第五章 数组与广义表

机电工程与自动化学院 L栋301 任卫红 助理教授

renweihong@hit.edu.cn

http://faculty.hitsz.edu.cn/renweihong



数组和广义表

- 一维数组
- 多维数组
- 特殊矩阵的压缩存储
- 稀疏矩阵
- 广义表

5.1数组

- 一、数组
- 数组是相同类型的数据元素的集合
- 数组是一种定长的线性表
- 数组一般不作插入和删除操作
- 一旦建立了数组,则结构中的数据元素个数和数据元素之间的关系就不再发生变动
 - 0
 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9

 35
 27
 49
 18
 60
 54
 77
 83
 41
 02

一、数组

- 数组中的每个数据元素都对应于一组下标 (j₁, j₂, ..., j_n)
- 其中: 0≤j_i≤b_i-1

b_i称为第i维的长度(i=1, 2, ..., n)



判断: "数组的处理比其它复杂的结构要简单",对吗?

答:对的。因为——

- ① 数组中各元素具有统一的类型;
- ② 数组元素的下标一般具有固定的上界和下界,即数组一旦被定义,它的维数和维界就不再改变。
- ③数组的基本操作比较简单,除了结构的初始化和销 毁之外,只有存取元素和修改元素值的操作。

二、一维数组

- 一维数组是一种简单的定长线性表
- 一维数组中的每个数据元素是一个(数)值(原子)
- 如: int A[8]={8, 7, 5, 4, 6, 1, 3, 2} b=8, 有8个数据元素。每个元素都是一个数值

0							
8	7	5	4	6	1	3	2

三、二维数组

■ 二维数组是这样一个定长线性表,其每个数据元素也是一个定长线性表(一维数组)

$$\mathsf{A}_{mxn} = \left(\begin{array}{cccc} \mathsf{a}_{00} & \mathsf{a}_{01} & \mathsf{a}_{02} \dots \mathsf{a}_{0,n\text{-}1} \\ \mathsf{a}_{10} & \mathsf{a}_{11} & \mathsf{a}_{12} \dots \mathsf{a}_{1,n\text{-}1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathsf{a}_{m\text{-}1,0} & \mathsf{a}_{m\text{-}1,1} & \mathsf{a}_{m1,2} \dots \mathsf{a}_{m\text{-}1,n\text{-}1} \end{array} \right)$$

 $= Amxn = ((a_{00} a_{01}...a_{0,n-1}), (a_{10} a_{11}...a_{1,n-1}),...,(a_{m-1,0} ...a_{m-1,n-1}))$

三、多维数组

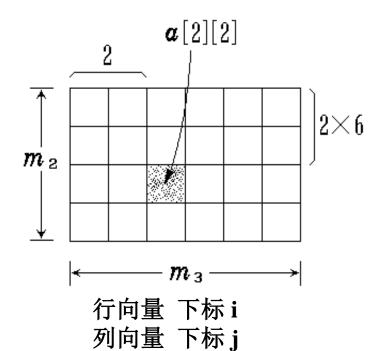
- 多维数组是这样一个定长线性表,其每个数据元素也是一个定长线性表(降一维)
- 如果其数据元素不是一维数组,则其数据元素的 每个数据元素也是一个定长线性表
- 一直到最后一个定长线性表是一维数组,其每个数据元素为一个(数)值

1

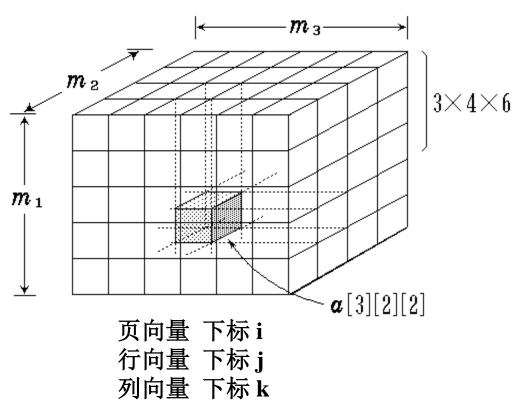
第一节 数组的定义

二维数组

$$m_1 = 5$$
 $m_2 = 4$ $m_3 = 6$



三维数组



5.2 数组的表示

一、数组的顺序表示

- 顺序存储:数组由相同类型的数据组成,且一般不作插入和删除操作,一般采用顺序存储结构表示数组
- 次序约定: 计算机中,存储单元是一维结构,而数组为多维结构,则用一组连续的存储单元存放数组的数据元素时,有一个次序约定问题

