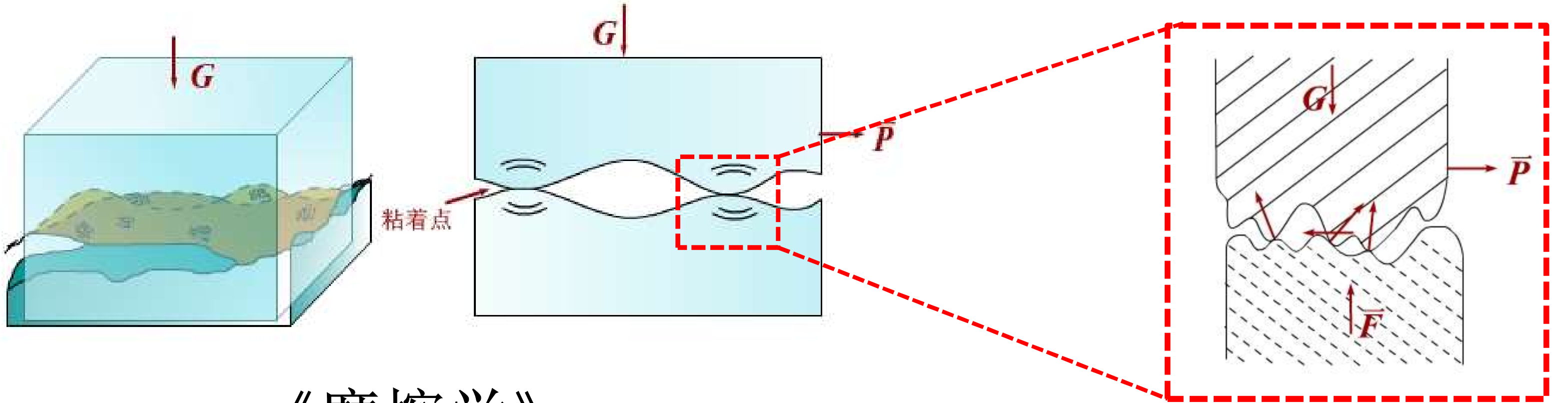
第四章　摩　擦

摩擦被定义为“在两个粗糙表面之间发生的抵抗相对运动的现象。”

摩擦
- 滑动摩擦
  - 静滑动摩擦
  - 动滑动摩擦
- 滚动摩擦
  - 静滚动摩擦
  - 动滚动摩擦



《摩擦学》

两本电话本交叠，产生的摩擦力可以有多大？

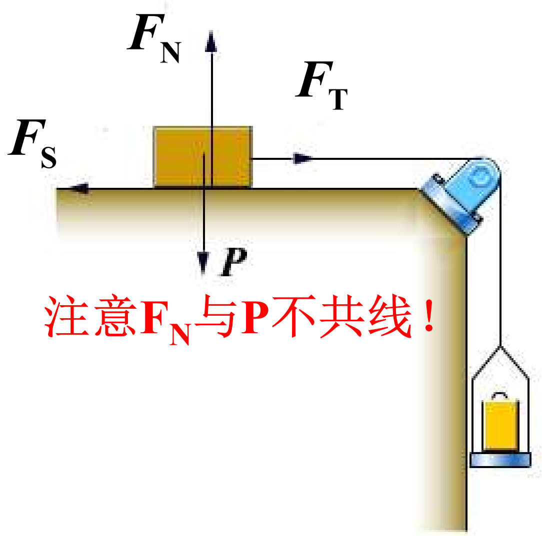
https://www.bilibili.com/video/BV1aB4y1J72P/?share_source=copy_web&vd_source=4340fc1f5ffdd1da9b42868674483118

本章主要内容：

1. 掌握静、动摩擦系数，了解摩擦角、自锁和滚动摩阻的概念。
2. 能熟练应用解析法求解考虑摩擦时物体的平衡问题。（摩擦力与法向约束力的作用点）

1. 滑动摩擦力

接触面对物体作用的切向约束力



注意F_N与P不共线！

2. 平衡状态

A）静止； B）临界（将滑未滑）； C）匀速滑动

$$\sum F_x = F_T - F_S = 0$$

$$F_S = F_T$$

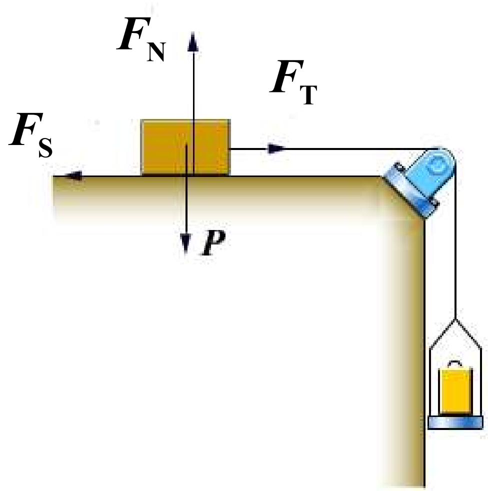
3. 静滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，
与相对滑动趋势反向；

大小：$0 \le F_s \le F_{max}$ （范围）

$$F_{max} = f_s F_N$$ （库仑摩擦定律）

4. 临界滑动摩擦力的特点



方向：沿接触处的公切线，与相对滑动趋势反向；

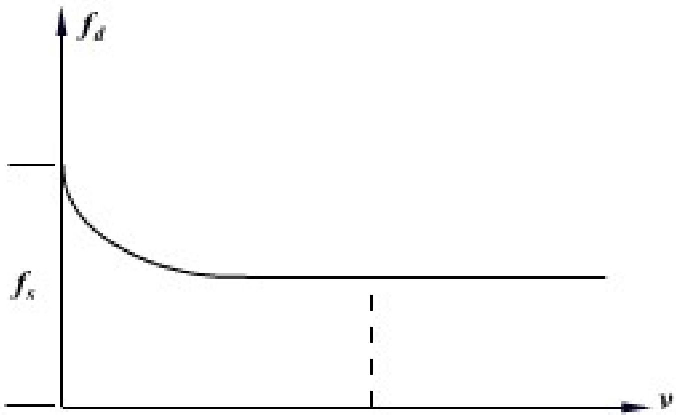
大小：$F_{\max} = f_s F_N$

5. 动滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，与相对滑动方向反向；

大小：$F_d = f_d F_N$

$f_d < f_s$（对多数材料，通常情况下，f_d随着速度增加而下降）



一. 摩擦角

$\vec{F}_{RA}$ --全约束力：法向约束力+切向摩擦力

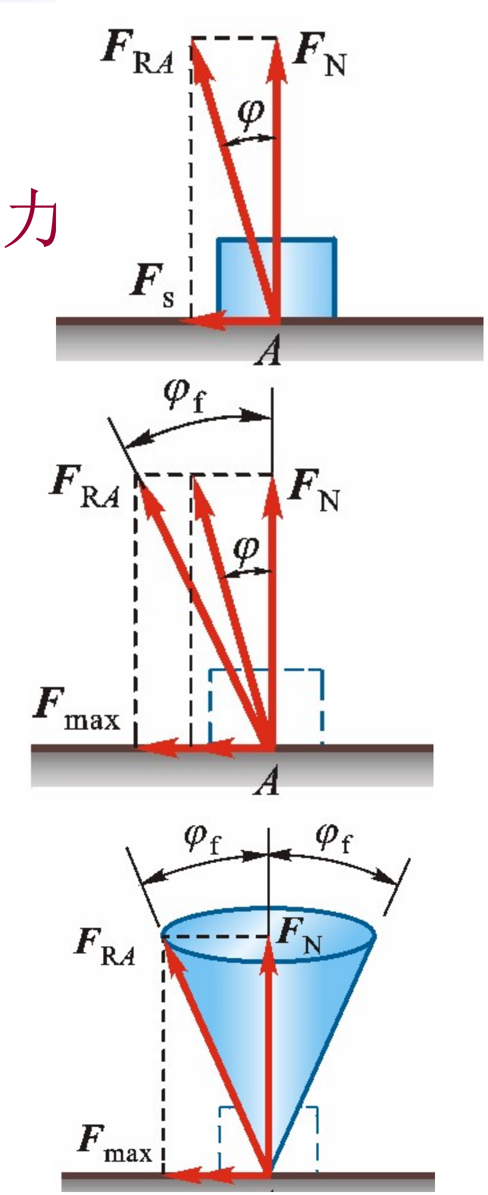
物体处于临界平衡状态时，全约束力和法线间的夹角--摩擦角

$$\tan\varphi_f = \frac{F_{max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

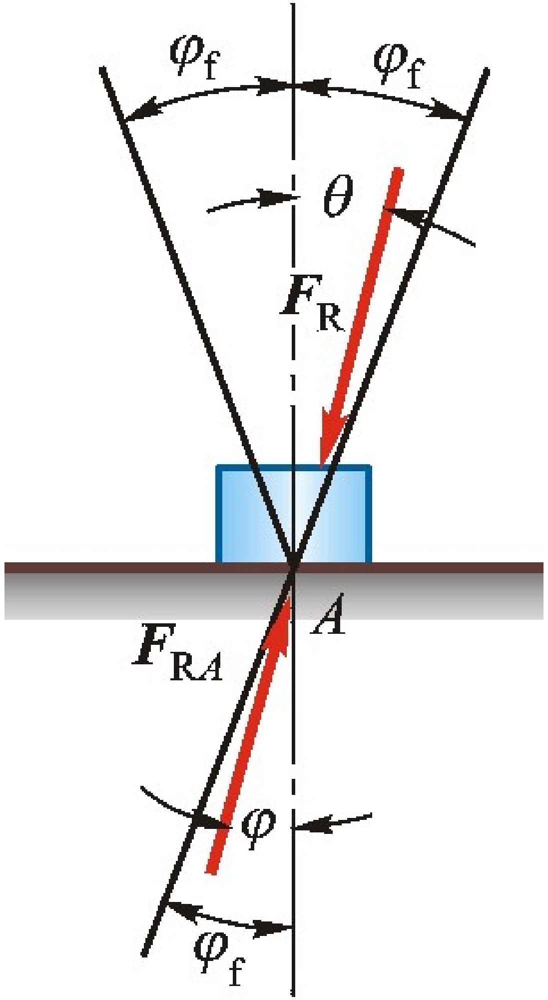
全约束力和法线间的夹角的正切等于静滑动摩擦系数.

