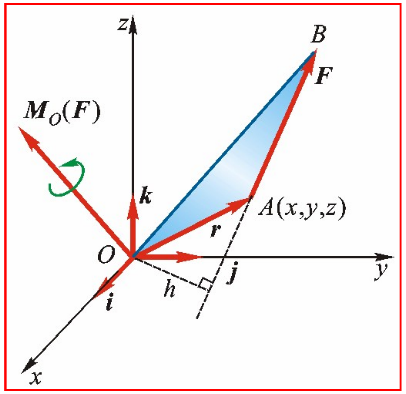
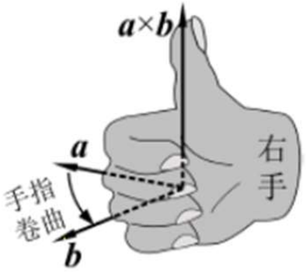
上节课内容回顾

1. 空间汇交力系:合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$

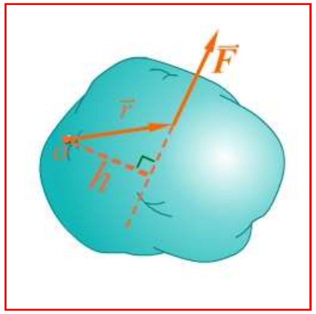
2. 空间力对点的矩





$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$

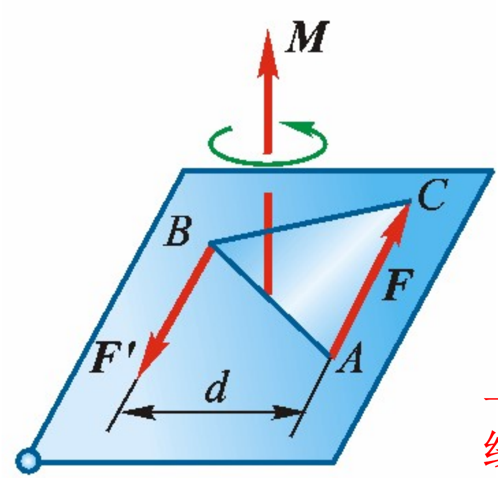
3. 空间力对轴的矩



标量,正负由轴的正向决定

$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$

4. 空间力偶（系）



$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$

$\vec{M} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}\,'$

一对等值、反向、不共线的平行空间力(***F***, ***F'***)

作用在同一刚体上的两个力偶，如果其力偶矩相等(大小、方向），则它们彼此等效

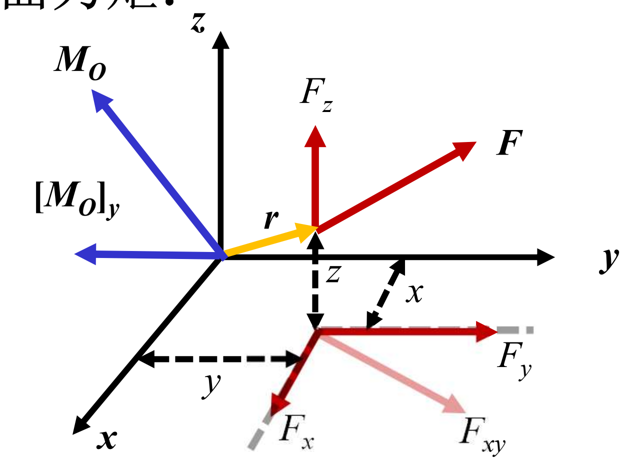
只要保持力偶矩矢大小与方向不变，可以在同一个刚体内自由移动

5. 如何计算空间力对轴的矩

对点的力矩叉乘： $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

$$= \underbrace{(yF_z - zF_y)}_{[M_O]_x}\vec{i} + \underbrace{(zF_x - xF_z)}_{[M_O]_y}\vec{j} + \underbrace{(xF_y - yF_x)}_{[M_O]_z}\vec{k}$$

平面力矩：



空间力F对y轴产生力矩：

F_x—通过力臂z对y轴产生力矩：zF_x

F_y—不对y轴产生力矩（平行）

F_z—通过力臂x对y轴产生力矩：$-xF_z$

证明：空间力沿作用线在刚体内移动，不改变力对点的矩。

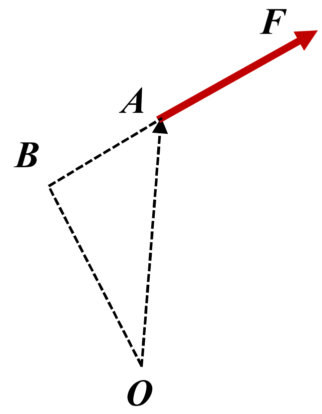
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

$$= \left(\vec{r}_{OB} + \vec{r}_{AB}\right) \times \vec{F}$$

$$= \vec{r}_{OB} \times \vec{F} + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

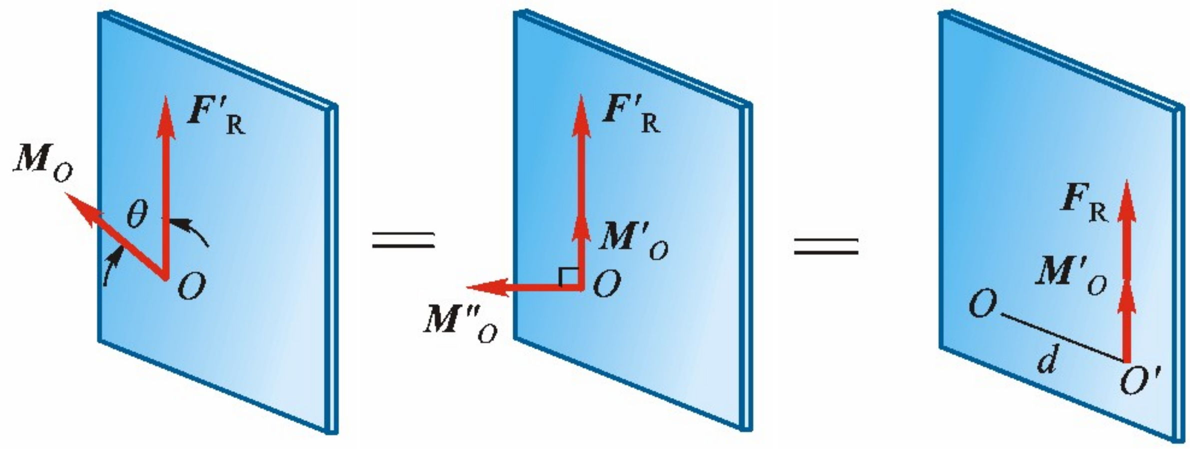
$$= \vec{r}_{OB} \times \vec{F}$$



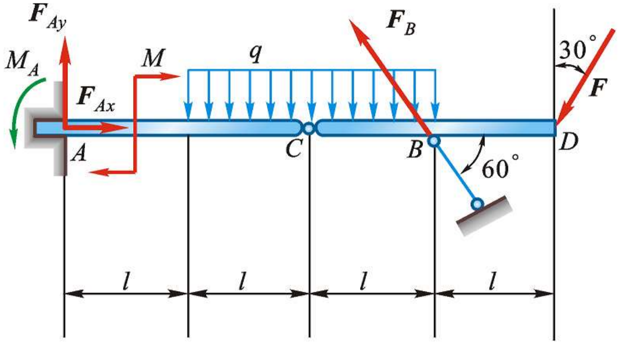
小结：空间任意力系的主矢和主矩

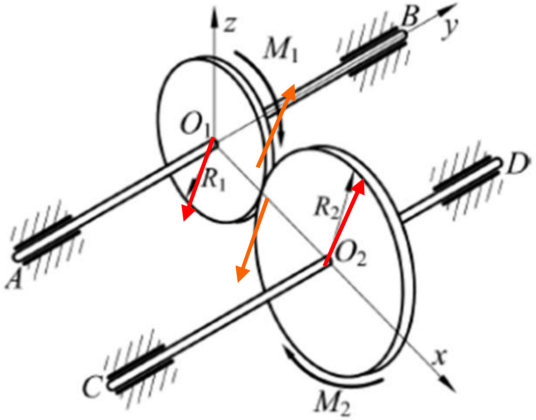
根据主矢与主矩是否为0，存在四种组合

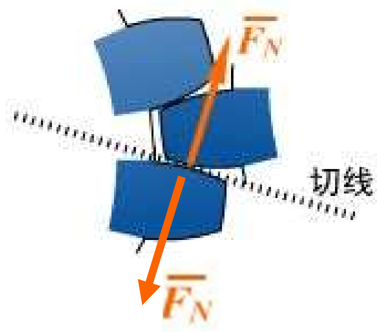
主矢	主　　矩		最终简化结果	说　　明
$F'_R=0$				
$F'_R\neq0$				



思考题：为什么不把力偶M_1直接移动到齿轮O_2进行受力分析？



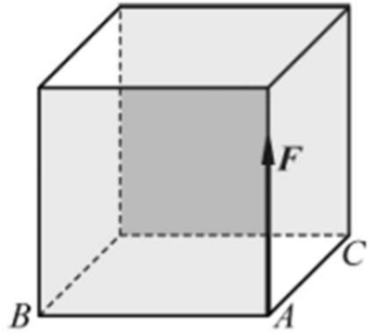




两个齿轮互相啮合，两齿轮之间的接触力为作用力与反作用力，大小相等，方向相反。因此两个齿轮间传递了约束力F_N。

牛顿第三定律（静力学第五公理）保证了两个刚体之间可以传递力，但是力偶作为静力学另一个基本元素（一对特殊的力），无法在刚体间直接传递。

力偶在同一个刚体内可以随意移动，不改变对刚体的作用效果。齿轮O_1与齿轮O_2属于两个刚体，并不满足力偶矩随意移动的条件。对局部刚体进行受力分析时候，必须在对同一个刚体内的力偶与受力进行平衡分析。



如图所示的正方体上**A**点作用一个非零力***F***，
判断下面说法是否正确：

1. 在**B**与**C**两处各加一个不为零的力，使力系平衡

   错误。沿**BC**轴取矩，**B**和**C**处所加集中力对**BC**轴之矩为**0**，无法平衡***F***对**BC**轴的矩

2. 在**B**处加一个力螺旋，使力系平衡

   错误。因为力螺旋不能用一个集中力***F***等效

3. 在**B**与**C**两处各加一个力偶，使力系平衡

   错误。因为**B**与**C**两处的力偶合成后仍为一个力偶，后者不能被一个集中力***F***平衡

4. 在**B**处加一个力，在**C**处加一个力偶，使力系平衡

   正确。只要**B**处所加力与***F***大小相等，方向相反；**C**处所加力偶与***F***对**B**点的力矩大小相等，方向相反即可平衡。

一. 空间任意力系的平衡方程

空间任意力系平衡的充要条件：

该力系的主矢、主矩分别为零.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

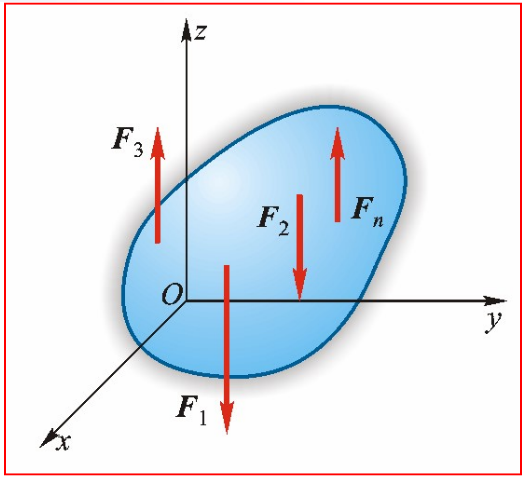
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

空间任意力系平衡的充要条件：所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于每一个坐标轴的矩的代数和也等于零.