二、二维数组的顺序表示

 \blacksquare $A_{mxn} =$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \dots a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \dots a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & a_{m1,2} \dots a_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & a_{m1,2} \dots a_{m-1,n-1} \end{bmatrix}$$
有序

$$= A_{mxn} = ((a_{00} a_{01}...a_{0,n-1}), (a_{10} a_{11}...a_{1,n-1}),...,(a_{m-1,0} ...a_{m-1,n-1}))$$

$$A_{mxn} = ((a_{00} a_{10}...a_{m-1,0}), (a_{01} a_{11}...a_{m-1,1}),...,(a_{0,n-1} ...a_{m-1,n-1}))$$

二、二维数组的顺序表示

■ A_{mxn}以行序为主 序存储

$$A_{mxn} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0, n-1} & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1, n-1} & \dots & a_{m-1, 0} & \dots & a_{m-1, n-1} \end{bmatrix}$$

- $= LOC(a_{ij}) = LOC(a_{00}) + (i \times n + j) \times L$
- LOC(a₀₀)是二维数组的起始存储地址
- L为每个数据元素占用存储单元的长度(数目)

二、二维数组的顺序表示

■ A_{mxn}以列序为主
序存储
$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{m-1,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{m-1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m-1,1} \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} a_{0,n-1} \\ a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{m-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{m-1,0} & a_{01} & a_{11} & \dots & a_{m-1,1} & \dots & a_{0, n-1} & \dots & a_{m-1, n-1} \end{bmatrix}$$

- $= LOC(a_{ii}) = LOC(a_{00}) + (i + j x m) x L$
- LOC(a₀₀)是二维数组的起始存储地址
- L为每个数据元素占用存储单元的长度(数目)

M

例1: 一个二维数组A, 行下标的范围是1到6, 列下标的范围是0到7, 每个数组元素用相邻的6个字节存储, 存储器按字节编址。那么, 这个数组的体积是______个字节。

答: Volume=m*n*L=(6-1+1)*(7-0+1)*6=48*6=288



例2: 已知二维数组 $A_{m,m}$ 按行存储的元素地址公式是: Loc($a_{i,j}$)= Loc(a_{11})+[(i-1)*m+(j-1)]*K , 请问按列存储的公式相同吗?

答:尽管是方阵,但公式仍不同。应为:

$$Loc(a_{ij}) = Loc(a_{11}) + [(j-1)*m+(i-1)]*K$$



例3 : 〖考研题〗 : 设数组a[1···60, 1···70]的基地址为 2048, 每个元素占2个存储单元, 若以列序为主序顺序存储, 则元素a[32,58]的存储地址为 8950 。

答: 请注意审题!

根据列优先公式 Loc(a;)=Loc(a₁₁)+[(j-1)*m+(i-1)]*K

得: LOC(a_{32.58})=2048+[(58-1)*60+(32-1)]*2=8950

想一想:若数组是a[0···59, 0···69],结果是否仍为8950?

维界虽未变,但此时的a[32,58]不再是原来的a[32,58]

数

三、三维数组的顺序表示(按行)

- 各维元素个数为 m_1 , m_2 , m_3
- 下标为 i_1 , i_2 , i_3 的数组元素的

(按页/行/列存放)

 $3\times4\times6$

 $\alpha[3][2][2]$

三、多维数组的顺序表示

- 以行序为主序存储, 多(K) 维数组元素存储位置
- LOC($a_{j1, j2,..., jk}$) = LOC($a_{00 \ 0}$) + (($b_2 \times b_3 \times ... \times b_k \times j_1$)+($b_3 \times ... \times b_k \times j_2$)+...+ j_k) ×L

a_0	$a_{0} a_{0 01}$	 a _{0 0bk-1}	a _{0 10}	a _{0 11}	• • •	a _{0. 1bk-1}	• • •	a _{b1-10}	 a _{b1-1, bk-1}
						,		, ,	

三、多维数组的顺序表示

■ 以列序为主序存储, 多(K) 维数组元素存储位置

• LOC
$$(a_{j1, j2,..., jk}) = LOC (a_{00 0}) + ((b_1 \times b_2 \times ... \times b_{k-1} \times j_k) + (b_1 \times ... \times b_{k-2} \times j_{k-1}) + ... + j_1) \times Lp$$

a_0	0 0	a _{10 0}	• • •	a _{b1-1.00}	a _{01 0}	a _{11 0}	• • •	a _{b1-1, 1, 0}	 a _{0 b2-1, b1-1}	 a _{b1-1.,bk-1}
	•	100			0.0	•		51 1, 1, 0		