摩擦锥 $0 \le \varphi \le \varphi_f$

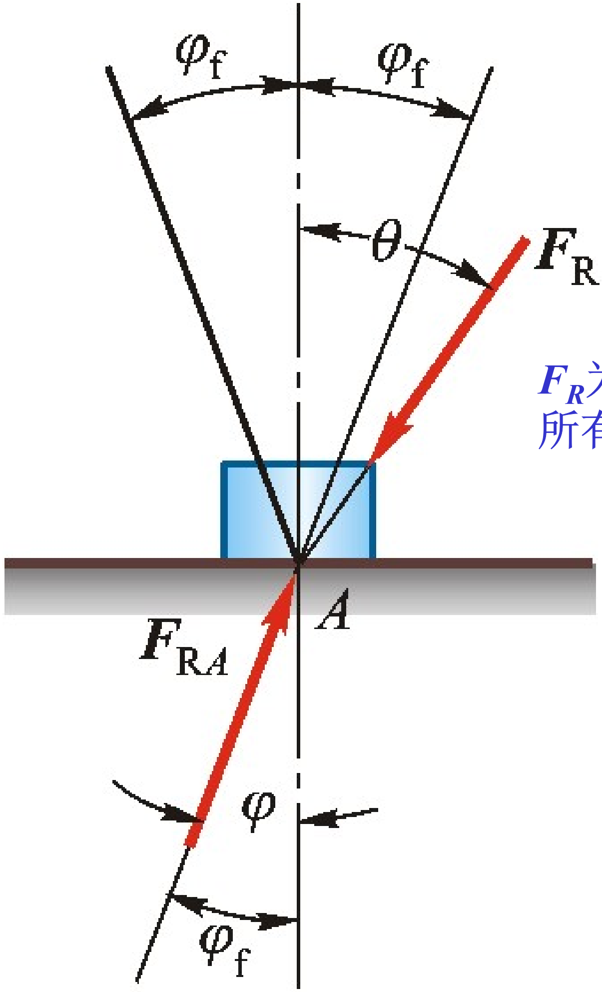
（全约束力只能在摩擦锥内部）



二. 自锁现象



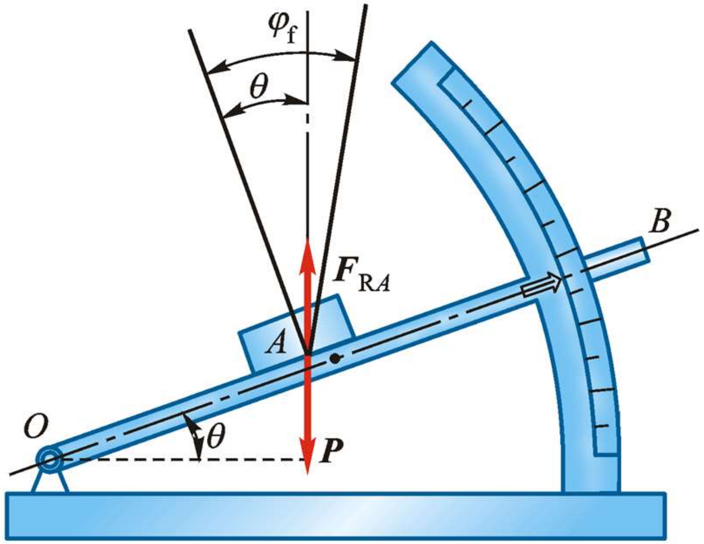
二力平衡，自锁



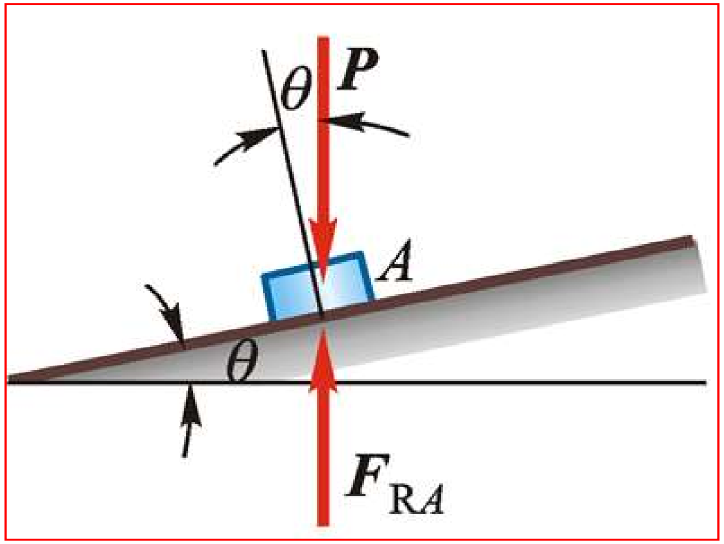
F_R为包括重力在内所有主动力的合力

全约束力最大角度为φ_f，移动

三. 测定摩擦系数的一种简易方法



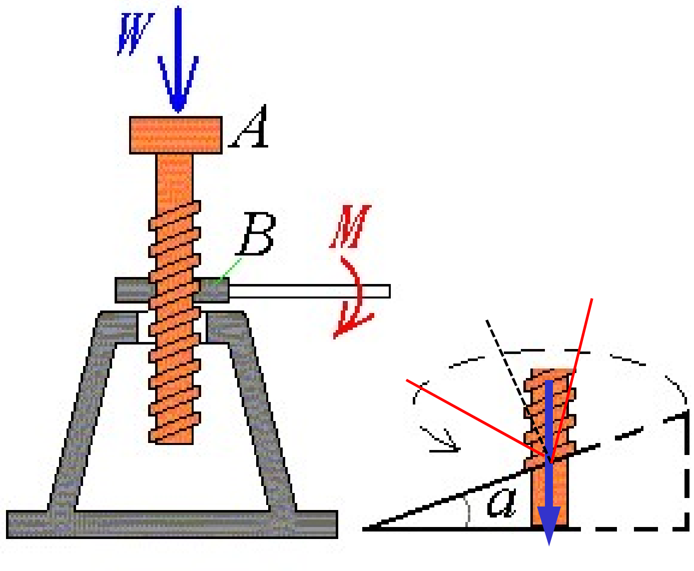
$$\tan\theta = \tan\varphi_f = f_s$$



斜面自锁条件 $\theta \le \varphi_f$

§4-2 摩擦角和自锁现象

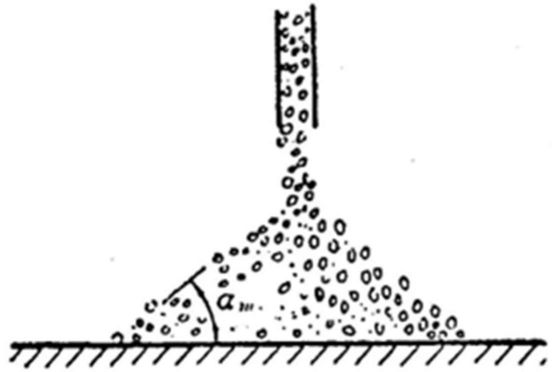
千斤顶

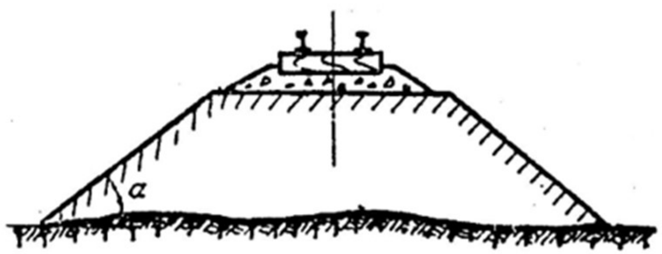


自锁条件

$$\alpha \leq \varphi_f$$

粮食、沙子等最大堆放角度





§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

仍为平衡问题，平衡方程照用，求解步骤与前面基本相同.

$\boxed{\text{几个新特点}}$

1 画受力图时，必须考虑摩擦力以及法向约束力的作用点（法向约束力不一定与重力重合）；

2 严格区分物体处于临界、非临界状态；

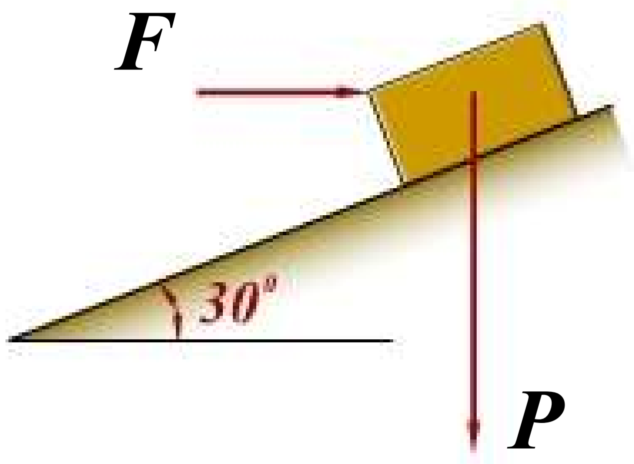
3 因 $0 \le F_s \le F_{max}$，问题的解有时在一个范围内（可以先假设平衡，进行求解）.

4 摩擦面全约束反力$\boldsymbol{F_R}$的作用线一定位于摩擦锥内；

例4-1（平衡判断）

已知：$P=1500\text{N}$，$f_s=0.2$，$f_d=0.18$，$F=400\text{N}$。

求：物块是否静止，摩擦力的大小和方向.