不需要对特定一个点列平衡方程！

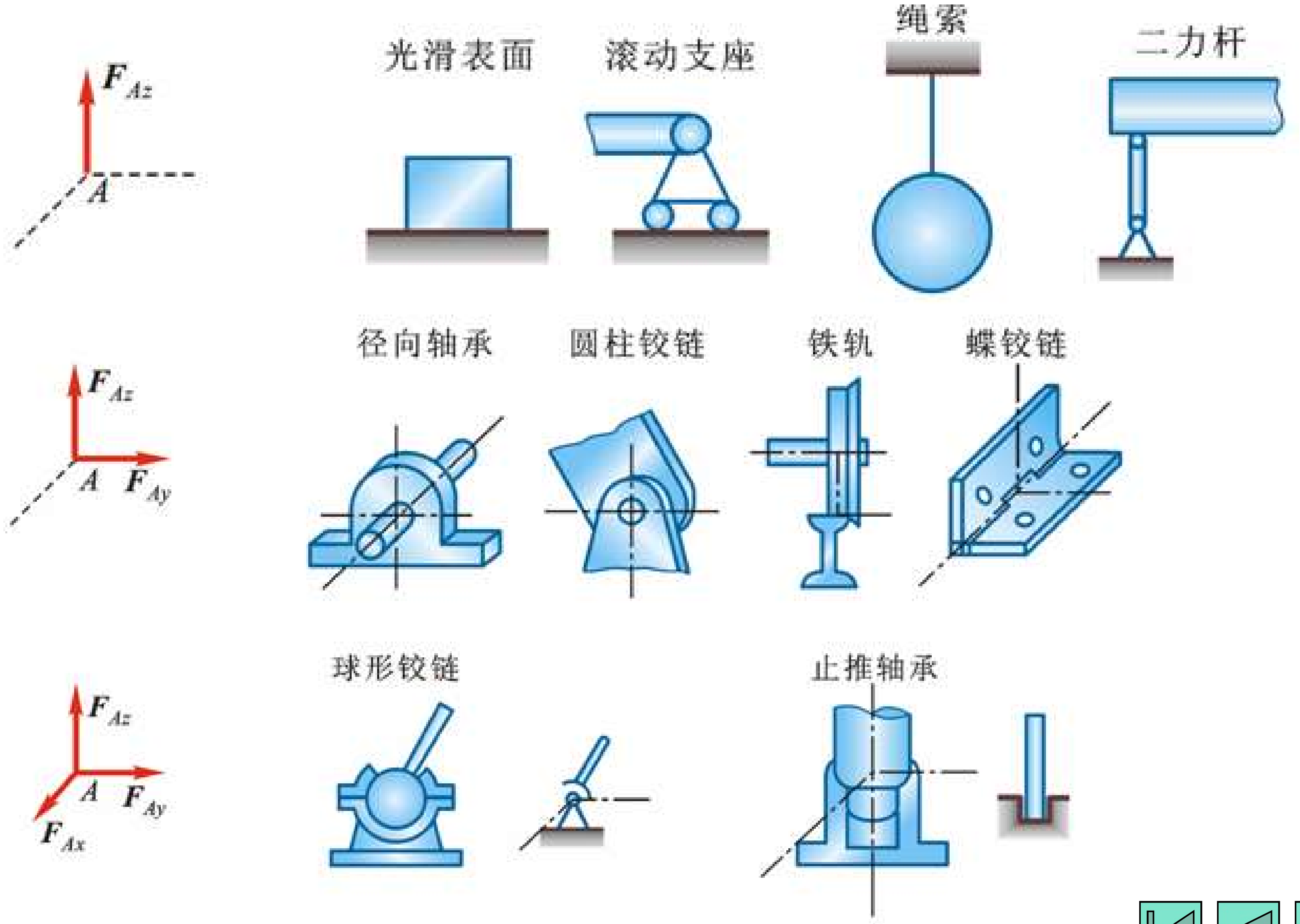
二. 空间平行力系的平衡方程

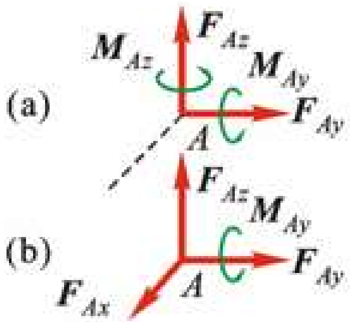
$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$



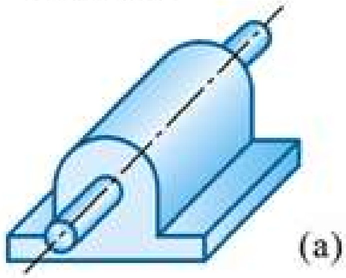
力系	独立方程数	平衡方程
空间任意力系	6	$\sum F_x = 0$；$\sum F_y = 0$；$\sum F_z = 0$； $\sum M_x = 0$；$\sum M_y = 0$；$\sum M_z = 0$
平面力偶系	1	$\sum M = 0$
平面汇交力系	2	$\sum F_x = 0$；$\sum F_y = 0$
平面平行力系	2	$\sum F_x = 0$；$\sum M = 0$（x 轴不能与力的方向垂直）
平面一般力系	3	$\sum F_x = 0$；$\sum F_y = 0$；$\sum M = 0$
空间力偶系	3	$\sum M_x = 0$；$\sum M_y = 0$；$\sum M_z = 0$
空间汇交系	3	$\sum F_x = 0$；$\sum F_y = 0$；$\sum F_z = 0$
空间平行力系	3	$\sum F_z = 0$; $\sum M_x = 0$; $\sum M_y = 0$ （力沿z轴方向）

三. 空间约束类型举例

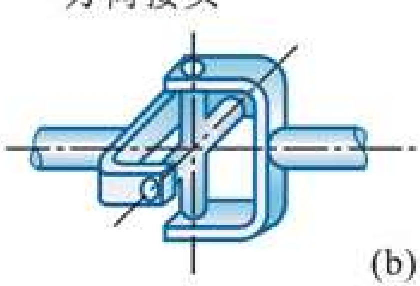

F_Az
A
光滑表面
滚动支座
绳索
二力杆
F_Az
A
F_Ay
径向轴承
圆柱铰链
铁轨
蝶铰链
F_Az
A
F_Ay
F_Ax
球形铰链
止推轴承

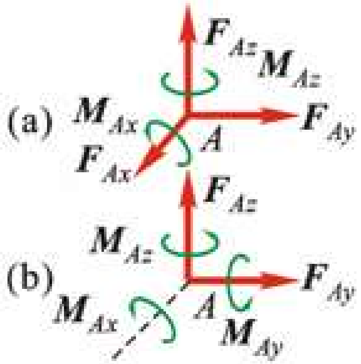


导向轴承

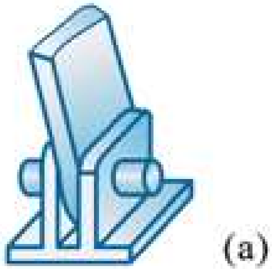


万向接头

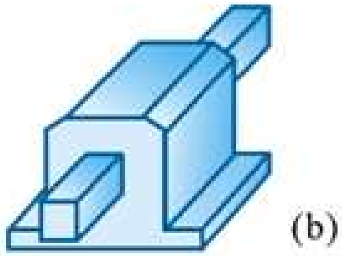


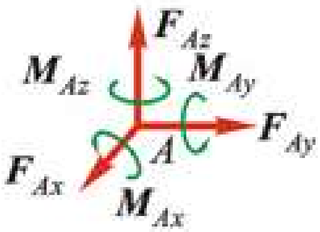


带有销子的夹板

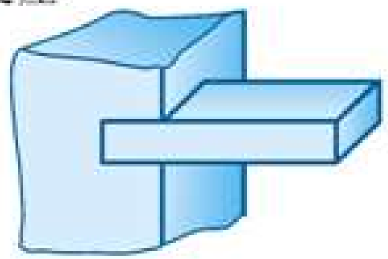


导轨

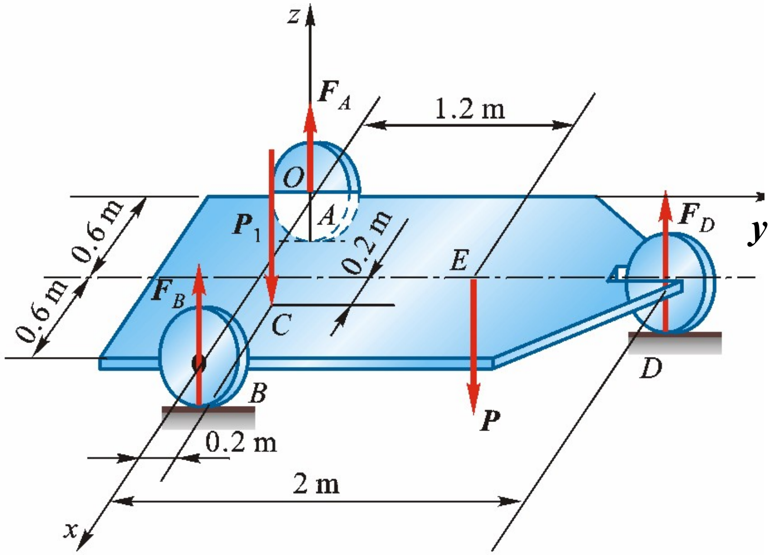




空间的固定端支座



例3-8（空间平行力系）



已知：$P=8\text{kN},\ P_1=10\text{kN},$

求：A、B、D 处约束力

解： 研究对象：小车

列平衡方程（三个方向力，三个轴力矩）

$$\sum F_z=0 \qquad -P-P_1+F_A+F_B+F_D=0$$

$$\sum M_x(F)=0 \qquad -0.2P_1-1.2P+2F_D=0$$

$$\sum M_y(F)=0 \qquad 0.8P_1+0.6P-1.2F_B-0.6F_D=0$$

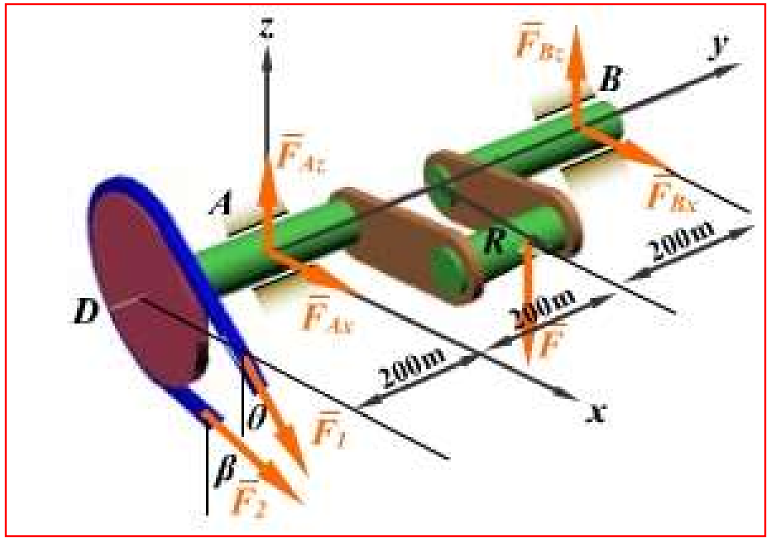
$$\Rightarrow \qquad F_D=5.8\text{kN},F_B=7.777\text{kN},F_A=4.423\text{kN}$$

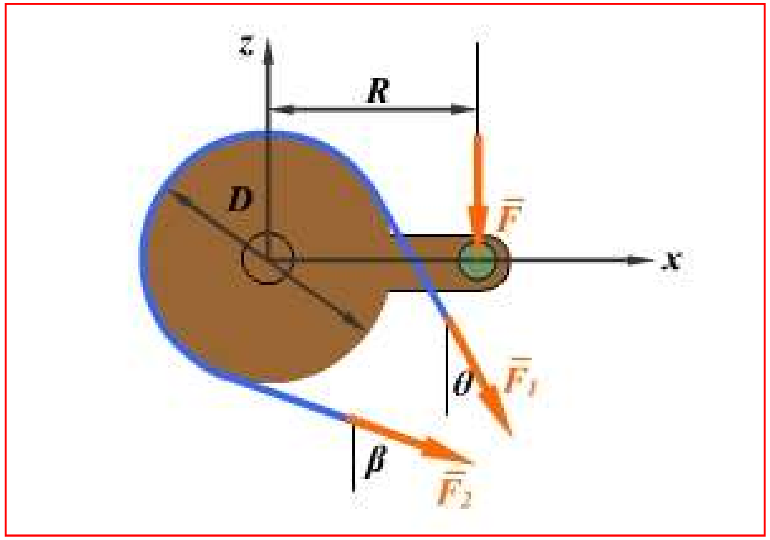
例3-9（空间任意力系平衡）

已知：$F=2000\text{N},\ F_2=2F_1,\ \theta=30^\circ,\ \beta=60^\circ$，各尺寸如图

求：F_1, F_2 及 A、B 处约束力. (D=400mm, R=300mm)