5.3 矩阵的压缩存储

一、矩阵的压缩存储

- 如果矩阵中有许多值相同的元素或者零元素(特殊矩阵、稀疏矩阵),为了节省存储空间,可以对这类矩阵进行压缩存储
- 压缩存储: 为多个值相同的元素只分配一个存储 空间; 对零元素不分配空间

二、特殊矩阵

- 特殊矩阵: 矩阵中, 值相同的元素或者零元素的 分布有一定规律
- 对称矩阵:矩阵中,对角线两边对应位置上元素的值相同(a_{i,i}=a_{ji})

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

二、特殊矩阵

■ 三角矩阵: 矩阵中, 对角线上(下)边元素值为常数(或者0), 称下(上)三角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

$$a_{00}$$
 a_{01} a_{02} \cdots a_{0n-1}
 a_{10} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n-1}
 a_{20} a_{21} a_{22} \cdots a_{2n-1}
 \cdots \cdots \cdots
 a_{n-10} a_{n-11} a_{n-12} \cdots a_{n-1n-1}

下三角矩阵

上三角矩阵

- 二、特殊矩阵(对称矩阵的压缩存储)
 - 设有一个 n×n 的对称矩阵 A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \Lambda & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n-1} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \Lambda & \ddot{a}_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

在矩阵中, $a_{ij} = a_{ji}$

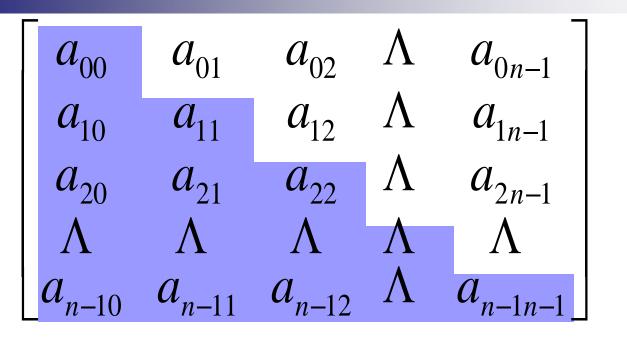
为节约存储,只存对角线及对角线以上的元素,或者只存对角线或对角线以下的元素。前者称为上三角矩阵,后者称为下三角矩阵。

a_{00}	a_{01}	a_{02}	Λ	a_{0n-1}
a_{10}	a_{11}	a_{12}	Λ	a_{1n-1}
a_{20}	a_{21}	a_{22}	Λ	a_{2n-1}
Λ	Λ	Λ	Λ	Λ
a_{n-10}	a_{n-11}	a_{n-12}	Λ	a_{n-1n-1}

下三角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \Lambda & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n-1} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \Lambda & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$
 连

- 把它们按行存放于一个一维数组 B 中,称之为 对称矩阵 A 的压缩存储方式。
- 数组 B 共有 n + (n 1) + ··· + 1 = n*(n+1)/2 个元素。



角

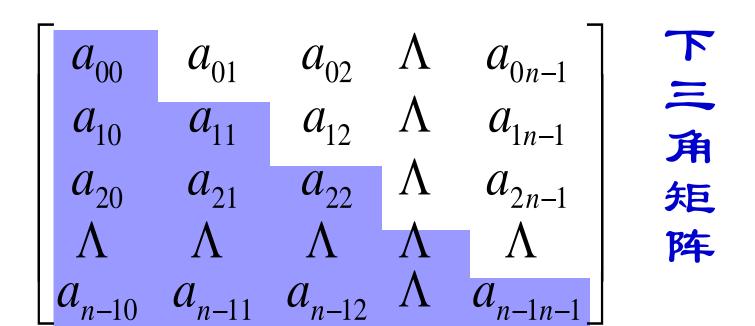
矩

阵

B
$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{20} & a_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{30} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

若 $i \ge j$, 数组元素A[i][j]在数组B中的存放位置为 1 + 2 + ··· + i + j = (i + 1)*i / 2 + j

前i行元素总数 第i行第j个元素前元素个数



若 i < j, 数组元素 A[I][J] 在矩阵的上三角部分, 在数组 B 中没有存放,可以找它的对称元素 A[J][I]

$$:= j*(j+1)/2 + i$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{E}}$$

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

若i ≤ j, 数组元素A[i][j]在数组B中的存放位置为

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-i+1) + j-i$$

前i行元素总数 第i行第j个元素前元素个数

若 $i \leq j$,数组元素A[i][j]在数组B中的存放位置为

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-i+1) + j-i =$$
 $= (2*n-i+1)*i/2 + j-i =$
 $= (2*n-i-1)*i/2 + j$