解此类问题的思路是：先假设物体静止和摩擦力的方向，应用平衡方程求解，将求得的摩擦力与最大静摩擦力比较，确定物体是否静止

解： 设物块平衡，假设摩擦力向下，画受力图

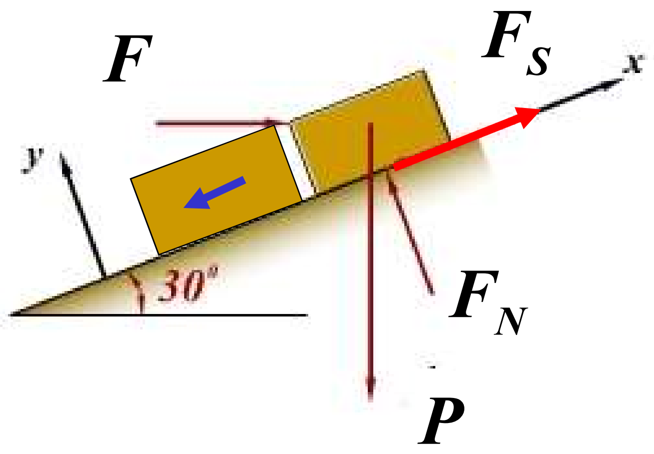
$$\sum F_x = 0 \qquad F\cos 30° - P\sin 30° - F_s = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F\sin 30° - P\cos 30° + F_N = 0$$

$$F_s = -403.6\text{N}(\text{向上}) \qquad F_N = 1499\ \text{N}$$

而 $F_{max} = f_s F_N = 299.8\text{N}$

$|F_s| > F_{max}$ ，物块不可能在斜面上静止，而是向下滑动



物块沿斜面向下运动（非平衡状态）。摩擦力为动滑动摩擦力，动摩擦力方向沿斜面向上。

$$F_d = f_d F_N = 269.8\text{N}\text{，向上.}$$

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

静滑动摩擦力的特点

大小：$0 \le F_s \le F_{max}$ （范围）

$F_{max} = f_s F_N$ （库仑摩擦定律）

方向：沿接触处的公切线，与相对滑动趋势/方向反向；

动滑动摩擦力的特点

大小：$F_d = f_d F_N$

带摩擦力的平衡问题几个新特点

1 画受力图时，必须考虑摩擦力以及法向约束力的作用点（法向约束力不一定与重力重合）；

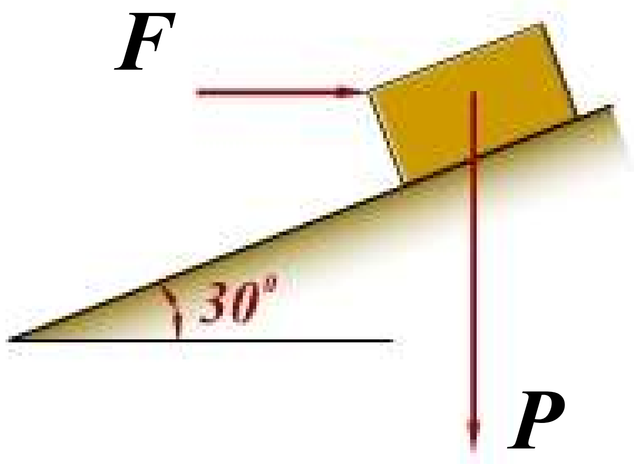
2 严格区分物体处于临界、非临界状态；

3 因 $0 \le F_s \le F_{max}$，问题的解有时在一个范围内（可以先假设平衡，进行求解）.

例4-1（平衡判断）

已知： $P=1500\text{N}$，$f_s=0.2$，$f_d=0.18$，$F=400\text{N}$。

求： 物块是否静止，摩擦力的大小和方向.

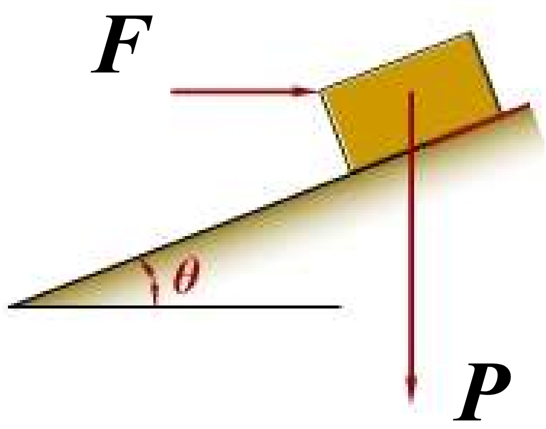


解此类问题的思路是：先假设物体静止和摩擦力的方向，应用平衡方程求解，将求得的摩擦力（大小与方向）与最大静摩擦力比较，确定物体是否静止

例4-2（临界滑动状态）

已知： P, θ, f_s .

求： 使物块静止，水平推力$\boldsymbol{F}$ 的大小.



分析使物块静止的临界条件

（最大静摩擦力，两个趋势方向）

解： 使物块有上滑趋势时，摩擦力向下，推力为 F_1

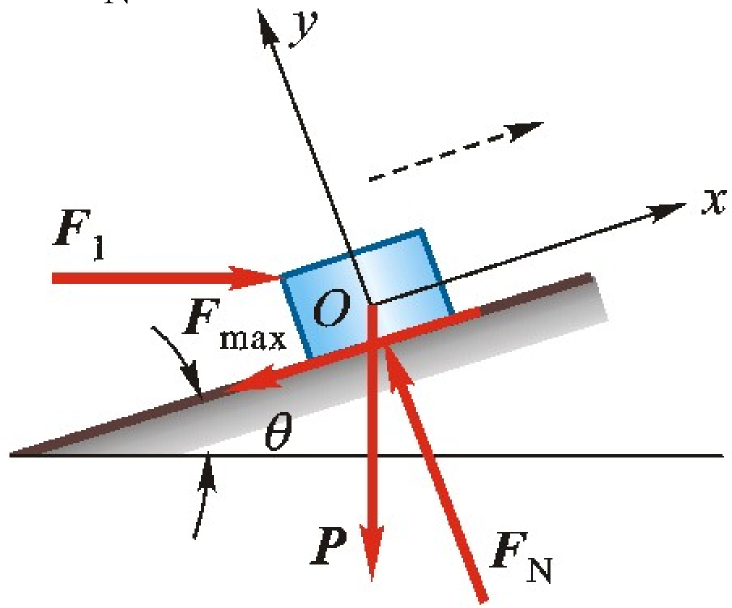
画物块受力图

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1 \cos\theta - P\sin\theta - F_{max} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_1 \sin\theta - P\cos\theta + F_N = 0$$

$$F_{max} = f_s F_N$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta} P$$



物块静止时候，推力满足

$$F \le F_1$$

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

设物块有下滑趋势时，摩擦力向上，推力为 F_2

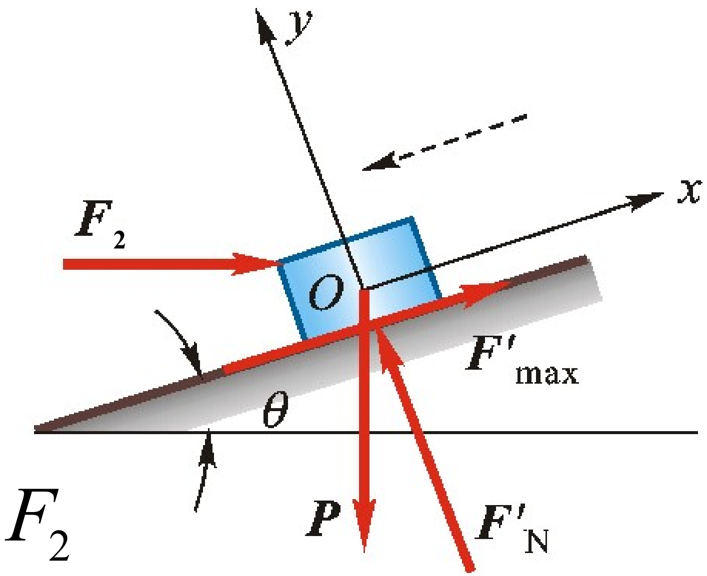
画物块受力图

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_2\cos\theta - P\sin\theta + F'_{\max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_2\sin\theta - P\cos\theta + F'_N$$

$$F'_{\max} = f_s F'_N$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}P$$

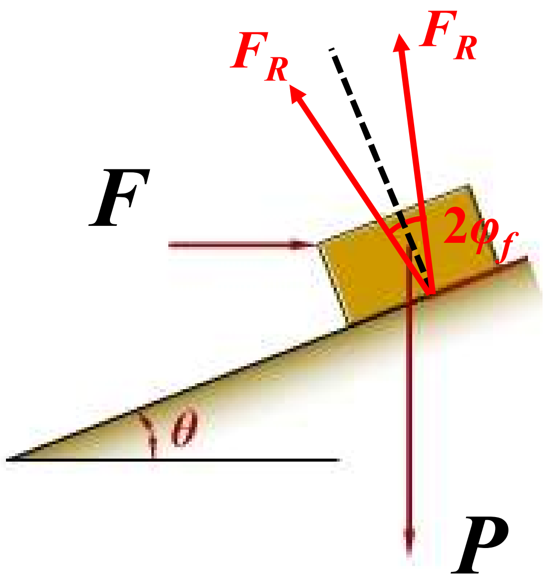


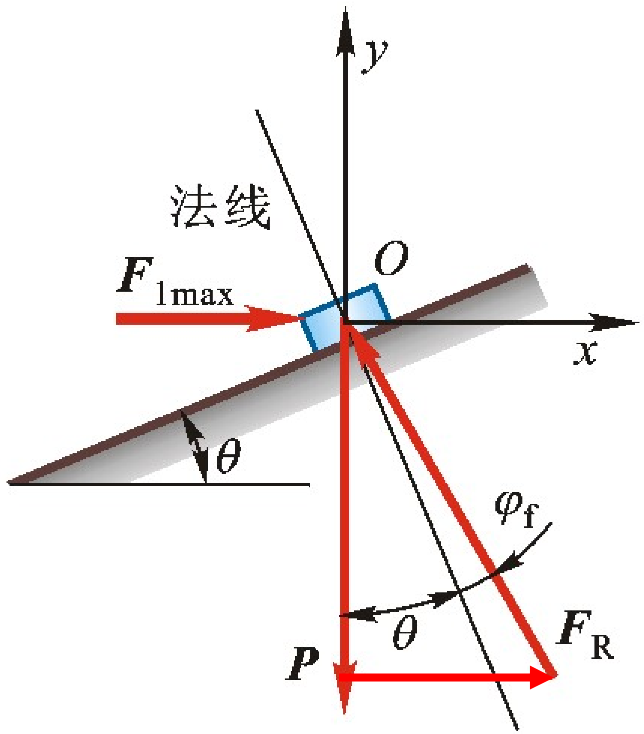
物块静止时候，推力满足 $F \geq F_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}P \leq F \leq \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}P$$