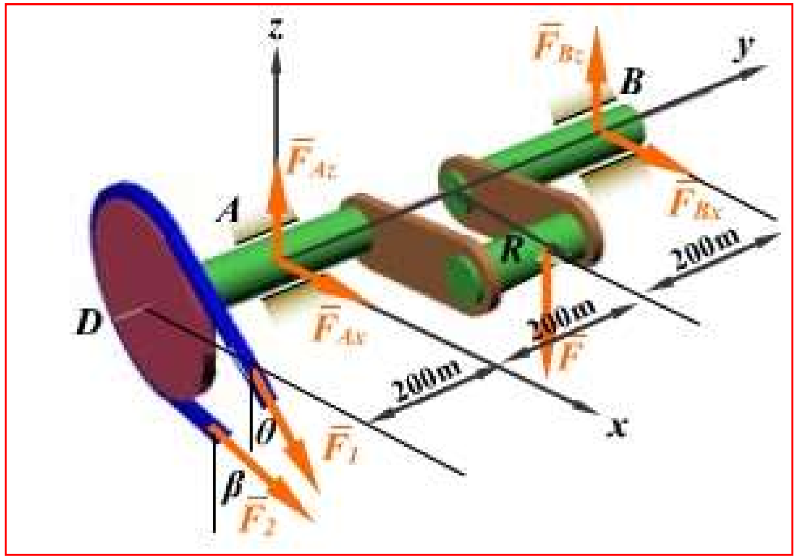
解： 研究对象，曲轴

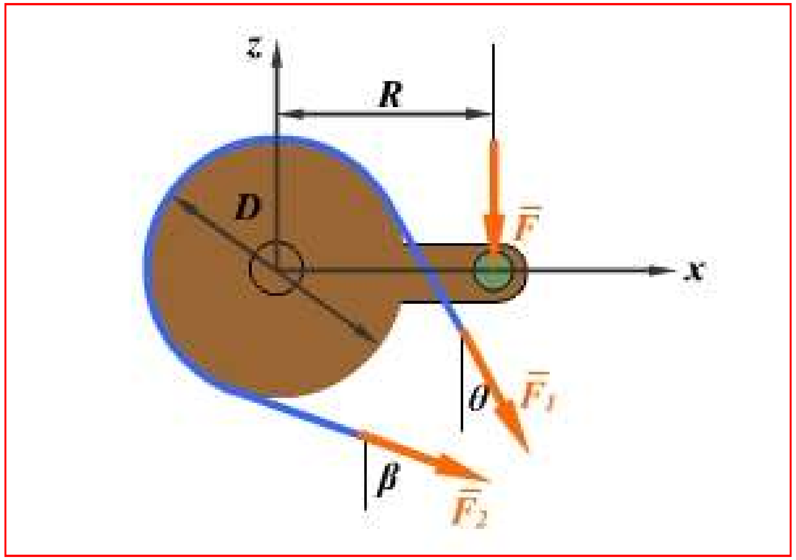




空间任意力系（**6**个平衡方程）

§3–5 空间任意力系的平衡方程





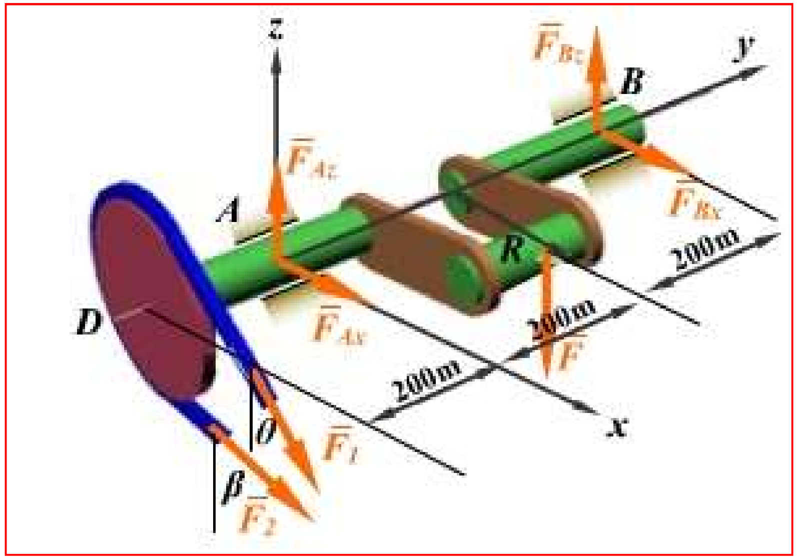
列平衡方程

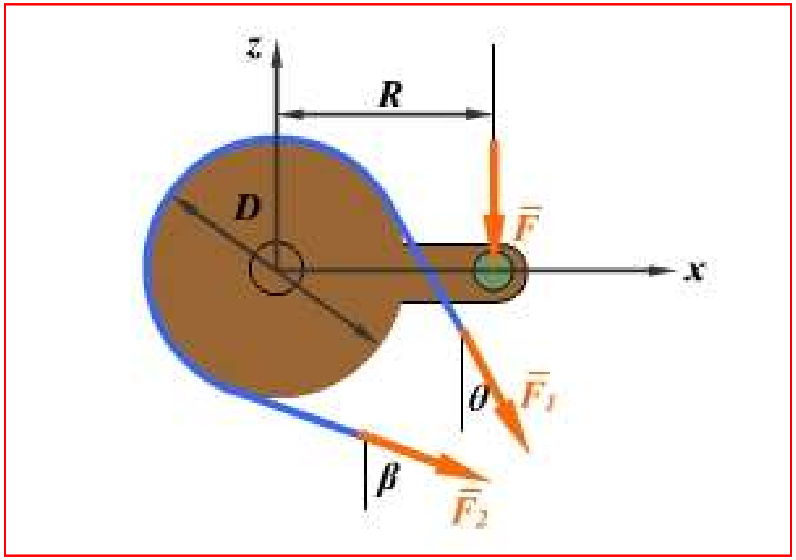
$$\sum F_x = 0 \qquad F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 0 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad -F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F + F_{Az} + F_{Bz} = 0$$

§ 3–5 空间任意力系的平衡方程





$$\sum M_x(F)=0 \qquad F_1\cos 30^\circ \times 200 + F_2\cos 60^\circ \times 200 - F\times 200 + F_{Bz}\times 400 = 0$$

$$\sum M_y(F)=0 \qquad F\cdot R - \frac{D}{2}\times(F_2 - F_1)=0$$

$$\sum M_z(F)=0 \qquad (F_1\sin 30^\circ - F_2\sin 60^\circ)\times 200 - F_{Bx}\times 400 = 0$$

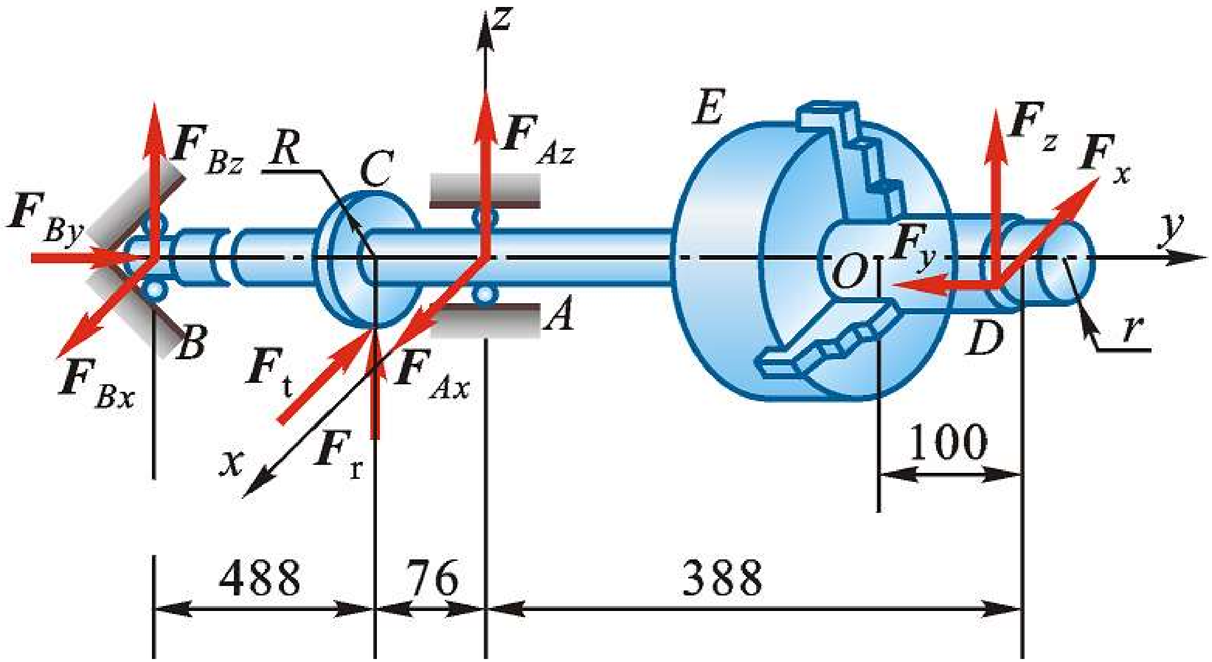
$$F_1 = 3000\text{N}, F_2 = 6000\text{N},$$

$$F_{Ax} = -1004\text{N}, F_{Az} = 9397\text{N},$$

$$F_{Bx} = 3348\text{N}, F_{Bz} = -1799\text{N},$$

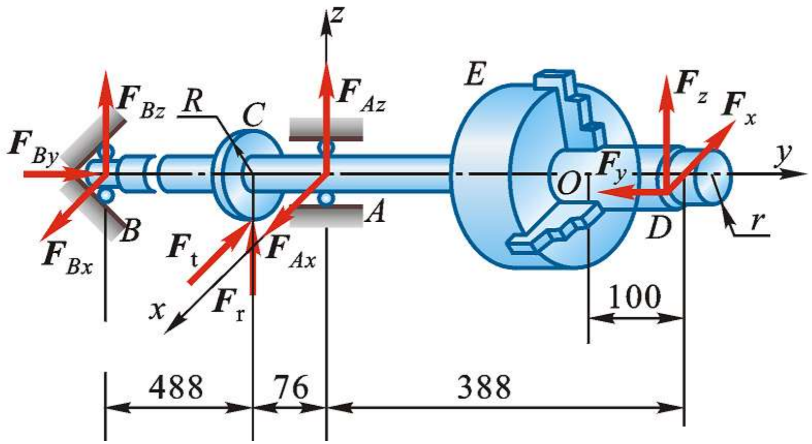
例3-10

已知： $F_x = 4.25\text{N}$, $F_y = 6.8\text{N}$, $F_z = 17\text{N}$,
$F_r = 0.36F_\tau$, $R = 50\text{mm}$, $r = 30\text{mm}$ 各尺寸如图



求：(1) $\vec{F}_r, \vec{F}_\tau$ （2）*A*、*B*处约束力（3）*O* 处约束力

解： 研究对象1：主轴及工件，受力图如图



$$\sum F_x = 0 \qquad -F_t + F_{Bx} + F_{Ax} - F_x = 0$$

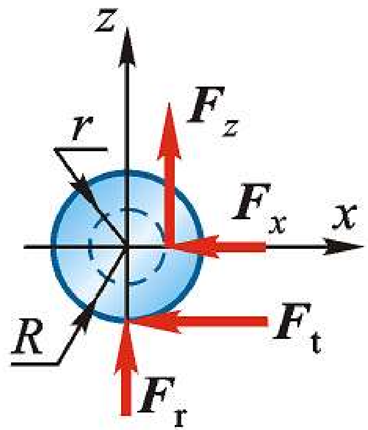
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{By} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_r + F_{Bz} + F_{Az} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad -(488+76)F_{Bz} - 76F_r + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad F_t \cdot R - F_z \cdot r = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad (488+76)F_{Bx} - 76F_t + 388F_x - 30F_y = 0$$



又： $F_r = 0.36F_t$，

$$F_t = 10.2\text{kN} \qquad F_r = 3.67\text{kN} \qquad F_{Ax} = 15.64\text{kN}$$

$$F_{Bx} = -1.19\text{kN} \qquad F_{By} = 6.8\text{kN} \qquad F_{Bz} = 11.2\text{kN}$$

研究对象2：工件受力图如图,列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ox} - F_x = 0$$