若i > j,数组元素A[i][j]在矩阵的下三角部分,在数组 B 中没有存放。因此,找它的对称元素 A[j][i]。

A[j][i]在数组 B 的第 (2*n-j-1)*j/2+i 的位置中找到。

三、稀疏矩阵

- 稀疏矩阵:矩阵中有许多值相同的元素或者零元素,而且分布没有任何规律
- 假设在m×n的矩阵中,有t个非零元素,令:

$$\delta = t /(m \times n)$$

■ 如果稀疏因子 $\delta \leq 0.05$,则称该矩阵为稀疏矩阵

三、稀疏矩阵

稀疏矩阵:矩阵中有许多值相同的元素或者零元素,而且分布没有任何规律

$$\mathbf{A}_{6\times7} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{17} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{39} & \mathbf{0} \\ \mathbf{91} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{28} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

三、稀疏矩阵(三元组)

- 用三元组存储稀疏矩阵中的非零元素
- 三元组(i, j, a_{ij})表示矩阵中i行、j列位置的值为a_{ij}

0	0	0	22	0	0	15
0	11	0	0	0	17	0
0	0	0	-6	0	0	0
0	0	0	0	0	39	0
91	0	0	0	0	0	0
0	0	28	22 0 -6 0 0	0	0	0

	行	列	值
	(row)	(col)	(value)
[0]	0	3	22
[1]	0	6	15
[2]	1	1	11
[3]	1	5	17
[4]	2	3	-6
[5]	3	5	39
[6]	4	0	91
[7]	5	2	28

三、稀疏矩阵(转置)

0	0	0	0	91	0
0	11	0	0	0	0
0	0	0	0	0	28
22	0	-6	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	17	0	39	0	0
15	0	0	0	0	0

	行	列	值
	(row)	(col)	(value)
[0]	0	4	91
[1]	1	1	11
[2]	2	5	28
[3]	3	0	22
[4]	3	2	-6
[5]	5	1	17
[6]	5	3	39
[7]	6	0	16

第三节 矩阵的压缩存储

三、稀疏矩阵(转置)

原矩阵三元组表

转置矩阵三元组表

	行	列	值		行	列	值	
	(row)	(col)	(value)		(row)	(col)	(value)	
[0]	0	3	22	[0]	0	4	91	
[1]	0	6	15	[1]	1	1	11	
[2]	1	1	11	[2]	2	5	28	
[3]	1	5	17	[3]	3	0	22	
[4]	2	3	-6	[4]	3	2	-6	
[5]	3	5	39	[5]	5	1	17	
[6]	4	0	91	[6]	5	3	39	
[7]	5	2	28	[7]	6	0	16	

第三节 矩阵的压缩存储

三、稀疏矩阵(转置)

	行	列	值		行	列	 值
	(row)	(col)	(value)		(row)	(col)	(value)
[0]	0	3	22	[0]	0	4	91
[1]	0	6	15	[1]	1	1	11
[2]	1	1	11	[2]	2	5	28
[3]	1	5	17	[3]	3	0	22
[4]	2	3	-6	[4]	3	2	-6
[5]	3	5	39	[5]	5	1	17
[6]	4	0	91	[6]	5	3	39
[7]	5	2	28	[7]	6	0	16

- 设矩阵列数为 Cols, 对矩阵三元组表扫描Cols 次。
- · 第 k 次扫描找寻所有列号为 k 的项,将其行号变列号、 列号变行号,顺次存于转置矩阵三元组表。

×

第四节 广义表的定义

一、广义表的定义

- 广义表: 由n(≥0)个表元素组成的有限序列:

LS =
$$(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$$

- LS是广义表的名称
- a_i是广义表的元素,既可以是表(称为子表),也可以是数据元素(称为原子)
- n为广义表的长度(n=0的广义表为空表)

第四节 广义表的定义

二、广义表举例

```
■ A=();
              //表A是一个空表
              //表B有一个原子
■ B=(e):
■ C=(a,(b,c,d)); //两个元素,分别为原子a
           //和子表(b. c. d)
■ D= (A. B. C):
              //有三个元素均为列表
■ E=(a, E):
              //递归的列表
 其中,"表"以及"列表",均指广义表
```

.