用几何法求解:摩擦角

物块有向上滑动趋势时,最大约束反力在摩擦角内





物块平衡—

力三角形封闭

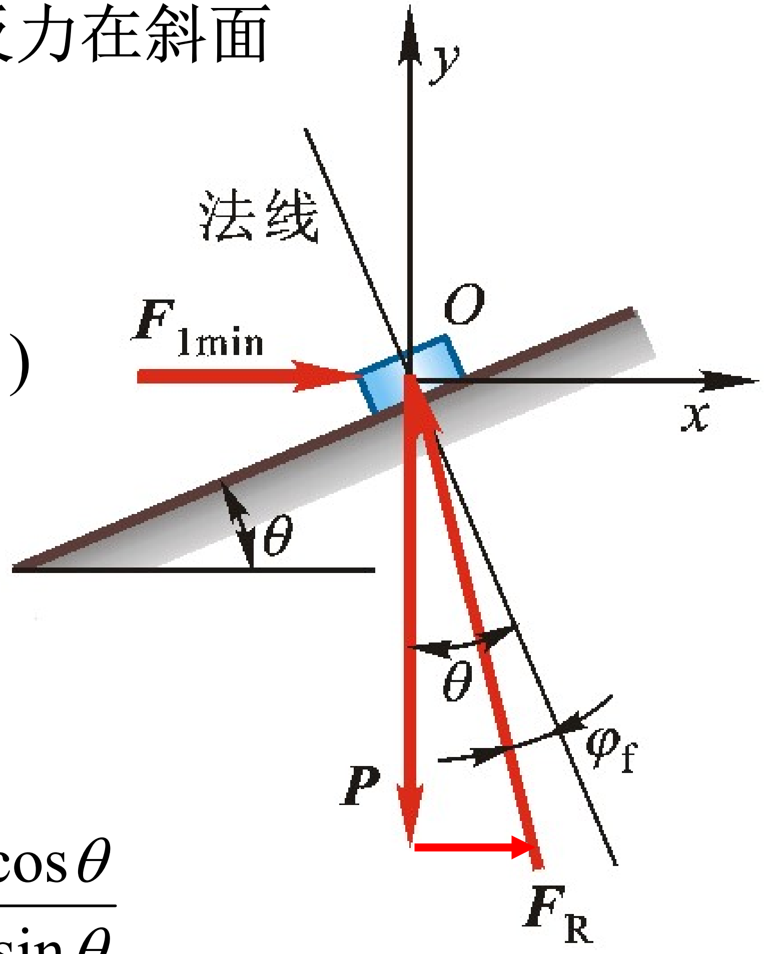
$$F_{1\max} = P\tan(\theta+\varphi_f)$$

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

物块有向下滑动趋势时，最大约束反力在斜面法线另一侧，

$$F_{1\min} = P\tan(\theta - \varphi_f)$$

$$P\tan(\theta - \varphi_f) \le F \le P\tan(\theta + \varphi_f)$$



利用三角公式与$\tan\varphi_f = f_s$，

$$\tan(A+B) = (\tan A+\tan B)/(1-\tan A\tan B)$$

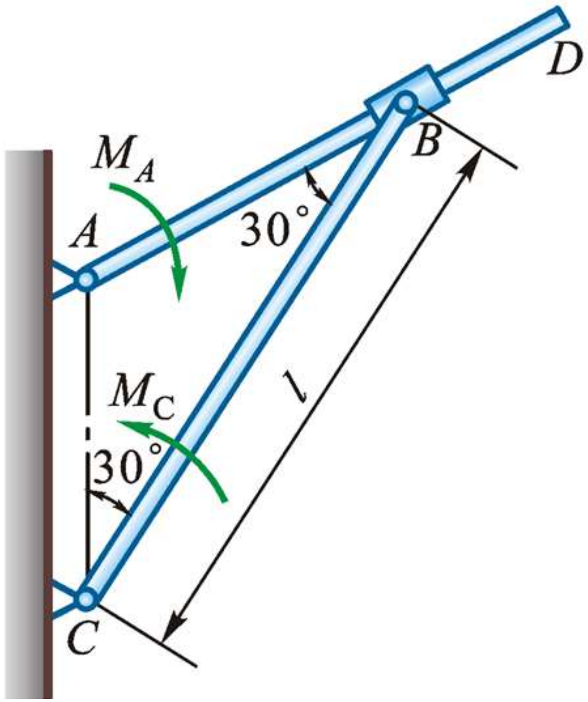
$$P\frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta} \le F \le P\frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}$$

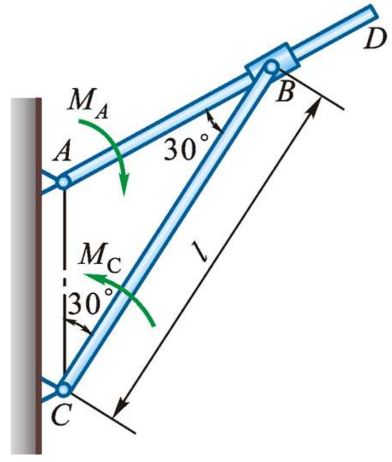
例4-3（主动力为力偶）

已知：$M_A = 40\mathrm{N \cdot m}$，$f_s = 0.3$，各构件自重不计，

尺寸如图；

求：保持系统平衡的力偶矩 M_C.

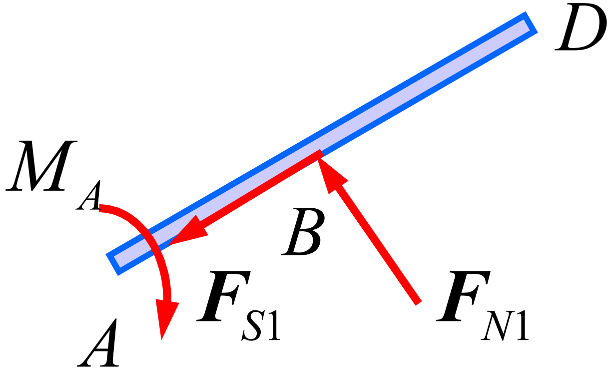


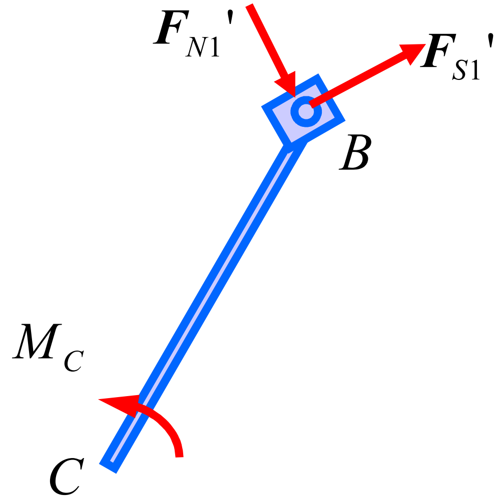


解： 设 $M_C = M_{C1}$时，

系统即将逆时针方向转动

画两杆受力图.





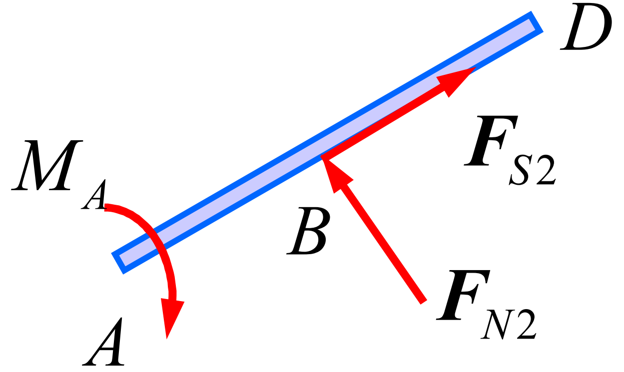
$$\Sigma M_A = 0 \qquad\qquad \Sigma M_C = 0$$

$$F_{N1} \cdot AB - M_A = 0 \qquad M_{C1} - F'_{N1} \cdot l \sin 60^\circ - F'_{s1} \cdot l \cos 60^\circ = 0$$

$$F'_{s1} = F_{s1} = f_s F_{N1} = f_s F'_{N1} \quad \Longrightarrow \quad M_{C1} = 70.39\mathrm{N \cdot m}$$

设 $M_C = M_{C2}$ 时，系统有顺时针方向转动趋势

画两杆受力图.



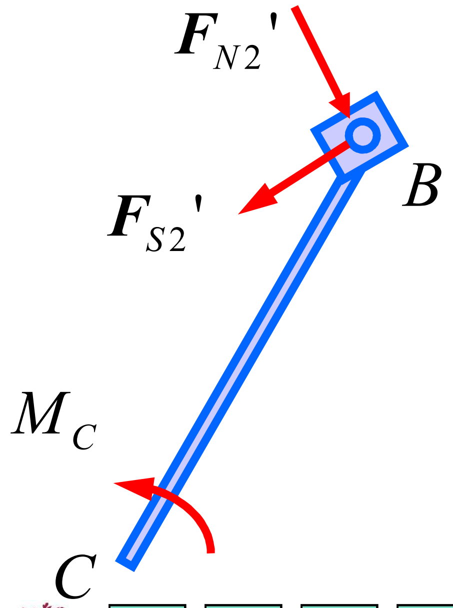
$$\sum M_A = 0$$

$$F_{N2} \cdot AB - M_A = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

$$M_{C2} - F'_{N2} \cdot l \sin 60^\circ - F'_{s2} \cdot l \cos 60^\circ = 0$$

$$F'_{s2} = F_{s2} = f_s F_{N2} = f_s F'_{N2}$$



⇒ $M_{C2} = 49.61\,\mathrm{N \cdot m}$

⇒ 系统平衡时

$$49.61\,\mathrm{N \cdot m} \le M_C \le 70.39\,\mathrm{N \cdot m}$$

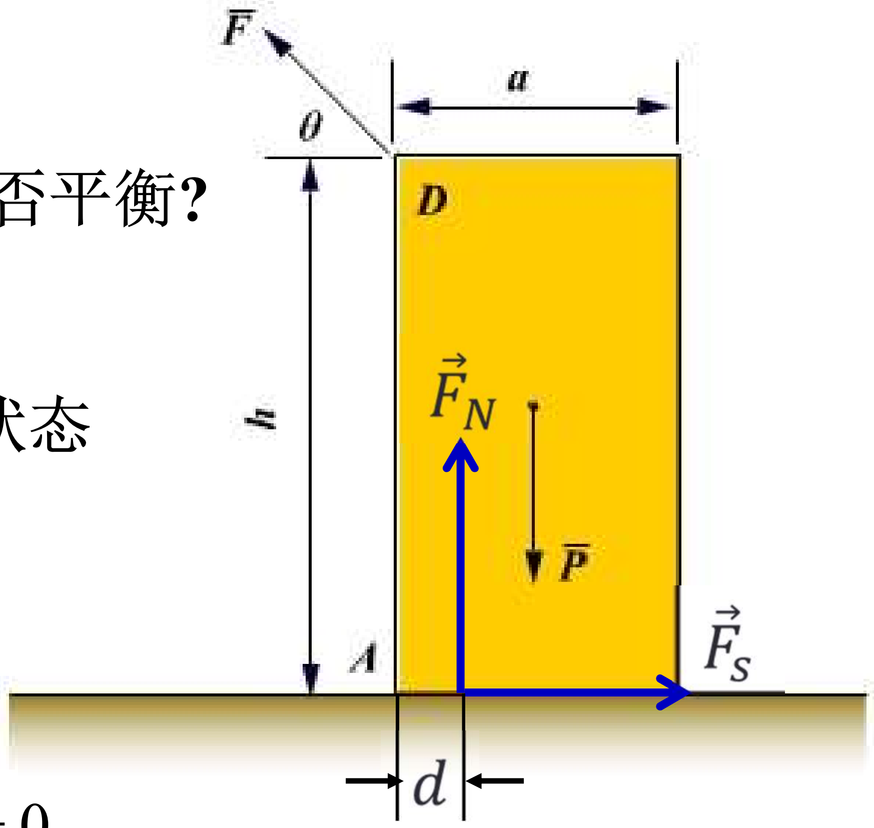
例4-4（箱子倾覆问题）

已知均质木箱重P=5kN, f_s=0. 4, h=2a=2m, θ=30°. 求

(1)当**D**处为拉力F=1kN时，木箱是否平衡?