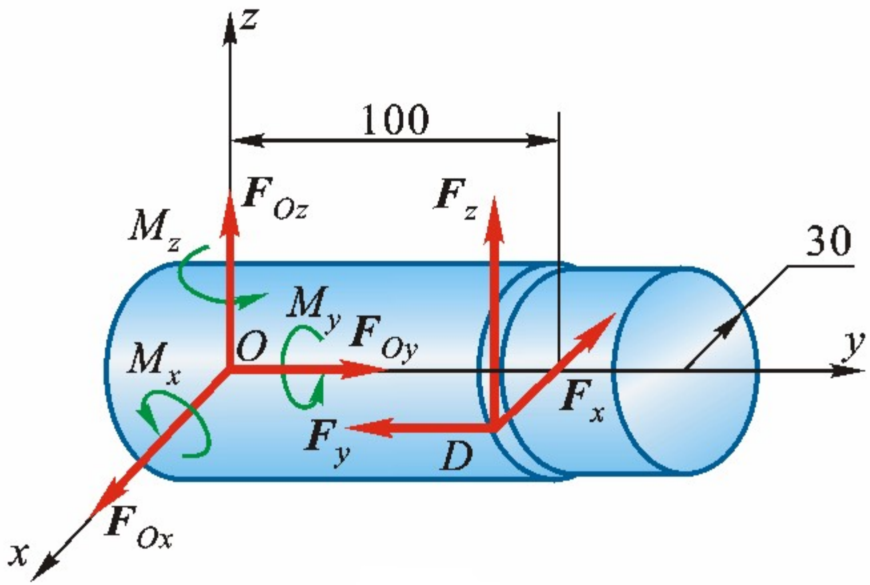
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_{Oz} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \qquad 100F_Z + M_x = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad -30F_Z + M_y = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \qquad 100F_x - 30F_y + M_z = 0$$



$$F_{Ox} = 4.25\text{kN}, F_{Oy} = 6.8\text{kN}, F_{Oz} = -17\text{kN}$$

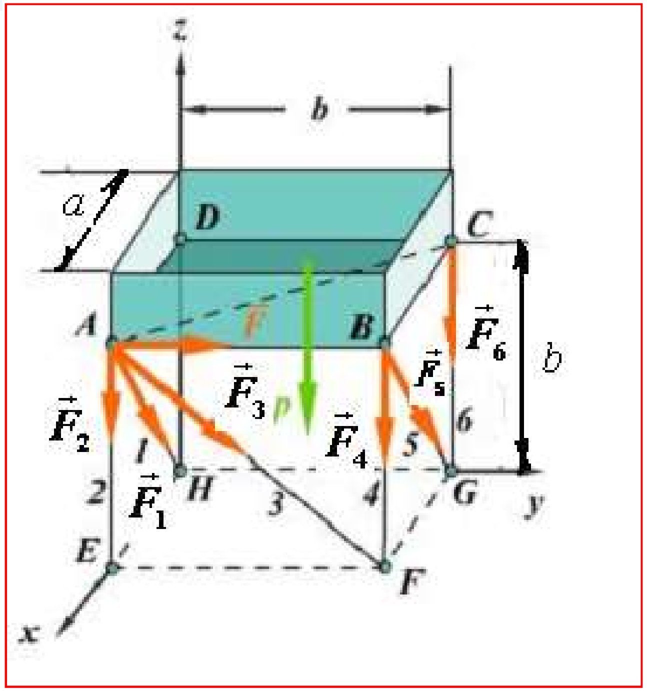
$$M_x = -1.7\text{kN}\cdot\text{m}, M_y = 0.51\text{kN}\cdot\text{m}, M_z = -0.22\text{kN}\cdot\text{m}$$

例3-11（空间任意力系）

已知：均质板由6根直杆支撑，位于水平位置，直杆两侧均用铰链连接，板自重P，水平力$F=2P$作用在A点。

求：各个杆件内力

每个杆都是两端受力，二力杆



解： 研究长方板，列平衡方程

$$\sum F_x=-F_1\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}--F_5\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \qquad \sum F_y=2P+F_3\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\sum F_z=-P-F_1\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-F_2-F_3\frac{\sqrt{2}}{2}-F_4-F_5\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-F_6=0$$

$$\sum M_x=-2Pb-F_3\frac{\sqrt{2}}{2}b-F_4b-F_5\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}b-F_6b-P\frac{b}{2}=0$$

$$\sum M_y=F_2a+F_3\frac{\sqrt{2}}{2}a+F_4a+P\frac{a}{2}=0$$

$$\sum M_z=2Pa+F_3\frac{\sqrt{2}}{2}a+F_5\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}b=0$$

$$F_3=-2\sqrt{2}P$$

$$F_5=0$$

$$F_1=0$$

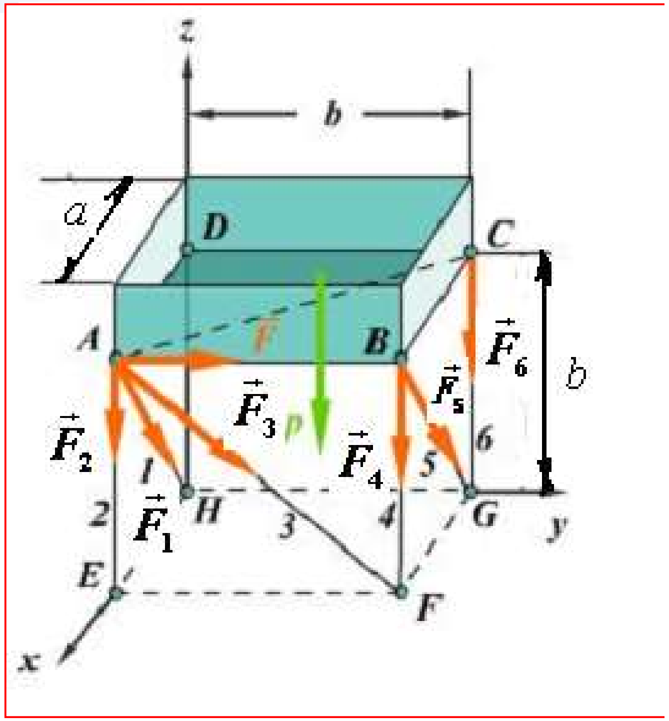
$$F_2=1.5P$$

$$F_4=0$$

$$F_6=-0.5P$$

例3-11（空间任意力系）

均质板由6根直杆支撑，位于水平位置



解： 研究对象，长方板,列平衡方程

$$\sum M_{AB}(\vec{F})=0 \qquad -F_6\cdot a-\frac{a}{2}\cdot P=0 \qquad F_6=-\frac{P}{2}$$

$$\sum M_{AE}(\vec{F})=0 \qquad F_5\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}b=0 \qquad F_5=0$$

$$\sum M_{AC}(\vec{F})=0 \qquad F_4\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=0 \qquad F_4=0$$

$$\sum M_{EF}(\vec{F})=0 \qquad -F_6\cdot a-\frac{a}{2}\cdot P-F_1\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \qquad F_1=0$$

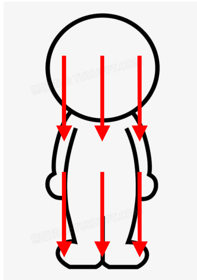
$$\sum M_{FG}(\vec{F})=0 \qquad Fb-\frac{b}{2}\cdot P-F_2b=0 \qquad F_2=1.5P$$

$$\sum M_{BC}(\vec{F})=0 \qquad -F_2\cdot b-\frac{b}{2}\cdot P-F_3\cdot\cos45^\circ\cdot b=0 \qquad F_3=-2\sqrt{2}P$$

物体的重心

物体重力合力的作用点为物体的重心。

地球表面附近的空间的重力，本质是一个空间汇交力系（交于地心）



平行力系的合力大小则是物体的重量（单位N）。

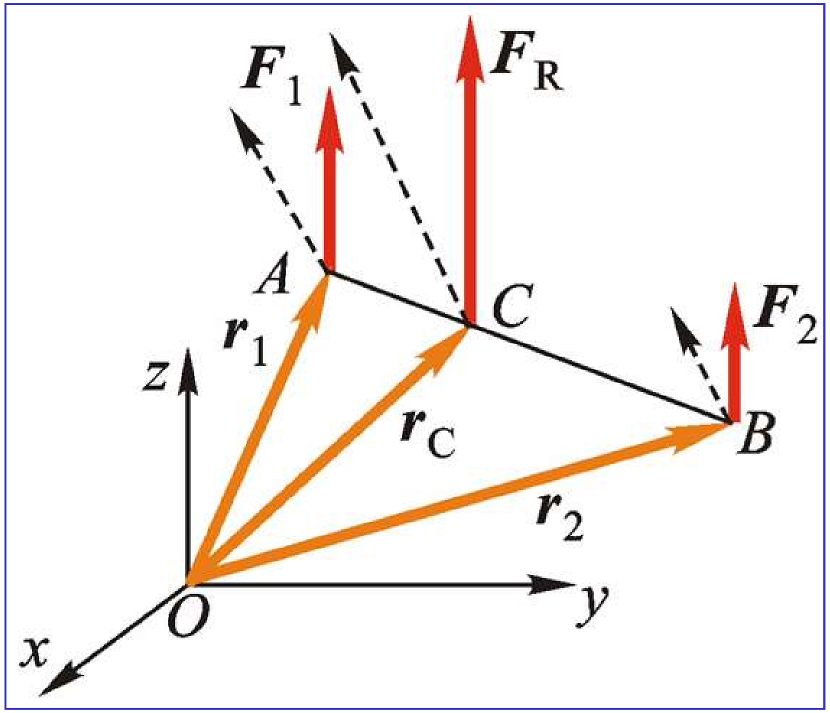
平行力系的主矩为0的简化中心则是重心。

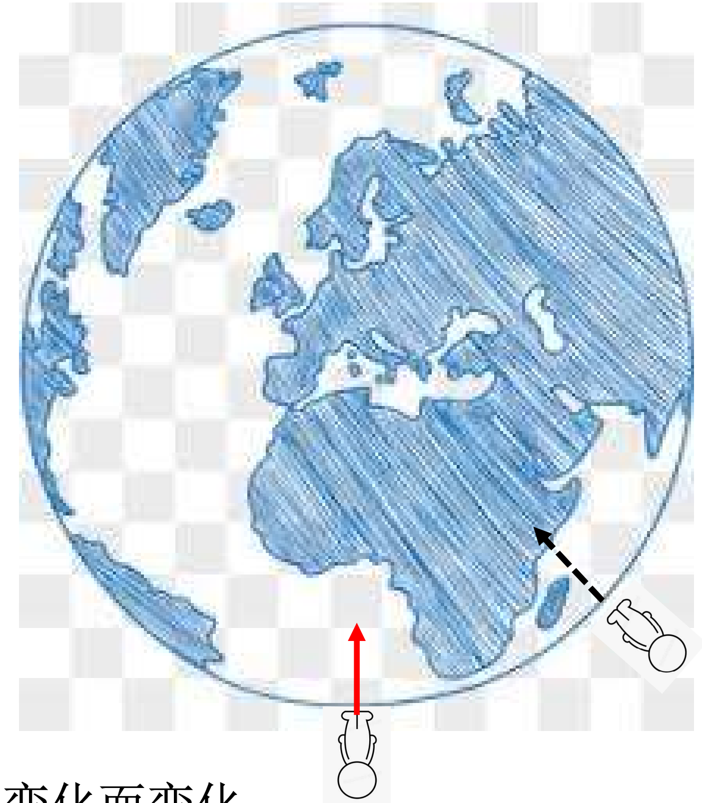
考虑到物体尺寸远小于地球半径（~6000km），空间汇交力系可以近似看做空间平行力系

重心就是平行力系的主矩为0的简化中心

一. 平行力系重心

平行力系合力作用点的位置仅与各平行力系的大小和作用位置有关，而与各平行力的方向无关。





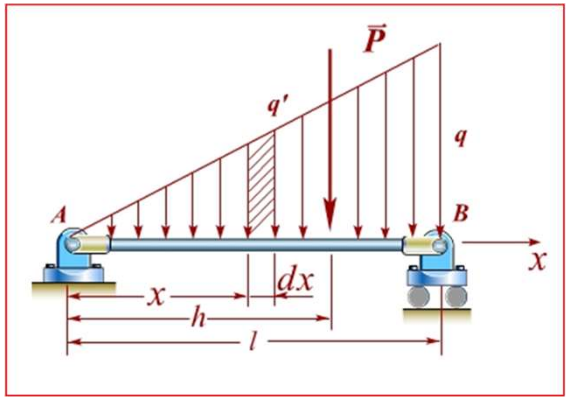
重心的位置不随着物体的方向变化而变化

一. 平行力系中心

如何获得重心的位置？

重心就是主矩为0的平行力系的简化中心

合力矩定理 $M_C(\vec{F}_R)=\sum M_C(\vec{F}_i)$



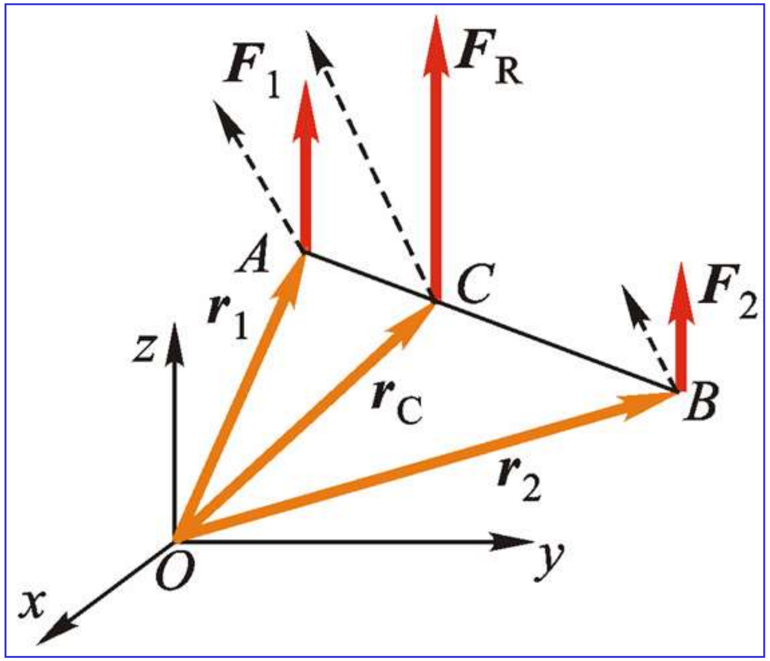
$$\vec{r}_C=\frac{\sum F_i\vec{r}_i}{\sum F_i}$$

