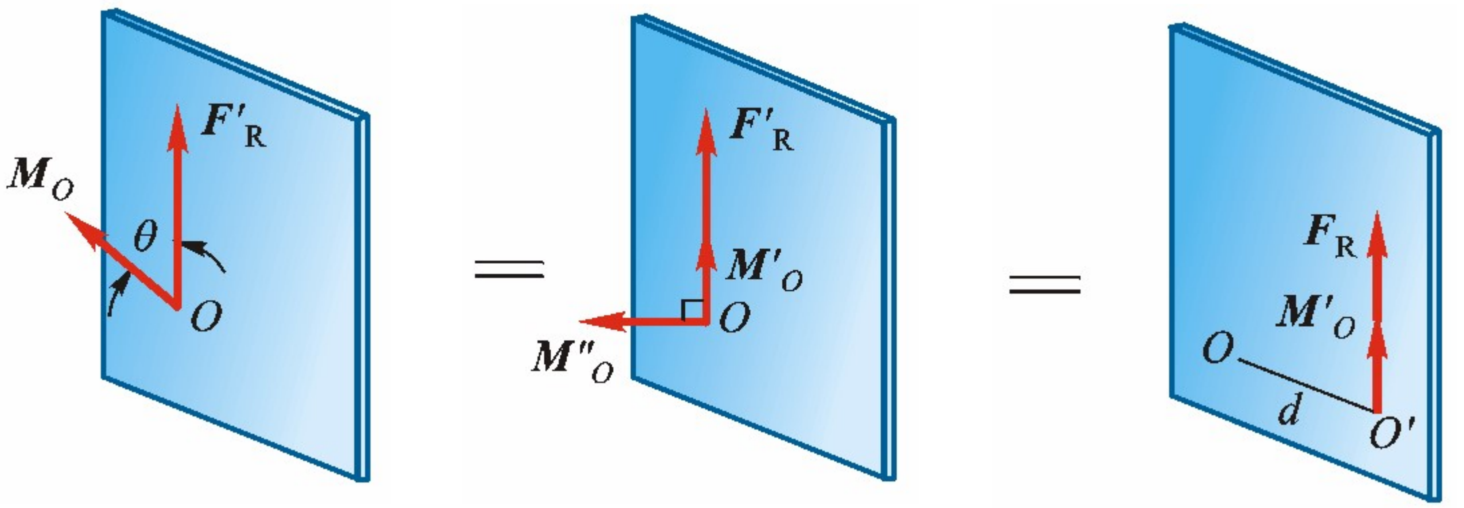


钻头钻孔时施加的力螺旋



$\vec{F}_{\mathrm{R}}' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_{\mathrm{R}}', \vec{M}_O$ 既不平行也不垂直

→ 力螺旋中心轴距简化中心为 $d = \dfrac{M_O \sin\theta}{F_{\mathrm{R}}'}$



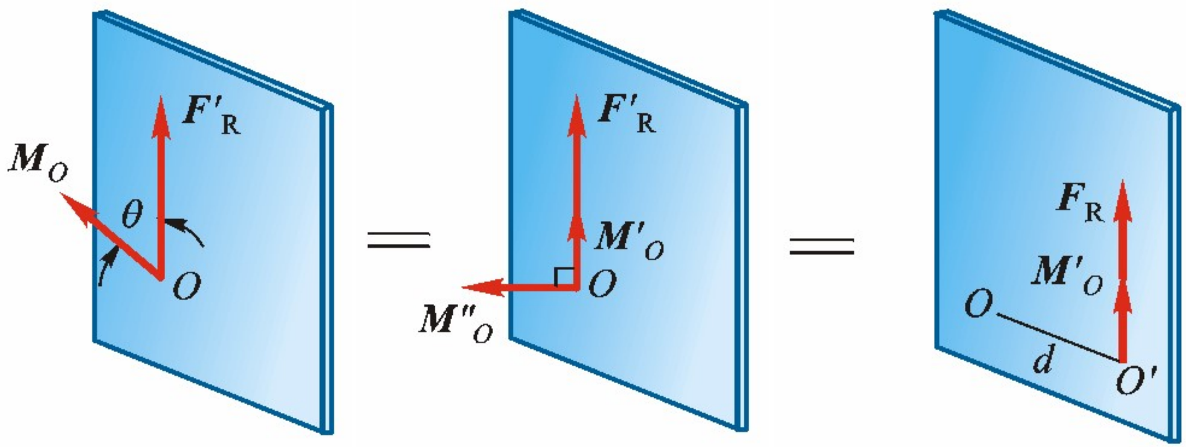
平衡

$\vec{F}_{\mathrm{R}}' = 0, \vec{M}_O = 0$ → 平衡

小结：空间任意力系的主矢和主矩

根据主矢与主矩是否为0，存在四种组合

主矢	主矩		最终简化结果	说明
$F'_R=0$	$M_O=0$		平衡	
	$M_O\neq 0$		力偶	此种情形的主矩与简化中心无关
$F'_R\neq 0$	$M_O=0$		集中力	集中力作用线过简化中心
	$M_O\neq 0$	$F'_R\perp M_O$	集中力	集中力作用线到简化中心的 $d=\lvert M_O/F'_R\rvert$
		$F'_R // M_O$	力螺旋	力螺旋的力过简化中心
		F'_R与M_O夹角θ	力螺旋	力螺旋的力到简化中心的距离 $d=\lvert M_O\sin\theta/F'_R\rvert$



作业

教材习题： 3-2，3-4， 3-7