(2)能保持木箱平衡的最大拉力.

讨论：F_N的作用线位置如何确定？



解：（1）取木箱，设其处于平衡状态

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_s - F\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_N - P + F\sin\theta = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad hF\cos\theta - P\cdot\frac{a}{2} + F_N d = 0$$

因此 $F_s = 866\text{N} \qquad F_N = 4500\text{N} \qquad d = 0.171\text{m}$

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

$$F_{\max} = f_s F_N = 1800\text{N}$$

$F_s < F_{\max}$，木箱不会滑动

又 $d>0$, 木箱无翻倒趋势.　$\boxed{\text{木箱平衡}}$

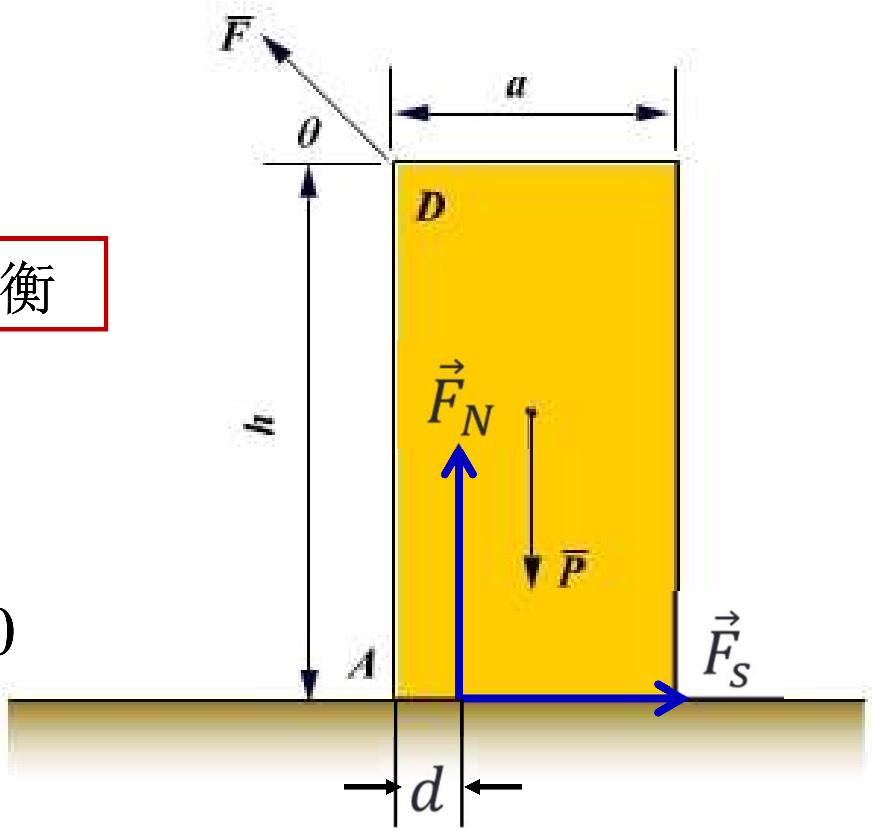
(2) 设木箱将要滑动时拉力为F_1

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_s - F_1 \cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_N - P + F_1 \sin\theta = 0$$

$$F_s = F_{\max} = f_s F_N$$

解得 $$F_1 = \frac{f_s P}{\cos\theta + f_s \sin\theta} = 1876\text{N}$$



§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

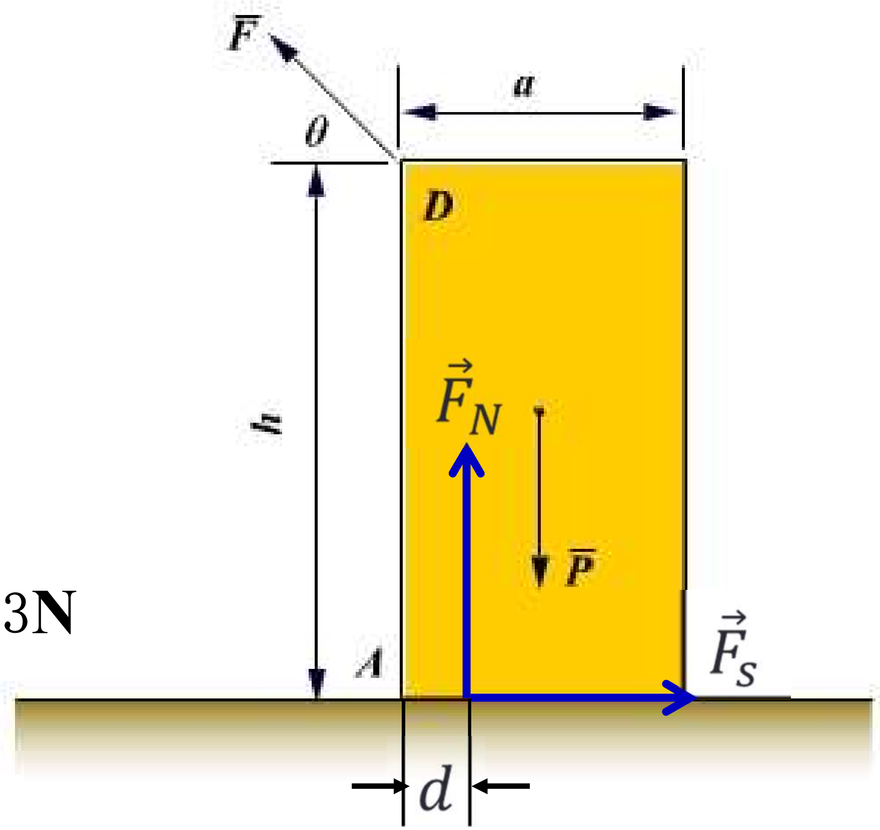
设木箱有翻动趋势时拉力为$\boldsymbol{F}_2$

此时支撑力$\boldsymbol{F}_N$作用线满足$\boldsymbol{d}$=0

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_2 \cos\theta \cdot h - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

解得 $$F_2 = \frac{Pa}{2h\cos\theta} = 1443\text{N}$$

能保持木箱平衡的最大拉力为1443N



木箱将要滑动（向左侧）时拉力为$\boldsymbol{F}_1$=1876N

木箱将要翻动（绕A点）时拉力为$\boldsymbol{F}_2$=1443N

因此，木箱在拉力$\boldsymbol{F}$增大过程中，会先发生翻动。

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

例4-5 均质轮重 $P=100\text{N}$，杆无重，r，l，$\theta=60^\circ$ 时，

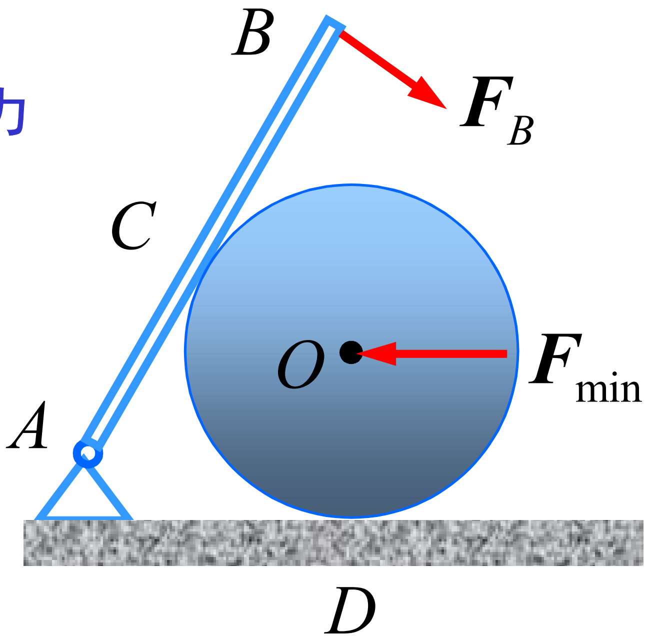
$$AC=CB=\frac{l}{2};\ F_B=50\text{N},\ f_C=0.4\text{（杆与轮间）}$$

求：若要维持系统平衡

（1）$f_D=0.3$ (轮与地面间静摩擦系数），轮心O处水平推力$\boldsymbol{F}_{\min}$

（2）$f_D=0.15$（轮与地面间静摩擦系数），轮心O处水平推力$\boldsymbol{F}_{\min}$.

两个摩擦力作用



f_D 大于某值，轮将沿AB板滑动.

f_D 小于某值，轮将向右滑动.