第四节 广义表的定义

三、广义表的表头

- 表头(head): 广义表的第一个元素
- 表头既可以是原子,也可以是列表(广义表)
- GetHead (B) = e
- GetHead (D) = A
- GetHead((B, C)) = B

```
A=();
B=(e);
C=(a, (b, c, d));
D=(A, B, C);
E=(a, E);
```

10

第四节 广义表的定义

四、广义表的表尾

- 表尾(tail): 广义表中, 除表头外的部分
- 表尾一定是列表
- GetTail(B) = ()
- GetTail(D) = (B, C)
- GetTail((B, C)) = (C)

```
A=();
B=(e);
C=(a, (b, c, d));
D=(A, B, C);
E=(a, E);
```

M

例: 求下列广义表操作的结果

- 1. GetTail [(b, k, p, h)] = (k, p, h);
- 2. GetHead [((a,b), (c,d))] = (a,b)
- 3. GetTail [((a,b), (c,d))] = ((c,d))
- 4. GetTail [GetHead[((a,b),(c,d))]]= $\frac{(b)}{(b)}$;
- 6. GetHead $[(())] = \underline{()}$.
- 7. GetTail $[(())] = \underline{()}$.

第五节 广义表的存储

一、广义表的存储结构

广义表一般采用链式存储结构

■ 表结点

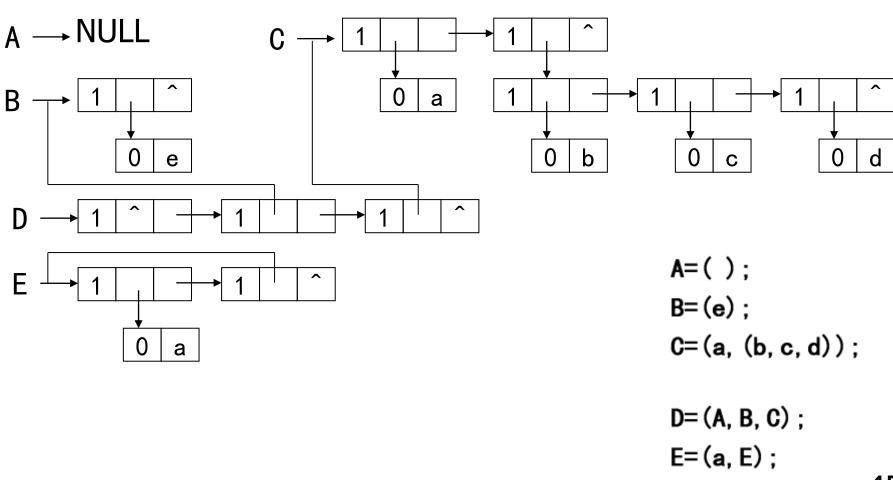
■ 原子结点

■ hp表示表头,tp表示表尾



第五节 广义表的存储

一、广义表的存储结构



м

作业

- 1. 假设一个10×10的上三角矩阵A按照列优先顺序压缩存储在一维数组 B中,则B数组的大小应为
- A. 50
 B. 55
 C. 100
 D. 101



2. A是7×4的二维数组,按行优先方式顺序存储,元索A[0][0]的存储地址为1000,若每个元素占2个字节,则A[3][3]的存储地址为

A. 1026 B. 1028 C. 1030 D. 1032

- 3. 对稀疏矩阵采用三元组表示法的目的是
- A. 便于输入和输出
- B. 便于进行矩阵运算
- C. 降低时间复杂度
- D. 节省存储空间

4. 已知一个5×5的稀疏矩阵所示, 试写出该矩阵的三元组表示。

100

作业

5. 一个数组的第一个元素的存储地址是 100, 每个元素占2存储单元,则第5个元素的存储地址是_____m

A. 105 B.108 C. 115 D. 118

6. 假设一个8阶的上三角矩阵A按照列优先顺序压缩存储在一维数组8中,则B数组的大小应为____。

7. 二维数组A[8][9]按行优先顺序存储,若数组元素A[2][3]的存储地址为I087, A[4][7]的存储地址为II53,则每个数组元 素占用的存储单元的个数是



8. 二维数组A按行序优先顺序存储,每个数据元素占1个存储单元。若数据元素 A[1][1]的存储地址是420, A[3][3]的存储地址是446,则A[5][5]的存储地址是

A. 470

B. 471

C. 472

D. 473

9. 稀疏矩阵可以采用_____方法进行压缩存储。

10. 把特殊矩阵A[10][10]的下三角矩阵压缩存储到一个一维数组M中,刚A中元素a[4][3]在M中所对应的下标位置是

A. 8

B. 12

C. 13

D. 55

11. 设有二维数组A[8][10],按行序优先存储,且每个元素占用2个存储单元,若第一个元素的存储起始位置为b,则存储位置为b+20处的元素为。