分力对任意点的力矩和等于合力对该点的力矩

$$x_C=\frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$$

$$y_C=\frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

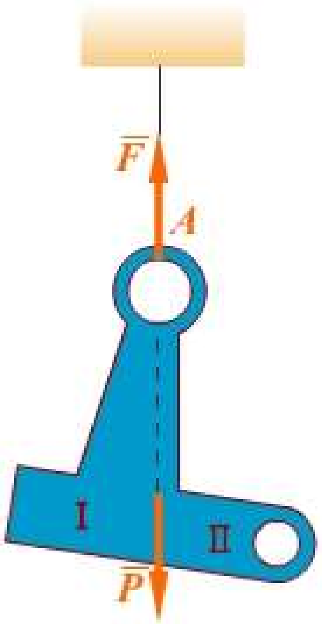
$$z_C=\frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$



空间平行力系合力作用点的位置

二．确定重心的实验方法：悬挂法与称重法

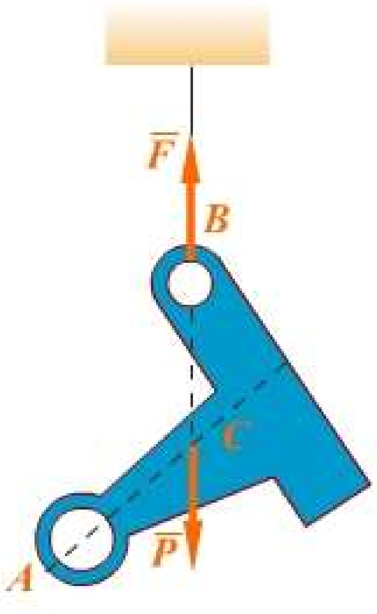
悬挂法



(a)

二力平衡

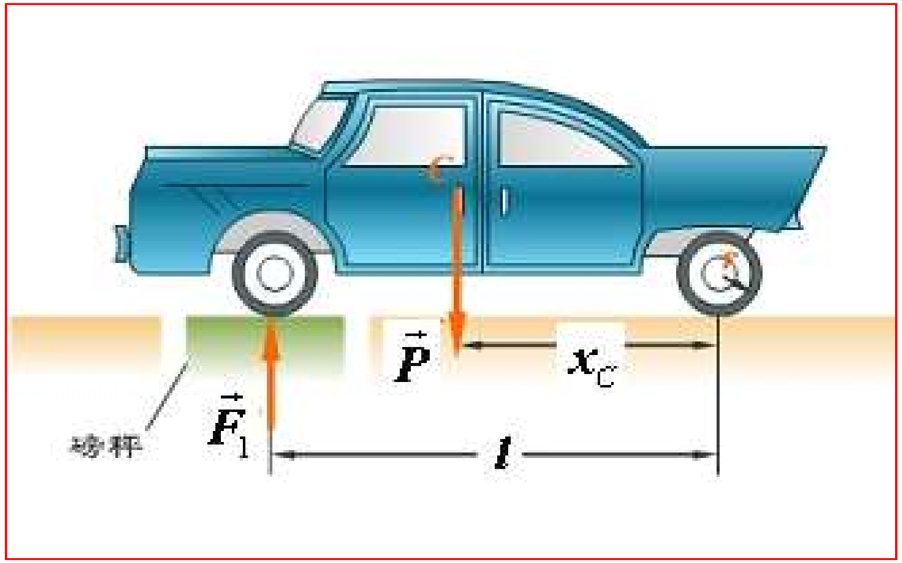
重心位于力作用线上



(b)

称重法

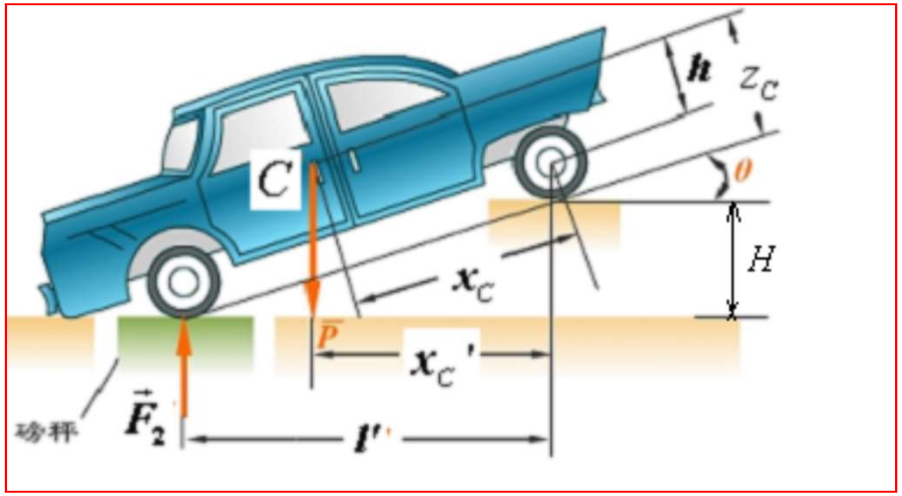
$$P\cdot x_C = F_1\cdot l \quad \text{则} \quad x_C = \frac{F_1}{P} l$$



这是水平方向的重心。
竖直方向怎么确定？

方法1：吊起来找力作用线

方法2：竖直抬起后轮，测量前轮的压力变化



$$P\cdot x_C' = F_2\cdot l' \quad \text{则} \quad x_C' = \frac{F_2}{P} l'$$

$$l' = l\cos\theta$$

称重法

$$x_C=\frac{F_1}{P}l \qquad x_C'=\frac{F_2}{P}l'$$ 测量得到

$$l'=l\cos\theta$$ 几何关系

寻找z_C的表达式（以F_1, F_2, H, l表示）

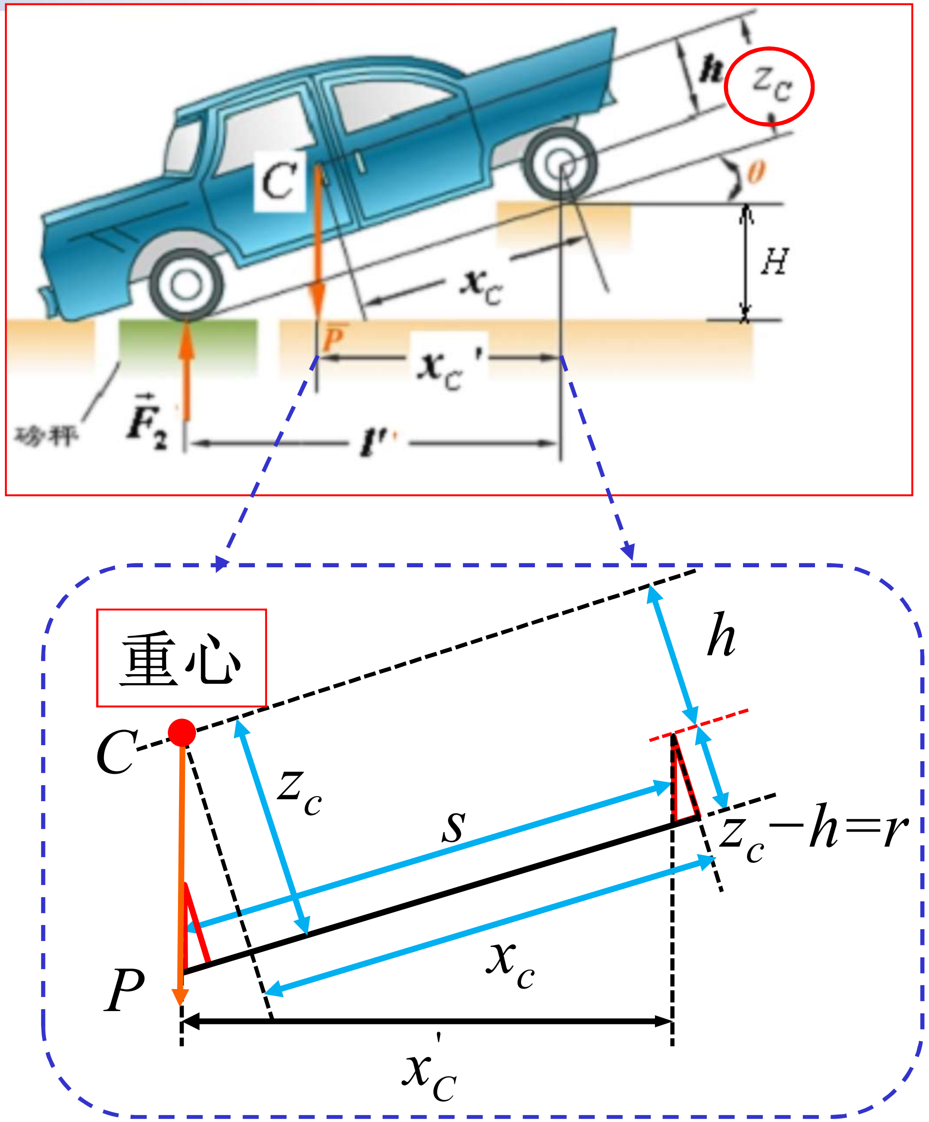
$$x_C'=s\cos\theta=x_C\cos\theta+h\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{H}{l} \qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{l^2-H^2}}{l}$$

$$\Rightarrow\ x_C'=\frac{x_c}{l}\sqrt{l^2-H^2}+(z_c-r)\frac{H}{l}$$

$$x_C'=\frac{F_2}{P}l'=\frac{F_2}{P}\sqrt{l^2-H^2} \qquad x_C=\frac{F_1}{P}l$$

$$\Rightarrow\ z_C=r+\frac{F_2-F_1}{P}\cdot\frac{1}{H}\cdot\sqrt{l^2-H^2}$$



$$s=x_c-(z_c-h)\tan\theta+z_c\tan\theta=x_c+h\tan\theta$$

三. 计算重心坐标的公式

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{P} \qquad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{P} \qquad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{P}$$

$P_i=m_i g$为第i部分物体的重力

对均质物体，均质板状物体，有

均质物体密度不变 (ρ)

$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{V} \qquad y_C = \frac{\sum V_i y_i}{V} \qquad z_C = \frac{\sum V_i z_i}{V}$$

$P_i=\rho V_i g$，V_i为第i部分物体的体积

等厚度物体 (h)

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A} \qquad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A} \qquad z_C = \frac{\sum A_i z_i}{A}$$

$V_i=hA_i$，A_i为第i部分物体的面积

--称为重心或形心公式

对均质物体，均质板状物体，均质杆，重心位置只决定于物体的体积和形状，重心与物体的几何中心（即形心）重合。

均质物体的形心

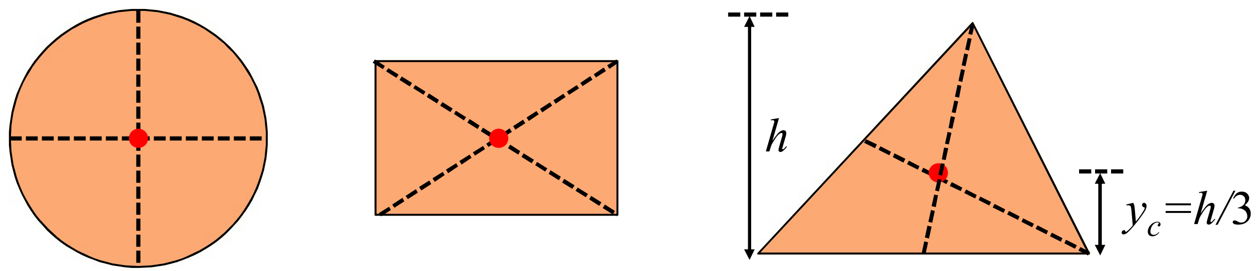
均质体	均质等厚薄板	等截面细杆
$X_C=\dfrac{\int_v xdV}{V}$	$X_C=\dfrac{\int_s xdA}{A}$	$X_C=\dfrac{\int_l xdl}{l}$
$Y_C=\dfrac{\int_v ydV}{V}$	$Y_C=\dfrac{\int_s ydA}{A}$	$Y_C=\dfrac{\int_l ydl}{l}$
$Z_C=\dfrac{\int_v zdV}{V}$	$Z_C=\dfrac{\int_s zdA}{A}$	$Z_C=\dfrac{\int_l zdl}{l}$

确定重心位置的计算方法

（1）直接法　直接根据中心坐标公式进行计算；

（2）对称物体　具有对称面、对称轴和对称中心的形状规则的均质物体，其重心一定在对称面、对称轴和对称中心上.