轮离开平衡状态，开始滑动有两种可能：沿杆AB滑动，沿地面滑动

§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

我们是否可以直接代入静摩擦系数，假设C与D两处的摩擦力均达到最大值，直接进行平衡分析？

⇩

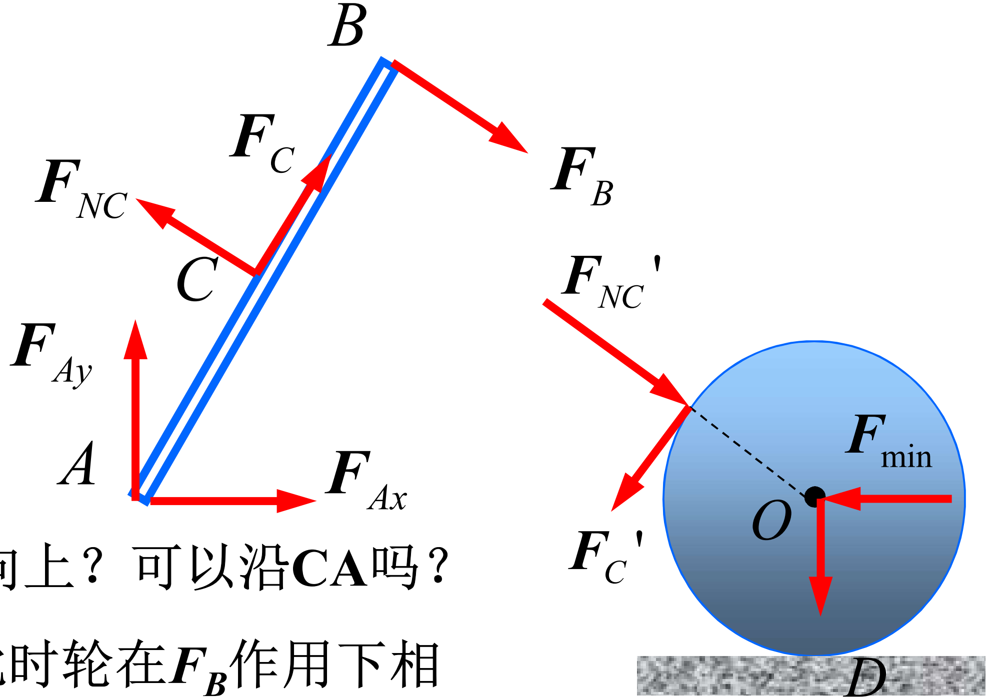
C, D 两处有一处摩擦力达最大值，系统即将运动.

解： 先设 C 处摩擦力达最大值，开始滑动（D不动）.

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_{NC}\cdot\frac{l}{2} - F_B\cdot l = 0$$

$$\Rightarrow F_{NC} = 100\text{N}$$

$$\Rightarrow F_C = F_{C\max} = f_C F_{NC} = 40\text{N}$$



为什么C处的最大静摩擦力沿CB方向向上？可以沿CA吗？

因为我们要求的是最小水平力F_{min}，此时轮在F_B作用下相对平板AB向B运动，板对轮摩擦力指向A，反作用力指向B

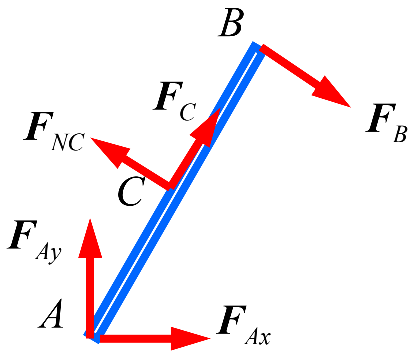
对轮列平衡方程

$$\Sigma M_O = 0 \quad F'_C \cdot r - F_D \cdot r = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad F'_{\mathrm{NC}} \sin 60^{\circ} - F'_C \cos 60^{\circ} - F_{\min} - F_D = 0$$

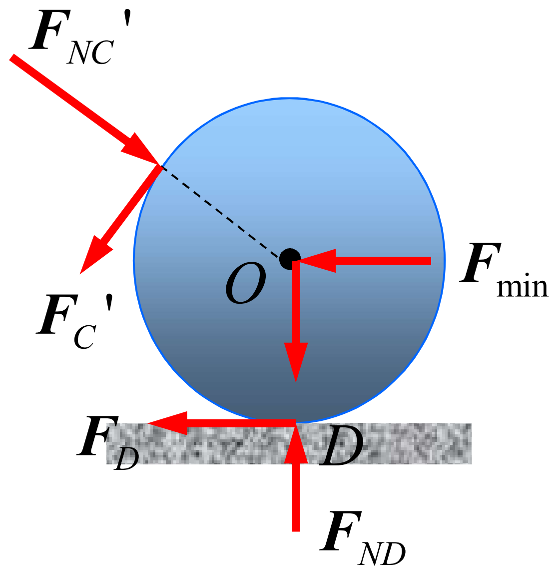
$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{\mathrm{ND}} - P - F_{\mathrm{NC}}' \cos 60^{\circ} - F_C' \sin 60^{\circ} = 0$$

$$F'_{\mathrm{NC}} = F_{\mathrm{NC}} = 100\mathrm{N}$$



$$F_D = F'_C = 40\mathrm{N} \quad F_{\min} = 26.6\mathrm{N}$$

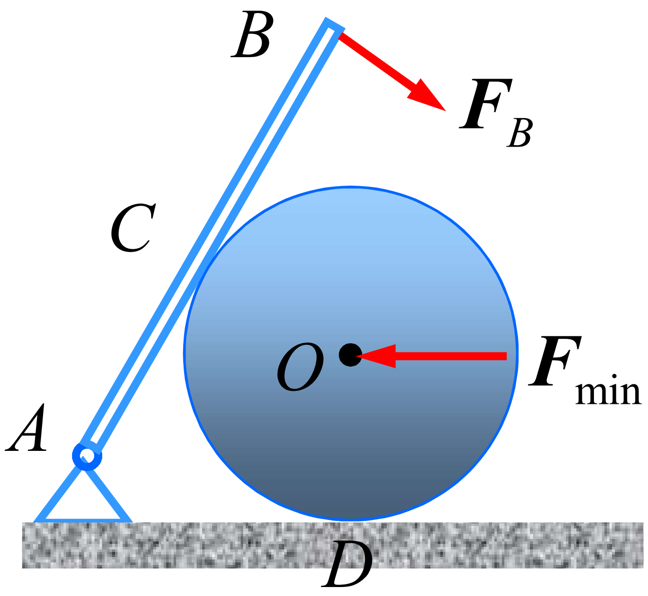
$$F_{\mathrm{ND}} = 184.6\mathrm{N}$$



§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

假设D处摩擦力达最大值，C处不滑动

取杆**AB.**

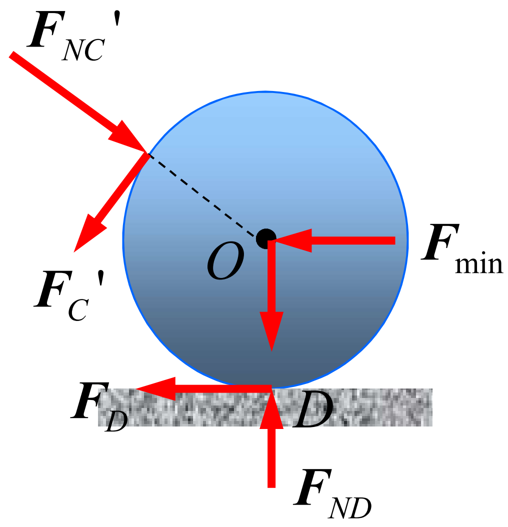


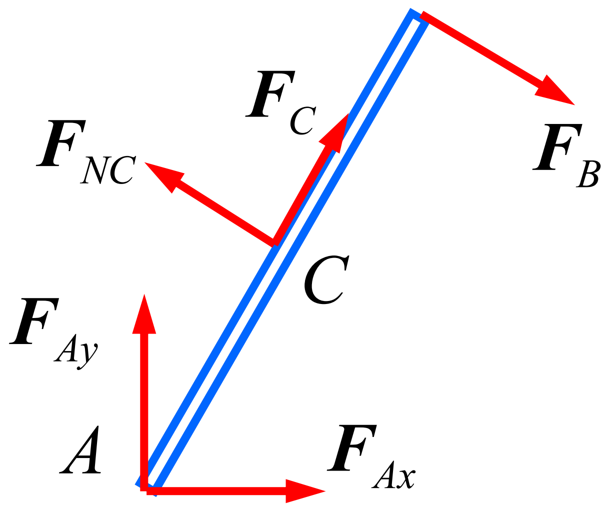
$$\Sigma M_A = 0 \qquad F_{NC} \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0$$

$\Rightarrow$ $F_{NC} = 100\mathrm{N}$ 不变

但 $F_C \neq F_{C\max} = f_C F_{NC} = 40N$

F_C必须由轮的平衡条件决定





§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

对轮 $\Sigma M_O = 0 \quad F'_C \cdot r - F_D \cdot r = 0 \Longrightarrow F'_C = F_D$

$\Sigma F_x = 0 \quad F'_{NC}\sin 60^\circ - F'_C\cos 60^\circ - F_{\min} - F_D = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_{ND} - P - F'_{NC}\cos 60^\circ - F'_C\sin 60^\circ = 0$

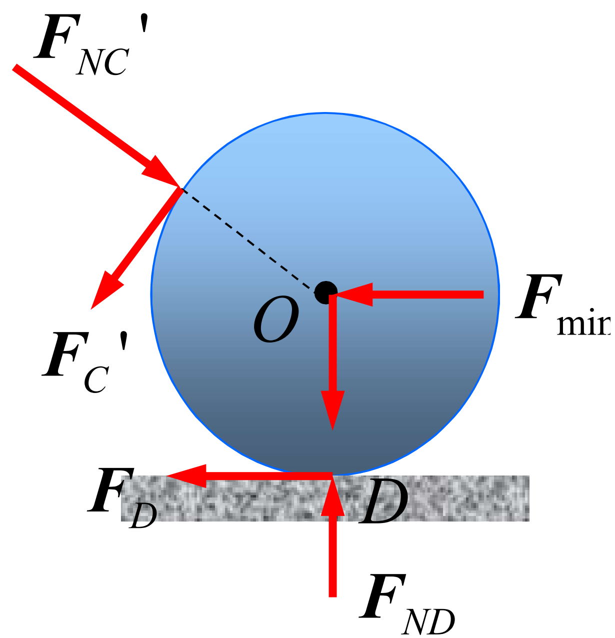
$F_D = f_D F_{ND}$ （D将要滑动） $F'_{NC} = 100N$ ，代入上式

$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}f_D\right)F_{ND} = P + 0.5F'_{NC}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow F_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}F'_{NC} - 1.5f_D F_{ND}$$

$$F_C = F_D = \frac{f_D\left(P+0.5F'_{NC}\right)}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}f_D}$$

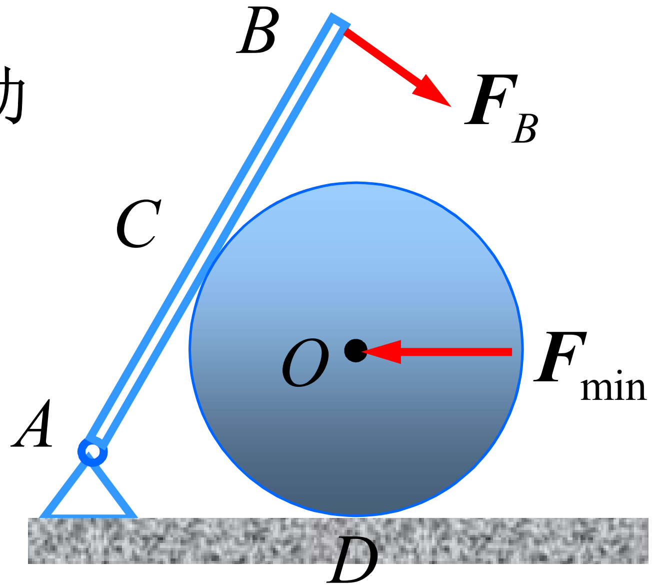
$$F_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}F'_{NC} - \frac{1.5f_D\left(P+0.5F'_{NC}\right)}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}f_D}$$



我们讨论了两个可能性：

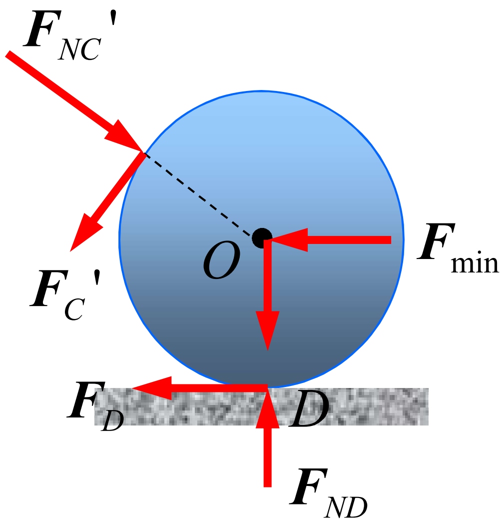
(1) C处滑动（最大静摩擦力），**D**处不滑动

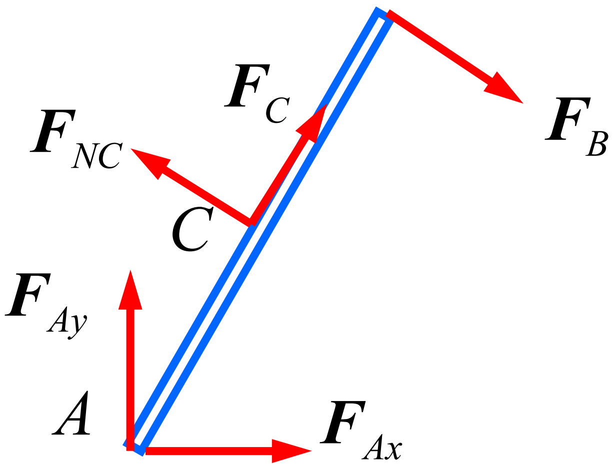
(2) C处不滑动，**D**处滑动（最大静摩擦力）



摩擦系数：轮与杆 $f_C=0.4$

轮与地面 $f_D=0.3$或者0.15





$$F_{NC}=F_{NC}'=100N$$

不随着摩擦系数变化

$$F_D=F_C'$$

摩擦力大小随着摩擦系数、滑动情况变化

(1) C处滑动（最大静摩擦力），D处不滑动

$$F_C = F_{C\max} = f_C F_{NC} = 40\text{N}$$

$$\Downarrow$$

$$F_D = F'_C = 40\text{N} \qquad F_{\min} = 26.6\text{N}$$

$$F_{ND} = 184.6\text{N}$$

$$\Downarrow$$

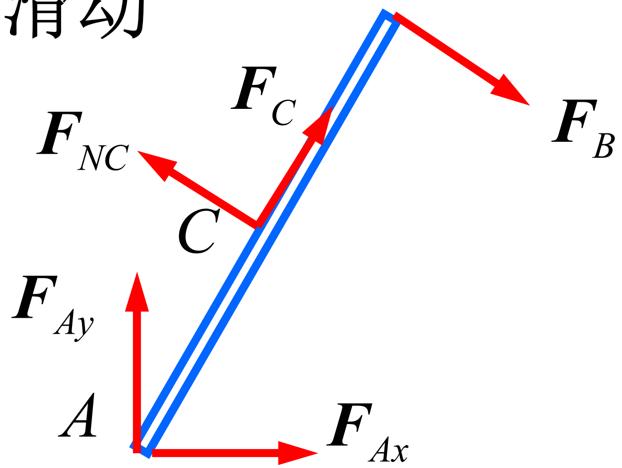
当$f_D = 0.3$时，$F_{D\max} = f_D F_{ND} = 55.39\text{N}$

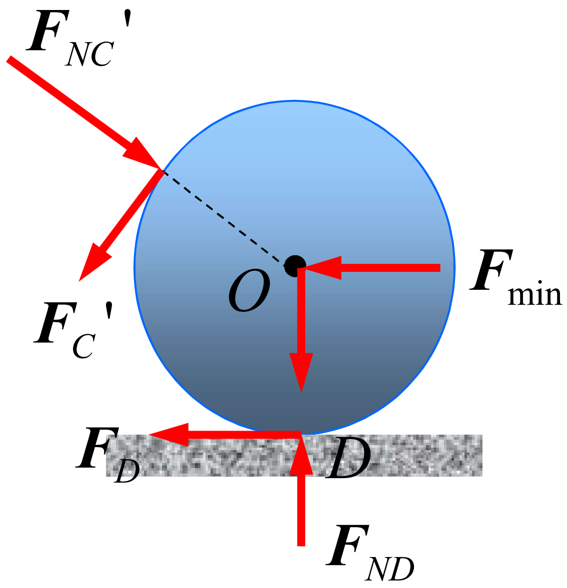
$F_D = 40\text{N} < F_{D\max}$，满足假设，**D**不滑动

当$f_D = 0.15$时，$F_{D\max} = f_D F_{ND} = 27.69\text{N}$

$F_D = 40\text{N} > F_{D\max}$，不满足假设，**D**滑动

$\Rightarrow$ 当$f_D = 0.3$时，$F_{\min} = 26.6\text{N}$





§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

(2)C处不滑动，D处滑动（最大静摩擦力）

$F_C = F_D = f_D F_{ND}$ （大小需要通过F_{ND}求得）

$$F_{ND} = \frac{P + 0.5F'_{NC}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_D} \qquad F_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} F'_{NC} - \frac{1.5 f_D \left(P + 0.5F'_{NC}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_D}$$

当$f_D = 0.3$时，$F_C = f_D F_{ND} = 60.80\text{N}$

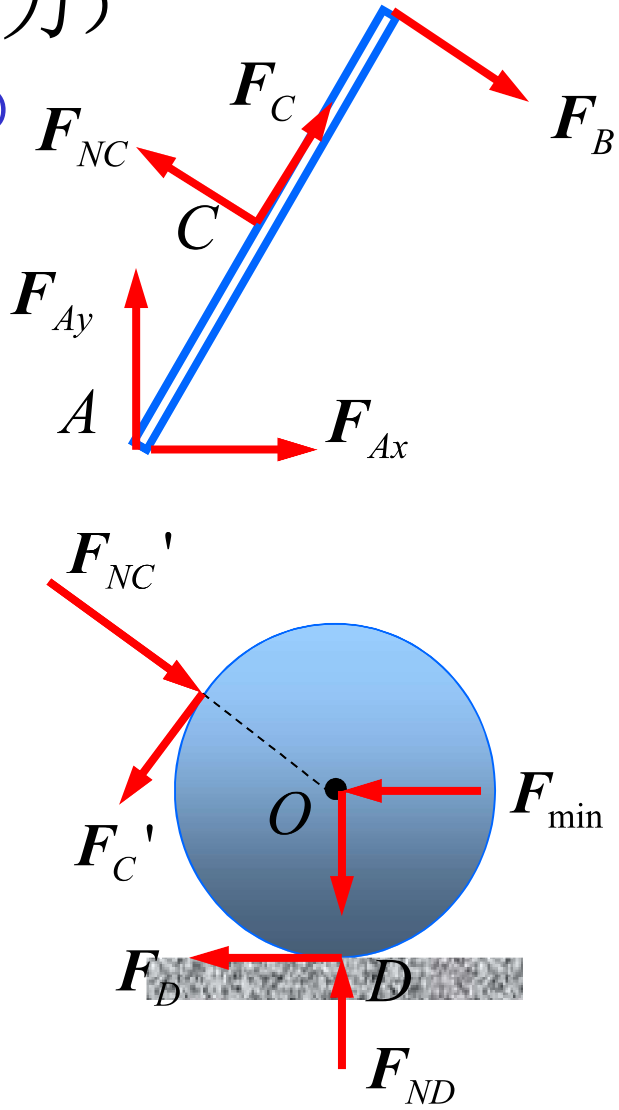
$F_C > F_{C\max} = 40\text{N}$，不满足假设，**C**滑动