如矩形、圆、球体……



（3）组合物体　常用分割法或负面积法确定重心位置。即将组合物体分成若干形状简单、重心位置易求出的物体。

例3-12（重心分割法求解）

已知：均质等厚Z字型薄板尺寸如图所示．求：其重心坐标

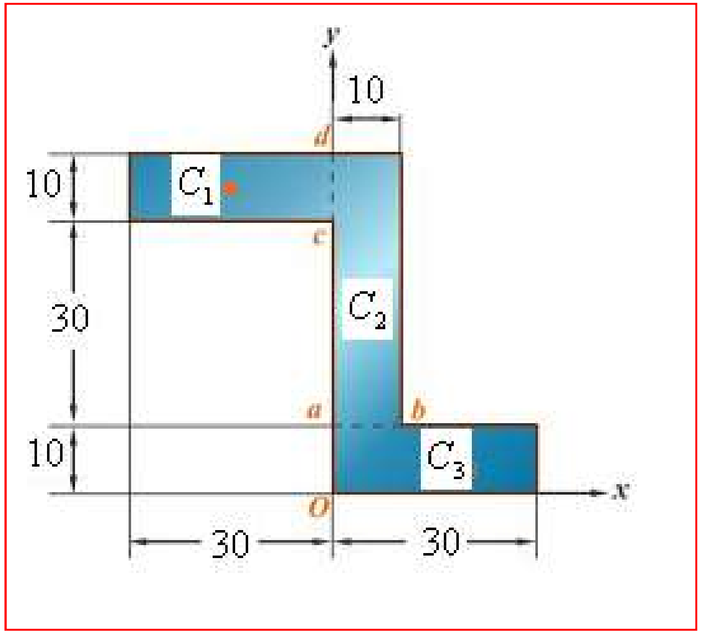
解： 厚度方向重心坐标已确定，只求重心的**x,y**坐标即可．

用虚线分割如图，为三个小矩形，其面积与坐标分别为

$$x_1=-15\text{mm}\quad y_1=45\text{mm}\quad A_1=300\text{mm}^2$$

$$x_2=5\text{mm}\quad y_2=30\text{mm}\quad A_2=400\text{mm}^2$$

$$x_3=15\text{mm}\quad y_3=5\text{mm}\quad A_3=300\text{mm}^2$$



则 $$x_C=\sum\frac{A_i x_i}{A}=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3}{A_1+A_2+A_3}=2\text{mm}$$

$$y_C=\sum\frac{A_i y_i}{A}=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=27\text{mm}$$

例3-13（重心负面积法求解）

已知：等厚均质偏心块的 $R=100\text{mm}, r=17\text{mm}, b=13\text{mm}$

求：其重心坐标.

解： 用负面积法，为三部分组成.

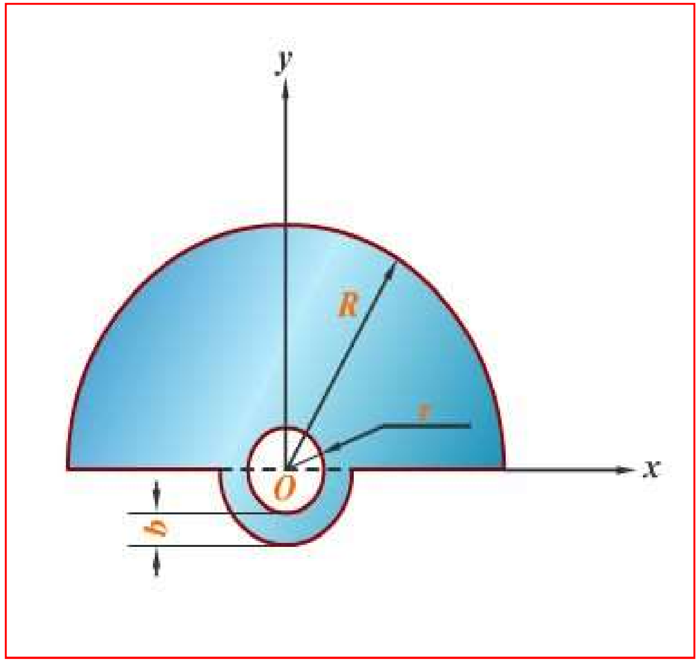
由对称性，有 $x_C=0$

$$A_1=\frac{\pi}{2}R^2, A_2=\frac{\pi}{2}(r+b)^2, \boxed{A_3=-\pi r^2}$$

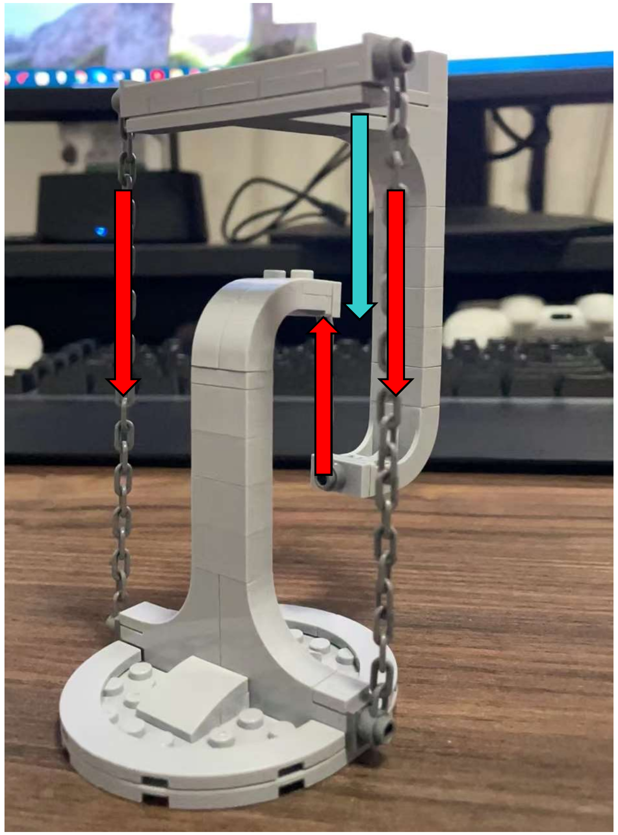
$$y_1=\frac{4R}{3\pi}, y_2=-\frac{4(r+b)}{3\pi}, y_3=0$$

由 $y_C=\dfrac{\sum A_i y_i}{A}$

得 $y_C=\dfrac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=40.01\text{mm}$



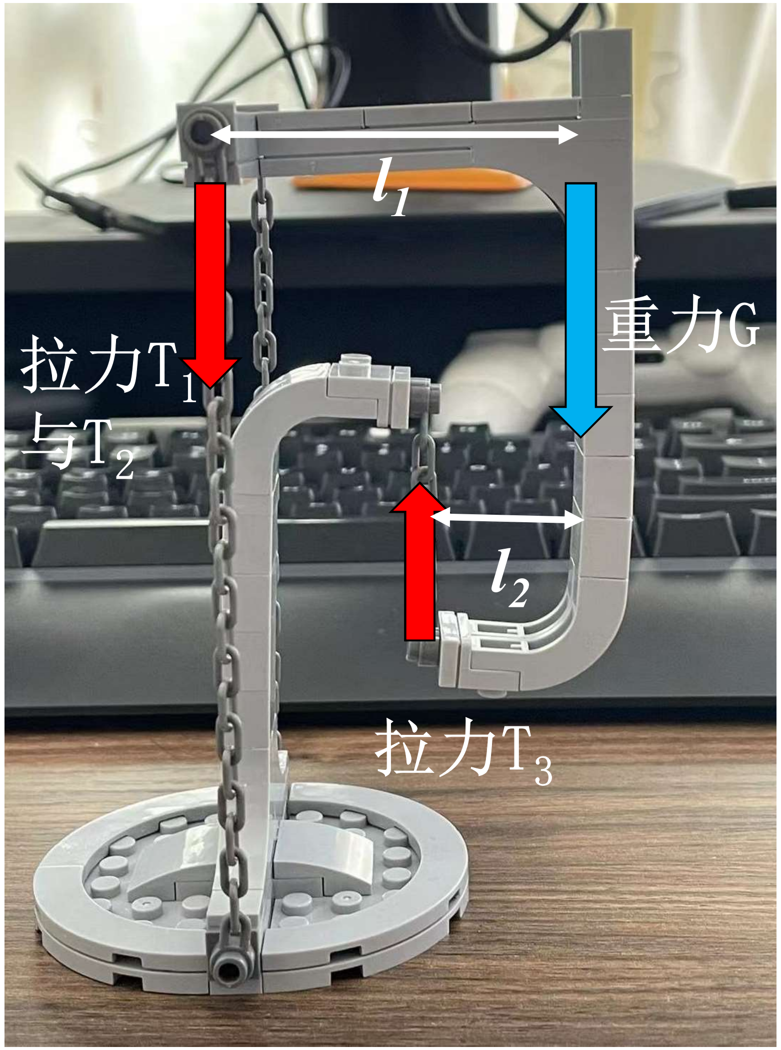
张拉整体结构 （Tensegrity）



绳索的拉力与杆件的重力组成一个空间平行力系

张拉整体结构 （Tensegrity）

如何安排重心位置是实现平衡的前提



$$T_1=T_2$$

$$2T_1+G=T_3$$

$$Gl_2=2T_1(l_1-l_2)$$

$$\Downarrow$$

$$2Gl_2/(l_1-l_2)+G=T_3>0$$

$$\Downarrow$$

$$(l_1+l_2)/(l_1-l_2)>0$$

$$\Downarrow$$

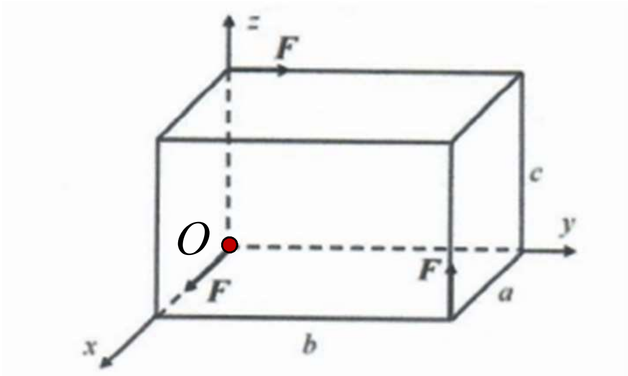
$$l_1>l_2$$

选择题：

如图所示，沿长方体不相交且不平行的棱作用三个大小相等的力，力系可简化为一个力的条件是（）

A $a=b+c$　　　　**B** $a=b-c$

C $b=c-a$　　　　**D** 无法实现



往**O**点简化力系：

主矢：$\boldsymbol{F_R}=(F, F, F)$

主矩：$\boldsymbol{M_R}=(Fb, -Fa, -Fc)$

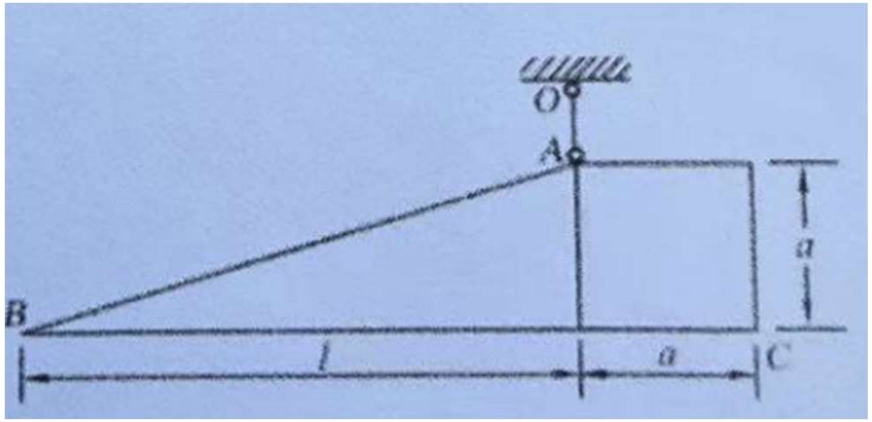
$\boldsymbol{F_R}\cdot \boldsymbol{M_R}=F^2b-F^2a-F^2c=F^2(b-a-c)=0$　（集中力）

$b-a-c=0 \rightarrow \quad a=b-c$

选择题：

如图所示，一重为W，边长为a的均质正方形薄板与一重为$W/2$的均质三角形薄板焊接成梯形板，在A点悬挂，若底边BC保持水平，则l=（ ）

A $a/2$　　**B** a　　**C** $2a$　　$\boxed{\textbf{D}\ 3a}$



三角形重心在距离B点$2l/3$

正方形重心在距离C点$a/2$

对A力矩平衡：$W/2 \cdot l/3 = W \cdot a/2$

→　$l=3a$

O

作业

教材习题：3-12，3-17,3-19

2-4 如图 T2-6 所示，输电线 ACB 架在两线杆之间，形成一下垂曲线，下垂距离 $CD=f=1$ m，两电线杆距离 $AB=40$ m。电线 ACB 段重 $P=400$ N，可近似认为沿 AB 连线均匀分布。求电线中点和两端的拉力。

解 取 AC 段为研究对象，受力分析如图 J2-6 所示，图中：①AC 段的重力作用在它的中点 E（参见思考题 2-4）；②$\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_C$ 由索的性质确定为沿索的切线方向；③三力平衡汇交定理确定 θ。

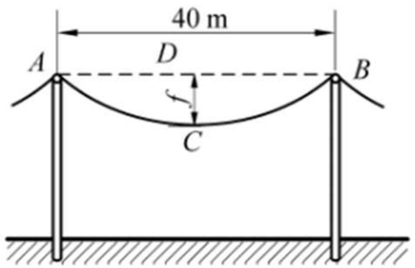


图 T2-6

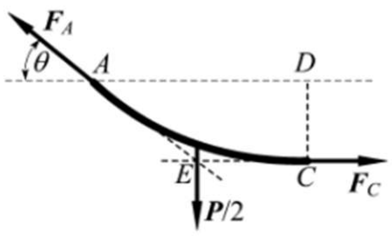


图 J2-6

列平衡方程组

$$\begin{cases} \sum F_x = 0: F_C - F_A\cos\theta = 0 \\ \sum F_y = 0: F_A\sin\theta - P/2 = 0 \end{cases}$$

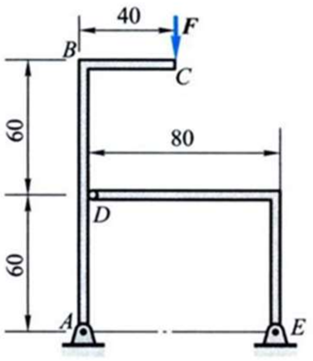
其中 $\sin\theta=1/\sqrt{101}$，$\cos\theta=10/\sqrt{101}$，可由图 J2-4 的几何关系确定。把这两个三角函数值代入上述方程组可解得

$$F_A = 2010 \text{ kN}; \quad F_C = 2000 \text{ kN}$$

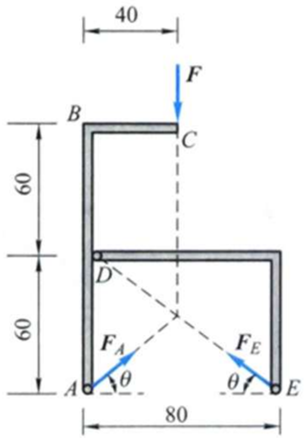
这是考虑重力的绳索问题，一般不会出现在本课程的分析（除非特殊说明，可以直接使用同一根绳索上张力相等的条件）

第2章作业

2-5 图示结构由两弯杆 *ABC* 和 *DE* 构成。不计构件质量，$F=200$ N。求支座 *A* 和 *E* 的约束力。



题 2-5 图



二力杆+三力平衡汇交

解：弯杆 *DE* 为二力杆。研究结构整体，受力如图所示，列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_A\cos\theta - F_E\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A\sin\theta + F_E\sin\theta - F = 0$$

式中

$$\cos\theta = \frac{4}{5}, \quad \sin\theta = \frac{3}{5}$$

解得

$$F_A = F_E = \frac{5}{6}F = 167\ \text{N}$$

2-7 四连杆机构 O_1ABO_2 在图示位置平衡。$O_1A=0.4$ m，$O_2B=0.6$ m。作用于杆 O_1A 上的力偶矩 $M_1=100$ N·m。各杆自重不计。求力偶矩 M_2 的大小和杆 AB 所受的力。

解 AB 为二力杆。取 O_2B 和 O_1A 分析(如图 J2-13)，它们均属于力偶与力偶平衡的问题，因此

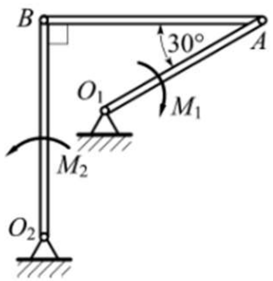


图 T2-13

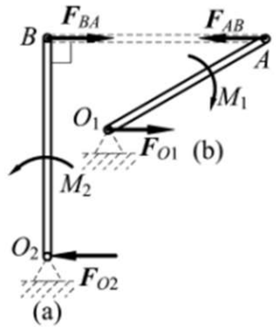


图 J2-13

$$\begin{cases} F_{AB} = F_{BA} \\ F_{BA} \times O_1A\sin30^\circ - M_1 = 0 \\ F_{AB} \times O_2B\sin30^\circ - M_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$F_{BA} = M_1/(O_1A\sin30^\circ) = 500\ \text{N}, \quad M_2 = F_{AB} \times O_2B = 300\ \text{N·m}$$

二力杆 + 主动力偶只能由约束力力偶平衡

第2章作业

2-8 直角弯杆 $ABCD$ 与直杆 DE 和 EC 铰接如图。作用在杆 DE 上力偶矩 $M_2=40\ \mathrm{kN\cdot m}$。不计各构件自重，不计摩擦。求支座 A 和 B 的约束力，以及杆 EC 所受到的力。

解 EC 为二力杆，所以 ED 为力偶与力偶平衡情形，其受力分析见图 J2-14(a)。A 处的约束力方向垂直于支撑面。B 铰的约束力的水平分量和垂直分量可以合成为一个集中力，因此从整体来看，也是力偶与力偶平行情形，受力分析见图 J2-14(b)。

对图 J2-14(a)有

$$\sum M=0:\qquad M-F_{EC}\times DE\times\sin\theta_E=0$$

其中 $\theta_E=45°$。解得 $F_{EC}=M/(DE\sin\theta_E)=10\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$。

力偶只能由力偶平衡

二力杆力方向为受力点连线

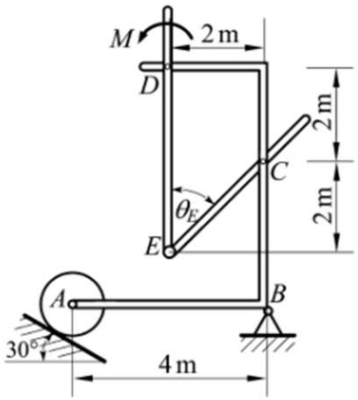


图 T2-14

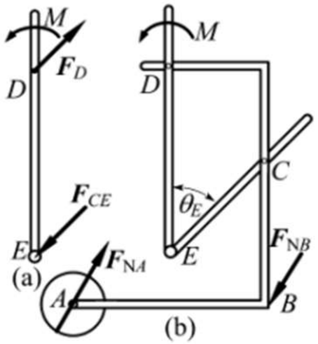


图 J2-14

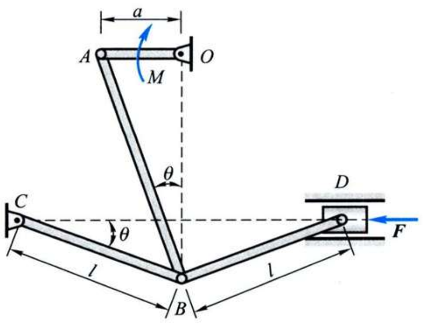
对图 J2-14(b)有

$$\begin{cases}F_{RB}=F_{NA}\\ M-F_{NA}\times AB\times\cos\theta_E=0\end{cases}$$

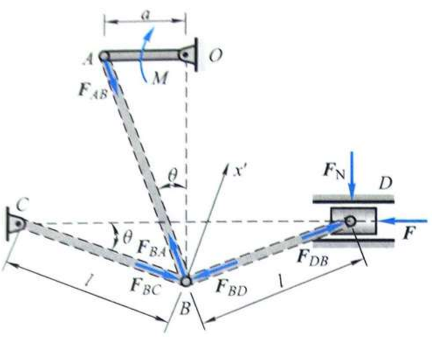
解得

$$F_{RB}=F_{NA}=M/(AB\times\cos30°)=20\sqrt{3}/3\mathrm{kN}$$

2-9 在图示机构中，在曲柄 OA 上作用一力偶，其力偶矩为 M，在滑块 D 上作用一水平力 F，机构尺寸如图所示，各构件重量不计，不计摩擦。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。



题 2-9 图



题 2-9 图

解：杆 AB、BC、BD 均为二力杆。先取滑块 D，其受力图如图所示，由

$$\sum F_x = 0,\quad F_{DB}\cos\theta - F = 0$$

解得

$$F_{DB} = \frac{F}{\cos\theta}$$

再研究销 B，其受力图如图所示，由

$$\sum F_x = 0,\quad F_{BC}\cos\theta - F_{BD}\cos\theta - F_{BA}\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad -F_{BC}\sin\theta - F_{BD}\sin\theta + F_{BA}\cos\theta = 0$$

把 $F_{DB} = \dfrac{F}{\cos\theta}$ 代入，解得 $F_{BA} = \dfrac{2F\sin\theta}{\cos 2\theta}$。

或者，避开解联立方程，取如图所示 x' 轴垂直于杆 BC，由

$$\sum F_{x'} = 0,\quad F_{BA}\cos 2\theta - F_{BD}\sin 2\theta = 0$$

同样解得 $F_{BA} = \dfrac{2F\sin\theta}{\cos 2\theta}$。

最后取杆 OA，其受力图如图所示，由

$$\sum M_i = 0,\quad F_{AB}\cos\theta\cdot a - M = 0$$

解得力 F 与力偶矩 M 的关系为

$$F = \frac{M}{a}\cot 2\theta$$

第2章作业

2-11 图 T2-16 中，已知 $F_1=150$ N，$F_2=200$ N，$F_3=300$ N，$F=F'=200$ N。图中尺寸的单位为 mm。求力系向点 O 简化的结果；并求力系合力的大小及其与原点 O 的距离 d。

解 （1）向 O 点简化。各量正值指（转）向如图 J2-9 所示，大小为

$$F_{Rx}=-F_1\sqrt{2}/2-F_2\sqrt{10}/10-F_3 2\sqrt{5}/5=-437.62\ \text{N}$$

$$F_{Ry}=-F_1\sqrt{2}/2-F_2\times 3\sqrt{10}/10-F_3\sqrt{5}/5=-161.62\ \text{N}$$

$$M_O=(F_1\times 100\times\sqrt{2}/2+F_3\times 200\times\sqrt{5}/5-F_4\times 80)\ \text{mm}=21\ 439.4\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

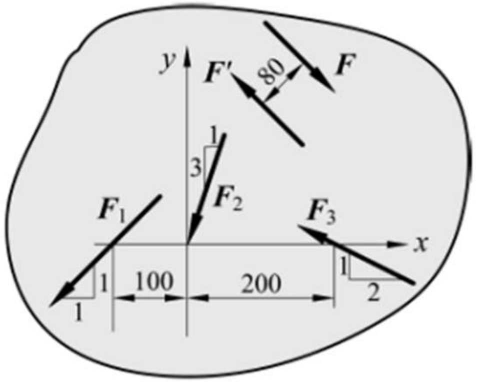


图 T2-16

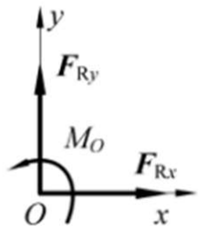


图 J2-16

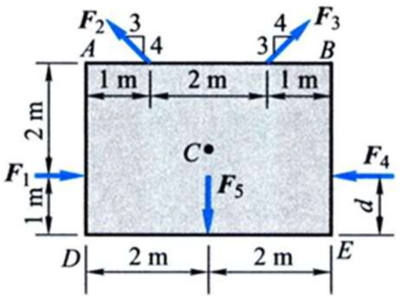
（2）合力大小为

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=466.5\ \text{N}$$

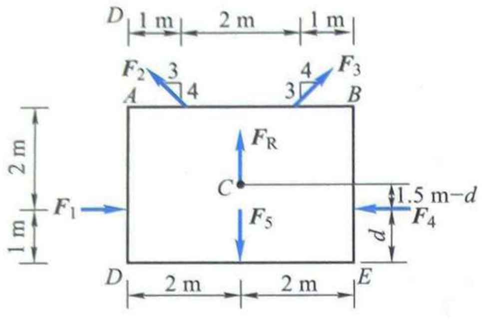
距离原点

$$d=M_O/F_R=45.96\ \text{mm（原点的左上方）}$$

2-14 如图所示，平面上有 5 个力作用。已知 $F_1 = F_2 = F_3 = F_5 = 1\ 000$ N，水平力 F_4 的大小及位置未定。如果要使这 5 个力的合力 F_R 通过长方形的形心 C 且铅垂向上，求 F_4 的大小及其离 DE 线的距离 d，并求此时合力 F_R 的大小。



题 2-14 图



题 2-14 图

解：首先将力系向形心 C 点简化。

$$F_{Rx} = \sum F_x = F_1 - F_2 \times \frac{3}{5} + F_3 \times \frac{4}{5} - F_4 = 0$$

解得

$$F_4 = 1\ 200\ \text{N}$$

$$F_R = F_{Ry} = \sum F_y = F_2 \times \frac{4}{5} + F_3 \times \frac{3}{5} - F_5 = 400\ \text{N}$$