当$f_D = 0.15$时，$F_C = f_D F_{ND} = 25.86\text{N}$

$F_C < F_{C\max} = 40\text{N}$，　满足假设，**C**不滑动

$F_{\min} = 47.81\text{N}$,

当$f_D = 0.15$时，$F_{\min} = 47.81\text{N}$



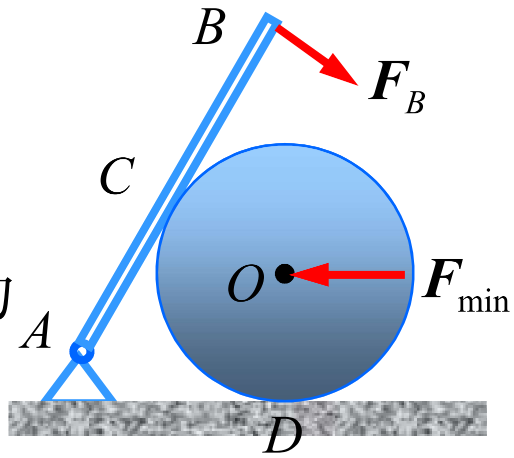
§4-4 滚动摩阻（擦）的概念

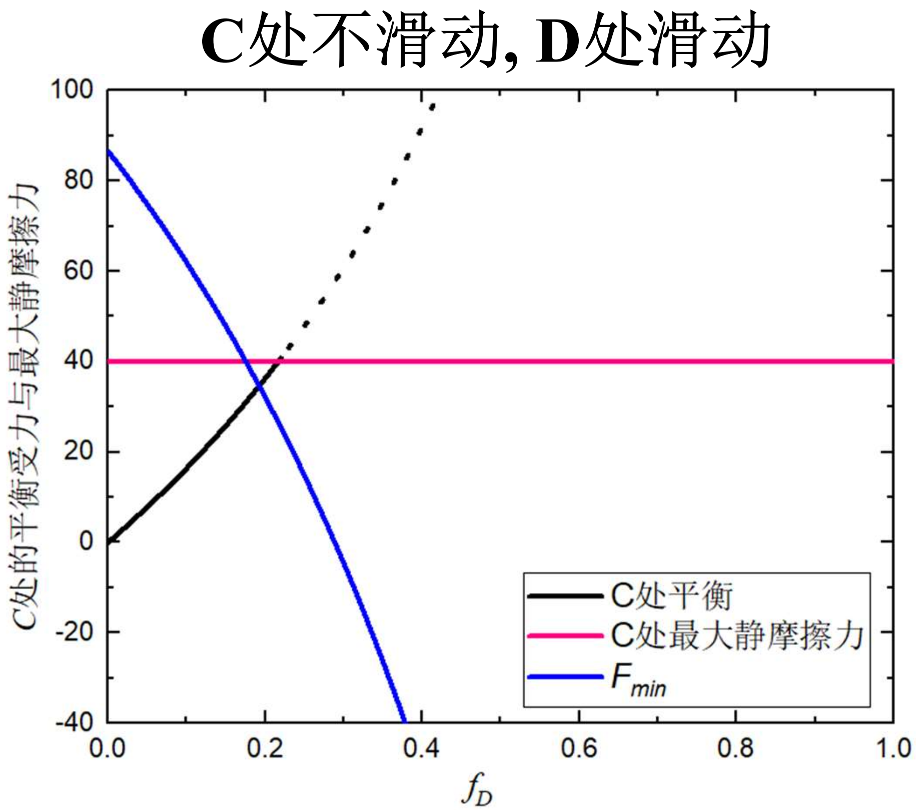
思考：给定f_C，增大f_D是否可以降低F_{min}?

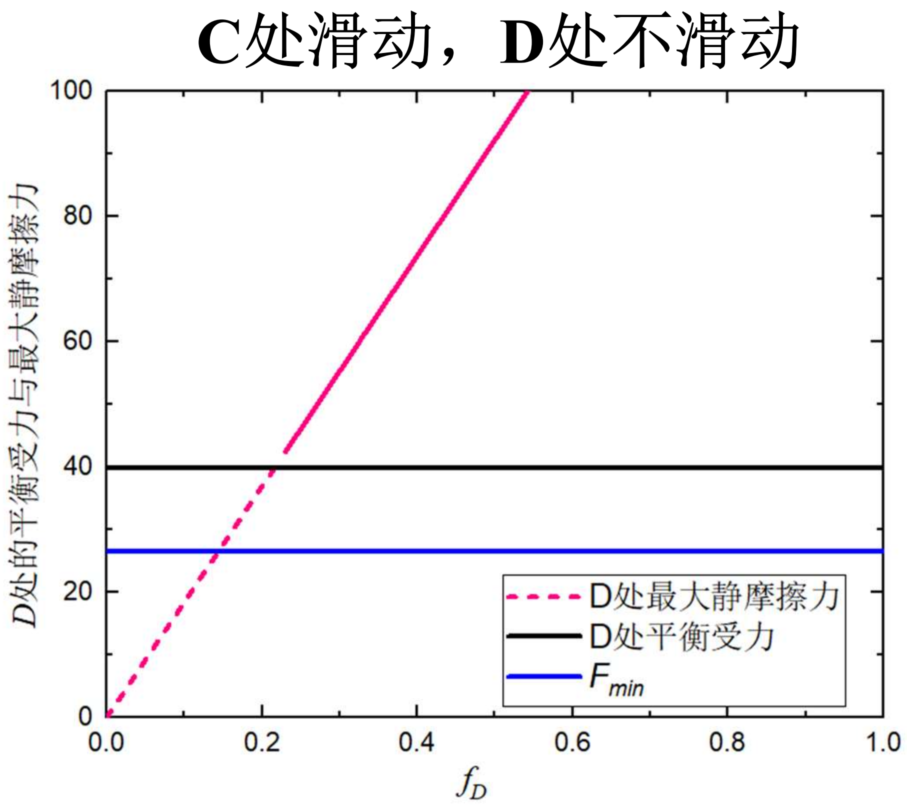
当f_D从0开始增加，先发生D处滑动（左图）

当f_D=0.22，C与D两处同时达到最大静摩擦力

当f_D>0.22，C处开始滑动







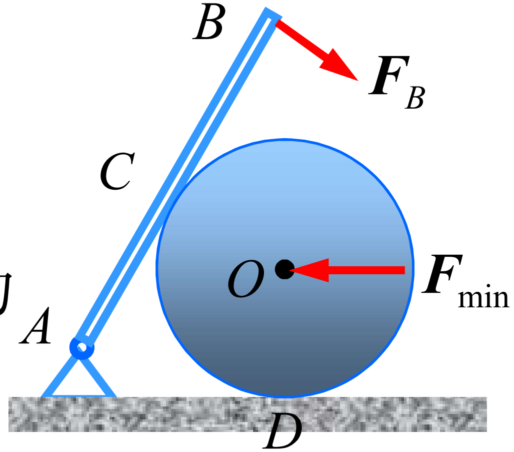
§4-4 滚动摩阻（擦）的概念

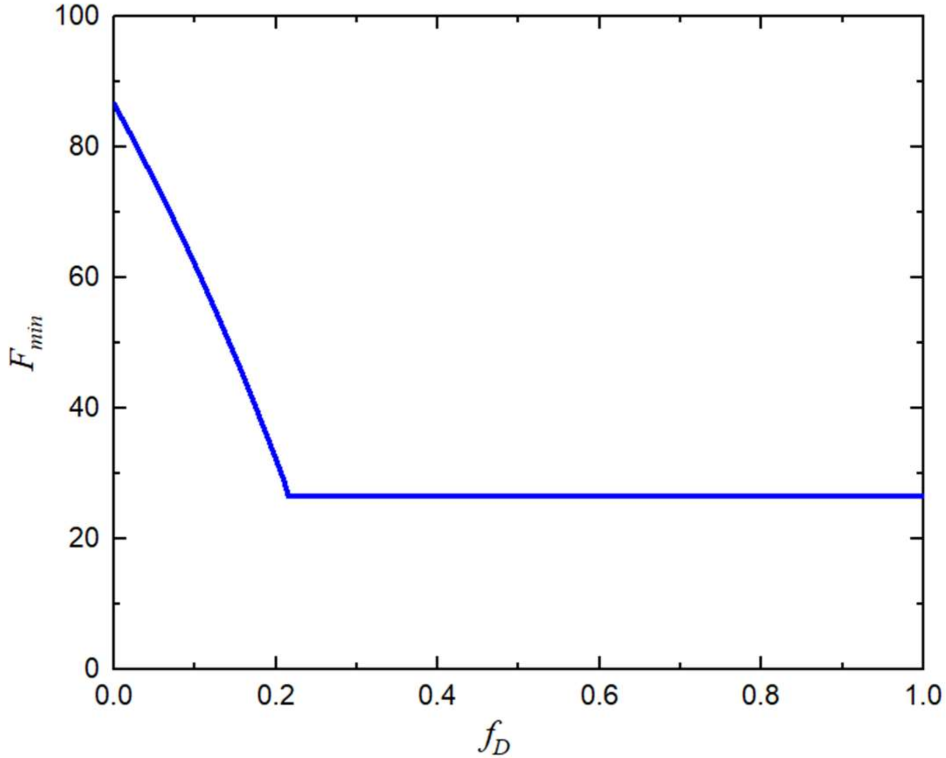
思考：给定f_C，增大f_D是否可以降低F_{min}?

当f_D从0开始增加，先发生D处滑动（左图）

当f_D=0.22，C与D两处同时达到最大静摩擦力

当f_D>0.22，C处开始滑动





在D处滑动（f_D<0.22），

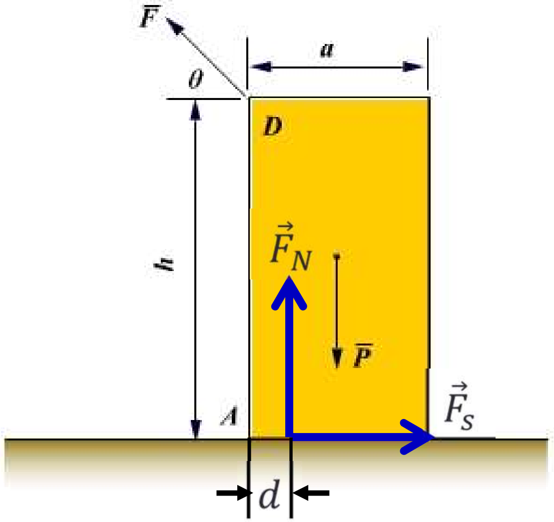
增大f_D可以降低F_{min}。

当C处开始滑动（f_D>0.22），

增大f_D可以不影响F_{min}。

考虑滑动摩擦时物体的平衡问题-解题思路小结

正向问题：已知主动力(F)，求解带摩擦条件是否平衡

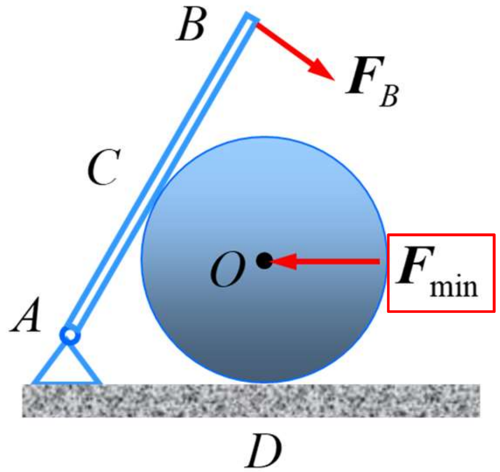


思路--静力学平衡问题分析：

相似点：判断平衡需要的约束力
（法向约束力+切向约束力（摩擦力））

不同点：法向约束力作用点（***d***）；
切向约束力与最大静摩擦力比较
（判断平衡）

反向问题：求带摩擦力时满足题目需要的主动力的范围



思路—考虑不平衡/平衡的条件：
不平衡：滑动（两个方向、多个位置）；翻到（***d***=0）；
平衡：卡住（保持自锁）

为什么要考虑将滑未滑的临界条件？
1. 这是系统打破平衡时候的条件；
2. 我们可以确定力作用点(比如C或D)
3. 我们可以确定摩擦力的条件（$F_{max}=f_sF_N$）

如果有多个摩擦力作用点，需要单独讨论其中一个将滑未滑时，其他点最大静摩擦力是否满足平衡。

作业

教材习题：4-3，4-7，4-15
（注：4-15中失去平衡有四种情况：上滑、下滑、前翻、后翻）