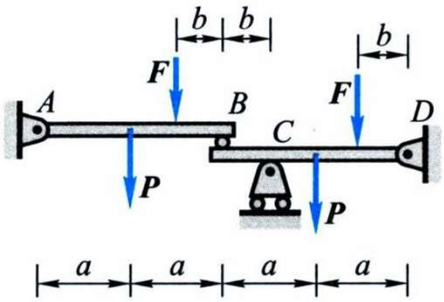
$$\begin{aligned} M_C &= \sum M_C(F) \\ &= F_1 \times 0.5\ \text{m} + F_2 \times \frac{3}{5} \times 1.5\ \text{m} - F_2 \times \frac{4}{5} \times 1\ \text{m} - \\ &\quad F_3 \times \frac{4}{5} \times 1.5\ \text{m} + F_3 \times \frac{3}{5} \times 1\ \text{m} - F_4 \times (1.5\ \text{m} - d) = 0 \end{aligned}$$

解得

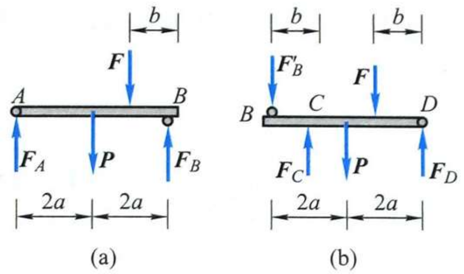
$$d = 1.5\ \text{m}$$

第2章作业

2-21 复梁 AB 和 CD 的重量均为 $P=2\ 000$ N，长度均为 $2a=4$ m，其受力和支承情况如图所示。设载荷 $F=800$ N，$b=1$ m。求支座 A、D 和 C 的约束力。



题 2-21 图



题 2-21 图

解： 研究梁 AB，受力如图 a 所示，列平衡方程

$$\sum F_y = 0,\quad F_A + F_B - F - P = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0,\quad -P\times 2\ \text{m} - F\times 3\ \text{m} + F_B\times 4\ \text{m} = 0$$

解得

$$F_A = 1\ 200\ \text{N},\quad F_B = 1\ 600\ \text{N}$$

研究梁 BCD，受力如图 b 所示，列平衡方程

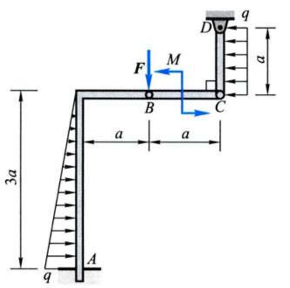
$$\sum F_y = 0,\quad F_C + F_D - F'_B - F - P = 0$$

$$\sum M_B(F) = 0,\quad F_C\times 1\ \text{m} - P\times 2\ \text{m} - F\times 3\ \text{m} + F_D\times 4\ \text{m} = 0$$

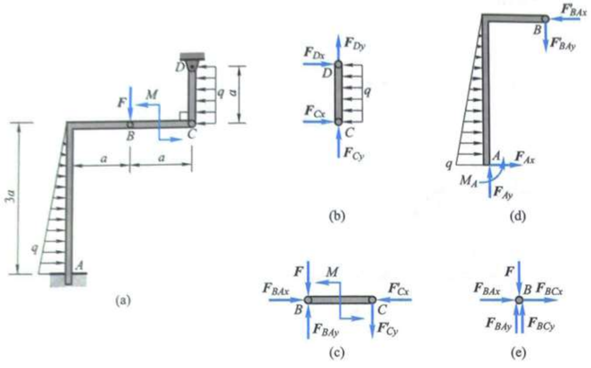
解得

$$F_C = 3\ 733\ \text{N},\quad F_D = 667\ \text{N}$$

2-39 图示构架由直杆 BC、CD 和直角弯杆 AB 组成，各杆的自重不计，载荷分布和尺寸如图所示。销 B 穿透 AB 和 BC 两构件，在销 B 上作用一集中载荷 $\boldsymbol{F}$。q、a、M 为已知，且 $M=qa^2$。求固定端 A 处的约束力和销 B 对杆 BC、AB 的作用力。



题 2-39 图



题 2-39 图

解： 先研究杆 CD，其受力图如图 b 所示，由

$$\sum M_D=0,\quad F_{Cx}\cdot a-qa\cdot\frac{a}{2}=0$$

解得

$$F_{Cx}=\frac{1}{2}qa$$

接着研究杆 BC，包含销 B，其受力图如图 c 所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_{BAx}-F'_{Cx}=0$$

$$\sum M_C=0,\quad F\cdot a-F_{BAy}\cdot a+M=0$$

解得销 B 对杆 AB 的作用力为

$$F_{BAx}=\frac{1}{2}qa,\quad F_{BAy}=F+qa$$

再研究弯杆 AB，其受力图如图 d 所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}-F'_{BAx}+\frac{1}{2}q\cdot 3a=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F'_{BAy}=0$$

$$\sum M_A=0,\quad M_A-F'_{BAy}\cdot a+F'_{BAx}\cdot 3a-\frac{1}{2}q\cdot 3a\cdot a=0$$

解得固定端 A 处的约束力为

$$F_{Ax}=-qa,\quad F_{Ay}=F+qa,\quad M_A=(F+qa)a$$

最后研究销 B，其受力图如图 e 所示，由

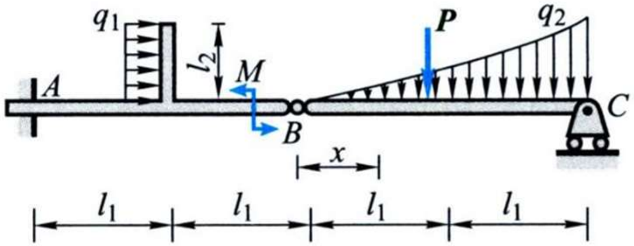
$$\sum F_x=0,\quad F_{BAx}+F_{BCx}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{BAy}+F_{BCy}-F=0$$

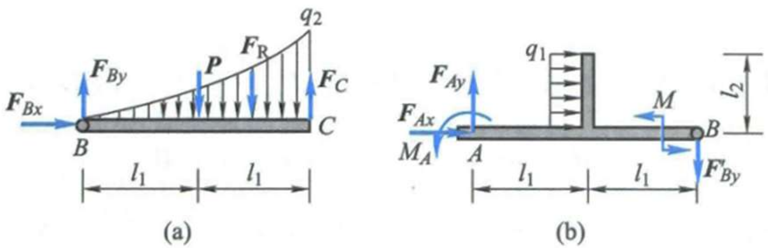
解得销 B 对杆 BC 的作用力为

$$F_{BCx}=-\frac{1}{2}qa,\quad F_{BCy}=-qa$$

2-43 如图所示组合结构由杆 BC 及 T 形杆 AB 铰接而成。已知：$P=4\ \mathrm{kN}$，$q_1=4\ \mathrm{kN/m}$，抛物线分布载荷 $q_2=3x^2$（q_2 以 kN/m 计，x 以 m 计），$M=3.5\ \mathrm{kN\cdot m}$，$l_1=1\ \mathrm{m}$，$l_2=0.5\ \mathrm{m}$。试求固定端 A 及活动铰链支座 C 的约束力。



题 2-43 图



题 2-43 图

解：杆 BC 上分布力的合力为

$$F_R=\int_0^{2l_1} q_2\mathrm{d}x=\int_0^{2l_1}3x^2\mathrm{d}x=8\ \mathrm{kN}$$

由合力矩定理，对 B 点取矩，得合力作用线位置：

$$F_R x_C=\int_0^{2l_1} q_2\mathrm{d}x\cdot x=12\ \mathrm{kN\cdot m}$$

得

$$x_C=1.5\ \mathrm{m}$$

取杆 BC 为研究对象，其受力图如图 a 所示，列平衡方程

$$\sum M_B(F)=0,\quad F_C\cdot 2l_1-P\cdot l_1-F_R\cdot x_C=0$$
$$\sum F_x=0,\quad F_{Bx}=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F_{By}+F_C-F_R-P=0$$

解得

$$F_C=8\ \mathrm{kN},\quad F_{Bx}=0,\quad F_{By}=4\ \mathrm{kN}$$

取杆 AB 为研究对象，其受力图如图 b 所示，列平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+q_1l_2=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F'_{By}=0$$
$$\sum M_A(F)=0,\quad M_A+M-2l_1F'_{By}-\frac{1}{2}q_1l_2^2=0$$

解得

$$F_{Ax}=-2\ \mathrm{kN},\quad F_{Ay}=F'_{By}=4\ \mathrm{kN},\quad M_A=5\ \mathrm{kN\cdot m}$$

2-57 求图 T2-57 所示桁架杆 1,2,3 的内力。

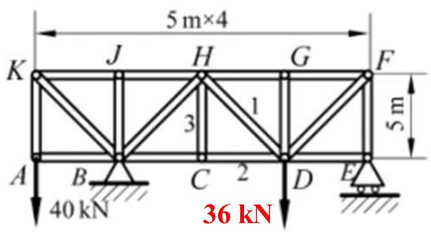


图 T2-57

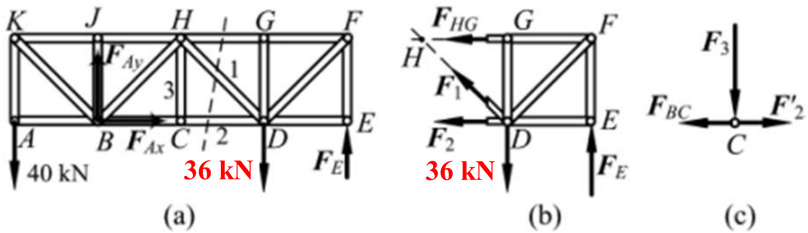


图 J2-57

解 (1) 整体受力分析如图 T2-57(a)所示。对 B 的矩平衡方程为

$$\sum M_B = 0: \quad F_E \times 15 - 36\ \text{kN} \times 10 + 40\ \text{kN} \times 5 = 0$$

解得

$$F_E = 32/3\ \text{kN} = 10.67\ \text{kN}$$

(2) 作截面切断 HG，1 和 2 杆，取右侧部分，受力分析如图 J2-57(b)所示。列平衡方程

$$\sum M_H = 0: F_2 \times 5 + F_E \times 10 - 36\ \text{kN} \times 5 = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_1 \sin 45^\circ + F_E - 60\ \text{kN} = 0$$

解得

$$F_2 = -44/3\ \text{kN} = -14.67\ \text{kN} \quad , \quad F_1 = 76\sqrt{2}/3\ \text{kN} = 35.83\ \text{kN}$$

(3) 取节点 C，受力分析如图 J2-57(c)所示。列平衡方程

$$\sum F_y = 0: \quad F_3 = 0$$

可得 $F_3 = 0$。

2-60 平面桁架的支座和载荷如图 T2-60 所示，求杆 1、2 和 3 的内力。

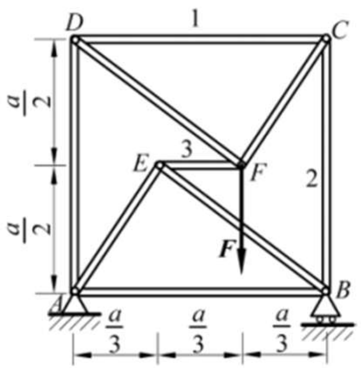


图 T2-60

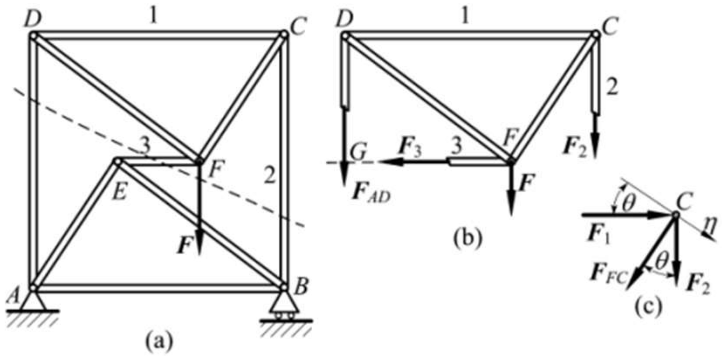


图 J2-60

解 按图 J2-60(a)虚线所示截面，取截开的上半部分进行分析，受力如图 J2-60(b)所示。列平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0:\ F_3 = 0 \\ \sum M_D = 0:\ F_2 \times a + F \times 2a/3 = 0 \end{cases}$$

技巧1：取通过三个杆的截面

解得

$$F_3 = 0;\quad F_2 = -2F/3$$

再取节点 C，受力分析如图 J2-60(c)所示。沿 η 方向（$\boldsymbol{F}_{FC}$ 的垂直方向）投影有

$$F_2 \sin\theta + F_1 \cos\theta = 0$$

可解出

技巧2：投影到未知力的垂直方向

$$F_1 = F_2 \tan\theta = 2/3F \times 2/3 = 4F/9$$